

Nichtlineare Regelungen

Jürgen Adamy

Nichtlineare Regelungen

Prof. Dr.-Ing. Jürgen Adamy
TU Darmstadt
Institut für Automatisierungstechnik
FG Regelungstheorie und Robotik
Landgraf-Georg-Straße 4
64283 Darmstadt
jadamy@rtr.tu-darmstadt.de

ISBN 978-3-642-00793-4 e-ISBN 978-3-642-00794-1
DOI 10.1007/978-3-642-00794-1
Springer Dordrecht Heidelberg London New York

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2009

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Herstellung: le-tex publishing services GmbH, Leipzig
Einbandentwurf: WMXDesign GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.de)

Vorwort

Die Regelungstheorie und die Regelungstechnik sind Teilgebiete der Theorie dynamischer Systeme und der Automatisierungstechnik. Sowohl in der Mathematik als auch in den Ingenieurwissenschaften bilden sie einen wichtigen Zweig in Forschung und Lehre. Aber auch in den Naturwissenschaften, insbesondere in der Biologie, Ökologie und Medizin sowie in der Volkswirtschaftslehre, sind ihre Inhalte von Bedeutung. So beschäftigt sich die Mathematik vor allem mit der Theorie von Regelungssystemen, die dann in den Ingenieurwissenschaften die Basis für den Entwurf, d. h. die Synthese von Flugregelungen, Kraftwerksregelungen, Motorregelungen usw. bildet. In den Naturwissenschaften und der Volkswirtschaftslehre stehen dagegen die Beschreibung und Analyse von rückgekoppelten Prozessen, z. B. Populationsdynamiken in der Ökologie und Marktmodelle in der Ökonomie, im Vordergrund.

Schreibt man ein Buch über Regelungssysteme, so muss man es an einer dieser Wissenschaftssparten ausrichten. Ein Mathematiker wird eine systemtheoretische Strukturierung wählen, ein Ingenieur eine anwendungsorientierte. Das vorliegende Buch ist aus Sicht des Ingenieurs geschrieben und betont daher den Anwendungsaspekt der Regelungstheorie, also die Regelungstechnik. Dieser Ausrichtung folgend wurden die Beschreibung von Regelungsverfahren und praktische Aspekte stärker gewichtet als die systemtheoretischen Grundlagen. Kurz gefasst: Im Vordergrund steht der Reglerentwurf. Dementsprechend ist das Buch auch strukturiert. Neben den systemtheoretischen Grundlagen wie Stabilität, Lösung nichtlinearer Differenzialgleichungen usw., werden in drei Kapiteln nichtlineare Regelungsverfahren für lineare und nichtlineare Regelstrecken behandelt. Der Fokus liegt hier bei den zeitkontinuierlichen Regelungssystemen. In relevanten Fällen werden auch zeitdiskrete Systeme betrachtet. Da nichtlineare Regler meistens alle Zustandsgrößen benötigen, diese aber oft nicht messbar sind, bildet ein Kapitel über nichtlineare Beobachter den Schluss des Buches.

Das Buch wendet sich an die fortgeschrittenen Regelungstechnikerinnen und Regelungstechniker. Die Kenntnis der linearen Regelungstechnik, wie sie z. B. in den Lehrbüchern von J. Lunze [123, 124], O. Föllinger [53] sowie

M. Horn und N. Dourdoumas [75] vermittelt wird, ist Vorbedingung für das Verständnis. Das Buch ist, obiges Wissen vorausgesetzt, für ein möglichst schnelles und einfaches Verstehen ausgelegt. Dabei bin ich den Ideen von G. Pólya [147, 148] gefolgt und vom klassischen Theorem-Beweis-Schema abgewichen. Vielmehr wird, wenn für das Verständnis erforderlich, die Herleitung eines Themas in ausführlichem Stil aus der Problemstellung entwickelt. Um häufiges Nachschlagen in vorherigen Kapiteln zu vermeiden (was meist mühsam ist), habe ich den einzelnen Passagen Wiederholungen zugestanden. Dies und die bewusste Verwendung nur der notwendigen mathematischen Symbolik erhöht die Lesbarkeit. So kommt man mit der Ingenieurmathematik der ersten drei bzw. vier Semester eines Hochschulstudiums durch das Buch. All diese didaktischen Maßnahmen folgen den kommunikationspsychologischen Anforderungen von F. Schulz von Thun [162]: Prägnanz, Ordnung, Einfachheit und Motivation. Letzterer dienen auch die vierfarbig dargestellten Praxisbeispiele. Sie sollen den Bezug zur realen Anwendung illustrieren. Die zugehörigen Bilder sind dabei bewusst nicht fotorealistisch ausgeführt, obwohl dies möglich gewesen wäre. So ist eine Abstraktion von der realen Anwendung, wie sie jedes Modell aufweist, sichtbar.

Das Buch hätte nicht ohne die Unterstützung vieler helfender Personen entstehen können. Ihnen gilt mein Dank. So erstellten Teile des Latex-Quellcodes T. Schaal, M. Heil, J. Díaz und A. Popescu. A. Popescu erstellte auch alle zweidimensionalen Grafiken. K. Karova danke ich für die Hilfe bei der Erstellung der Matlab-Bilder. Sie sorgte auch durch unermüdliche Arbeit für die Konsistenz des Layouts. W. Hayat und R. Kempf erstellten die Simulationen der prädiktiven Regelungen und R. Kempf simulierte die Fuzzy-Abstandsregelung. D. Yankulova fertigte die Simulationen der Kranregelungen an. Außerdem lasen und prüften S. Muntermann, R. Kempf und V. Wilfert sowie meine Doktorandinnen und Doktoranden D. Yankulova, K. Karova, T. Gußner, A. Schwung, K. Listmann, H. Lens, D. Lens, D. Weiler, K. Keferpütz, B. Jasiewicz, A. Ortseifen sowie die Studentinnen und Studenten A. Popescu, A. Wahrburg, H. Buschmann und K. Kreuter das Buch bezüglich Inhalt und Verständlichkeit. Ihre offene, ehrliche Kritik und die harmonische und stimulierende Arbeitsatmosphäre trugen wesentlich zum Gelingen dieses Buches bei. Schließlich gilt mein besonderer Dank der Industriedesignerin V. Ansel, die alle farbigen dreidimensionalen Bilder anfertigte. Es war u. a. auch die Ästhetik dieser Bilder, die meine Motivation bei der Erstellung des Buches förderte.

Fragen oder Verbesserungsvorschläge können Sie an meine E-Mail-Adresse *jadamy@rtr.tu-darmstadt.de* senden.

Jürgen Adamy, Technische Universität Darmstadt, 2009

Inhaltsverzeichnis

Buchversion

1	Grundlagen nichtlinearer Systeme	1
1.1	Systembeschreibung und Systemverhalten	1
1.1.1	Lineare und nichtlineare Systeme	1
1.1.2	Systembeschreibung und Regelkreiskategorien	2
1.1.3	Ruhelagen nichtlinearer Systeme	4
1.1.4	Beispiel Satellit	6
1.1.5	Ruhelagen linearer Systeme	8
1.1.6	Stabilität von Ruhelagen	9
1.1.7	Grenzzyklen	15
1.1.8	Gleitzustände	17
1.1.9	Chaos	19
1.1.10	Nichtlineare Zustandstransformationen	21
1.1.11	Zeitdiskrete Systeme	25
1.2	Lösung nichtlinearer Differenzialgleichungen	27
1.2.1	Grundlegendes und das Verfahren von Euler-Cauchy	27
1.2.2	Genauigkeit der numerischen Lösung	29
1.2.3	Das verbesserte Euler-Cauchy-Verfahren	30
1.2.4	Die Verfahren von Heun und Simpson	31
1.2.5	Die Runge-Kutta-Verfahren	33
1.2.6	Adaption der Schrittweite	34
1.2.7	Mehrschrittverfahren von Adams-Bashforth	36
1.2.8	Prädiktor-Korrektor-Verfahren von Adams-Moulton	37
1.2.9	Stabilität von Integrationsverfahren	38
1.2.10	Steife Systeme und ihre Lösung	41
2	Grenzzyklen und Stabilitätskriterien	45
2.1	Verfahren der harmonischen Balance	45
2.1.1	Idee des Verfahrens	45
2.1.2	Illustrationsbeispiel	49

2.1.3	Kennlinien und ihre Beschreibungsfunktionen	51
2.1.4	Stabilitätsanalyse von Grenzzyklen	57
2.1.5	Beispiel Servolenksystem	60
2.2	Absolute Stabilität	64
2.2.1	Der Begriff der absoluten Stabilität	64
2.2.2	Das Popov-Kriterium und seine Anwendung	65
2.2.3	Aisermans Vermutung	71
2.2.4	Beispiel Schiffsregelung	72
2.2.5	Das Kreiskriterium	76
2.2.6	Das Zypkin-Kriterium für zeitdiskrete Systeme	78
2.3	Hyperstabilität	81
2.3.1	Der Begriff der Hyperstabilität	81
2.3.2	Hyperstabilität nichtlinearer SISO-Regelkreise	86
2.3.3	Hyperstabilität nichtlinearer MIMO-Systeme	89
2.3.4	Illustrationsbeispiele	92
2.4	Die Stabilitätstheorie von Ljapunov	95
2.4.1	Die Idee und die direkte Methode	95
2.4.2	Illustrationsbeispiel	100
2.4.3	Quadratische Ljapunov-Funktionen	101
2.4.4	Die direkte Methode für zeitdiskrete Systeme	103
2.4.5	Die indirekte Methode	104
2.4.6	Einzugsgebiete	105
2.4.7	Beispiel Mutualismus	108
2.4.8	Instabilitätskriterium	112
3	Regelungen für lineare Regelstrecken	115
3.1	Regler mit Antiwindup	115
3.1.1	Der Windup-Effekt	115
3.1.2	PID-Regler mit Antiwindup	117
3.1.3	Beispiel Gleichstrommotor	118
3.1.4	Antiwindup für allgemeine Reglerstrukturen	120
3.1.5	Dimensionierung des allgemeinen Antiwindup-Reglers ..	126
3.1.6	Stabilität	128
3.2	Zeitoptimale Regelung und Steuerung	128
3.2.1	Grundlagen und der Satz von Feldbaum	128
3.2.2	Berechnung zeitoptimaler Steuerfolgen	130
3.2.3	Beispiel $1/s^2$	132
3.2.4	Zeitoptimale Regler für Systeme niedriger Ordnung ...	136
3.2.5	Beispiel U-Boot	139
3.2.6	Zeitoptimale Vorsteuerung	142
3.3	Strukturvariable Regelungen ohne Gleitzustand	143
3.3.1	Grundlagen strukturvariabler Regelungen	143
3.3.2	Regler mit abschnittsweise linearer Struktur	147
3.3.3	Beispiel Containerkran	151
3.4	Sättigungsregler	155

3.4.1	Funktionsweise und Stabilität	155
3.4.2	Entwurf in mehreren Schritten	160
3.4.3	Beispiel Helikopter	161
4	Regelungen für nichtlineare Regelstrecken	165
4.1	Gain-scheduling-Regler	165
4.1.1	Grundlagen	165
4.1.2	Illustrationsbeispiel	171
4.1.3	Beispiel Solarkraftwerk mit Parabolrinnenkollektor	173
4.2	Reglerentwurf mittels exakter Linearisierung	179
4.2.1	Grundidee und nichtlineare Regelungsnormalform	179
4.2.2	Nichtlinearer Regler und linearer Regelkreis	182
4.2.3	Beispiel Magnetlager	184
4.2.4	Regelstrecken mit interner Dynamik	188
4.2.5	Entwurfungsverfahren	194
4.2.6	Beispiel Mondlandefähre	195
4.3	Control-Ljapunov-Funktionen	200
4.3.1	Grundlagen	200
4.3.2	Control-Ljapunov-Funktion für lineare Systeme	202
4.3.3	Regler für eingangslinare Systeme	203
4.3.4	Illustrationsbeispiel	205
4.3.5	Beispiel Kraftwerk mit Netzeinspeisung	206
4.4	Das Backstepping-Verfahren	212
4.4.1	Idee des Verfahrens	212
4.4.2	Rekursives Schema für den Reglerentwurf	217
4.4.3	Illustrationsbeispiele	219
4.4.4	Beispiel Fluidsystem mit chaotischem Verhalten	222
5	Regelungen für lineare und nichtlineare Regelstrecken	227
5.1	Modellbasierte prädiktive Regelung	227
5.1.1	Grundlagen und Funktionsweise	227
5.1.2	Lineare modellbasierte prädiktive Regelung	230
5.1.3	LMPR mit Beschränkungen	234
5.1.4	Beispiel Entwässerungssystem	237
5.1.5	Nichtlineare modellbasierte prädiktive Regelung	240
5.1.6	Beispiel Eindampfanlage	246
5.2	Strukturvariable Regelungen mit Gleitzustand	249
5.2.1	Funktionsweise und Eigenschaften	249
5.2.2	Entwurf für lineare Regelstrecken	252
5.2.3	Dynamik im Gleitzustand	254
5.2.4	Nachweis der Robustheit	255
5.2.5	Beispiel DC-DC-Wandler	256
5.2.6	Entwurf für nichtlineare Regelstrecken	261
5.2.7	Beispiel optischer Schalter	262
5.3	Fuzzy-Control	266

5.3.1	Einführung	266
5.3.2	Fuzzifizierung	267
5.3.3	Inferenz	270
5.3.4	Defuzzifizierung	276
5.3.5	Fuzzy-Systeme und Fuzzy-Regler	277
5.3.6	Beispiel Abstandsregelung für Automobile	280
6	Beobachter für nichtlineare Systeme	287
6.1	Beobachtbarkeit nichtlinearer Systeme	287
6.1.1	Definition der Beobachtbarkeit	287
6.1.2	Beobachtbarkeit autonomer Systeme	289
6.1.3	Beispiel Synchrongenerator	292
6.1.4	Beobachtbarkeit allgemeiner nichtlinearer Systeme	294
6.1.5	Nichtlineare Beobachtbarkeitsnormalform	296
6.1.6	Beobachtbarkeit eingangslinearer Systeme	297
6.2	Luenberger-Beobachter für nichtlineare Regelkreise	299
6.3	Beobachterentwurf mittels Linearisierung	301
6.3.1	Funktionsweise und Entwurf	301
6.3.2	Regelkreis mit Beobachter	305
6.3.3	Beispiel Bioreaktor	306
6.4	Das erweiterte Kalman-Filter	310
6.4.1	Kalman-Filter für lineare Systeme	310
6.4.2	Das EKF für nichtlineare Systeme	312
6.4.3	Beispiel Flugzeugtriebwerk	314
6.5	High-gain-Beobachter	318
6.5.1	Einführung und Funktionsweise	318
6.5.2	High-gain-Beobachter in allgemeiner Form	322
6.5.3	Beispiel chemischer Reaktor	325
6.5.4	Der Fall eingangslinearer Systeme	328
7	Wörterbuch	333
7.1	Deutsch → Englisch	333
7.2	Englisch → Deutsch	346
	Anhang	360
A	Daten zum Beispiel Containerkran	361
B	Mathematische Zeichen und Funktionen	363
	Literaturverzeichnis	367
	Sachverzeichnis	377

Grundlagen nichtlinearer Systeme

1.1 Systembeschreibung und Systemverhalten

1.1.1 Lineare und nichtlineare Systeme

Mittels linearer Modelle und linearer Systembeschreibungen kann nur ein Teil der Prozesse und Systeme, wie sie in der Natur und der industriellen Praxis vorkommen, beschrieben werden. Der andere Teil ist nichtlinear und muss durch nichtlineare Modelle nachgebildet werden. Die lineare Systemtheorie ist im Allgemeinen auf nichtlineare Systeme nicht anwendbar. Es sei denn, ein nichtlineares System kann hinreichend genau durch ein lineares Modell approximiert werden.

Für nichtlineare Systeme und Regelkreise benötigt man daher in den meisten Fällen eigene Analyse- und Entwurfsverfahren. Da nichtlineare Systeme allerdings mathematisch wesentlich komplexer zu handhaben sind als lineare, wurden bisher nur für bestimmte Klassen nichtlinearer Systeme und bestimmte Anwendungsfälle solche Verfahren entwickelt. Im Fall linearer Systeme ist das ganz anders. Für sie existiert eine nahezu vollständig ausgearbeitete Systemtheorie, die nur noch wenige unerforschte Gebiete aufweist [53, 55, 123, 124]. Bild 1.1 illustriert diesen unterschiedlichen Wissensstand.

Da die nichtlineare Systemtheorie eine Sammlung nicht zusammenhängender Verfahren und Theorien darstellt, ist es eigentlich nicht richtig, von einer nichtlinearen Systemtheorie zu sprechen. Vielmehr existiert, wie in Bild 1.1 veranschaulicht, eine Reihe von Theorien für verschiedene Klassen nichtlinearer Systeme und Regelungen [83, 94, 161, 191]. Trotz dieser Verschiedenheit ist es je nach Schwerpunkt üblich, diese Theorien unter dem Oberbegriff *nichtlineare Regelungen* oder *nichtlineare Systeme* zu subsumieren.

Die wichtigsten und für die industrielle Praxis relevanten Verfahren der nichtlinearen Regelungstechnik sind Gegenstand dieses Buches. Zu Beginn, in diesem Kapitel, werden die Systemdynamik und die Lösung nichtlinearer Differenzialgleichungen behandelt. Daran schließt sich eine Schilderung der Stabilitätstheorie nichtlinearer Systeme und Regelungen in Kapitel 2 an.



Bild 1.1: Wissensstand bei linearen und nichtlinearen Systemen. Blaue Flächen symbolisieren den bekannten Wissensstand, weiße Unerforschtes.

Obiges Basiswissen ist dann Ausgangspunkt einer Reihe von Entwurfsverfahren für nichtlineare Regler sowohl für lineare Regelstrecken in Kapitel 3 als auch nichtlineare Regelstrecken in Kapitel 4. In Kapitel 5 folgen schließlich Verfahren, die sowohl für lineare als auch nichtlineare Regelstrecken Verwendung finden. Da die meisten nichtlinearen Regelungsverfahren den Zustandsvektor der Regelstrecke benötigen, dieser aber oft nicht messbar ist, werden des Weiteren in Kapitel 6 Beobachter für nichtlineare Regelkreise behandelt.

1.1.2 Systembeschreibung und Regelkreiskategorien

Nichtlineare Systeme lassen sich im Allgemeinen durch eine Vektordifferenzialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

und eine Ausgangsgleichung

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

beschreiben. Dabei ist $\mathbf{x}$ der n - dimensionale Zustandsvektor, $\mathbf{u}$ der m - dimensionale Stell- bzw. Eingangsvektor, $\mathbf{f}$ die n - dimensionale Vektorfunktion des Systems, $\mathbf{y}$ der r - dimensionale Ausgangsvektor und $\mathbf{g}$ die r - dimensionale Ausgangsvektorfunktion. Manchmal wird ein System auch, insbesondere im Fall einer Eingangs- und einer Ausgangsgröße, durch eine explizite Differenzialgleichung höherer Ordnung

$$y^{(n)} = h(y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}, u_1, \dots, u_m) \quad (1.1)$$

beschrieben. Durch Einführung der Variablen

$$\begin{aligned} x_1 &= y, \\ x_2 &= \dot{y}, \\ &\vdots \\ x_n &= y^{(n-1)} \end{aligned}$$

kann Gl. (1.1) auch als Vektordifferenzialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ h(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \end{bmatrix}$$

dargestellt werden.

Systeme mit nur einer Eingangsgröße u und einer Ausgangsgröße y bezeichnet man als *Eingrößensysteme* oder *SISO-Systeme* (engl. single-input, single-output). Systeme mit mehreren Eingangsgrößen und Ausgangsgrößen werden als *Mehrgrößensysteme* oder *MIMO-Systeme* (engl. multiple-input, multiple-output) bezeichnet.

In der Regelungstechnik sind vor allem drei Typen nichtlinearer Regelungssysteme von Bedeutung. Die erste Klasse bilden lineare Regler für nichtlineare Regelstrecken, wie sie Bild 1.2 zeigt. Sie fallen oft in die Kategorie linearer Reglerentwurfsmethoden, denn in diesem Fall ist die Regelstrecke linearisierbar und das linearisierte Modell hinreichend genau. Dann kann die lineare Systemtheorie zum Einsatz kommen. Wir bezeichnen dabei die Führungsgröße mit w und die Regelabweichung mit e . Im MIMO-Fall verwenden wir fett gedruckte Buchstaben $\mathbf{w}$ und $\mathbf{e}$.

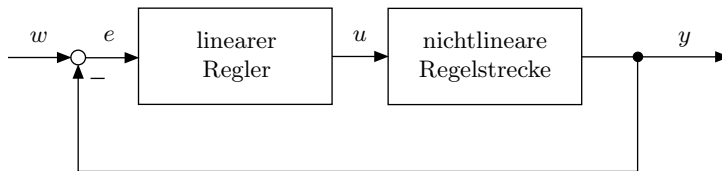


Bild 1.2: Nichtlineare Regelstrecke mit linearem Regler.

Die zweite Klasse stellen nichtlineare Regler für lineare Regelstrecken dar, wie sie Bild 1.3 zeigt. Oft werden einfache nichtlineare Regler aus technischen Gründen oder der Kosten wegen für lineare Regelstrecken eingesetzt. Ein weitverbreitetes Beispiel ist etwa die Temperaturregelung in Bügeleisen mit einem

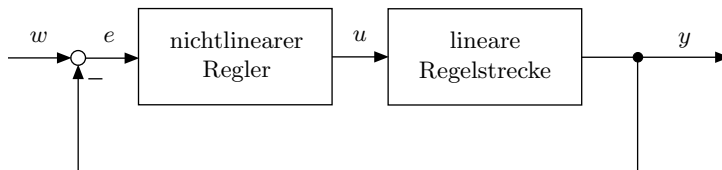


Bild 1.3: Lineare Regelstrecke mit nichtlinearem Regler.

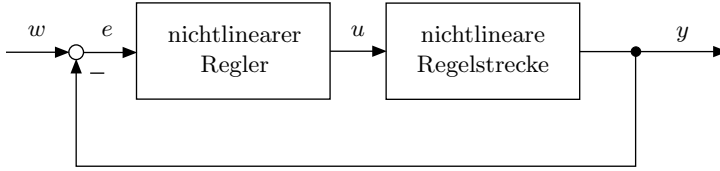


Bild 1.4: Nichtlineare Regelstrecke mit nichtlinearem Regler.

Bimetall. Das Bimetall hat die Charakteristik eines Schalters mit Hysterese, d. h., es ist ein nichtlineares System. Nichtlineare Regler komplizierter Bauart werden ebenfalls für lineare Regelstrecken eingesetzt, um bessere Regelergebnisse zu erzielen, als es mit linearen Reglern möglich wäre.

Die dritte Klasse bilden nichtlineare Regler für nichtlineare Regelstrecken, wie in Bild 1.4 dargestellt. Nichtlineare Regelstrecken sind oft sehr komplex in ihrem Verhalten. Eine lineare Regelung kann dann vielfach die gewünschte Regelqualität nicht erzeugen. In diesem Fall muss eine geeignete nichtlineare Regelung entworfen werden. Beispielsweise ist es in bestimmten Fällen möglich, eine nichtlineare Regelstrecke mit einem nichtlinearen Regler so zu kombinieren, dass ein linearer Regelkreis entsteht. Sein Verhalten ist dann aufgrund der Linearität einfach zu durchschauen.

1.1.3 Ruhelagen nichtlinearer Systeme

Eines der zentralen Ziele der Regelungstechnik ist es, den Zustand einer Regelstrecke in eine Ruhelage zu bringen und ihn dort zu halten. Beispielsweise will man ein Flugzeug mittels eines Autopiloten auf eine bestimmte Höhe, das Wasser eines Boilers auf eine bestimmte Temperatur oder ein gewalztes Blech auf eine vorgegebene Dicke bringen und dort halten. Für den Entwurf eines geeigneten Reglers muss man also zuerst eine Ruhelage ausfindig machen. Dabei stellt sich die Frage, wie man eine Ruhelage eines nichtlinearen Systems ermittelt. Bevor diese Frage näher untersucht wird, soll der Begriff der *Ruhelage* genauer definiert werden.

Definition 1 (Ruhelage). Gegeben sei das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}).$$

Dann heißt ein Punkt $\mathbf{x}_R$ des Zustandsraumes Ruhelage, wenn

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

gilt.

In dieser Definition wurde

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

vorausgesetzt. Selbstverständlich kann es auch Fälle geben, in denen

$$\mathbf{u} = \mathbf{c} \neq \mathbf{0}$$

ist, wobei $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$ ein konstanter Vektor ist und

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u} = \mathbf{c}) = \mathbf{0}$$

gilt. Dieser Fall ist durch obige Definition abgedeckt, wenn man die Transformation

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{c}$$

durchführt. Dann hat man das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{u}})$$

zu untersuchen, und dieses hat für $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ eine Ruhelage in $\mathbf{x}_R$. D. h., es gilt

$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_R, \mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Das Auffinden einer Ruhelage eines nichtlinearen Systems ist oftmals nicht einfach. Man hat nämlich die implizite Gleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

nach $\mathbf{x}_R$ aufzulösen. Es kann eine, keine oder mehrere Lösungen geben. Auch ein Lösungskontinuum ist möglich. Dies ist in Bild 1.5 für eine eindimensionale Funktion f illustriert.

Bei der konkreten Berechnung von Ruhelagen $\mathbf{x}_R$ können dann die folgenden drei Fälle auftreten. Im ersten Fall ist die implizite Gleichung

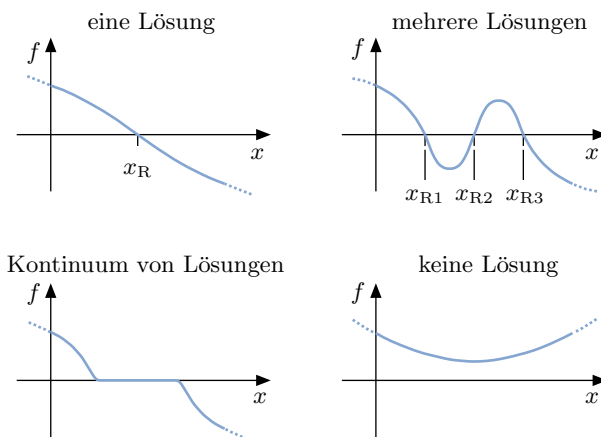


Bild 1.5: Mögliche Lösungsmengen der Ruhelagengleichung $f(\mathbf{x}_R, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

explizit nach $\mathbf{x}_R$ auflösbar, d. h., es gilt

$$\mathbf{x}_R = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{0}).$$

Im zweiten Fall ist die implizite Gleichung transzendent. Dann muss man auf numerische Verfahren, wie das mehrdimensionale Newton-Verfahren, zurückgreifen. Insbesondere steht man oft vor dem Problem, dass man nicht weiß, wieviele Ruhelagen existieren oder ob es überhaupt welche gibt.

Der dritte Fall betrifft viele technische Systeme. Bei ihnen können wir oft aus der Anschauung oder der Systemkenntnis heraus eine Ruhelage $\mathbf{x}_R$ errahnen. Durch Einsetzen in die Systemgleichung lässt sich die Annahme überprüfen.

1.1.4 Beispiel Satellit

Wir betrachten die Rotation eines Satelliten bzw. einer Weltraumsonde. Diesen können wir über Steuerdüsen um seine Achsen drehen. Bild 1.6 zeigt einen entsprechenden Satelliten mit seinem körperfesten Koordinatensystem (x, y, z) und einem raumfesten Koordinatensystem $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$.

Für den Drehimpulsvektor $\mathbf{L}$ des Satelliten, der sich mit seinem körperfesten Koordinatensystem und dem Winkelgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\omega}$ gegenüber dem raumfesten Koordinatensystem dreht, gilt mit dem Trägheitstensor $\mathbf{J}$ die Beziehung

$$\mathbf{L} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}.$$

Die Bewegungsgleichung leitet sich aus

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} \quad (1.2)$$

ab, wobei der Drehmomentvektor $\mathbf{M}$ die durch die Steuerdüsen verursachten Drehmomente enthält. Für die Ableitung des Drehimpulses $\mathbf{L}$ nach der Zeit gilt

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}), \quad (1.3)$$

wobei der Term $\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega})$ aus der mit $\boldsymbol{\omega}$ erfolgenden Drehung des körperfesten gegenüber dem raumfesten Koordinatensystem resultiert. Aus Gl. (1.2) und Gl. (1.3) folgt

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}. \quad (1.4)$$

Sind die Achsen des körperfesten Koordinatensystems des Satelliten mit seinen Hauptträgheitsachsen identisch, so gilt

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}.$$

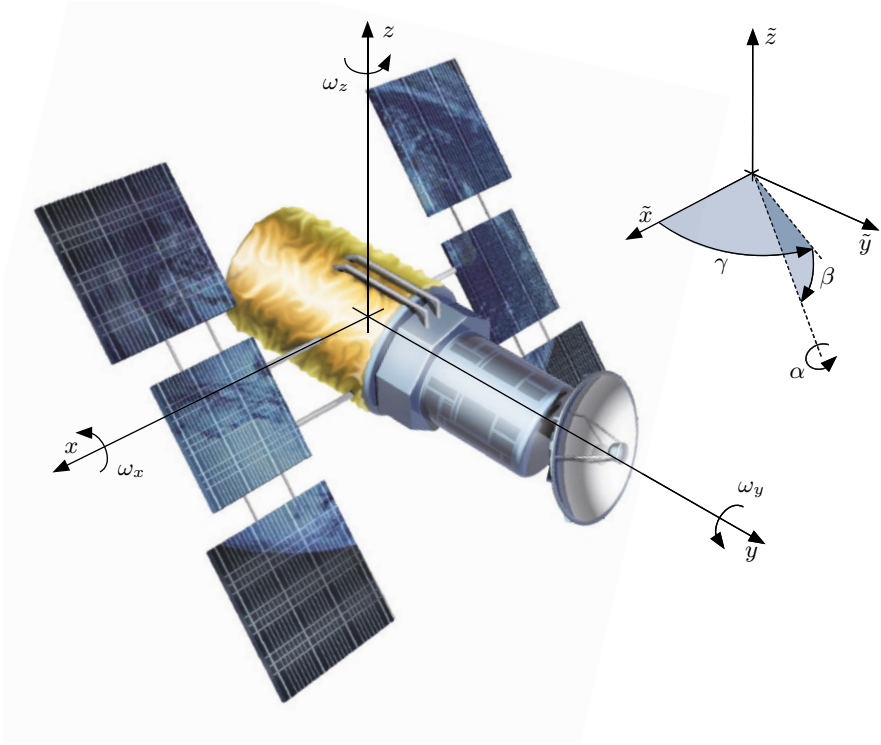


Bild 1.6: Satellit mit körperfestem Koordinatensystem (x, y, z) und raumfestem Koordinatensystem $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$. Mittels der Euler-Winkel α , β , γ kann die Orientierung des Satelliten bezüglich des raumfesten Koordinatensystems angegeben werden.

In diesem Fall ergeben sich aus Gl. (1.4) die Euler'schen Kreiselgleichungen

$$\begin{aligned} J_x \dot{\omega}_x &= -(J_z - J_y) \omega_y \omega_z + M_x, \\ J_y \dot{\omega}_y &= -(J_x - J_z) \omega_x \omega_z + M_y, \\ J_z \dot{\omega}_z &= -(J_y - J_x) \omega_x \omega_y + M_z \end{aligned}$$

als Bewegungsgleichungen des Systems.

Offensichtlich hat der Satellit nur dann eine Ruhelage, d. h., es gilt nur dann $\dot{\omega} = \mathbf{0}$, wenn mindestens zwei der Winkelgeschwindigkeiten ω_x , ω_y und ω_z gleich null sind. Dabei setzen wir voraus, dass die Stellgrößen M_x , M_y und M_z ebenfalls gleich null sind. Insgesamt ergeben sich so die drei Ruhelagenbereiche

$$\omega_{R1} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \omega_{R2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \omega_{R3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{bmatrix}.$$

Dabei können die Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathbb{R}$ beliebige Werte annehmen. Insgesamt existieren also unendlich viele Ruhelagen. Man beachte, dass auch der Fall $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ möglich ist, d. h., auch $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ ist eine Ruhelage.

Das Beispiel illustriert auch, dass der Begriff *Ruhelage* nicht zwingend die Abwesenheit von Bewegung, hier bei einem starren Körper, impliziert. Vielmehr bedeutet der Begriff *Ruhelage*, dass sich die Zustände des betrachteten Systems nicht mit der Zeit ändern.

Wir wollen nun noch die Orientierung des Satelliten im raumfesten Koordinatensystem beschreiben. Dies geschieht mittels der Euler-Winkel α, β und γ [79, 88], die im Bild 1.6 dargestellt sind und die wir im Vektor $\boldsymbol{\varphi} = [\alpha \ \beta \ \gamma]^T$ zusammenfassen. Die Bewegungsgleichungen des Satelliten lauten dann

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varphi}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{\omega} \\ -\boldsymbol{J}^{-1}[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega})] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{J}^{-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{M}, \quad (1.5)$$

wobei die Matrix

$$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\varphi}) = \begin{bmatrix} 1 & \sin(\alpha) \tan(\beta) & \cos(\alpha) \tan(\beta) \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha)/\cos(\beta) & \cos(\alpha)/\cos(\beta) \end{bmatrix}$$

den Winkelgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\omega}$ in den Winkelgeschwindigkeitsvektor $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ des raumfesten Koordinatensystems transformiert. Die Transformation $\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{\omega}$ ist dabei abhängig von den Euler-Winkeln, d. h. von $\boldsymbol{\varphi}$. Das System (1.5) besitzt offensichtlich wieder, wenn für den Stellgrößenvektor $\boldsymbol{M} = \mathbf{0}$ gilt, unendlich viele Ruhelagen

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_R \\ \boldsymbol{\omega}_R = \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{mit } \boldsymbol{\varphi}_R \in \mathbb{R}^3.$$

In diesem Fall führt der Satellit allerdings keine Bewegung um eine seiner Achsen aus.

1.1.5 Ruhelagen linearer Systeme

Lineare Systeme

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}, \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \end{aligned}$$

bilden einen Sonderfall der allgemeinen Systembeschreibung

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \end{aligned}$$

und sollen im Folgenden kurz betrachtet werden, um die Unterschiede zu nichtlinearen Systemen aufzuzeigen.

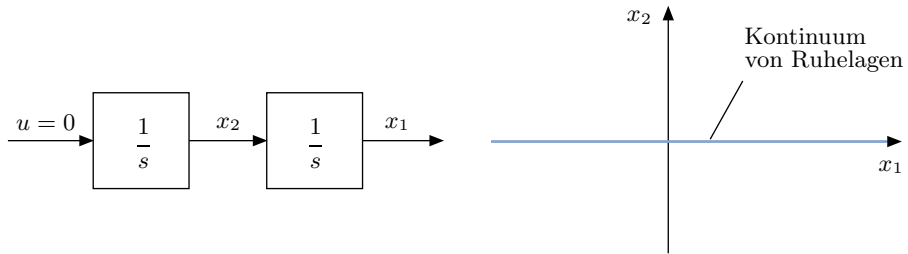


Bild 1.7: Das System $1/s^2$ und seine Ruhelagen $\mathbf{x}_R = [a \ 0]^T$ mit $a \in \mathbb{R}$.

Die Ruhelagen linearer Systeme sind einfach aus der Gleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$$

zu ermitteln, wenn $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ gilt. Folgende Fälle können auftreten: Gilt $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, dann gibt es nur die Ruhelage

$$\mathbf{x}_R = \mathbf{0}.$$

Gilt $\det(\mathbf{A}) = 0$, dann besitzt $\mathbf{A}$ Eigenwerte mit dem Wert null, und es gibt einen linearen Unterraum von Vektoren $\mathbf{x}_R$ für die

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$$

gilt. Es gibt also ein Kontinuum von Ruhelagen. Ein einfaches Beispiel ist das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

das aus zwei Integratoren besteht, also die Übertragungsfunktion $1/s^2$ besitzt. Offensichtlich bilden alle Zustände

$$\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R},$$

Ruhelagen. D. h., die x_1 -Achse bildet ein Kontinuum von Ruhelagen, wie es Bild 1.7 illustriert.

Angemerkt sei, dass für $\mathbf{u} = \mathbf{c}$ und $\det(\mathbf{A}) = 0$ der Fall auftreten kann, dass keine Ruhelage existiert. Nämlich dann, wenn $\mathbf{A}\mathbf{x} = -\mathbf{B}\mathbf{c}$ ein überbestimmtes Gleichungssystem ist. Ein lineares System hat also entweder eine, keine oder ein Kontinuum von Ruhelagen. Der Fall mehrerer isolierter Ruhelagen, wie er bei nichtlinearen Systemen möglich ist, kommt nicht vor.

1.1.6 Stabilität von Ruhelagen

Als *stabil* bezeichnet man eine Ruhelage, wenn alle Trajektorien $\mathbf{x}(t)$, die in einer Umgebung der Ruhelage beginnen, mit zunehmender Zeit in diese

Ruhelage hineinlaufen. In einer abgeschwächten Version benutzt man den Begriff *stabil* auch dann noch, wenn die Trajektorien zwar nicht in die Ruhelage laufen, aber in einer näheren Umgebung der Ruhelage verbleiben.

Wir betrachten im Weiteren zuerst einige Beispiele stabiler und instabiler Ruhelagen, um einen Eindruck zu bekommen und ein erstes Verständnis zu entwickeln. Am einfachsten gelingt dies anhand linearer Systeme $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ mit der Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$. Da in den Lösungen $\mathbf{x}(t)$ linearer Differenzialgleichungen $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ nur Terme

$$e^{\lambda_i t} \quad \text{und} \quad t^k e^{\lambda_j t} \quad \text{mit} \quad k \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

enthalten sind, laufen alle Trajektorien $\mathbf{x}(t)$ des Systems für $t \rightarrow \infty$ offensichtlich in die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$, wenn für jeden Eigenwert λ_i des Systems

$$\operatorname{Re} \{\lambda_i\} < 0$$

gilt. Man bezeichnet dann nicht nur die Ruhelage, sondern auch das System als *stabil*. Bild 1.8 zeigt die Trajektorien eines solchen linearen Systems.

Gilt dagegen für mindestens einen Eigenwert

$$\operatorname{Re} \{\lambda_i\} > 0,$$

so ist die Ruhelage instabil, denn dann streben Trajektorien von ihr weg. Daher wird ein solches lineares System auch als *instabil* bezeichnet. Bild 1.9 zeigt ein Beispiel.

Für den Fall eines Systems mit einem Paar konjugiert komplexer Eigenwerte $\lambda_{1/2} = \pm j$ liegt ein harmonischer Oszillator vor, dessen Trajektorien Bild 1.10 zeigt. Offensichtlich laufen die Trajektorien weder in die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ noch ins Unendliche. Auch hier besitzt die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ also noch eine gewisse Stabilität. Ähnlich gelagert ist der Fall eines Systems zweiter Ordnung mit einem Eigenwert $\lambda_1 = 0$ und einem Eigenwert $\lambda_2 < 0$, wie ihn Bild 1.11 veranschaulicht. Zwar laufen alle Trajektorien in eine Ruhelage auf der x_1 -Achse, aber keine Ruhelage zieht alle Trajektorien an. Es laufen allerdings auch keine Trajektorien ins Unendliche, weshalb man solche Systeme oft auch noch als stabil bezeichnet.

Um einen ersten Eindruck der Stabilitätsverhältnisse bei nichtlinearen Systemen zu bekommen, wird das System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(x_2 - 1), \\ \dot{x}_2 &= x_2(x_1 - 1) \end{aligned} \tag{1.6}$$

als Beispiel betrachtet. Es besitzt zwei Ruhelagen bei

$$\mathbf{x}_{R1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_{R2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Hier zeigt sich der schon erwähnte Unterschied zu linearen Systemen. Es gibt zwei isolierte Ruhelagen. Das ist bei linearen Systemen nicht möglich. Sie besitzen entweder eine Ruhelage in $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ oder ein Kontinuum von Ruhelagen.

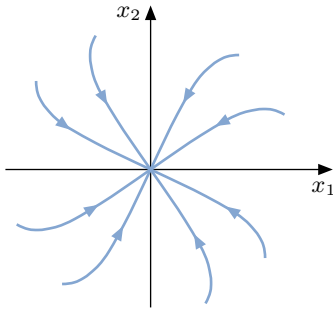


Bild 1.8: Trajektorien eines stabilen linearen Systems, d. h. mit $\operatorname{Re}\{\lambda_1\} < 0$, $\operatorname{Re}\{\lambda_2\} < 0$.

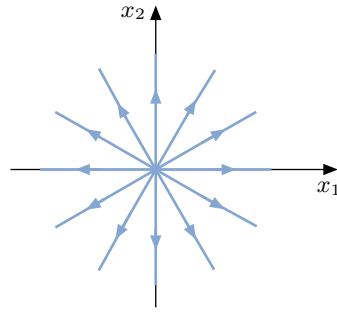


Bild 1.9: Trajektorien eines instabilen linearen Systems mit Eigenwerten λ_1, λ_2 , wobei $\operatorname{Re}\{\lambda_1\} > 0$, $\operatorname{Re}\{\lambda_2\} > 0$.

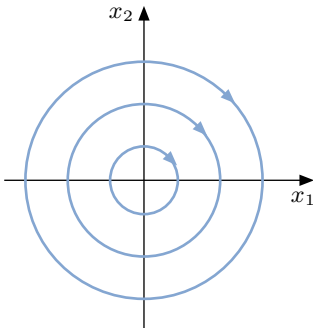


Bild 1.10: Trajektorien eines harmonischen Oszillators, d. h. mit $\lambda_{1/2} = \pm j$.

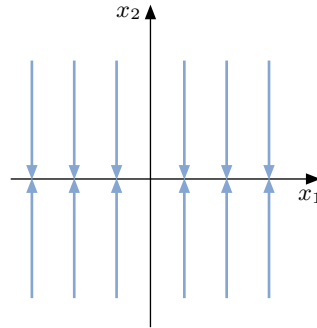


Bild 1.11: Trajektorien eines Systems mit $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 < 0$.

Bild 1.12 gibt den Verlauf der Trajektorien des Systems (1.6) im Umfeld der Ruhelagen wieder. Die Trajektorien streben in die Ruhelage $\mathbf{x}_{R1} = \mathbf{0}$ hinein. Man kann diese Ruhelage als stabil bezeichnen. Von der Ruhelage $\mathbf{x}_{R2} = [1 \ 1]^T$ streben Trajektorien weg ins Unendliche, d. h., die Ruhelage muss als instabil angesehen werden.

Das Beispiel zeigt, dass man nichtlineare Systeme im allgemeinen Fall nicht als stabil oder instabil bezeichnen kann, wie es bei linearen Systemen möglich ist. Man muss vielmehr das Stabilitätsverhalten des Systems in der Umgebung einer Ruhelage betrachten, d. h. das Stabilitätsverhalten der Ruhelage. In diesem Zusammenhang besteht Klärungsbedarf zu

- (1) dem Verhalten der Trajektorien in der Umgebung einer Ruhelage,
- (2) der Größe des Gebiets um eine Ruhelage herum, in dem alle in diesem Gebiet startenden Trajektorien in die Ruhelage streben, und
- (3) der mathematischen Definition der Stabilität einer Ruhelage.

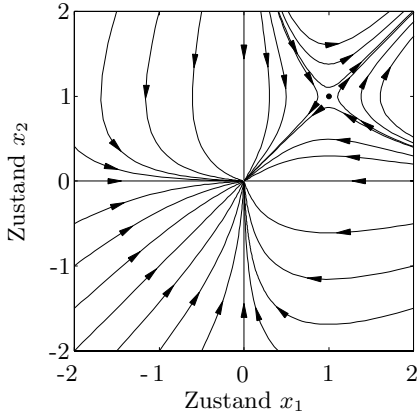


Bild 1.12: Verlauf der Trajektorien des Systems (1.6).

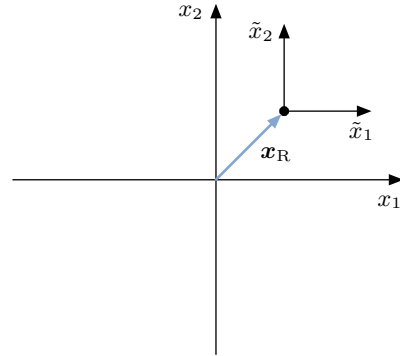


Bild 1.13: Transformation einer Ruhelage $\mathbf{x}_R$ in den Ursprung.

Bevor die obigen drei Probleme geklärt werden, soll noch eine Vereinfachung der Betrachtungen durchgeführt werden. Hat man eine Ruhelage $\mathbf{x}_R$ für ein System ermittelt, so kann man sie durch die Transformation

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_R + \tilde{\mathbf{x}}$$

in den Ursprung, also nach $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, verschieben. Die Systemgleichungen sind dann durch

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_R + \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}), \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}_R + \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = \tilde{\mathbf{g}}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u})\end{aligned}$$

gegeben. Da diese Transformation immer möglich ist, wird im Weiteren angenommen, dass die interessierende Ruhelage nach null verschoben wurde. Das Bild 1.13 illustriert die Transformation.

Um das Verhalten der Trajektorien eines Systems in der Nähe der Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ zu kennzeichnen, wird zuerst einmal der Begriff der *Attraktivität* eingeführt.

Definition 2 (Attraktivität). *Ein System*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

besitze die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$. Dann heißt die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ lokal attraktiv, wenn es eine Umgebung $U(\mathbf{0})$ der Ruhelage gibt, so dass jeder Anfangswert

$$\mathbf{x}_0 \in U(\mathbf{0})$$

zu einer Trajektorie $\mathbf{x}(t)$ des freien Systems, d. h. $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, führt, die mit $t \rightarrow \infty$ in die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ strebt.

Ist $U(\mathbf{0}) = \mathbb{R}^n$, so bezeichnet man die Ruhelage als *global attraktiv*. Bild 1.14 illustriert den Begriff der Attraktivität. Die Attraktivität einer Ruhelage stellt sicher, dass jede in $U(\mathbf{0})$ startende Trajektorie in die Ruhelage strebt. Allerdings macht der Begriff der Attraktivität keine Aussage darüber, wie weit sich die Trajektorie von der Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ entfernt. Aus praktischer Sicht heraus betrachtet kann dies problematisch sein. Schließlich möchte man bei realen Systemen auch meistens wissen, welche unter Umständen gefährlich großen Werte der Systemzustand $\mathbf{x}$ annehmen kann, bevor er in die Ruhelage läuft. Der nachfolgende Stabilitätsbegriff ist diesbezüglich genauer.

Definition 3 (Stabilität im Sinne von Ljapunov). *Ein System*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

besitze die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$. Dann heißt die Ruhelage stabil im Sinne von Ljapunov, wenn es zu jeder ε -Umgebung

$$U_\varepsilon(\mathbf{0}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x}| < \varepsilon\}$$

eine δ -Umgebung

$$U_\delta(\mathbf{0}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x}| < \delta\}$$

gibt, so dass alle Trajektorien des freien Systems, die in der δ -Umgebung beginnen, d. h.

$$\mathbf{x}(0) \in U_\delta(\mathbf{0}),$$

in ihrem weiteren Verlauf in der ε -Umgebung bleiben, d. h.

$$\mathbf{x}(t) \in U_\varepsilon(\mathbf{0}) \quad \text{für} \quad t > 0.$$

Bild 1.15 veranschaulicht die obige Stabilitätsdefinition von Ljapunov. Man beachte, dass die Trajektorien $\mathbf{x}(t)$ nicht zwingend in die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ laufen müssen, damit die Ruhelage stabil im Sinne von Ljapunov ist. Ein konkretes Beispiel hierfür ist der harmonische Oszillator

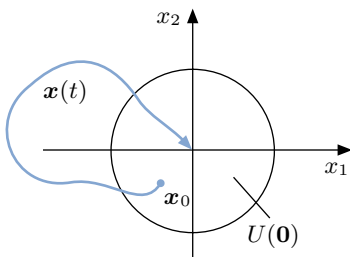


Bild 1.14: Lokal attraktive Ruhelage.

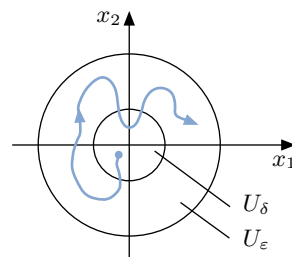


Bild 1.15: Illustration zur Stabilitätsdefinition von Ljapunov.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x},$$

dessen Trajektorien $\mathbf{x}(t)$ wir schon in Bild 1.10 sahen.

Ist die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ attraktiv und stabil im Sinne von Ljapunov, so streben die Trajektorien aus ihrer Umgebung asymptotisch in die Ruhelage. Entsprechend definiert man den Begriff der *asymptotischen Stabilität*.

Definition 4 (Asymptotische Stabilität). *Ist die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ lokal (global) attraktiv und stabil im Sinne von Ljapunov, so heißt sie (global) asymptotisch stabil.*

Bei einer asymptotisch stabilen Ruhelage $\mathbf{x}_R$ sind des Weiteren Umgebungen $U(\mathbf{x}_R)$ von Interesse, in denen alle Trajektorien in die Ruhelage streben. Nicht jede Umgebung besitzt diese Eigenschaft, wie das Beispiel aus Gl. (1.6) und das zugehörige Bild 1.16 veranschaulichen. In der Umgebung U_1 der Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ streben alle Trajektorien nach null. In der Umgebung U_2 ist dies ersichtlich nicht der Fall.

Man definiert passend zu solchen Situationen den Begriff des *Einzugsgebietes*.

Definition 5 (Einzugsgebiet). *Eine Umgebung einer asymptotisch stabilen Ruhelage heißt Einzugsgebiet der Ruhelage, wenn alle in diesem Gebiet startenden Trajektorien in ihm verbleiben und im weiteren Verlauf in die Ruhelage streben.*

Gibt es nur eine Ruhelage und ist diese global asymptotisch stabil, so ist der gesamte Zustandsraum Einzugsgebiet. Da das Stabilitätsverhalten des gesamten Systems in diesem Fall durch diese Ruhelage gekennzeichnet ist, kann dann auch wie im linearen Fall das System als global asymptotisch stabil bezeichnet werden.

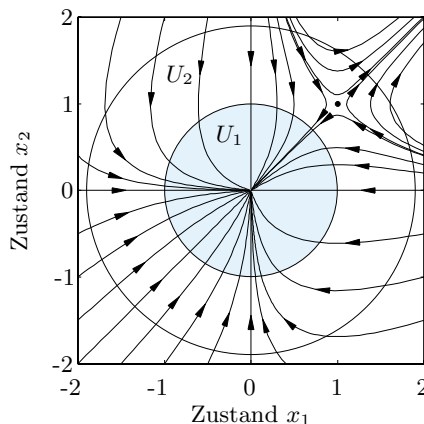


Bild 1.16: Asymptotisch stabile Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ und ein Einzugsgebiet U_1 (blau). Die Umgebung U_2 ist kein Einzugsgebiet.

1.1.7 Grenzzyklen

In nichtlinearen Systemen können, wie in linearen Systemen, Dauerschwingungen auftreten. Bei diesen Schwingungen wiederholen sich die Systemzustände periodisch und die Trajektorie einer Dauerschwingung ist eine geschlossene Kurve. Man bezeichnet diese Schwingungen als *Grenzzyklen*.

Als Beispiel zeigt Bild 1.17 die Dauerschwingung der Van-der-Pol-Differenzialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + (1 - x_1^2)x_2.\end{aligned}$$

Äquivalent zu obigem Zustandsraummodell ist die Differenzialgleichung

$$\ddot{x}_1 - (1 - x_1^2)\dot{x}_1 + x_1 = 0.$$

Die Van-der-Pol-Differenzialgleichung beschreibt z. B. das Verhalten eines elektrischen Schwingkreises für Radiosender, der aus einer Triode, einem Kondensator, einer Spule und einem Widerstand besteht. Der Term $(1 - x_1^2)$ wirkt dabei als nichtlineares Dämpfungsglied. Man kann einen solchen Van-der-Pol-Oszillator auch als Regelkreis mit $e = -x_1$ als Regelabweichung und mit der nichtlinearen Kennlinie

$$u = f(e, \dot{e}) = -(1 - e^2)\dot{e}$$

als Regelgesetz darstellen. Die lineare Differenzialgleichung

$$\ddot{x}_1 + x_1 = u$$

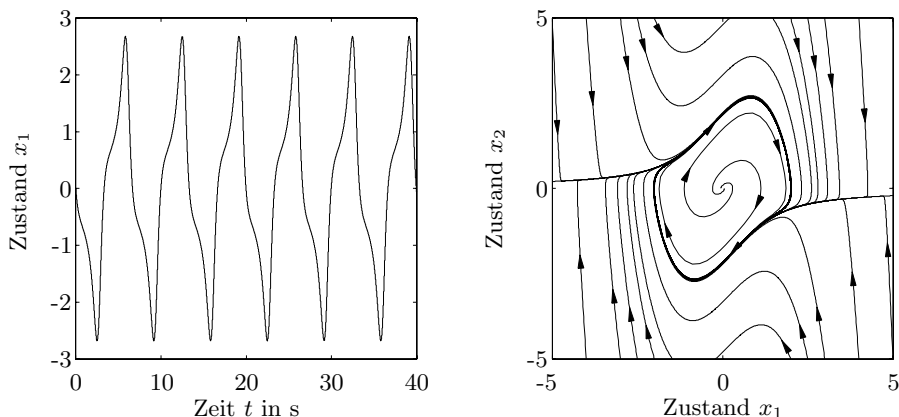


Bild 1.17: Links ist der Zeitverlauf $x_1(t)$ und rechts sind die Trajektorien $\mathbf{x}(t)$ und der Grenzzyklus der Van-der-Pol-Differenzialgleichung dargestellt.

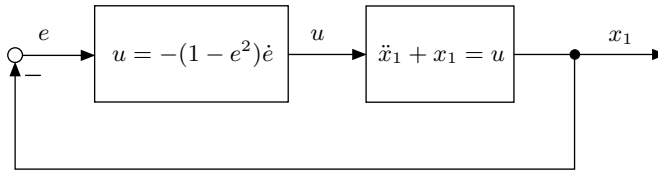


Bild 1.18: Van-der-Pol-Oszillator, dargestellt als Regelkreis.

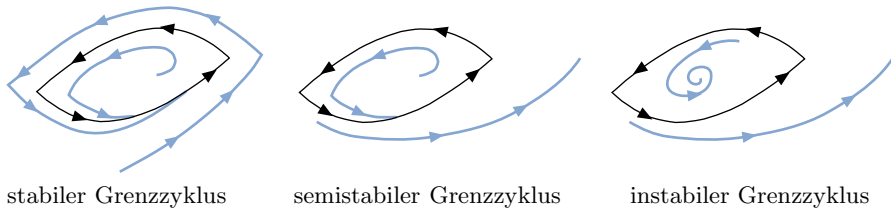


Bild 1.19: Grenzzyklen (schwarz) und ihr Stabilitätsverhalten.

bildet dann die Regelstrecke, wie in Bild 1.18 dargestellt. Die Aufgabe des Regelkreises ist in diesem Fall nicht die Ausregelung der Trajektorie in eine Ruhelage, sondern die Aufrechterhaltung einer Schwingung. Der Grenzzyklus wird in diesem Beispiel also bewusst erzeugt.

Normalerweise sind Grenzzyklen in Regelkreisen allerdings unerwünscht. Denn die Aufgabe eines Regelkreises ist im Allgemeinen das Konstanthalten der Regelgröße und nicht die Erzeugung von Schwingungen.

Ähnlich wie bei Ruhelagen streben Trajektorien entweder in einen Grenzzyklus oder von ihm weg. Man kann also den Begriff der Stabilität auf Grenzzyklen übertragen. Drei Fälle sind dabei zu unterscheiden: Im ersten Fall sind es asymptotisch stabile Grenzzyklen, auf die alle Trajektorien der näheren Umgebung zulaufen. Beim zweiten Fall, dem semistabilen, laufen die Trajektorien von einer Seite auf den Grenzzyklus zu und auf der anderen Seite von ihm weg. Im dritten Fall entfernen sich alle Trajektorien aus der Umgebung des Grenzzyklus, so dass er als instabil bezeichnet wird. Bild 1.19 illustriert diese Fälle. Bei linearen Systemen können weder stabile, instabile noch semistabile Grenzzyklen auftreten. Hier sind nur harmonische Oszillatoren möglich, bei denen es unendlich viele geschlossene Trajektorien gibt. Keine anderen Trajektorien nähern oder entfernen sich von diesen.

Instabile und semistabile Grenzzyklen sind ohne praktische Bedeutung, da aufgrund kleinster Störungen – die in einem realen System immer vorhanden sind – der Grenzzyklus von der Trajektorie verlassen wird. Von regelungstechnischer Bedeutung ist also vor allem der stabile Grenzzyklus. Im Allgemeinen ist er, wie erwähnt, unerwünscht. Um Grenzzyklen in Regelkreisen aufzufassen, verwendet man das Verfahren der harmonischen Balance, das wir in Kapitel 2.1 ausführlich behandeln.

1.1.8 Gleitzustände

Außer Grenzyklen können in nichtlinearen Systemen weitere Verhaltensweisen vorkommen, die in linearen Systemen nicht auftreten. Gleitzustände gehören zu diesen Phänomenen. Sie treten in Systemen mit unstetigem Verhalten auf, d. h. in Systemen $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ mit unstetigen Funktionen $\mathbf{f}$.

Wir betrachten zur Erklärung des Phänomens *Gleitzustand* die Regelstrecke

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y &= [0.5 \quad 1] \mathbf{x},\end{aligned}$$

die die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s + 0.5}{(s + 1)(s + 2)}$$

besitzt. Als Regler verwenden wir einen Zweipunktregler

$$u = \text{sgn}(-y).$$

Bild 1.20 zeigt den zugehörigen Regelkreis. Wir simulieren das System für die Anfangswerte $x_1(0) = 1$ und $x_2(0) = 1$ und erhalten die in Bild 1.21 dargestellten Verläufe von Stellgröße u und Ausgangsgröße y . Offensichtlich strebt der Ausgangswert y gegen null. Die Stellgröße u weist dabei allerdings ab einem gewissen Punkt keinen konstanten Wert mehr auf, sondern schaltet hochfrequent zwischen $u = 1$ und $u = -1$ hin und her.

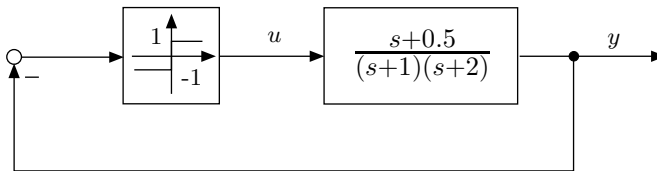


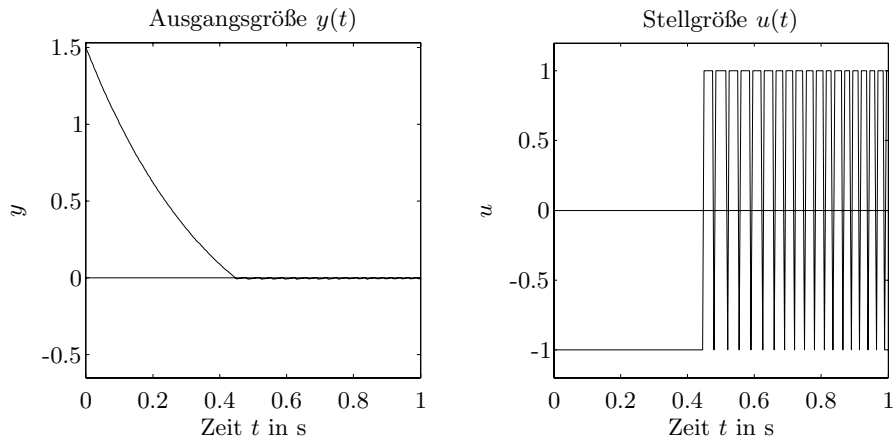
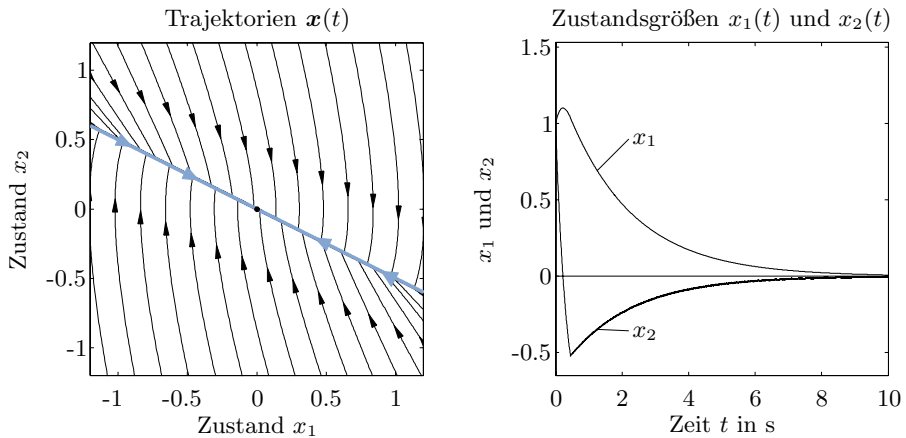
Bild 1.20: Regelkreis mit Zweipunktregler.

Dieses Verhalten erklärt sich, wenn man die Trajektorien $\mathbf{x}(t)$ des Systems in der Zustandsebene des Bildes 1.22 betrachtet und das Regelgesetz

$$u = \text{sgn}(-y) = -\text{sgn}(0.5x_1 + x_2)$$

analysiert. Dieses kann auch in der Form

$$u = \begin{cases} 1 & \text{für } x_2 < -0.5x_1, \\ -1 & \text{für } x_2 > -0.5x_1 \end{cases}$$

Bild 1.21: Ausgangsgrößenverlauf $y(t)$ und Stellgrößenverlauf $u(t)$.Bild 1.22: Trajektorien $\mathbf{x}(t)$ und Gleitzustand auf der (blauen) Schaltgeraden sowie Zustandsgrößenverläufe $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

dargestellt werden. Offensichtlich ist unterhalb der Geraden

$$x_2 = -0.5x_1 \quad (1.7)$$

der Stellgrößenwert $u = 1$ aktiviert und oberhalb $u = -1$.

Die Trajektorien $\mathbf{x}(t)$ laufen von beiden Seiten auf die Gerade (1.7) zu. Trifft eine Trajektorie auf die Gerade, wechselt sie kurz die Seite, die Stellgröße springt von $u = 1$ auf $u = -1$ oder umgekehrt und die Trajektorie läuft wieder auf die Gerade zu. Sie wechselt erneut die Seite und das Spiel beginnt von vorn. Dadurch tritt das bereits beobachtete hochfrequente Schalten der Stellgröße auf. Die Trajektorie selbst gleitet auf der Schaltgeraden, begleitet

vom hochfrequenten Schalten der Stellgröße, in die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$. Aus diesem Gleiten leitet sich auch der Begriff *Gleitzustand* ab.

Obiges Verhalten hat den Nachteil, dass das Stellglied, z. B. wenn es ein Ventil oder ein anderer mechanischer Aktor ist, stark belastet wird und schnell verschleißt. Meistens sind Gleitzustände daher unerwünscht.

Der Gleitzustand hat aber auch einen Vorteil. Das Gleiten der Trajektorie $\mathbf{x}(t)$ in die Ruhelage erfolgt, wie sich zeigen lässt, robust gegenüber Parameteränderungen der Regelstrecke. D. h., der Regelkreis besitzt im Gleitzustand immer dieselbe Dynamik, auch wenn sich die Regelstrecke verändert. Dieses Verhalten kann daher für den Entwurf einer bestimmten Klasse von robusten Regelungen, den Gleitzustandsregelungen, ausgenutzt werden. Wir widmen uns dieser Thematik in Kapitel 5.2.

1.1.9 Chaos

Chaos tritt in biologischen, meteorologischen, ökonomischen und technischen Systemen auf [21, 95, 180]. Konkrete Beispiele sind Wirtschaftszyklen, Single-Mode-Laser, mikromechanische Oszillatoren und die Entwicklung von Populationen in ökologischen Systemen. Die wichtigste Charakteristik chaotischer Systeme besteht darin, dass man nicht genau sagen kann, wie sich ihre Zustandsgrößen entwickeln werden. Dies ist insofern erstaunlich, da chaotische Systeme durch gewöhnliche Differenzialgleichungen mit deterministischem Verhalten beschrieben werden können. Der Begriff *deterministisch* schließt dabei jegliche Art von stochastischen Einflüssen auf das System aus. Anschaulich betrachtet bedeutet chaotisches Verhalten Folgendes:

- (1) Die Trajektorien verlaufen aperiodisch, d. h., sie laufen nicht in Grenzzyklen hinein.
- (2) Die Trajektorien streben weder in eine Ruhelage noch ins Unendliche.
- (3) Beliebige nah beieinander liegende Anfangswerte bzw. -vektoren führen zu sehr unterschiedlichen Trajektorienverläufen.

Wir betrachten als Beispiel für ein chaotisches System das Doppelpendel, wie es Bild 1.23 zeigt. Die Massen m_1 und m_2 hängen jeweils an zwei Pendelstäben der Längen l_1 und l_2 . Die Gelenke erlauben eine freie Rotation der Pendel, d. h., die Drehwinkel θ_1 und θ_2 sind nicht durch Anschläge beschränkt. Auf die Pendelmassen wirkt die Erdbeschleunigung $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$, so dass das Doppelpendel für die Winkel $\theta_1 = \theta_2 = 0$ eine stabile Ruhelage besitzt.

Beschrieben wird das System durch die Differenzialgleichungen

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{g(\sin \theta_2 \cos \Delta\theta - \mu \sin \theta_1) - \sin \Delta\theta (l_2 \dot{\theta}_2^2 + l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \Delta\theta)}{l_1(\mu - \cos^2 \Delta\theta)},$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{\mu g(\sin \theta_1 \cos \Delta\theta - \sin \theta_2) + \sin \Delta\theta (\mu l_1 \dot{\theta}_1^2 + l_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \Delta\theta)}{l_2(\mu - \cos^2 \Delta\theta)}$$

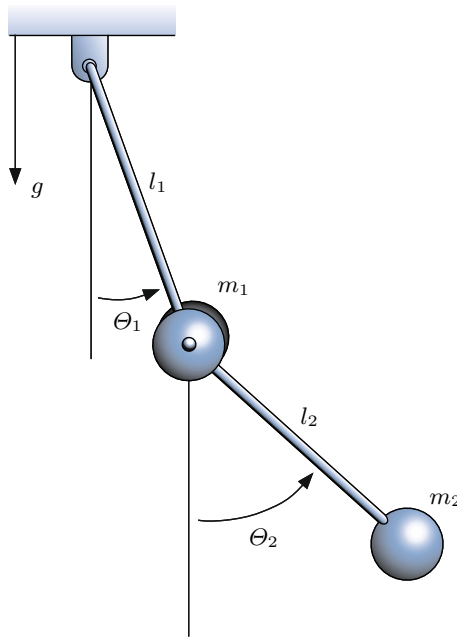


Bild 1.23: Doppelpendel mit chaotischem Verhalten.

mit

$$\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2,$$

$$\mu = 1 + \frac{m_1}{m_2}.$$

Wir simulieren das System für die Parameterwerte $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$ und $l_1 = l_2 = 1 \text{ m}$. Das chaotische Verhalten des Doppelpendels wird deutlich, wenn man zwei nah beieinander liegende Anfangsvektoren

$$\begin{bmatrix} \theta_1(0) \\ \dot{\theta}_1(0) \\ \theta_2(0) \\ \dot{\theta}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi/2 \\ 0 \\ -\pi/2 \\ 0.01 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_1(0) \\ \dot{\tilde{\theta}}_1(0) \\ \tilde{\theta}_2(0) \\ \dot{\tilde{\theta}}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi/2 \\ 0 \\ -\pi/2 \\ 0.0101 \end{bmatrix}$$

betrachtet und die sich aus ihnen ergebenden Winkelverläufe $\theta_1(t)$ und $\tilde{\theta}_1(t)$ miteinander vergleicht. Wie aus Bild 1.24 erkennbar, verlaufen die Winkel trotz nahezu identischer Anfangsbedingungen nach einiger Zeit völlig unterschiedlich und regellos.

Technische Systeme weisen nur sehr selten chaotisches Verhalten auf. Denn die Entwickler und die Nutzer technischer Systeme sind im Allgemeinen daran

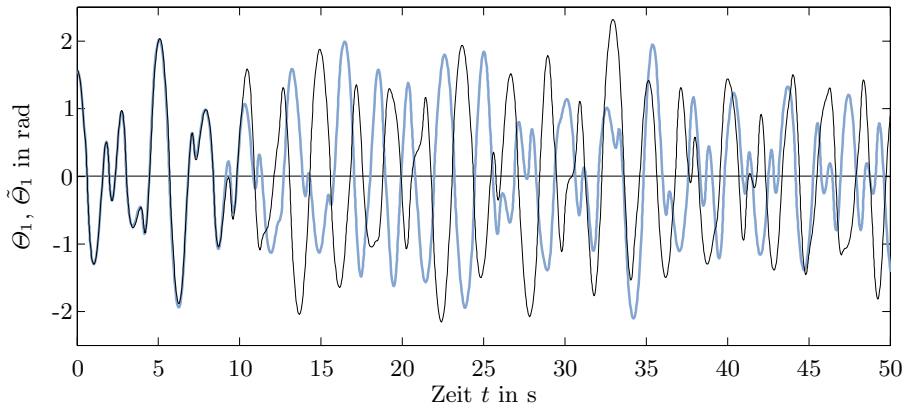


Bild 1.24: Verläufe der Winkel Θ_1 (schwarze Kurve) und $\tilde{\Theta}_1$ (blaue Kurve) des Doppelpendels mit chaotischem Verhalten.

interessiert, dass ihre Anlage, ihr Prozess oder ihr Fahrzeug ein vorhersagbares Verhalten besitzt. Im Kapitel 4.4 betrachten wir ein weiteres technisches chaotisches System, ein Fluidsystem, und regeln es so, dass es eine global asymptotisch stabile Ruhelage besitzt und folglich kein chaotisches Verhalten mehr aufweist. Eine detaillierte Darstellung chaotischer Systeme findet sich in [6, 7, 34, 174].

1.1.10 Nichtlineare Zustandstransformationen

In der linearen Systemtheorie hat es sich oftmals als sehr nützlich erwiesen, in bestimmten Fällen die Beschreibung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (1.8)$$

eines Systems in eine andere Darstellung zu transformieren. Dies geschieht mittels einer Koordinatentransformation

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}, \quad (1.9)$$

wobei der Vektor $\mathbf{z}$ die neuen Koordinaten repräsentiert. Die Matrix $\mathbf{T}$ ist eine reguläre $n \times n$ -Matrix. Die neue Systemdarstellung ist dann

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{z} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}u. \quad (1.10)$$

Oftmals wählt man die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ so, dass die neue Systemmatrix $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ Diagonalgestalt oder die Gestalt einer Begleitmatrix

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

besitzt. Diese Darstellungen sind nützlich für den Reglerentwurf oder um Systemeigenschaften aus ihnen direkt ablesen zu können.

Auch bei nichtlinearen Systemen

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (1.11)$$

können Transformationen

$$\mathbf{z} = \mathbf{q}(\mathbf{x}) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x} = \mathbf{q}^{-1}(\mathbf{z}) \quad (1.12)$$

sinnvoll sein, wenn es mit ihnen gelingt, das System in eine z.B. für den Reglerentwurf geeignete Form zu bringen. In der Regel fordert man, dass die Transformationen (1.12) stetig differenzierbar und eineindeutig sind. Letzteres bedeutet, dass jedem $\mathbf{x}$ genau ein $\mathbf{z}$ und umgekehrt zugeordnet werden kann. Eine solche Transformation bezeichnet man als *Diffeomorphismus*. Die transformierte Beschreibung ergibt sich durch Einsetzen der Transformationsgleichung (1.12) in die Systembeschreibung (1.11). Wir erhalten so

$$\frac{d\mathbf{q}^{-1}(\mathbf{z})}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{q}^{-1}(\mathbf{z}), \mathbf{u}),$$

woraus

$$\frac{\partial \mathbf{q}^{-1}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \cdot \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}^{-1}(\mathbf{z}), \mathbf{u})$$

und schließlich die transformierte Systemdarstellung

$$\dot{\mathbf{z}} = \left(\frac{\partial \mathbf{q}^{-1}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{q}^{-1}(\mathbf{z}), \mathbf{u}) = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{z}, \mathbf{u}) \quad (1.13)$$

folgt. Auf ähnliche Weise erhält man für die Rücktransformation von $\mathbf{z}$ -Koordinaten in $\mathbf{x}$ -Koordinaten die Gleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^{-1} \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{q}(\mathbf{x}), \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (1.14)$$

Für die in Gl. (1.13) verwendete Inverse der Jacobi-Matrix von $\mathbf{q}^{-1}$ gilt aufgrund der Ableitungsregel für Umkehrfunktionen

$$\left(\frac{\partial \mathbf{q}^{-1}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right)^{-1} = \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{q}^{-1}(\mathbf{z})}.$$

In vielen Fällen kann die Anwendung obiger Identität die Berechnung des transformierten Systems in Gl. (1.13) erleichtern.

An dieser Stelle wird nun die Forderung nach stetiger Differenzierbarkeit von $\mathbf{q}$ und $\mathbf{q}^{-1}$ plausibel. Ist sie erfüllt, so sind die Matrizen $(\partial \mathbf{q}^{-1}(\mathbf{z})/\partial \mathbf{z})^{-1}$ und $\partial \mathbf{q}(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x}$ stetig. Wäre dies nicht der Fall, so wäre es möglich, dass die

rechte Seite der Differenzialgleichung (1.13) bzw. (1.14) aufgrund der Transformation unstetig ist. Die Lösung der Differenzialgleichung wäre dann in den Unstetigkeitsstellen nicht definiert.

Die Bestimmung einer Transformation $\mathbf{z} = \mathbf{q}(\mathbf{x})$ bzw. $\mathbf{x} = \mathbf{q}^{-1}(\mathbf{z})$, die einen Koordinatenwechsel so vornimmt, dass sich eine gewünschte Systemdarstellung ergibt, ist in der Regel mit Aufwand verbunden. Dies ist schon im linearen Fall so, wenn man z. B. ein System diagonalisieren möchte. Denn hierzu muss man seine Eigenvektoren bestimmen, aus denen die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ spaltenweise besteht. Im nichtlinearen Fall ist der Aufwand zur Bestimmung der Transformationsvorschrift oft noch viel größer.

Für ein lineares System (1.8) und eine lineare Transformation (1.9) lässt sich leicht zeigen, dass aus Gleichung (1.13) die transformierte Systemdarstellung (1.10) folgt. Denn es gilt

$$\mathbf{x} = \mathbf{q}^{-1}(\mathbf{z}) = \mathbf{T}\mathbf{z} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{q}^{-1}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{T}.$$

Wir wollen nun noch ein nichtlineares Beispiel zur Illustration betrachten. Gegeben sei das System

$$\dot{x} = \frac{1}{x}. \quad (1.15)$$

Diese Differenzialgleichung ist in $x = 0$ nicht definiert. Wir werden daher im Weiteren den Punkt $x = 0$ aus unseren Betrachtungen ausschließen. Als Transformation verwenden wir

$$z = q(x) = e^{\operatorname{sgn}(x)x^2/2} \quad (1.16)$$

bzw.

$$x = q^{-1}(z) = \operatorname{sgn}(\ln(z^2)) |\ln(z^2)|^{1/2}. \quad (1.17)$$

Die Transformationsvorschriften (1.16) und (1.17) sind eineindeutig, stetig differenzierbar und q bildet den reellen Zahlenraum $\mathbb{R}$ in das Intervall $(0, \infty)$ ab. Bild 1.25 zeigt den Verlauf von $q(x)$. Wir bilden nun die Ableitung

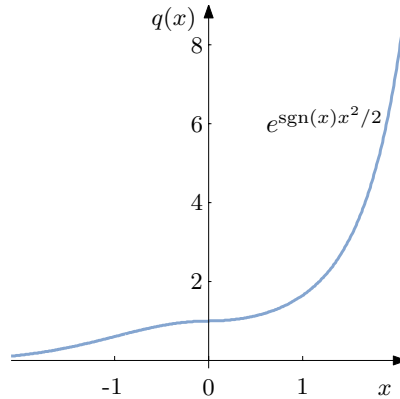
$$\frac{\partial q^{-1}(z)}{\partial z} = \frac{|\ln(z^2)|^{-1/2}}{z}$$

und erhalten gemäß Gl. (1.13) für das transformierte System

$$\dot{z} = \left(\frac{|\ln(z^2)|^{-1/2}}{z} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{sgn}(\ln(z^2)) |\ln(z^2)|^{1/2}} \right),$$

d. h.

$$\dot{z} = z \operatorname{sgn}(\ln(z^2)) = \begin{cases} z, & z > 1, \\ -z, & 0 < z < 1. \end{cases} \quad (1.18)$$

Bild 1.25: Verlauf der Funktion $z = q(x)$.

Es ist uns also mittels der Transformation (1.16) gelungen, die nichtlineare Systemdarstellung (1.15) in eine – genauer gesagt zwei – lineare umzuwandeln. Man beachte, dass beide Darstellungen äquivalent zueinander sind, da die Transformation eineindeutig ist.

Abschließend bestimmen wir noch die Lösung der Differenzialgleichung (1.15), indem wir zuerst Gl. (1.18) lösen. Deren Lösung ist

$$z(t) = \begin{cases} z_0 e^t, & z > 1, \\ z_0 e^{-t}, & 0 < z < 1, \end{cases}$$

mit dem Anfangswert $z_0 = z(0)$. Durch Transformation mittels Gl. (1.16) erhalten wir die Lösung des nichtlinearen Systems (1.15) zu

$$x(t) = q^{-1}(z(t)) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\ln(z_0^2 e^{2t})) \cdot |\ln(z_0^2 e^{2t})|^{1/2}, & z > 1, \\ \operatorname{sgn}(\ln(z_0^2 e^{-2t})) \cdot |\ln(z_0^2 e^{-2t})|^{1/2}, & 0 < z < 1. \end{cases} \quad (1.19)$$

Wir ersetzen noch den Anfangswert z_0 durch den Anfangswert $x(0) = x_0$. Dazu bilden wir

$$x(0) = \operatorname{sgn}(\ln(z_0^2)) \cdot |\ln(z_0^2)|^{1/2},$$

woraus

$$\operatorname{sgn}(x_0) = \operatorname{sgn}(\ln(z_0^2))$$

und mit Gl. (1.16)

$$\begin{aligned} x_0^2 &= \ln(z_0^2), & z_0 > 1, \\ -x_0^2 &= \ln(z_0^2), & 0 < z_0 < 1, \end{aligned}$$

folgt. Setzt man diese Ergebnisse in Gl. (1.19) ein, so erhält man schließlich

$$\begin{aligned}
x(t) &= \begin{cases} \operatorname{sgn}(x_0) \cdot |x_0^2 + 2t|^{1/2}, & x_0 > 0, \\ \operatorname{sgn}(x_0) \cdot |-x_0^2 - 2t|^{1/2}, & x_0 < 0, \end{cases} \\
&= \operatorname{sgn}(x_0) \cdot |x_0^2 + 2t|^{1/2}, \quad x \neq 0,
\end{aligned}$$

als Lösung von $\dot{x} = 1/x$.

Im Allgemeinen ist es möglich, dass die Transformationsgleichung auch eine Abhängigkeit vom Eingangsvektor $\mathbf{u}$ und eventuell seinen zeitlichen Ableitungen $\mathbf{u}^{(j)}$, $j = 1, \dots, i$, aufweist. D. h., sie hat die Form

$$\mathbf{z} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(i)})$$

bzw.

$$\mathbf{x} = \mathbf{q}^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(i)}). \quad (1.20)$$

Transformieren wir nun das System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ in $\mathbf{z}$ -Koordinaten, so gilt nach Einsetzen von Gl. (1.20) in die Systemgleichung

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{q}^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(i)})}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{q}^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(i)})}{\partial \mathbf{z}} \cdot \dot{\mathbf{z}} + \sum_{j=0}^i \frac{\partial \mathbf{q}^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(i)})}{\partial \mathbf{u}^{(j)}} \cdot \mathbf{u}^{(j+1)} \\
&= \mathbf{f}(\mathbf{q}^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(i)}), \mathbf{u}).
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die transformierte Systembeschreibung

$$\dot{\mathbf{z}} = \left(\frac{\partial \mathbf{q}^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(i)})}{\partial \mathbf{z}} \right)^{-1} \cdot \left(\mathbf{f}(\mathbf{q}^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(i)}), \mathbf{u}) - \sum_{j=0}^i \frac{\partial \mathbf{q}^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(i)})}{\partial \mathbf{u}^{(j)}} \mathbf{u}^{(j+1)} \right).$$

Auf ähnliche Weise lässt sich die Gleichung der Rücktransformation herleiten.

1.1.11 Zeitdiskrete Systeme

Neben zeitkontinuierlichen Systemen begegnen uns in der Regelungstechnik auch Systeme, bei denen die Eingangs-, Ausgangs- und Zustandsgrößen nicht kontinuierlich über die Zeit betrachtet werden, sondern nur zu bestimmten, d. h. diskreten Zeitpunkten k [49, 57, 81, 82, 104]. Beschrieben werden diese zeitdiskreten Systeme durch Iterations- bzw. Differenzgleichungen

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)), \\
\mathbf{y}(k) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))
\end{aligned} \quad (1.21)$$

mit $k = 0, 1, 2, \dots$. Analog zu den kontinuierlichen Systemen ist $\mathbf{x}$ der n -dimensionale Zustandsvektor, $\mathbf{u}$ der m -dimensionale Eingangsvektor und $\mathbf{y}$ der r -dimensionale Ausgangsvektor.

Die Ruhelagen $\mathbf{x}_R$ eines zeitdiskreten Systems sind durch das Gleichungssystem

$$\mathbf{x}_R = \mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{0})$$

definiert. Dabei ist, wie im zeitkontinuierlichen Fall, ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ vorausgesetzt. Auch im vorliegenden Fall ist das Gleichungssystem wieder nichtlinear.

Die Stabilität einer Ruhelage lässt sich ähnlich wie im zeitkontinuierlichen Fall definieren. Es sei wieder vorausgesetzt, dass die Ruhelage in $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ liegt.

Definition 6 (Stabilität von Ruhelagen zeitdiskreter Systeme). *Ein System*

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$$

besitze die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$. Dann heißt die Ruhelage stabil im Sinne von Ljapunov, wenn es zu jeder ε -Umgebung

$$U_\varepsilon(\mathbf{0}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x}| < \varepsilon\}$$

eine δ -Umgebung

$$U_\delta(\mathbf{0}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x}| < \delta\}$$

gibt, so dass alle Zustandsfolgen $\mathbf{x}(k)$, die in der δ -Umgebung beginnen, d. h.

$$\mathbf{x}(0) \in U_\delta(\mathbf{0}),$$

in ihrem weiteren Verlauf in der ε -Umgebung bleiben, d. h.

$$\mathbf{x}(k) \in U_\varepsilon(\mathbf{0}) \quad \text{für} \quad k > 0.$$

Gilt für alle $\mathbf{x}(0) \in U_\delta(\mathbf{0})$ des Weiteren

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(k) = \mathbf{0},$$

so heißt die Ruhelage asymptotisch stabil.

Bei zeitdiskreten Systemen können, wie bei zeitkontinuierlichen, auch Grenzzyklen auftreten. Dies ist der Fall, wenn für eine Folge von Zustandsvektoren $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(l)$ die Beziehung

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(l)$$

bei konstantem Eingangsvektor $\mathbf{u}(k)$ erfüllt ist. Da der Grenzzyklus $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(l)$ insgesamt $l+1$ Zustände umfasst, spricht man von einem Zyklus der Länge $l+1$.

Chaotisches Verhalten ist ebenfalls möglich. Beispielsweise tritt Chaos in einem zeitdiskreten System erster Ordnung auf, wenn ein Zyklus

$$x(0), x(1), x(2) = x(0),$$

d. h. ein Zyklus der Länge drei, existiert [115]. Erwähnenswert ist, dass Chaos bei zeitdiskreten Systemen ab der Systemordnung $n = 1$ auftreten kann. Bei

zeitkontinuierlichen Systemen dagegen kann Chaos erst ab der Systemordnung $n = 3$ entstehen.

Die exakte Modellierung eines abgetasteten nichtlinearen zeitkontinuierlichen Systems durch eine Differenzengleichung (1.21) ist in den meisten Fällen unmöglich. Diese Situation ist gänzlich anders als bei linearen Systemen, wo man aus dem zeitkontinuierlichen Modell relativ einfach das durch Abtastung entstehende zeitdiskrete Modell berechnen kann. Diese einfache Berechnung resultiert aus der Kenntnis der Lösung der linearen Differenzialgleichung. Im nichtlinearen Fall verfügt man in der Regel nicht über die Systemlösung und kann daher auch das zeitdiskrete Modell nicht bestimmen, zumindest nicht exakt. Näherungsweise ist dies schon möglich. Über die numerische Lösung nichtlinearer Differenzialgleichungen lassen sich nämlich Näherungsmodelle für abgetastete nichtlineare Systeme ermitteln. Der Lösung nichtlinearer Differenzialgleichungen widmen wir uns im nächsten Kapitel.

1.2 Lösung nichtlinearer Differenzialgleichungen

1.2.1 Grundlegendes und das Verfahren von Euler-Cauchy

Die Lösung nichtlinearer Differenzialgleichungen mit Anfangswerten $\mathbf{x}(t_0)$ und z. B. $t_0 = 0$, so genannter Anfangswertprobleme

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0,\end{aligned}$$

ist im Gegensatz zu linearen Differenzialgleichungen in den meisten Fällen, wie erwähnt, nur numerisch möglich. Zu diesem Zweck ist eine Reihe von Integrationsverfahren entwickelt worden [44, 173].

Sie basieren auf dem folgenden Prinzip, das ohne Einschränkung der Allgemeinheit für den Fall nur einer Zustandsgröße x , also

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad (1.22)$$

illustriert werden soll. Durch Integration von Gl. (1.22) erhält man die Lösung der Differenzialgleichung zu

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(x(\tau), u(\tau)) d\tau. \quad (1.23)$$

Man beachte, dass diese Gleichung implizit bezüglich $x(t)$ und daher analytisch meistens nicht lösbar ist. Die Integrationsverfahren lösen das Integral in Gl. (1.23) daher durch mehr oder weniger gute Näherungen numerisch. Genauigkeit und Rechenaufwand hängen dabei von der Wahl des Integrationsverfahrens ab.

Bei der numerischen Lösung wird die Gleichung (1.23) diskretisiert, d. h., die Zeitachse wird in eine Anzahl äquidistanter Stützstellen

$$t_i = t_0 + h \cdot i, \quad i = 0, \dots, n,$$

wie in Bild 1.26 dargestellt, eingeteilt, wobei die Intervallbreite h als *Schrittweite* bezeichnet wird. Man kann jetzt die Lösung der Differenzialgleichung (1.22) in den Zeitpunkten t_i als Rekursionsgleichung

$$x(t_{i+1}) = \underbrace{x(t_0) + \int_{t_0}^{t_i} f(x, u) dt}_{x(t_i)} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x, u) dt,$$

also

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x, u) dt,$$

schreiben.

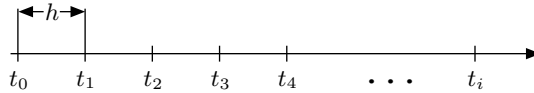


Bild 1.26: Zeitpunkte t_i und Schrittweite h der numerischen Lösung.

Ziel der Integrationsverfahren ist es, eine gute Approximation für das Integral zu finden. Im einfachsten Fall nähert man, wie in Bild 1.27 dargestellt, die Fläche

$$F = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x, u) dt$$

zwischen t_i und t_{i+1} durch ein Rechteck mit dem Flächeninhalt

$$F_{\text{app}} = h \cdot f(x(t_i), u(t_i))$$

an und erhält als Näherung für $x(t_{i+1})$ den Wert

$$\hat{x}(t_{i+1}) = \hat{x}(t_i) + h \cdot f(\hat{x}(t_i), u(t_i)).$$

Für den mehrdimensionalen Fall und mit den Abkürzungen $\hat{\mathbf{x}}(t_i) = \hat{\mathbf{x}}_i$ bzw. $\mathbf{u}(t_i) = \mathbf{u}_i$ gilt

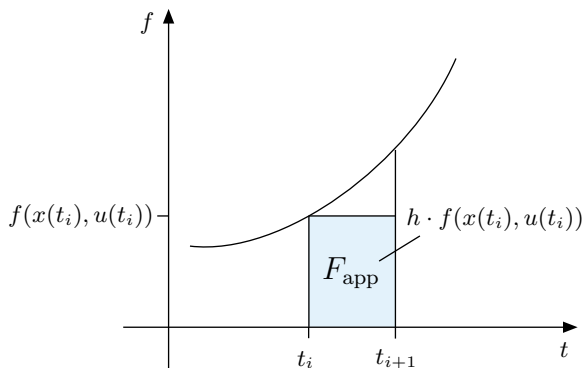


Bild 1.27: Näherungslösung des Integrals.

$$\hat{\mathbf{x}}_{i+1} = \hat{\mathbf{x}}_i + h \cdot \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_i, \mathbf{u}_i).$$

Als Anfangswert für diese Rekursionsformel dient $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_0$. Obiges Verfahren bezeichnet man als *Polygonzugverfahren von Euler-Cauchy*. Es ist einfach, aber ungenau. Bild 1.28 illustriert die Näherung mit dem Euler-Cauchy-Verfahren.

1.2.2 Genauigkeit der numerischen Lösung

Die Näherung der Fläche unter der Kurve durch die Rechtecke hat direkten Einfluss auf die Genauigkeit der Lösung, wie Bild 1.29 illustriert. Der Fehler im Schritt i ,

$$\varepsilon_i = \|\mathbf{x}(t_i) - \hat{\mathbf{x}}(t_i)\| = \sqrt{(x_1(t_i) - \hat{x}_1(t_i))^2 + \dots + (x_n(t_i) - \hat{x}_n(t_i))^2},$$

ist offensichtlich abhängig von der Anzahl aller vorherigen Schritte und der Schrittweite h . Im Falle des Verfahrens von Euler-Cauchy gilt nach einer festen Integrationszeit $T = n \cdot h$ mit n Schritten für den Fehler

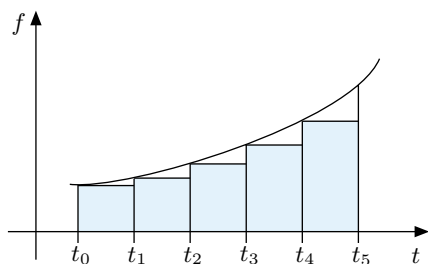
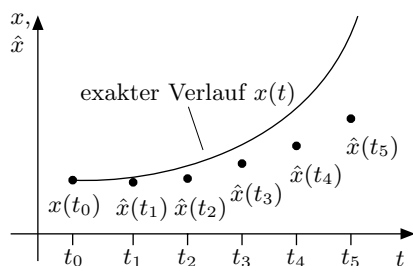


Bild 1.28: Flächenberechnung beim Verfahren von Euler-Cauchy.

Bild 1.29: Vergleich zwischen exakter Lösung $x(t)$ und Näherungslösung $\hat{x}(t_i)$.

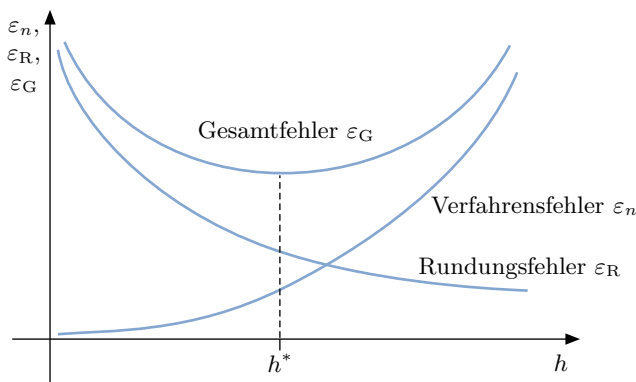


Bild 1.30: Der Gesamtfehler ε_G eines Integrationsverfahrens setzt sich aus Verfahrensfehler ε_n und Rundungsfehler ε_R zusammen.

$$\varepsilon_n \leq \alpha \cdot h.$$

Der Verfahrensfehler ε_n nimmt also mit kleiner werdender Schrittweite ab. Dabei ist im Allgemeinen α eine (leider) unbekannte Konstante.

Bei genaueren Verfahren als dem einfachen Euler-Cauchy-Verfahren kann der Fehler ε_n der Näherungslösung bei einer Verringerung der Schrittweite h auch wesentlich schneller kleiner werden. Allgemein gilt

$$\varepsilon_n \leq \alpha \cdot h^q.$$

Hierbei bezeichnet man q als *Fehlerordnung* oder *Konvergenzordnung* des Verfahrens. Sie bestimmt, wie schnell der Fehler ε_n gegen null konvergiert, wenn h gegen null strebt. Je größer q ist, desto genauer ist das Lösungsverfahren.

Bezüglich der Genauigkeit einer numerischen Lösung von Differenzialgleichungen scheint es also sinnvoll zu sein, sehr kleine Schrittweiten h zu wählen. Allerdings nimmt dann auch die Anzahl benötigter Stützstellen zu, d. h., die Rechenzeit der Simulation steigt an.

Es gibt einen weiteren Nachteil sehr kleiner Schrittweiten h . Zwar sinkt der Verfahrensfehler ε_n mit kleiner werdendem h , aber der Rundungsfehler ε_R des verwendeten Rechners steigt an. Es existiert also eine optimale Schrittweite h^* , bei der der Gesamtfehler minimal ist. Bild 1.30 illustriert dies. Unpraktischerweise ist die optimale Schrittweite h^* im Allgemeinen nicht bestimmbar.

1.2.3 Das verbesserte Euler-Cauchy-Verfahren

Das Verfahren von Euler-Cauchy weist aufgrund der gewählten Rechtecknäherung $h \cdot f(\hat{x}_i, u_i)$ eine hohe Ungenauigkeit auf. Man kann das Verfahren verbessern, wenn man als Höhe nicht den Wert

$$f(\hat{x}(t_i), u(t_i))$$

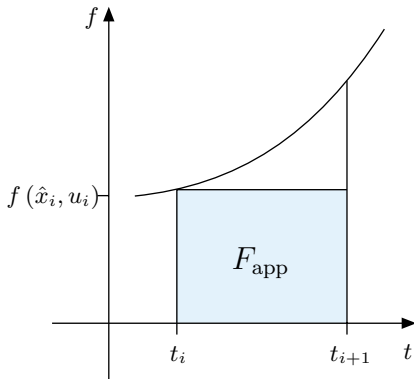


Bild 1.31: Euler-Cauchy-Verfahren.

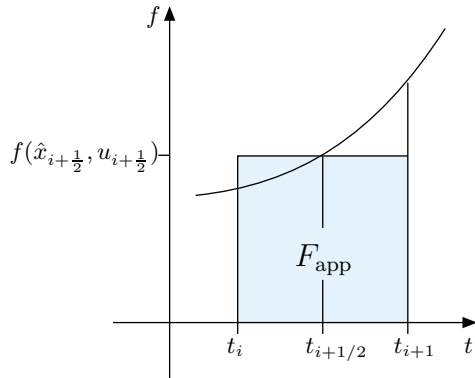


Bild 1.32: Verbessertes Euler-Cauchy-Verfahren.

an der Stelle $\hat{x}(t_i) = \hat{x}_i$ wählt, sondern

$$f\left(\hat{x}\left(t_i + \frac{h}{2}\right), u\left(t_i + \frac{h}{2}\right)\right)$$

an der Stelle $\hat{x}(t_i + \frac{h}{2}) = \hat{x}_{i+1/2}$ und für $u(t_i + \frac{h}{2}) = u_{i+1/2}$. Die Bilder 1.31 und 1.32 illustrieren den Sachverhalt.

Die Fläche des verbesserten Euler-Cauchy-Verfahrens berechnet sich zu

$$F_{\text{app}} = h \cdot f\left(\hat{x}_{i+1/2}, u_{i+1/2}\right).$$

Man erhält so folgenden Algorithmus für das verbesserte Verfahren im allgemeinen Fall mehrdimensionaler Systemgleichungen:

- (1) $\hat{\mathbf{x}}_{i+1/2} = \hat{\mathbf{x}}_i + \frac{h}{2} \cdot \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_i, \mathbf{u}_i),$
- (2) $\hat{\mathbf{x}}_{i+1} = \hat{\mathbf{x}}_i + h \cdot \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{i+1/2}, \mathbf{u}_{i+1/2}).$

Das verbesserte Euler-Cauchy-Verfahren heißt auch *Halbschrittverfahren*. Gegenüber dem Euler-Cauchy-Verfahren mit der Fehlerordnung $q = 1$ besitzt die verbesserte Version die Fehlerordnung $q = 2$.

1.2.4 Die Verfahren von Heun und Simpson

Weitere Verbesserungen der Genauigkeit gegenüber den obigen numerischen Lösungsverfahren lassen sich erzielen, wenn die Fläche

$$F = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x(t), u(t)) dt$$

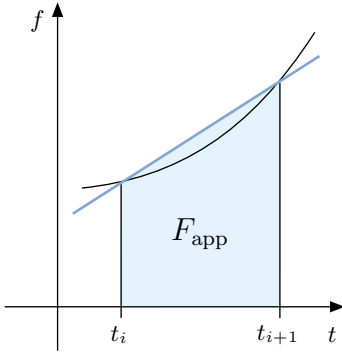


Bild 1.33: Verfahren von Heun.

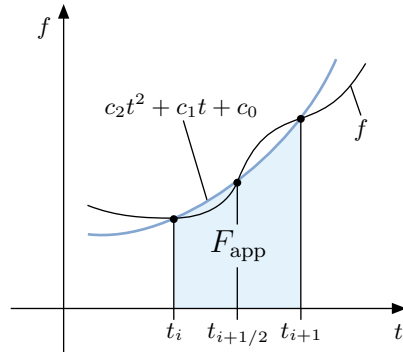


Bild 1.34: Verfahren von Simpson.

genauer abgeschätzt wird als mittels eines Rechtecks. Zu diesem Zweck wird beim Verfahren von Heun ein Trapez für die Berechnung der Fläche $F_{\text{app}} = \frac{h}{2} [f(x_i, u_i) + f(x_{i+1}, u_{i+1})]$ verwendet, wie in Bild 1.33 illustriert. Somit erhält man die Rekursionsgleichung

$$\hat{x}_{i+1} = \hat{x}_i + \frac{h}{2} [f(\hat{x}_i, u_i) + f(\hat{x}_{i+1}, u_{i+1})].$$

Hierin ist allerdings $\hat{x}_{i+1}$ auch auf der rechten Seite der Gleichung präsent. Man könnte nun diese implizite Gleichung nach $\hat{x}_{i+1}$ iterativ lösen. Beim Verfahren von Heun geht man allerdings anders vor und bestimmt $\hat{x}_{i+1}$ näherungsweise mittels eines Euler-Cauchy-Schrittes

$$\hat{x}_{i+1} \approx \tilde{x}_{i+1} = \hat{x}_i + h \cdot f(\hat{x}_i, u_i).$$

Zusammengefasst ergibt sich für den allgemeinen mehrdimensionalen Fall die Verfahrensvorschrift

- (1) $\tilde{\mathbf{x}}_{i+1} = \mathbf{\hat{x}}_i + h \cdot \mathbf{f}(\mathbf{\hat{x}}_i, \mathbf{u}_i),$
- (2) $\mathbf{\hat{x}}_{i+1} = \mathbf{\hat{x}}_i + \frac{h}{2} [\mathbf{f}(\mathbf{\hat{x}}_i, \mathbf{u}_i) + \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_{i+1}, \mathbf{u}_{i+1})].$

Man bezeichnet das Verfahren von Heun auch als *Prädiktor-Korrektor-Verfahren*. Hierbei liefert das Ergebnis aus der ersten Gleichung, dem Prädiktor, eine erste Näherung. Diese wird mittels der zweiten Gleichung, des Korrektors, nachgebessert.

Zu beachten ist, dass das Verfahren von Heun wie das verbesserte Verfahren von Euler-Cauchy die Fehlerordnung $q = 2$ aufweist, also keine Erhöhung der Genauigkeit erzielt wird.

Verwendet man für die Approximation der Fläche

$$F = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x, u) dt$$

eine Parabel als Interpolationsfunktion für die Funktion f im Intervall $[t_i, t_{i+1}]$, wie in Bild 1.34 dargestellt, so lässt sich die Genauigkeit weiter steigern. Wir erhalten dann das Verfahren von Simpson. Um die Parameter der Parabel zu ermitteln, benötigt man neben der Stützstelle $(t_i, f(\hat{x}_i, u_i))$ zwei weitere Stützstellen bei $t_{i+1/2} = t_i + h/2$ und t_{i+1} sowie den Zwischenwert $u_{i+1/2} = u(t_i + h/2)$ der Stellgröße. Die Integration der Parabel im Intervall $[t_i, t_{i+1}]$ liefert dann den Schätzwert F_{app} für die zu integrierende Fläche.

So ergibt sich das Verfahren von Simpson:

- (1) $\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_i, \mathbf{u}_i)$,
- (2) $\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(\hat{\mathbf{x}}_i + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1, \mathbf{u}_{i+1/2}\right)$,
- (3) $\mathbf{k}_3 = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_i - h\mathbf{k}_1 + 2h\mathbf{k}_2, \mathbf{u}_{i+1})$,
- (4) $\hat{\mathbf{x}}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 4\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)$.

Es besitzt die Fehlerordnung $q = 3$.

1.2.5 Die Runge-Kutta-Verfahren

Die Euler-Cauchy-Verfahren, das Verfahren von Heun und das von Simpson sind Spezialfälle der *Runge-Kutta-Verfahren*. All diese Verfahren bezeichnet man als *Einschrittverfahren*, denn sie bestimmen einen neuen Simulationspunkt $\hat{\mathbf{x}}_{i+1}$ nur auf Basis eines vorherigen Punktes $\hat{\mathbf{x}}_i$. Runge-Kutta-Verfahren haben folgende prinzipielle Form:

- (1) $\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_i, \mathbf{u}_i)$,
- (2) $\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_i + h\alpha_{21}\mathbf{k}_1, \mathbf{u}(t_i + \beta_2h))$,
- (3) $\mathbf{k}_3 = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_i + h(\alpha_{31}\mathbf{k}_1 + \alpha_{32}\mathbf{k}_2), \mathbf{u}(t_i + \beta_3h))$,
- $\vdots$
- (m) $\mathbf{k}_m = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_i + h(\alpha_{m1}\mathbf{k}_1 + \dots + \alpha_{m,m-1}\mathbf{k}_{m-1}), \mathbf{u}(t_i + \beta_mh))$,
- (m+1) $\hat{\mathbf{x}}_{i+1} = \hat{\mathbf{x}}_i + h \cdot \sum_{j=1}^m \gamma_j \mathbf{k}_j$.

Hierbei sind die jeweiligen Fehlerordnungen der Tabelle 1.1 zu entnehmen.

Je mehr Approximationsberechnungen m das gewählte Verfahren ausführt, desto genauer ist es. Die Spezialfälle ergeben sich mit den Parametern m, γ, β , und α aus Tabelle 1.2.

Für $m = 4$ gibt es unterschiedliche Varianten, von denen das klassische Runge-Kutta-Verfahren das gebräuchlichste ist:

Tabelle 1.1: Fehlerordnungen der Runge-Kutta-Verfahren.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q	1	2	3	4	4	5	6	6	7

Tabelle 1.2: Spezialfälle der Runge-Kutta-Verfahren.

	m	γ	β	α_{ij}
Euler-Cauchy	$m = 1$	$\gamma_1 = 1$	—	—
verbessertes Euler Cauchy	$m = 2$	$\gamma_1 = 0$ $\gamma_2 = 1$	$\beta_2 = \frac{1}{2}$	$\alpha_{21} = \frac{1}{2}$
Heun	$m = 2$	$\gamma_1 = \frac{1}{2}$ $\gamma_2 = \frac{1}{2}$	$\beta_2 = 1$	$\alpha_{21} = 1$
Simpson	$m = 3$	$\gamma_1 = \frac{1}{6}$ $\gamma_2 = \frac{4}{6}$ $\gamma_3 = \frac{1}{6}$	$\beta_2 = \frac{1}{2}$ $\beta_3 = 1$	$\alpha_{21} = \frac{1}{2}$ $\alpha_{31} = -1$ $\alpha_{32} = 2$

- (1) $\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_i, \mathbf{u}_i),$
- (2) $\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(\hat{\mathbf{x}}_i + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1, \mathbf{u}_{i+1/2}\right),$
- (3) $\mathbf{k}_3 = \mathbf{f}\left(\hat{\mathbf{x}}_i + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2, \mathbf{u}_{i+1/2}\right),$
- (4) $\mathbf{k}_4 = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_i + h\mathbf{k}_3, \mathbf{u}_{i+1}),$
- (5) $\hat{\mathbf{x}}_{i+1} = \hat{\mathbf{x}}_i + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4).$

Es besitzt die Fehlerordnung $q = 4$. Runge-Kutta-Verfahren höherer Ordnung finden sich in [44].

1.2.6 Adaption der Schrittweite

Bisher wurde die Schrittweite h während der Rekursion konstant gehalten. Das ist nicht immer sinnvoll. Besitzt die Differenzialgleichung Anteile mit stark unterschiedlicher Dynamik, wie es Bild 1.35 illustriert, dann führen die bisher betrachteten Verfahren zu ungenauen oder sehr rechenintensiven Lösungen.

Würde man nämlich eine konstante Schrittweite h wählen, so müsste sie so klein gewählt werden, dass der Verlauf im Bereich der Schwingungen ($t < 5s$)

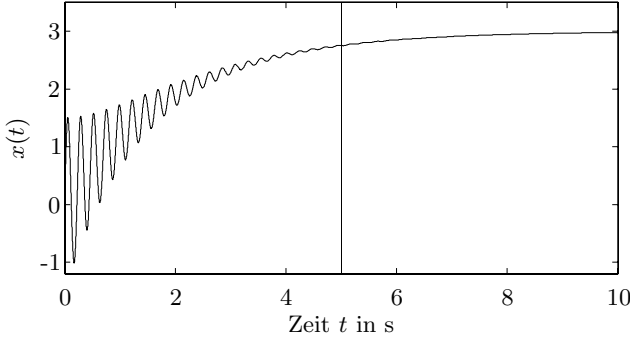


Bild 1.35: Differenzialgleichung mit stark unterschiedlichen Dynamikanteilen.

gut approximiert werden kann. Im schwingungsfreien Kurventeil ($t > 5s$) würde die Simulation dann aber unnötig viele Schritte ausführen, da h hier größer gewählt werden könnte.

Es ist also sinnvoll, h während der Simulation dem Lösungsverlauf $\hat{\mathbf{x}}(t)$ anzupassen. Man wird für schnelle dynamische Verläufe kleine Schrittweiten wählen und für langsame große. Mittels einer solchen Schrittweitensteuerung lässt sich dann der Simulationsaufwand und die Simulationsdauer senken.

Eine einfache Möglichkeit der Schrittweitensteuerung ist folgendes Vorgehen, wobei Φ die Verfahrensfunktion, d. h. die Rechenvorschrift für einen Integrationsschritt, des gewählten Lösungsverfahrens ist und ε ein vorgegebener Fehler:

Schritt 1: Berechne zwei Rekursionsschritte mit h

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{i+1} &= \hat{\mathbf{x}}_i + h\Phi(\hat{\mathbf{x}}_i, \mathbf{u}_i, h), \\ \hat{\mathbf{x}}_{i+2} &= \hat{\mathbf{x}}_{i+1} + h\Phi(\hat{\mathbf{x}}_{i+1}, \mathbf{u}_{i+1}, h).\end{aligned}$$

Schritt 2: Berechne einen Rekursionsschritt mit $2h$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{i+2} = \hat{\mathbf{x}}_i + 2h\Phi(\hat{\mathbf{x}}_i, \mathbf{u}_i, 2h).$$

Schritt 3: Wenn $\|\hat{\mathbf{x}}_{i+2} - \tilde{\mathbf{x}}_{i+2}\| > \varepsilon$, dann setze $h^* = h/2$ und $i^* = i$.
Wenn $\|\hat{\mathbf{x}}_{i+2} - \tilde{\mathbf{x}}_{i+2}\| \leq 0.1\varepsilon$, dann setze $h^* = 2h$ und $i^* = i + 2$.
Sonst setze

$$h^* = h \text{ und } i^* = i + 2.$$

Setze $i = i^*$, $h = h^*$, gehe zu Schritt 1 und beginne neu.

Eine wesentlich effektivere Schrittweitensteuerung als obige intuitive ist die Folgende. Wir wählen zwei Einschrittverfahren und zwar das Verfahren T mit der Fehlerordnung q und das Verfahren Φ mit $q + 1$. Sei ε wieder der

vorgegebene Fehler. Dann gilt folgender Algorithmus:

Schritt 1: Berechne

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_{i+1} &= \hat{\mathbf{x}}_i + h\Gamma(\hat{\mathbf{x}}_i, \mathbf{u}_i, h), \\ \tilde{\mathbf{x}}_{i+1} &= \hat{\mathbf{x}}_i + h\Phi(\hat{\mathbf{x}}_i, \mathbf{u}_i, h), \\ S &= \left(\frac{h \cdot \varepsilon}{\|\tilde{\mathbf{x}}_{i+1} - \hat{\mathbf{x}}_{i+1}\|} \right)^{1/q}.\end{aligned}$$

Schritt 2: Wenn $S \geq 1$, setze $\hat{\mathbf{x}}_{i+1} = \tilde{\mathbf{x}}_{i+1}$, $h^* = h \cdot \min\{2; S\}$ und $i^* = i + 1$.
Wenn $S < 1$, setze $h^* = h \cdot \max\{0.5; S\}$ und $i^* = i$.
Setze $i = i^*$, $h = h^*$, gehe zu Schritt 1 und beginne neu.

Insbesondere bei komplexen Systemen, deren Dynamik schwer einschätzbar ist, sollte man immer eine Schrittweitensteuerung verwenden.

1.2.7 Mehrschrittverfahren von Adams-Bashforth

Bisher wurden Einschrittverfahren betrachtet, also Verfahren, bei denen nur ein vorangegangener Wert $\hat{x}_i$ zur näherungsweisen Berechnung der Fläche F und damit von x_{i+1} herangezogen wurde. Um die Fläche

$$F = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x(t), u(t)) dt$$

noch genauer zu approximieren als bisher, ist es sinnvoll, ein Interpolationspolynom für f durch eine Reihe von Stützstellen

$$\begin{aligned}(t_{i-k}, f(\hat{x}_{i-k}, u_{i-k})) &= (t_{i-k}, f_{i-k}), \\ &\vdots \\ (t_{i-1}, f(\hat{x}_{i-1}, u_{i-1})) &= (t_{i-1}, f_{i-1}), \\ (t_i, f(\hat{x}_i, u_i)) &= (t_i, f_i)\end{aligned}$$

und eventuell

$$(t_{i+1}, f(\hat{x}_{i+1}, u_{i+1})) = (t_{i+1}, f_{i+1})$$

zu legen. Diese letztgenannte Stützstelle ist gerade die, die man eigentlich berechnen möchte. Sie ist also noch gar nicht bekannt. Bild 1.36 illustriert dies. Da mehr als eine Stützstelle für die Flächenapproximation verwendet wird, bezeichnet man entsprechende Integrationsverfahren als *Mehrschrittverfahren*.

Für den Fall, dass (t_{i+1}, f_{i+1}) nicht als Stützstelle genutzt wird, ergeben sich die Verfahren von *Adams-Bashforth*. Für den Fall von drei Stützstellen,

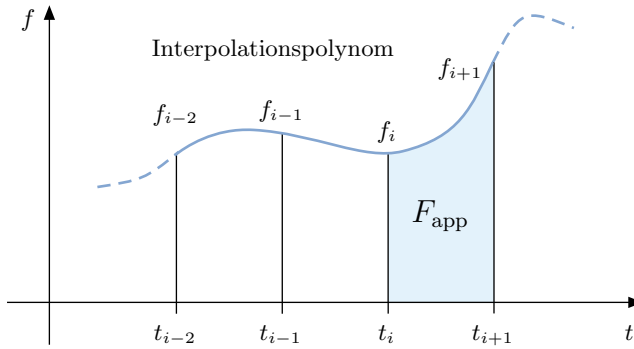


Bild 1.36: Adams-Bashforth-Verfahren.

d. h. eines Polynoms dritter Ordnung, erhält man das Adams-Bashforth-Verfahren im allgemeinen Fall zu

$$\hat{x}_{i+1} = \hat{x}_i + \frac{h}{24} (55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3})$$

mit der Fehlerordnung $q = 4$. Man beachte, dass man die ersten drei Werte $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ und f_1, f_2, f_3 ausgehend von $\hat{x}_0$ und f_0 mittels eines Einschrittverfahrens bestimmen muss.

Ein Nachteil der Adams-Bashforth-Verfahren ist die Tatsache, dass das Interpolationspolynom für die Stützstellen $(t_{i-k}, f_{i-k}), \dots, (t_i, f_i)$, aber nicht für (t_{i+1}, f_{i+1}) berechnet wird. Die Approximation von F durch F_{app} erfolgt jedoch im Intervall $[t_i, t_{i+1}]$. Da nun Interpolationspolynome außerhalb der Interpolationsintervalle, hier $[t_{i-k}, t_i]$, große Fehler aufweisen, wird auch der Verfahrensfehler in t_{i+1} größer sein als gewünscht. Um diesen Nachteil der Adams-Bashforth-Verfahren auszugleichen, verbessern wir sie im Folgenden.

1.2.8 Prädiktor-Korrektor-Verfahren von Adams-Moulton

Bei den *Verfahren von Adams-Moulton* verwendet man ein Adams-Bashforth-Verfahren als Prädiktor und verbessert dessen Ergebnis mittels eines Korrekturterms. Dieser beruht auf einem Interpolationspolynom, das auch die unbekannte Stützstelle

$$(t_{i+1}, f_{i+1})$$

nutzt. Man erhält so folgende Rekursionsgleichung für ein Interpolationspolynom vierter Ordnung:

$$\hat{x}_{i+1} = \hat{x}_i + \frac{h}{720} (251 \underbrace{f(\hat{x}_{i+1}, u_{i+1})}_{f_{i+1}} + 646f_i - 264f_{i-1} + 106f_{i-2} - 19f_{i-3}).$$

Diese Gleichung ist implizit in $\hat{x}_{i+1}$. Man muss also eine Iteration

$$\hat{x}_{i+1}^{(l+1)} = \hat{x}_i + \frac{h}{720} \left(251f(\hat{x}_{i+1}^{(l)}, u_{i+1}) + 646f_i - 264f_{i-1} + 106f_{i-2} - 19f_{i-3} \right)$$

durchführen, um $\hat{x}_{i+1}$ zu bestimmen. Und zwar solange bis sich $\hat{x}_{i+1}^{(l)}$ nicht mehr wesentlich ändert. Dabei gilt die Regel, dass h mindestens so klein sein sollte, dass zwei Iterationsschritte $l = 1, 2$ ausreichen.

Zusammengefasst erhält man im Mehrgrößenfall das Prädiktor-Korrektor-Verfahren von Adams-Moulton mit den zwei Rekursionsgleichungen

$$\begin{aligned} (1) \quad \hat{x}_{i+1}^{(0)} &= \hat{x}_i + \frac{h}{24} (55\mathbf{f}_i - 59\mathbf{f}_{i-1} + 37\mathbf{f}_{i-2} - 9\mathbf{f}_{i-3}), \\ (2) \quad \hat{x}_{i+1}^{(l+1)} &= \hat{x}_i + \frac{h}{720} (251\mathbf{f}(\hat{x}_{i+1}^{(l)}, \mathbf{u}_{i+1}) + 646\mathbf{f}_i - 264\mathbf{f}_{i-1} + 106\mathbf{f}_{i-2} - 19\mathbf{f}_{i-3}) \end{aligned}$$

und der Fehlerordnung $q = 5$. Auch in diesem Fall müssen die ersten drei Werte $\hat{x}_i$ nach $\mathbf{x}_0$ mittels eines Einschrittverfahrens berechnet werden. Dabei ist es sinnvoll, ein Einschrittverfahren derselben Fehlerordnung $q = 5$ zu wählen, wie sie das obige Mehrschrittverfahren von Adams-Moulton besitzt.

Auch bei Mehrschrittverfahren können Schrittweitensteuerungen verwendet werden. Sie sind allerdings komplexer als im Fall der Einschrittverfahren [168].

1.2.9 Stabilität von Integrationsverfahren

Bei allen Integrationsverfahren stellt sich neben der Frage der Fehlerordnung q auch die Frage nach ihrer Stabilität: Bleibt der Fehler ε_n der numerischen Lösung beschränkt oder steigt er mit zunehmender Schrittzahl und Simulationsdauer unbegrenzt an? Die Antwort hängt von der Schrittweite h , der Differenzialgleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ und dem gewählten Integrationsverfahren ab.

Im allgemeinen Fall lässt sich obige Frage aufgrund der Nichtlinearität von $\mathbf{f}$ nicht exakt beantworten. Für den einfachen linearen Testfall

$$\dot{x} = -\lambda x \quad \text{mit} \quad \lambda > 0 \tag{1.24}$$

und mit dem Anfangswert

$$x(0) = x_0$$

lässt sich der Stabilitätsbereich von h aber berechnen. Da dies für alle betrachteten Verfahren möglich ist, können die Verfahren dann bezüglich ihres Stabilitätsverhaltens untereinander verglichen werden und dies ermöglicht eine prinzipielle Einsicht in die Verhältnisse.

Im Falle des Euler-Cauchy-Verfahrens gilt

$$\hat{x}_{i+1} = \hat{x}_i + h(-\lambda\hat{x}_i) = (1 - h\lambda)\hat{x}_i. \tag{1.25}$$

Offensichtlich ist diese Differenzengleichung nur dann stabil, wenn

$$|1 - h\lambda| < 1, \quad \text{also} \quad h\lambda < 2,$$

erfüllt ist. Man gelangt zu diesem Ergebnis auch dann, wenn man berücksichtigt, dass das charakteristische Polynom von Gl. (1.25),

$$P(z) = z - (1 - h\lambda),$$

nur Nullstellen innerhalb des Einheitskreises besitzen darf, wenn die Differenzengleichung (1.25) stabil sein soll. Für $h\lambda < 2$ strebt die Lösung der Differenzengleichung (1.25) also gegen denselben Wert wie die Lösung der Differenzialgleichung (1.24). Der Verlauf von $\hat{x}_i$ kann dabei allerdings wesentlich von $x(t)$ abweichen.

Ähnlich wie für das Euler-Cauchy-Verfahren kann die Stabilität für den betrachteten Testfall $\dot{x} = -\lambda x$ auch für andere Verfahren untersucht werden. Es ergeben sich die Stabilitätswerte $h\lambda$ aus Tabelle 1.3. Man beachte, dass $h\lambda > 0$ gilt.

Tabelle 1.3: Stabilitätswerte.

Euler-Cauchy	$h\lambda < 2$
verbessertes Euler-Cauchy	$h\lambda < 2$
Heun	$h\lambda < 2$
Simpson	$h\lambda < 2.5359$
Runge-Kutta 4. Ordnung	$h\lambda < 2.7853$
Adams-Bashforth 4. Ordnung	$h\lambda < 0.3$
Adams-Moulton 5. Ordnung	$h\lambda < 1.8367$

Das Adams-Bashforth-Verfahren hat einen sehr kleinen Stabilitätsbereich. Dieser Sachverhalt ist auf die Interpolation im Intervall $[t_i, t_{i+1}]$ durch ein Polynom zurückzuführen, das auf den vorherigen Stützstellen $(t_{i-k}, x_{i-k}), \dots, (t_i, x_i)$ beruht. Interpolationspolynome sind aber, wie erwähnt, nur zwischen den Stützstellen der Interpolation genau, außerhalb des Interpolationsbereiches – hier $[t_i, t_{i+1}]$ – weichen sie oft deutlich vom zu approximierenden Verlauf ab. Dadurch wird die Berechnung des Integrals ungenau.

Um das Stabilitätsverhalten der Verfahren zu illustrieren, sind für den Testfall $\dot{x} = -\lambda x$ mit $\lambda = 1$ und den Anfangswert $x(0) = 1$ für verschiedene Schrittweiten h Simulationen durchgeführt worden und in Bild 1.37 dargestellt. Die analytische Lösung dieser Differenzialgleichung ist $x(t) = e^{-t}$.

Stabile Schrittweiten h führen, wie vorheriges Beispiel illustriert, nicht immer zu Verläufen mit hinreichend kleinen Simulationsfehlern. Für das betrachtete Beispiel $\dot{x} = -x$ zeigt Bild 1.38 den prozentualen Fehler

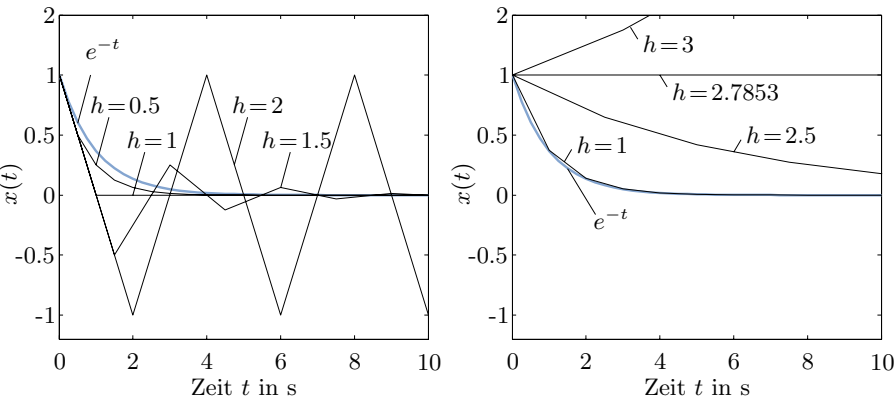


Bild 1.37: Lösung von $\dot{x} = -x$ mit Euler-Cauchy-Verfahren (links) und klassischem Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung (rechts) für verschiedene Schrittweiten h .

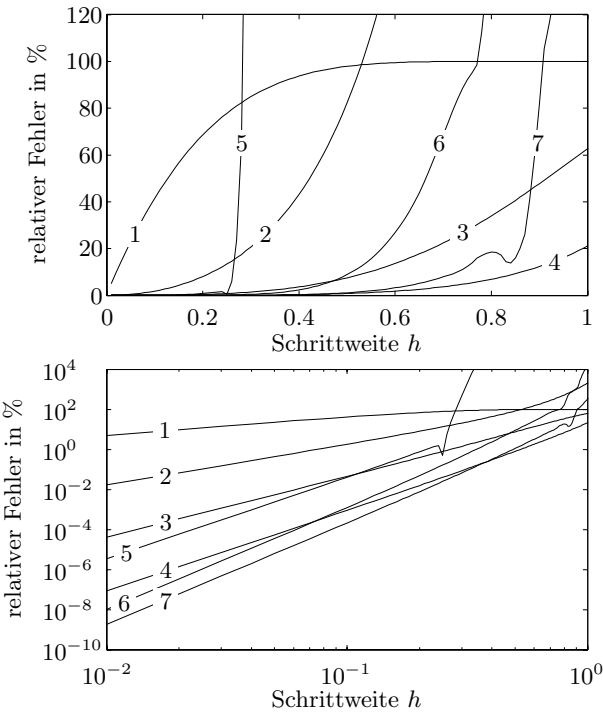


Bild 1.38: Relativer Fehler in linearer Darstellung und in doppeltlogarithmischer Darstellung für folgende Verfahren: 1. Euler-Cauchy, 2. verbessertes Euler-Cauchy, 3. Simpson, 4. klassisches Runge-Kutta, 5. Adams-Bashforth mit $q = 4$, 6. Adams-Moulton mit $q = 5$ (eine Iteration), 7. Adams-Moulton mit $q = 5$ (zehn Iterationen).

$$\varepsilon_n^{\text{rel}} = \frac{|\varepsilon_n|}{|x_n|} \cdot 100\% = \frac{|x_n - \hat{x}_n|}{|x_n|} \cdot 100\%$$

an der Stelle $t = 10s$ für verschiedene Schrittweiten h . Die logarithmische Darstellung zeigt hierbei den Fehlerverlauf für kleine Schrittweiten detaillierter als die linear skalierte Darstellung.

Wie aus Bild 1.38 erkennbar, liefert das klassische Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung eine Approximation der Lösung mit niedrigem Fehler bei vertretbarem Rechenaufwand. Verglichen mit den anderen Verfahren bietet es einen sehr guten Kompromiss zwischen Genauigkeit und Aufwand. Deshalb ist es auch das am häufigsten verwendete Verfahren. Bei kleinen Schrittweiten ist das Prädiktor-Korrektor-Verfahren von Adams-Moulton noch genauer als das Runge-Kutta-Verfahren. Allerdings ist sein Rechenaufwand deutlich größer.

1.2.10 Steife Systeme und ihre Lösung

Die bisher betrachteten Einschritt- und Mehrschrittverfahren eignen sich oft nicht für Systeme

$$\dot{x} = f(x),$$

deren Zustandsvariablen x_i ein stark unterschiedliches Dynamikverhalten zeigen oder die sehr unterschiedliche Dynamikanteile enthalten. Diese Systeme bezeichnet man als *steife Systeme*. Ein einfaches lineares Beispiel ist das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1, \\ \dot{x}_2 &= -100x_2.\end{aligned}$$

Offensichtlich ergibt sich bei der numerischen Lösung das Erfordernis, die Schrittweite h so klein zu wählen, dass die zweite Differenzialgleichung hinreichend genau gelöst werden kann. Daraus resultiert dann allerdings eine sehr lange Gesamtsimulationsdauer, da die erste Differenzialgleichung eine hundertmal längere Simulationsdauer benötigt als die zweite. Bild 1.39 illustriert dies.

Eine Lösungsmöglichkeit für solche steifen Differenzialgleichungen sind Einschrittverfahren mit Schrittweitensteuerung. Diese haben wir im Abschnitt 1.2.6 behandelt. Im Fall von Mehrschrittverfahren setzt man speziell entwickelte Methoden ein, die auf impliziten Rekursionsformeln basieren und über besonders gute Stabilitätseigenschaften verfügen.

Betrachtet man beispielsweise das Verfahren von Euler, so kann man anstelle von

$$F = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x, u) dt \approx h f(x_i, u_i)$$

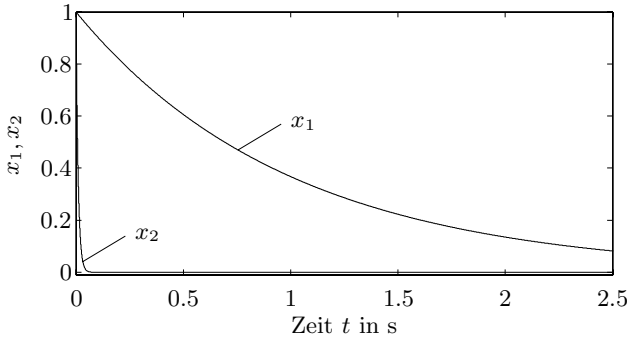


Bild 1.39: Beispiel eines steifen Systems.

auch

$$F \approx hf(x_{i+1}, u_{i+1})$$

verwenden. Man erhält dann als Näherungsgleichung

$$\hat{x}_{i+1} = \hat{x}_i + hf(\hat{x}_{i+1}, u_{i+1}).$$

Ihr impliziter Charakter bedingt, dass sie für jeden Simulationsschritt i mehrfach iteriert werden muss. Es ergibt sich, wie bei der Korrektor-Formel des Adams-Moulton-Verfahrens, eine iterativ zu lösende Gleichung

$$\hat{x}_{i+1}^{(l+1)} = \hat{x}_i + hf(\hat{x}_{i+1}^{(l)}, u_{i+1}).$$

Dieses Verfahren bezeichnet man als *implizites Euler-Cauchy-Verfahren*. Es ist gleichzeitig auch das einfachste einer ganzen Klasse von Lösungsverfahren für steife Differenzialgleichungen: den *Verfahren von Gear*. Alle diese Verfahren sind implizite Verfahren. Tabelle 1.4 zeigt die Gear-Formeln bis zur Fehlerordnung $q = 4$ für den mehrdimensionalen Fall. Dabei ist M die Anzahl der Stützstellen.

Eine wichtige Eigenschaft der Gear-Verfahren ist ihr großer Stabilitätsbereich. Für das Testbeispiel

$$\dot{x} = -\lambda x, \quad \lambda > 0,$$

gilt für den Stabilitätsbereich zum Beispiel

$$h\lambda < \infty,$$

d. h., die Verfahren sind für alle h stabil. Auch für Gear-Verfahren und andere Verfahren zur Lösung steifer Differenzialgleichungen existieren Schrittweitensteuerungen [63, 91]. Ein Überblick über Lösungsverfahren steifer Differenzialgleichungen findet sich in [67].

Tabelle 1.4: Gearformeln.

M	Gearformeln	q
1	$\hat{\mathbf{x}}_{i+1}^{(l+1)} = \hat{\mathbf{x}}_i + h\mathbf{f}_{i+1}^{(l)}$	1
2	$\hat{\mathbf{x}}_{i+1}^{(l+1)} = \frac{1}{3} \left(4\hat{\mathbf{x}}_i - \hat{\mathbf{x}}_{i-1} + 2h\mathbf{f}_{i+1}^{(l)} \right)$	2
3	$\hat{\mathbf{x}}_{i+1}^{(l+1)} = \frac{1}{11} \left(18\hat{\mathbf{x}}_i - 9\hat{\mathbf{x}}_{i-1} + 2\hat{\mathbf{x}}_{i-2} + 6h\mathbf{f}_{i+1}^{(l)} \right)$	3
4	$\hat{\mathbf{x}}_{i+1}^{(l+1)} = \frac{1}{25} \left(48\hat{\mathbf{x}}_i - 36\hat{\mathbf{x}}_{i-1} + 16\hat{\mathbf{x}}_{i-2} - 3\hat{\mathbf{x}}_{i-3} + 12h\mathbf{f}_{i+1}^{(l)} \right)$	4

Grenzzyklen und Stabilitätskriterien

2.1 Verfahren der harmonischen Balance

2.1.1 Idee des Verfahrens

Das Verfahren der harmonischen Balance dient dazu, in nichtlinearen Regelkreisen, welche die in Bild 2.1 abgebildete Struktur besitzen oder in diese gebracht wurden, Grenzzyklen aufzuspüren. Der abgebildete Regelkreis wird als *nichtlinearer Standardregelkreis* bezeichnet. Er besteht aus einem linearen System, das hier durch seine Laplace-Übertragungsfunktion $G(s)$ dargestellt ist und einer nichtlinearen Kennlinie $u = f(e)$, die z. B. als Regler fungiert.

Das Fehlen einer Führungsgröße w ist keine große Einschränkung, da eine konstante Führungsgröße durch eine Transformation nach null verschoben werden kann. Außerdem ist ein Grenzzyklus auch für $w = 0$ auszuschließen. Es reicht daher aus, den Fall $w = 0$ zu betrachten.

Nichtlineare Standardregelkreise sind in der Praxis oft anzutreffen. Entweder, weil gezielt nichtlineare Regler eingesetzt werden, oder, weil nichtlineare Kennlinien als unerwünschte Elemente in der Regelkreisstruktur enthalten sind, z. B. die Begrenzungskennlinie des Stellgliedes. Typische Kennlinien sind in Bild 2.2 dargestellt.

Es stellt sich die Frage, wann ein Grenzzyklus in obigem Regelkreis auftreten kann. Um sich an die Lösung dieses Problems heranzutasten, soll zuerst der Sonderfall einer linearen Kennlinie

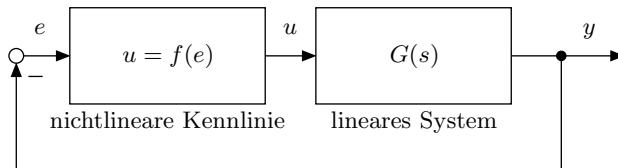


Bild 2.1: Nichtlinearer Standardregelkreis.

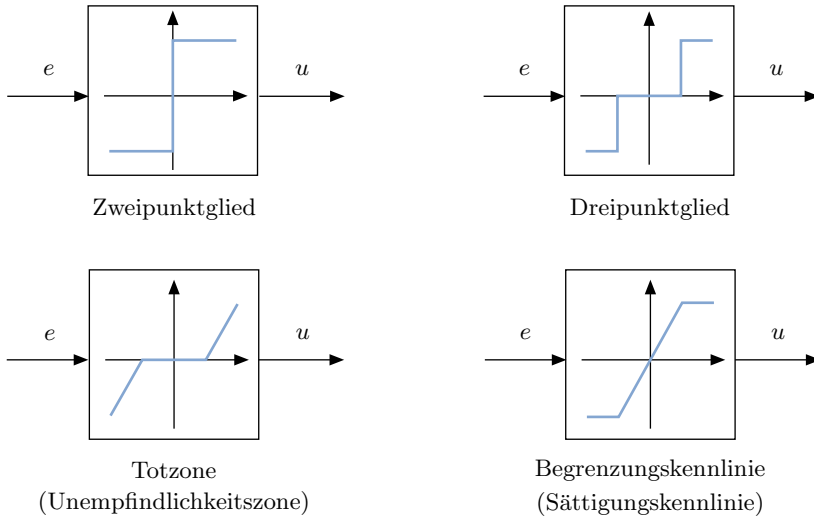


Bild 2.2: Typische nichtlineare Kennlinien in Regelkreisen.

$$u = f(e) = K \cdot e$$

betrachtet werden. In diesem Fall hat der Regelkreis die in Bild 2.3 dargestellte Form. Eine Dauerschwingung, also eine sich selbsterhaltende Schwingung, tritt gerade dann auf, wenn man in den Regelkreis eine Schwingung

$$e(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t)$$

einspeist und diese um 180° phasenverschoben als

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t - 180^\circ) = -A \cdot \sin(\omega_0 t)$$

am Ausgang des linearen Systems herauskommt. Dann wird die Schwingung am Summationspunkt erneut in den Regelkreis eingespeist und so weiter. Im Frequenzbereich lautet obige Bedingung für eine Dauerschwingung

$$A \cdot e^{j(\omega_0 t - 180^\circ)} = K \cdot G(j\omega_0) \cdot A \cdot e^{j\omega_0 t}$$

oder

$$K \cdot G(j\omega_0) = -1. \quad (2.1)$$

Man bezeichnet dieses Gleichgewicht der Sinusschwingungen am Ein- und Ausgang des offenen Kreises als *harmonische Balance*.

Wir können nun aus obigem Sachverhalt wie folgt auf die nichtlineare Situation schließen. Schaltet man auf den Eingang der Nichtlinearität einen sinusförmigen Signalverlauf

$$e(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t),$$

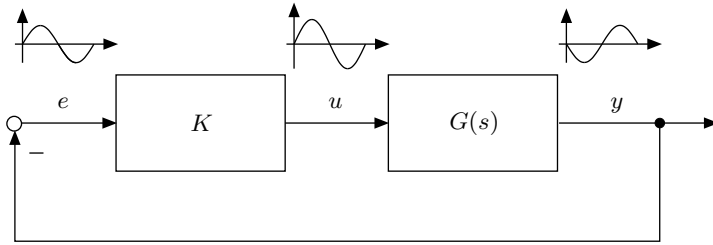


Bild 2.3: Regelkreis mit linearem Regler.

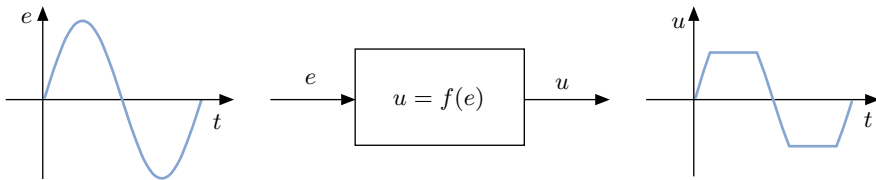


Bild 2.4: Verzerrung des Eingangssignals durch die Nichtlinearität.

so erhält man am Ausgang ein verzerrtes Sinussignal, wie es Bild 2.4 exemplarisch illustriert.

Das Ausgangssignal u entwickelt man in eine Fourier-Reihe

$$u(t) = c_0(A) + \sum_{i=1}^{\infty} c_i(A) \cdot \sin(i \cdot \omega_0 t + \varphi_i(A)).$$

Ist nun die Nichtlinearität von der Art, dass

$$c_0(A) = 0 \quad \text{und} \quad c_i \ll c_1, \quad i = 2, 3, \dots$$

gilt, also der Gleichanteil null ist und die Amplituden c_i der Oberwellen klein gegenüber denen der Grundwelle sind, so kann man

$$u(t) \approx c_1(A) \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_1(A))$$

nähern. Die Bedingung $c_0(A) = 0$ ist erfüllt, wenn die Kennlinie punktsymmetrisch ist. Durch obige Näherung hat man die Nichtlinearität f nun linearisiert und die lineare Näherung besitzt eine amplitudenabhängige Verstärkung. Sie ergibt sich aus

$$e(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t)$$

und

$$u(t) = c_1(A) \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_1(A))$$

zu

$$N(A) = \frac{c_1(A)}{A} \cdot e^{j\varphi_1(A)}.$$

Diese Verstärkung $N(A)$ des linearisierten Kennliniengliedes bezeichnet man als *Beschreibungsfunktion*. Man beachte, dass $N(A)$ nicht frequenzabhängig ist, Verstärkungsfaktor $c_1(A)/A$ und Phasendrehung $\varphi_1(A)$ aber von der Amplitude A des Eingangssignals abhängen.

Das nichtlineare Kennlinienglied wird nun im Regelkreis durch seine lineare Näherung ersetzt, wie in Bild 2.5 gezeigt. Für diesen linearen Regelkreis lautet die bereits hergeleitete Bedingung (2.1) für den Zustand der harmonischen Balance, d. h. eine sich selbsterhaltende Dauerschwingung,

$$N(A) \cdot G(j\omega) = -1$$

oder

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)}. \quad (2.2)$$

Obige Überlegung ist natürlich nur gültig, wenn die vernachlässigten Oberwellen mit den Frequenzen $2\omega_0, 3\omega_0, 4\omega_0, \dots$ durch die Regelstrecke $G(s)$ ausreichend stark gedämpft werden. D. h., die Übertragungsfunktion $G(s)$ muss ein ausreichend starkes Tiefpassverhalten aufweisen.

Zusammengefasst und auf Kennlinien $u = f(e, \dot{e})$ generalisiert erhält man

Heuristik 1 (Harmonische Balance). *Gegeben sei ein nichtlinearer Standardregelkreis*

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)U(s), \\ e &= -y, \\ u &= f(e, \dot{e}). \end{aligned}$$

Die Kennlinie $u = f(e, \dot{e})$ sei punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs, d. h., es gilt $f(-e, -\dot{e}) = -f(e, \dot{e})$. Die Regelstrecke besitze einen ausreichend starken Tiefpasscharakter. Existieren dann Werte ω und A , so dass die Gleichung

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)}$$

erfüllt ist, so tritt vermutlich eine Dauerschwingung auf, die näherungsweise die Frequenz ω und die Amplitude A besitzt.

Die Beschreibungsfunktion $N(A)$ ist reell, wenn die punktsymmetrische Nichtlinearität nur von e abhängt. Ist sie auch eine Funktion von $\dot{e}$, so besitzt $N(A)$ in der Regel einen Imaginärteil.

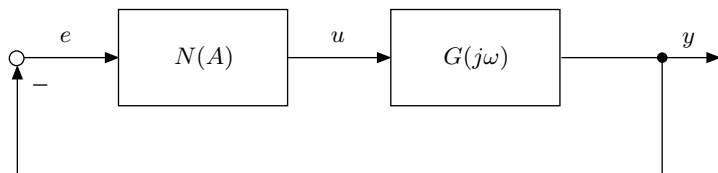


Bild 2.5: Linearisiertes Kennlinienglied und lineare Regelstrecke.

Die Bedingung (2.2) lässt sich grafisch auswerten. Zu diesem Zweck zeichnet man die lineare Ortskurve $G(j\omega)$ und die Ortskurve $-1/N(A)$ der Beschreibungsfunktion. Existiert ein Schnittpunkt, so tritt vermutlich eine Dauerschwingung auf. Mittels des Schnittpunktes können auch die Frequenz und die Amplitude der vermuteten Dauerschwingung näherungsweise berechnet werden.

2.1.2 Illustrationsbeispiel

Um die oben geschilderte Vorgehensweise zu illustrieren, betrachten wir die Regelstrecke

$$G(s) = \frac{9}{s(s+1)(s+9)},$$

die wir mittels eines Zweipunktgliedes

$$u = -b \operatorname{sgn}(y)$$

regeln. Bild 2.6 zeigt den entsprechenden Regelkreis.

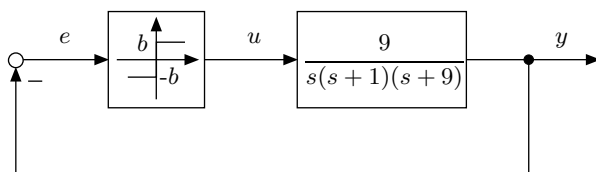


Bild 2.6: Regelkreis mit Zweipunktregler.

Wir ermitteln zuerst die Beschreibungsfunktion $N(A)$ des Zweipunktreglers. Seine Ausgangsfunktion ist für jede Sinusfunktion am Eingang eine Folge von Rechtecksignalen. Die zugehörige Fourier-Reihe der Rechtecksignalfolge ist

$$u(t) = \frac{4b}{\pi} \left(\sin \omega_0 t + \frac{\sin 3\omega_0 t}{3} + \frac{\sin 5\omega_0 t}{5} + \dots \right).$$

Man nähert

$$u(t) \approx \frac{4b}{\pi} \sin \omega_0 t = c_1(A) \sin \omega_0 t$$

und erhält

$$N(A) = \frac{c_1(A)}{A} = \frac{4b}{\pi A}.$$

Um eine Dauerschwingung zu erkennen, stellt man beide Seiten der Gleichung der harmonischen Balance

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)},$$

d. h.

$$\frac{9}{j\omega(j\omega + 1)(j\omega + 9)} = -\frac{\pi A}{4b}, \quad (2.3)$$

grafisch dar, was in Bild 2.7 geschehen ist. Da ein Schnittpunkt der Ortskurven $G(j\omega)$ und $-1/N(A)$ existiert, kann auf eine Dauerschwingung geschlossen werden. Ihre Amplitude und Frequenz bestimmt man für $b = 1$ aus Gl. (2.3), d. h. aus

$$-\frac{4}{\pi A} = -\frac{10}{9}\omega^2 + j\frac{9\omega - \omega^3}{9},$$

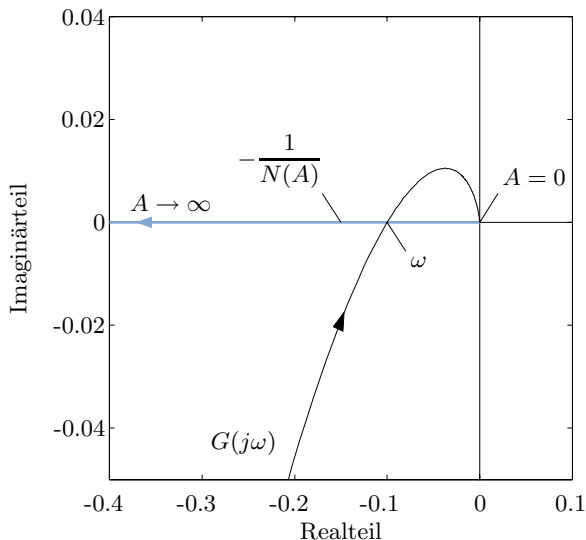


Bild 2.7: Verlauf der Ortskurve $G(j\omega)$ und der Funktion $-1/N(A)$.

zu

$$\omega = 3 \quad \text{und} \quad A = \frac{2}{5\pi} = 0.127.$$

Vergleicht man diese beiden Werte mit den aus einer Simulation ermittelten, so erkennt man den Näherungscharakter des Verfahrens. Denn aus der Simulation ergeben sich die Werte $\omega = 2.5$ und $A = 0.195$.

2.1.3 Kennlinien und ihre Beschreibungsfunktionen

Das Verfahren der harmonischen Balance ist auch anwendbar, wenn die nicht-lineare Kennlinie nicht nur von e , sondern auch von $\dot{e}$ abhängig ist. Eine der wichtigsten Kennlinien dieser Art ist die Hysterese Kennlinie

$$u = \begin{cases} b \operatorname{sgn}(e + a) & \text{für } \dot{e} < 0, \\ b \operatorname{sgn}(e - a) & \text{für } \dot{e} > 0 \end{cases}$$

$$= b \operatorname{sgn}(e - a \operatorname{sgn}(\dot{e})),$$

die in Bild 2.8 dargestellt ist. Hysterese Kennlinien finden sich z. B. in Reglern von Temperaturregelkreisen, etwa in Bügeleisen. Hier wird mittels eines Bimetalls die Heizung eingeschaltet, bis sich das Bimetall bei einer hohen Temperatur so verbogen hat, dass es einen Kontakt öffnet und den Heizstrom unterbricht. Nach einer Abkühlphase hat sich das Bimetall entspannt und schaltet den Heizstrom wieder ein und so weiter. In elektronischen Baugruppen, wie z. B. analogen Reglerbausteinen, werden Hysterese Kennlinien als Schmitt-Trigger realisiert.

Das Loseverhalten ist eine weitere häufige Nichtlinearität, die außer von e auch von $\dot{e}$ abhängt. Das Loseverhalten wird durch die in Bild 2.9 dargestellte

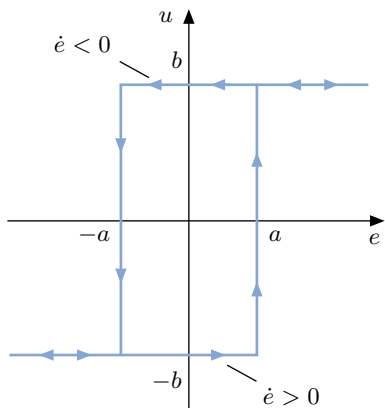


Bild 2.8: Hysterese Kennlinie.

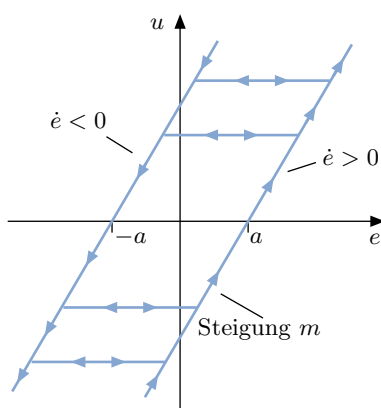


Bild 2.9: Lose Kennlinie.

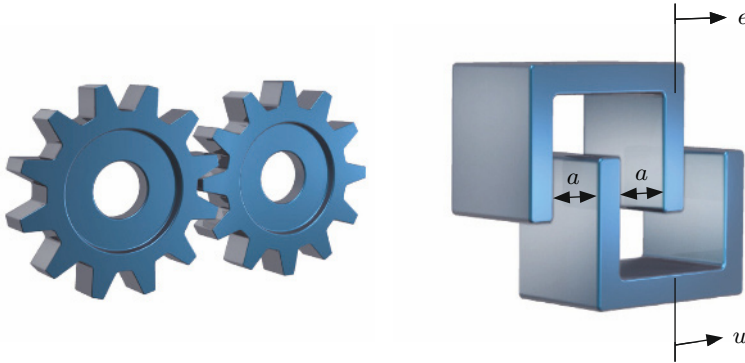


Bild 2.10: Beispielsysteme mit Loseverhalten.

Kennlinie beschrieben. Lose tritt, wie in Bild 2.10 gezeigt, bei mechanischen Systemen als Spiel zwischen Zahnrädern, Mitnehmern, Anlenkungen usw. auf. Man beachte, dass die horizontalen Zweige im Bild 2.9 je nach Vorzeichen von $\dot{e}$ in beide Richtungen durchlaufen werden. Die horizontalen Zweige können für jeden Wert u auftreten.

Die Beschreibungsfunktion $N(A)$ bestimmt man auch für Hysteresekennlinien und Lose, indem man auf ihren Eingang eine Sinusfunktion schaltet und das resultierende Ausgangssignal in einer Fourier-Reihe darstellt. Aus der Grundwelle ergibt sich dann die Beschreibungsfunktion $N(A)$. Für Hysteresese, Lose und weitere wichtige Kennlinien sind in Tabelle 2.1 die zugehörigen Beschreibungsfunktionen $N(A)$ angegeben.

Viele Kennlinien können additiv aus einigen Standardkennlinien zusammengesetzt werden. Diese Addition von Kennlinien entspricht einer Parallelschaltung. Ein Beispiel hierfür sind punktsymmetrische Kennlinien in Treppenform. Sie können durch Summation aus Dreipunktkennlinien gebildet werden. Man kann so z.B. die treppenförmige Kennlinie eines A/D-Wandlers nachbilden.

Aufgrund des linearen Charakters von Beschreibungsfunktionen setzt sich die Beschreibungsfunktion $N_{\text{ges}}(A)$ von k parallelgeschalteten Kennlinien

$$u = \sum_{i=1}^k f_i(e, \dot{e})$$

aus der Überlagerung der Beschreibungsfunktion $N_i(A)$ der einzelnen Nichtlinearitäten f_i gemäß

$$N_{\text{ges}}(A) = \sum_{i=1}^k N_i(A)$$

zusammen.

Tabelle 2.1: Kennlinien und ihre Beschreibungsfunktionen.

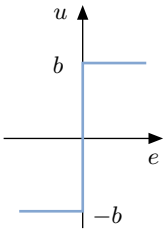
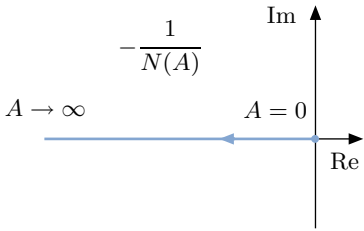
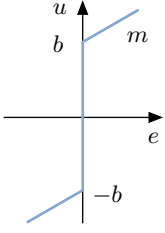
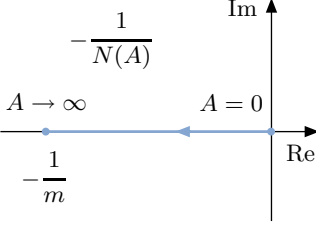
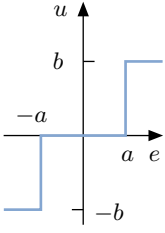
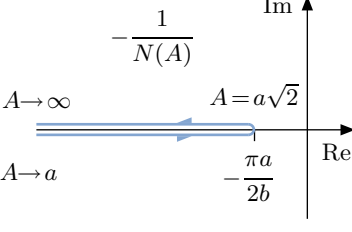
Nichtlinearität	Beschreibungsfunktion $N(A)$ und Ortskurve $-1/N(A)$
Zweipunktglied 	 $N(A) = \frac{4b}{\pi A}, \quad A \geq 0$
Vorlast  Steigung: m	 $N(A) = \frac{4b}{\pi A} + m, \quad A \geq 0$
Dreipunktglied 	 $N(A) = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}, \quad A \geq a$

Tabelle 2.1: Kennlinien und ihre Beschreibungsfunktionen - Fortsetzung.

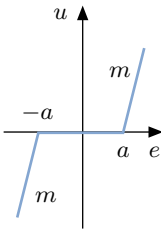
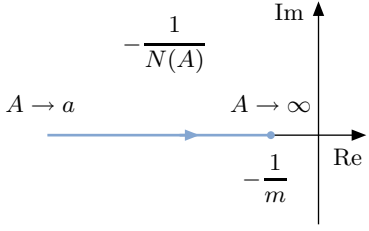
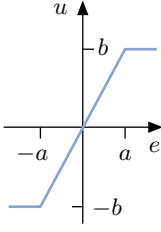
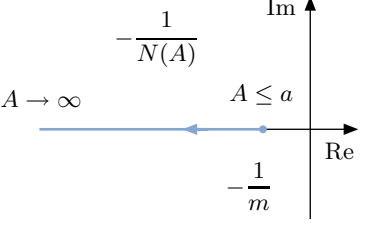
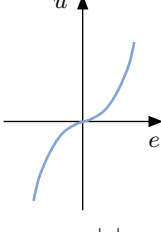
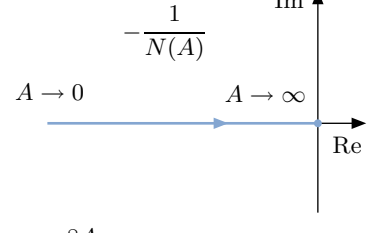
Nichtlinearität	Beschreibungsfunktion $N(A)$ und Ortskurve $-1/N(A)$
Totzone  Steigung: m	$N(A) = m \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{a}{A} - \frac{2}{\pi} \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A} \right)^2} \right), \quad A \geq a$
Begrenzungsglied  $m = \frac{b}{a}$	$N(A) = \begin{cases} m & , \quad 0 \leq A \leq a \\ \frac{2m}{\pi} \left(\arcsin \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A} \right)^2} \right) & , \quad A > a \end{cases}$
Potenzen  $u = e e ,$ $u = e^3$	$N(A) = \frac{8A}{3\pi}, \quad \text{für } u = e e \text{ und } A \geq 0$$N(A) = \frac{3}{4} A^2, \quad \text{für } u = e^3 \text{ und } A \geq 0$

Tabelle 2.1: Kennlinien und ihre Beschreibungsfunktionen - Fortsetzung.

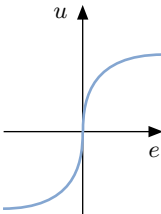
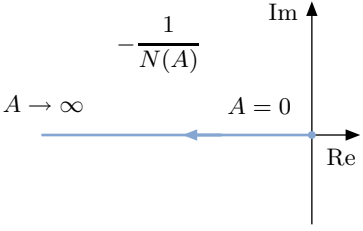
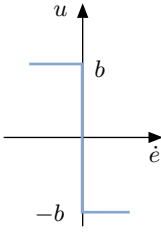
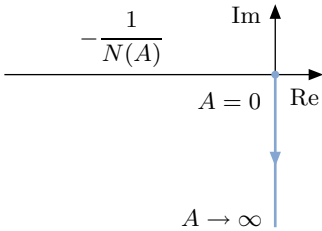
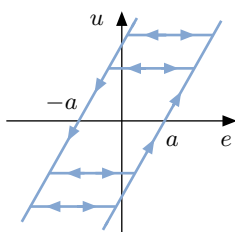
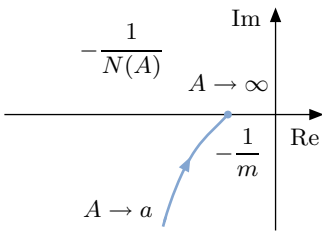
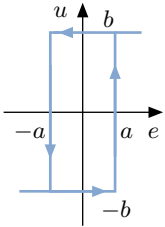
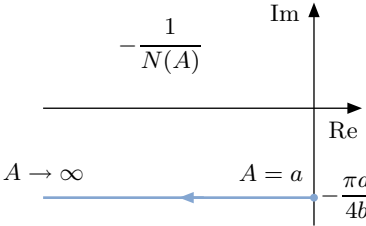
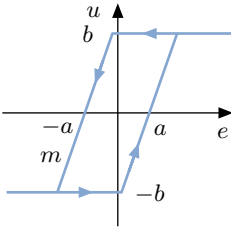
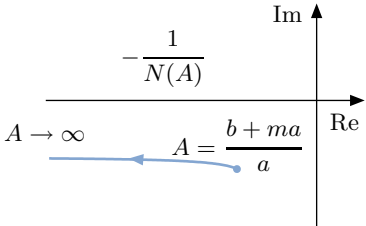
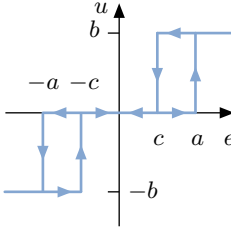
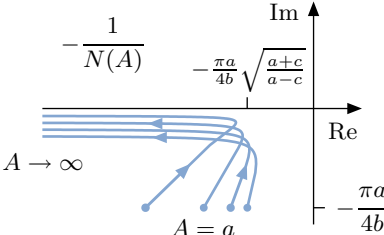
Nichtlinearität	Beschreibungsfunktion $N(A)$ und Ortskurve $-1/N(A)$
Wurzeln  $u = \operatorname{sgn}(e)\sqrt{ e }$, $u = \sqrt[3]{e}$	 $N(A) = 1.11A^{-1/2}$, für $u = \operatorname{sgn}(e)\sqrt{ e }$ und $A \geq 0$ $N(A) = 1.16A^{-2/3}$, für $u = \sqrt[3]{e}$ und $A \geq 0$
Trockene Reibung  Reibkraft: b $u = -b \operatorname{sgn}(\dot{e})$	 $N(A) = -j \frac{4b}{\pi A}, A \geq 0$
Lose  Steigung: m	 $N(A) = \frac{m}{2} + \frac{m}{\pi} \left(\arcsin \alpha + \alpha \sqrt{1-\alpha^2} \right) - j \frac{m}{\pi} (1-\alpha^2)$ mit $\alpha = 1 - \frac{2a}{A}, A > a$

Tabelle 2.1: Kennlinien und ihre Beschreibungsfunktionen - Fortsetzung.

Nichtlinearität	Beschreibungsfunktion $N(A)$ und Ortskurve $-1/N(A)$
Harte Hysterese 	 $N(A) = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} - j \frac{4ab}{\pi A^2}, \quad A \geq a$
Weiche Hysterese  Steigung: m	 $N(A) = \frac{m}{\pi} \left(\mu \left(\frac{b+ma}{mA} \right) + \mu \left(\frac{b-ma}{mA} \right) \right) - j \frac{4ba}{\pi A^2},$ $\mu(x) = \arcsin(x) + x \sqrt{1-x^2}, \quad A \geq \frac{b+ma}{m}$
Dreipunktglied mit Hysterese 	 $N(A) = \frac{2b}{\pi A} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{c}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \right) - j \frac{2b(a-c)}{\pi A^2},$ $A \geq a$

Ein wichtiges Beispiel für eine zusammengesetzte Kennlinie ist eine stückweise lineare, stetige Kennlinie, d. h. ein Polygonzug. Man kann diesen Polygonzug aus einer Summe von Totzonen oder Begrenzungsgliedern konstruieren. In den $2k$ Intervallen $[\pm a_i, \pm a_{i+1})$, $i = 0, \dots, k$, eines Polygonzuges liegt jeweils eine Gerade mit der Steigung m_i und der Polygonzug ist punktsymmetrisch und geht durch null, d. h.

$$u = \begin{cases} m_1 e, & e \in [0, \pm a_1), \\ m_2 e \pm (m_1 - m_2)a_1, & e \in [\pm a_1, \pm a_2), \\ m_3 e \pm (m_1 - m_2)a_1 \pm (m_2 - m_3)a_2, & e \in [\pm a_2, \pm a_3), \\ \vdots & \\ m_k e \pm \sum_{i=1}^{k-1} (m_i - m_{i+1})a_i, & e \in [\pm a_{k-1}, \pm \infty). \end{cases}$$

Dann setzt sich die zugehörige Beschreibungsfunktion aus Beschreibungsfunktionen von Totzonen zusammen. Die entsprechende Beschreibungsfunktion der Totzone findet sich in Tabelle 2.1. Es gilt für den Polygonzug

$$N_{\text{ges}}(A) = m_1 + \sum_{i=1}^{k-1} (m_{i+1} - m_i) \left(1 - \frac{2}{\pi} \mu \left(\frac{a_i}{A} \right) \right)$$

mit

$$\mu(x) = \arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2}.$$

Hierbei muss $A \geq a_{k-1}$ sein.

2.1.4 Stabilitätsanalyse von Grenzzyklen

Aus den Verläufen der Ortskurve $G(j\omega)$ und der nichtlinearen Ortskurve $-1/N(A)$ kann man nicht nur erkennen, ob ein Grenzzyklus existieren könnte, sondern auch auf sein Stabilitätsverhalten schließen. Man kann also untersuchen, ob der Grenzzyklus stabil, semistabil oder instabil ist.

Für diese Untersuchung geht man davon aus, dass man einen Grenzzyklus mit der Amplitude A_G bestimmt hat. Dann wird das Regelkreisverhalten in einer Umgebung des Grenzzyklus näherungsweise durch den linearen Ersatzkreis aus Bild 2.3 beschrieben. Hierbei gilt für den Verstärkungsfaktor des linearen Ersatzreglers

$$K = N(A).$$

Ändert man nun die Amplitude geringfügig um ΔA zu

$$A = A_G + \Delta A,$$

so ändert sich auch K geringfügig. Durch diese Änderung der Amplitude A haben wir den Grenzzyklus verlassen und müssen uns nun die Frage stellen,

ob die Trajektorie auf den Grenzzyklus zurückläuft oder von ihm weg. Diese Frage lässt sich durch die Untersuchung des Stabilitätsverhaltens des linearen Ersatzregelkreises, siehe Bild 2.5, bei Änderungen von $K = N(A_G + \Delta A)$ klären. Vier Fälle sind möglich, siehe hierzu auch Bild 2.11.

Im Fall (a) gilt $\Delta A > 0$ und der lineare Ersatzregelkreis wird instabil. Da der lineare Ersatzregelkreis eine gute Näherung des nichtlinearen Regelkreises ist, können wir schlussfolgern, dass sich die Trajektorie vom Grenzzyklus entfernt. Im Fall (b) gilt $\Delta A > 0$ und der lineare Ersatzregelkreis wird stabil, deshalb verringert sich die Amplitude A und als Folge strebt die Trajektorie zum Grenzzyklus. Im Fall (c) gilt $\Delta A < 0$ und der lineare Ersatzregelkreis wird instabil, deshalb wird die Amplitude A größer und die Trajektorie strebt zum Grenzzyklus. Im Fall (d) gilt $\Delta A < 0$ und der lineare Ersatzregelkreis wird stabil. Als Folge verlässt die Trajektorie den Grenzzyklus.

Da sowohl der Fall $\Delta A > 0$ als auch der Fall $\Delta A < 0$ im Regelkreis auftreten, lässt sich aus den folgenden Situationen auf die Stabilität des Grenzzyklus schließen:

- Situation 1: Fall (a) und (c) : semistabiler Grenzzyklus,
- Situation 2: Fall (a) und (d) : instabiler Grenzzyklus,
- Situation 3: Fall (b) und (c) : stabiler Grenzzyklus,
- Situation 4: Fall (b) und (d) : semistabiler Grenzzyklus.

Ob der lineare Ersatzregelkreis durch eine Änderung ΔA und damit von

$$K = N(A_G + \Delta A)$$

stabil oder instabil wird und welche der obigen Situationen daraus resultiert, entscheiden wir im Folgenden anhand des vereinfachten Nyquist-Kriteriums

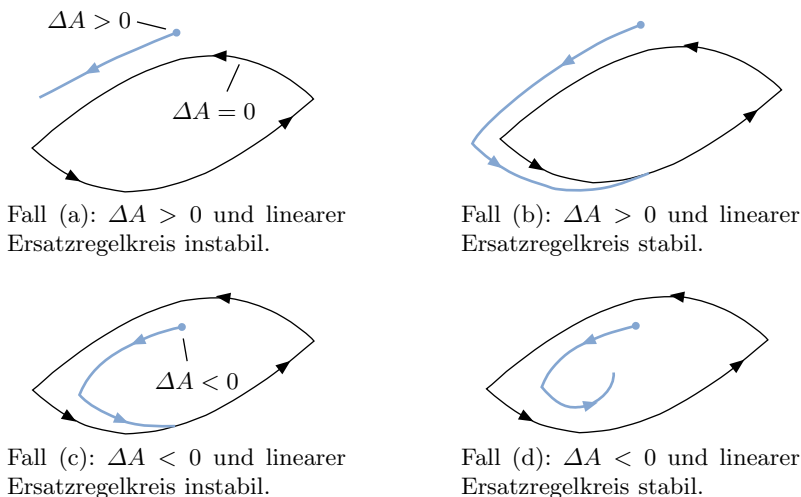


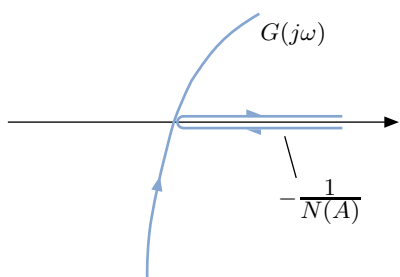
Bild 2.11: Stabilitätsverhalten bei Amplitudenänderung ΔA des Grenzzyklus.

[53]. Aus der linearen Systemtheorie wissen wir, dass das vereinfachte Nyquist-Kriterium auf einen offenen Regelkreis mit der Übertragungsfunktion $K \cdot G(s)$, die ausschließlich stabile Pole und höchstens zwei Pole bei $s = 0$ besitzt, angewendet wird. Lässt dann die Ortskurve $G(j\omega)$ den kritischen Punkt

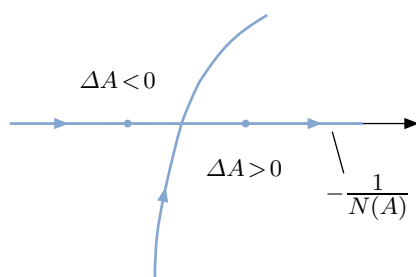
$$-\frac{1}{K} = -\frac{1}{N(A_G + \Delta A)}$$

links liegen, so ist der geschlossene Regelkreis stabil. Andernfalls ist er instabil. Somit können die obigen vier Situationen anhand der linearen und der nichtlinearen Ortskurve unterschieden werden, wie es das Bild 2.12 zeigt.

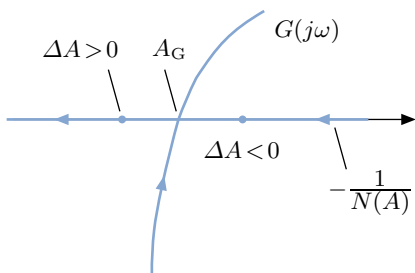
Betrachten wir beispielsweise Situation 3 in Bild 2.12, so lässt die Ortskurve $G(j\omega)$ für $\Delta A > 0$ den Punkt $-1/N(A_G + \Delta A)$ links liegen. Also ist der lineare Ersatzregelkreis stabil und der Fall (b) aus Bild 2.11 liegt vor, d. h., die Trajektorie läuft von außen auf den Grenzzzyklus zu. Für $\Delta A < 0$ dagegen ist der lineare Ersatzregelkreis instabil, da die Ortskurve $G(j\omega)$ den Punkt $-1/N(A_G + \Delta A)$ rechts liegen lässt. Der Fall (c) aus Bild 2.11 liegt vor und die Trajektorie läuft von innen auf den Grenzzzyklus zu. Der Grenzzzyklus ist also stabil.



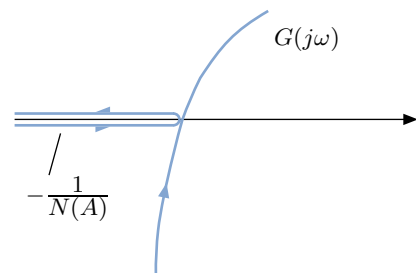
Situation 1: Fälle (a) und (c) liegen vor. Der Grenzzzyklus ist semistabil.



Situation 2: Fälle (a) und (d) liegen vor. Der Grenzzzyklus ist instabil.



Situation 3: Fälle (b) und (c) liegen vor. Der Grenzzzyklus ist stabil.



Situation 4: Fälle (b) und (d) liegen vor. Der Grenzzzyklus ist semistabil.

Bild 2.12: Mögliche Situationen für die Stabilität von Grenzzyklen.

Obige Untersuchungen motivieren folgendes Kriterium über die Stabilität von Grenzzyklen. Wie das Verfahren der harmonischen Balance selbst, liefert es jedoch keine sichere Aussage, sondern gibt nur Hinweise auf die möglichen Verhältnisse.

Heuristik 2 (Stabilität von Grenzzyklen). *Ein Grenzzyklus ist im Falle einer Regelstrecke $G(s)$ mit ausschließlich stabilen Polen und höchstens zwei Polen bei $s = 0$ vermutlich*

- (1) *stabil, wenn die nichtlineare Ortskurve die lineare von rechts nach links im zugehörigen Schnittpunkt kreuzt,*
- (2) *semistabil, wenn die nichtlineare Ortskurve die lineare im zugehörigen Schnittpunkt tangiert,*
- (3) *instabil, wenn die nichtlineare Ortskurve die lineare von links nach rechts im zugehörigen Schnittpunkt kreuzt.*

Die Richtungen *links* und *rechts* sind dabei als diejenigen anzusehen, die sich beim Entlanglaufen auf der linearen Ortskurve, beginnend bei $\omega = 0$, ergeben.

Ein instabiler oder semistabiler Grenzzyklus ist für einen Regelkreis relativ unkritisch, da die Trajektorie ihn bei kleinsten Störungen verlässt und dann z. B. stabil nach $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ strebt. Kennlinien mit Funktionen $-1/N(A)$, die wie in Situation 2 des Bildes 2.12 in Richtung Ursprung laufen, sind also ungefährlicher als die, bei denen das andersherum ist. Denn $-1/N(A)$ schneidet dann die Ortskurve $G(j\omega)$ von links nach rechts, da die meisten Ortskurven im Uhrzeigersinn drehend in den Ursprung laufen.

Für das Verfahren der harmonischen Balance gibt es eine Reihe von Erweiterungen für Regelkreise mit mehreren Kennlinien, unsymmetrischen Kennlinien und Abtastregelungen [50, 60].

2.1.5 Beispiel Servolenksystem

Wir betrachten ein Servolenksystem für Kraftfahrzeuge, das nach dem Winkelüberlagerungsprinzip arbeitet [92, 101, 102]. Bei diesem Prinzip wird eine hohe Lenkübersetzung verwendet, um das Lenkmoment für den Fahrer zu reduzieren. Nachteilig sind die großen Lenkwinkel. Ein motorgetriebenes Überlagerungsgetriebe verringert daher den Lenkwinkel, den der Fahrer aufzubringen hat. Das Überlagerungsgetriebe erzeugt hierfür einen Zusatzwinkel δ_2 , der dem Lenkradwinkel δ_1 additiv überlagert wird. Beide zusammen erzeugen den Ausgangswinkel δ_y . Bild 2.13 zeigt den prinzipiellen Aufbau.

Servolenksysteme mit Winkelüberlagerungsprinzip werden auch bei Aktivlenkungen eingesetzt. Die Aktivlenkung reduziert den Lenkwinkelbedarf bei niedrigen Geschwindigkeiten durch Mitlenken des Stellmotors. Der Fahrer kann so mit kleineren Lenkradbewegungen enge Kurven durchfahren. Bei hohen Geschwindigkeiten lenkt der Überlagerungsmotor gegen, so dass große Lenkradbewegungen nur zu kleinen Lenkeinschlägen führen. Das erhöht die Fahrsicherheit in diesem Geschwindigkeitsbereich.

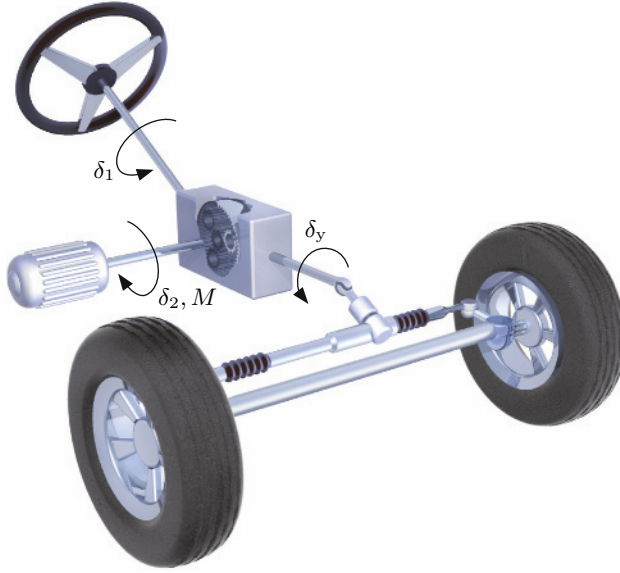


Bild 2.13: Servolenksystem mit Winkelüberlagerungsprinzip.

Im Normalfall hält der Fahrer das Lenkrad fest und gibt einen Lenkwinkel δ_1 vor. Bei losgelassenem Lenkrad fällt diese Lenkwinkelvorgabe weg und es können Grenzyklen im Lenksystem auftreten. Diese sind natürlich unerwünscht.

Zum Zwecke ihrer Analyse betrachten wir den in Bild 2.14 dargestellten Aufbau der Regelung des Lenksystems bei losgelassenem Lenkrad. Stellmotor mit Stromregelung und Überlagerungsgetriebe bilden die Regelstrecke, deren Eingangsgröße der Drehmomentsollwert M des Stellmotors ist. Ausgangsgröße dieser Regelstrecke ist zum einen der Ausgangswinkel $\delta_y = \delta_1 + \delta_2$. Zum anderen ist aber auch der Lenkradwinkel δ_1 Ausgangsgröße, da ja das Lenkrad nicht durch den Fahrer festgehalten wird. Der PD-Regler für den Zusatzwinkel δ_2 besitzt die Parameter $K_R = 3000 \text{ N m rad}^{-1}$ und $T_V = 0.02 \text{ s}$.

Beschrieben wird der Stellmotor samt Stromregelung und Überlagerungsgetriebe durch das lineare Zustandsraummodell

$$\dot{\delta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -67.3568 & -67.3568 & -11.3988 & -11.3988 \\ -24.1480 & -24.1480 & -4.0866 & -4.0866 \end{bmatrix} \delta + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4.0123 \cdot 10^{-2} \\ 1.8977 \end{bmatrix} M.$$

Dabei ist der Zustandsvektor durch $\delta = [\delta_1 \ \delta_2 \ \dot{\delta}_1 \ \dot{\delta}_2]^T$ gegeben.

Das Drehmoment M ist auf $M_{\max} = \pm 21 \text{ N m}$ begrenzt. Vom PD-Regler $M_R = K_R(\delta_{2,\text{soll}} - \delta_2 - T_V \dot{\delta}_2)$ vorgegebene Drehmomente M_R , die diese Grenzen

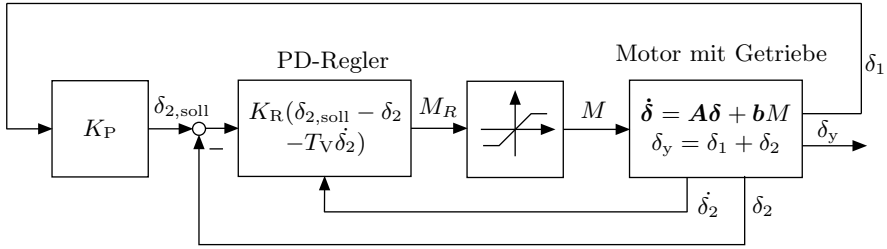


Bild 2.14: Regelkreis des Lenksystems bei losgelassenem Lenkrad.

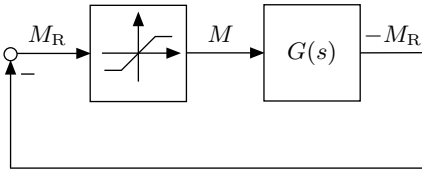


Bild 2.15: Nichtlinearer Standardregelkreis des Lenksystems, der sich durch Umformung des Regelkreises aus Bild 2.14 herleitet.

überschreiten, werden durch eine Sättigungskennlinie

$$M = \begin{cases} M_{\max}, & M_R > M_{\max}, \\ M_R, & |M_R| \leq u_{\max}, \\ -M_{\max}, & M_R < -M_{\max}, \end{cases}$$

begrenzt.

Der Lenkradwinkel δ_1 gibt bei der betrachteten Fahrzeuggeschwindigkeit über den Faktor $K_P = 1.5$ den Sollwert $\delta_{2,\text{soll}}$ des Zusatzwinkels δ_2 vor. Da das Lenkrad nicht vom Fahrer festgehalten wird, wirkt das Überlagerungsgetriebe direkt auf den Lenkradwinkel δ_1 ein, wie in Bild 2.14 gezeigt.

Der Regelkreis aus Bild 2.14 lässt sich in einen nichtlinearen Standardregelkreis, wie ihn Bild 2.15 zeigt, umformen. Für die Übertragungsfunktion $G(s)$ erhält man dabei unter Berücksichtigung der Dynamik des stromgeregelten Stellmotors mit Überlagerungsgetriebe

$$G(s) = -\frac{M_R(s)}{M(s)} = \frac{113.9s^3 + 7181s^2 + 171200s + 965900}{s^2(s^2 + 15.49s + 91.50)}.$$

Die Anwendung der harmonischen Balance ergibt zwei Schnittpunkte der Ortskurve $G(j\omega)$ mit der Ortskurve $-1/N(A)$ der Beschreibungsfunktion des Sättigungskennliniengliedes, wie in Bild 2.16 dargestellt. Wir erwarten also zwei Grenzzyklen mit den Frequenzen in der Nähe von ω_1 und ω_2 . Bei dem in Bild 2.16 links liegenden Schnittpunkt wird die Ortskurve $G(j\omega)$ von rechts nach links von der nichtlinearen Ortskurve durchstoßen. Dieser Grenzzyklus mit der Frequenz ω_1 ist stabil.

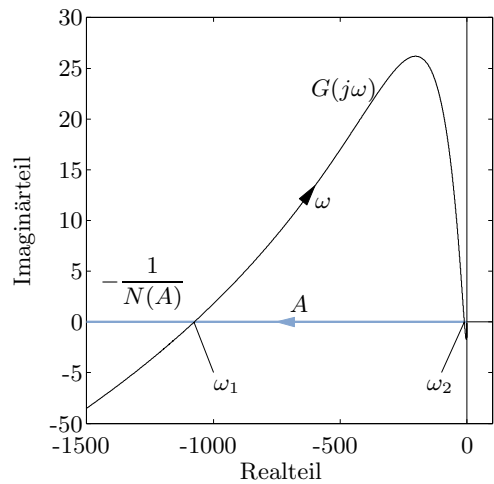


Bild 2.16: Ortskurven $G(j\omega)$ und $-1/N(A)$.

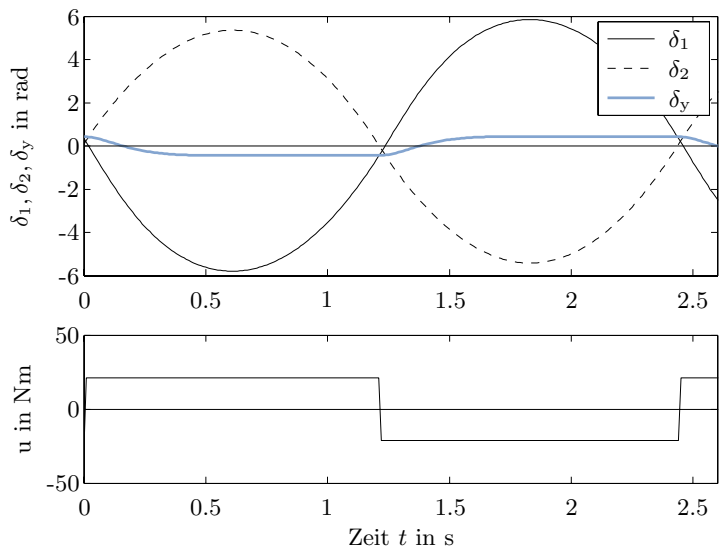


Bild 2.17: Winkel- und Stellgrößenverläufe des Grenzyklus.

Der zweite Grenzyklus dagegen ist instabil. Er hat also keine praktische Bedeutung. Der stabile Grenzyklus dagegen schon. Seine Periodendauer ermittelt man durch Auswertung der Gleichung der harmonischen Balance, $G(j\omega) = -1/N(A)$, zu $T_{\text{harm}} = 2\pi/\omega_1 = 1.97\text{ s}$. Aufgrund des Näherungscharakters der harmonischen Balance ist dieser Wert ungenau. Aus der Simulation des Systems, dargestellt in Bild 2.17, lässt sich die Periodendauer zu $T_{\text{sim}} = 2.42\text{ s}$ ermitteln.

Wie auch aus Bild 2.17 abzulesen ist, ergibt sich eine hohe Amplitude der Schwingung, die natürlich für ein Kraftfahrzeug indiskutabel ist. Beseitigt werden kann der Grenzzyklus durch eine Erweiterung der Regelung [102].

2.2 Absolute Stabilität

2.2.1 Der Begriff der absoluten Stabilität

Im vorherigen Kapitel wurde der nichtlineare Standardregelkreis, den Bild 2.18 noch einmal zeigt, auf Grenzzyklen hin untersucht. Es ist natürlich auch von Interesse, wie das Stabilitätsverhalten geartet ist, wenn keine Grenzzyklen vorliegen. Beispielsweise ist es von großer praktischer Bedeutung, feststellen zu können, für welche Kennlinien f der Regelkreis eine global asymptotisch stabile Ruhelage besitzt.

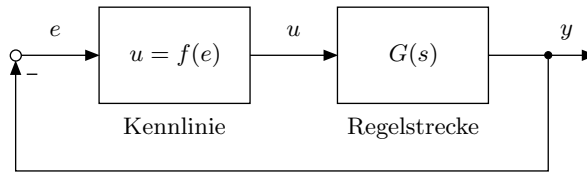


Bild 2.18: Nichtlinearer Standardregelkreis.

Dieser Frage soll im Weiteren nachgegangen werden, wobei wir uns auf Kennlinien beschränken, die in einem Sektor liegen, der durch zwei Geraden $u = K_1 e$ und $u = K_2 e$ begrenzt ist. In Bild 2.19 ist dieser Sektor dargestellt und man bezeichnet ihn kurz, wie es bei Intervallen üblich ist, mit $[K_1, K_2]$. Passend zu diesem Sektor $[K_1, K_2]$ führt man nun einen neuen Stabilitätsbegriff ein.

Definition 7 (Absolute Stabilität). *Der nichtlineare Standardregelkreis*

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)U(s), \\ e &= -y, \\ u &= f(e) \end{aligned}$$

heißt absolut stabil im Sektor

$$[K_1, K_2],$$

wenn er für jede eindeutige, stückweise stetige und für alle Werte e definierte Kennlinie

$$u = f(e),$$

die in diesem Sektor liegt, eine global asymptotisch stabile Ruhelage besitzt.

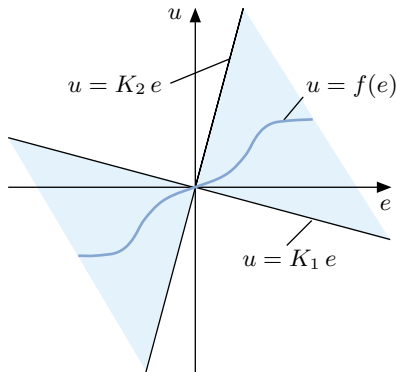


Bild 2.19: Kennliniensektor, begrenzt durch $u = K_1 e$ und $u = K_2 e$.

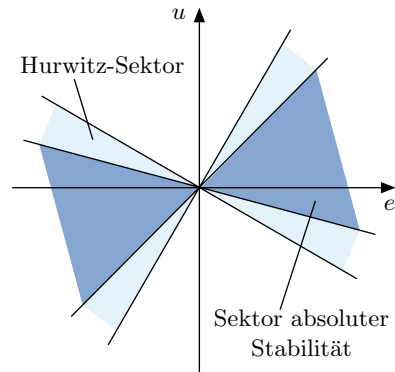


Bild 2.20: Hurwitz-Sektor und Sektor absoluter Stabilität.

Über die Größe des Sektors der absoluten Stabilität lässt sich bereits eine erste Abschätzung treffen. Betrachtet man nämlich nur lineare Kennlinien

$$u = f(e) = \tilde{K} \cdot e,$$

so kann z. B. mittels des Routh-Kriteriums oder des Wurzelortskurvenverfahrens der Parameterbereich

$$[\tilde{K}_1, \tilde{K}_2] \quad (2.4)$$

ermittelt werden, für den sich ein stabiler linearer Regelkreis ergibt. Der Sektor (2.4) heißt *Hurwitz-Sektor* und offensichtlich ist der Sektor absoluter Stabilität immer kleiner oder gleich dem Hurwitz-Sektor. Bild 2.20 illustriert die Situation.

2.2.2 Das Popov-Kriterium und seine Anwendung

Ein Kriterium zum Nachweis absoluter Stabilität wurde 1959 von V. M. Popov entwickelt [116, 149, 150, 151, 152]. Für seine Formulierung muss man zuerst noch den Begriff der Grenzstabilität definieren.

Definition 8 (Grenzstabilität). Ein lineares System mit der Übertragungsfunktion $G(s)$ heißt *grenzstabil*, wenn es nur Polstellen p_i mit

$$\operatorname{Re} \{p_i\} \leq 0$$

besitzt, wobei mindestens für einen Pol $\operatorname{Re} \{p_i\} = 0$ gilt, und wenn der lineare Regelkreis

$$G_\varepsilon(s) = \frac{G(s)}{1 + \varepsilon G(s)}$$

für jedes beliebig kleine $\varepsilon > 0$ stabil ist.

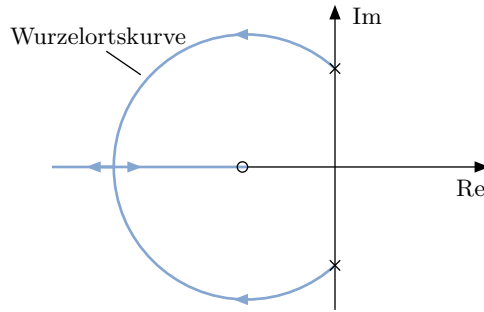


Bild 2.21: Beispiel für die Wurzelortskurven eines grenzstabilen Systems.

Anschaulich bedeutet die Grenzstabilität eines Systems, dass die Äste der Wurzelortskurve, die auf der imaginären Achse starten, mit wachsendem ε nach links laufen, wie es Bild 2.21 exemplarisch illustriert.

Popovs Kriterium lautet nun wie folgt.

Satz 1 (Popov-Kriterium). *Gegeben sei der nichtlineare Standardregelkreis*

$$Y(s) = G(s)U(s),$$

$$e = -y,$$

$$u = f(e)$$

mit der stabilen oder grenzstabilen Regelstrecke $G(s)$. Der Zählergrad m von $G(s)$ sei kleiner als der Nennergrad n . Die Kennlinie $u = f(e)$ sei stückweise stetig, eindeutig, für alle e definiert und gehe durch null. Dann ist der obige Regelkreis absolut stabil

(1) im Sektor $[0, K]$, wenn $G(s)$ stabil ist,

(2) im Sektor $[\varepsilon, K]$ mit einem beliebig kleinen $\varepsilon > 0$, wenn $G(s)$ grenzstabil ist,

falls sich eine reelle Zahl q finden lässt, so dass die Popov-Ungleichung

$$\operatorname{Re} \{ (1 + q \cdot j\omega) \cdot G(j\omega) \} > -\frac{1}{K}$$

für alle $\omega \geq 0$ erfüllt ist.

Zwei Sachverhalte in diesem Kriterium bedürfen der Erläuterung. Zum einen die Einschränkung des Anwendungsbereiches auf Sektoren $[0, K]$ bzw. $[\varepsilon, K]$ und zum anderen die Popov-Ungleichung.

Zuerst soll der Anwendungsbereich näher betrachtet werden. Die Unterscheidung in die Sektoren $[0, K]$ für stabile $G(s)$ und $[\varepsilon, K]$ für grenzstabile $G(s)$ erklärt sich daraus, dass eine grenzstabile Strecke $G(s)$ und eine Kennlinie

$$u = 0 \cdot e$$

einen Regelkreis ergeben, der nicht global asymptotisch stabil ist. Es bedarf mindestens einer Verstärkung ε , also

$$u = \varepsilon \cdot e,$$

um den Kreis zu stabilisieren.

Die Unterscheidung zwischen den Sektoren $[0, K]$ und $[\varepsilon, K]$ hat des Weiteren Auswirkungen auf die behandelten Kennlinien $u = f(e)$. So gibt es Kennlinien, die zwar in $[0, K]$ aber nicht in $[\varepsilon, K]$ liegen. Dies ist auch der Fall, wenn $\varepsilon > 0$ beliebig klein sein darf. Zur Erläuterung betrachten wir zwei Beispiele. Im ersten, dargestellt in Bild 2.22, strebt die Kennlinie $u = f(e)$ mit $e \rightarrow \infty$ gegen null, erreicht den Wert null aber nicht. Offensichtlich gibt es keinen Sektor $[\varepsilon, K]$, dessen Gerade $u = \varepsilon \cdot e$ die Kennlinie nicht schneidet. Im zweiten Beispiel, illustriert in Bild 2.23, strebt

$$u = \operatorname{sgn}(e)\sqrt{|e|}$$

mit $e \rightarrow \infty$ gegen ∞ , jedoch schwächer als irgendeine Gerade $u = \varepsilon \cdot e$. So wird auch hier die Kennlinie $u = \operatorname{sgn}(e)\sqrt{|e|}$ in keinem Sektor $[\varepsilon, K]$ liegen.

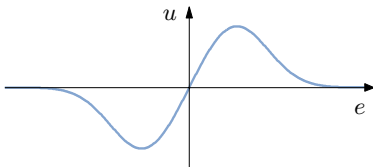


Bild 2.22: Kennlinie, die für $e \rightarrow \infty$ gegen null strebt.

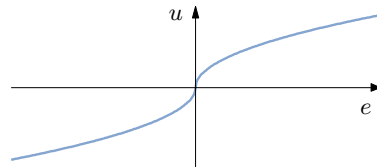


Bild 2.23: Kennlinie, die für $e \rightarrow \infty$ gegen ∞ strebt.

Die Einschränkung auf Sektoren $[0, K]$ anstelle $[K_1, K_2]$ ist nur scheinbar. Denn durch eine Umformung des betrachteten Regelkreises aus Bild 2.18, bei dem wir den Sektor $[K_1, K_2]$ betrachten, lässt sich erreichen, dass $K_1 = 0$ gilt. Und zwar fügt man zwei Faktorglieder mit der Verstärkung K_1 , wie in Bild 2.24 gezeigt, in den Regelkreis ein. Ersichtlich heben sich beide Faktorglieder in ihrer Wirkung auf, so dass man den Regelkreis nicht verändert hat. Man fasst nun die Teilsysteme zusammen und erhält den Regelkreis des Bildes 2.25. Somit hat man für diesen umgeformten Regelkreis als Sektor

$$[K_1 - K_1, K_2 - K_1] = [0, K = K_2 - K_1]$$

zu betrachten. Durch diese Transformation können des Weiteren instabile Regelstrecken stabilisiert werden, so dass das Kriterium von Popov auch auf solche Regelstrecken anwendbar ist.

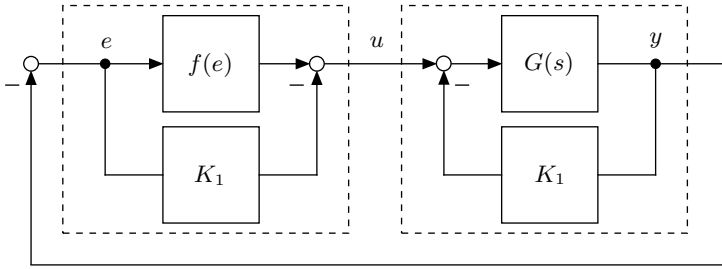
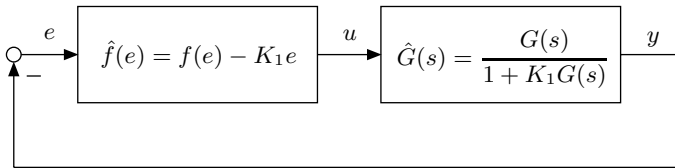
Bild 2.24: Einfügen eines Faktors K_1 in den nichtlinearen Standardregelkreis.

Bild 2.25: In einen nichtlinearen Standardregelkreis umgeformter Regelkreis aus Bild 2.24.

Nachdem der Anwendungsbereich des Kriteriums von Popov geklärt ist, wenden wir uns seiner Anwendung zu. Und zwar ist zu prüfen, ob sich eine reelle Zahl q finden lässt, so dass die Popov-Ungleichung

$$\operatorname{Re} \{ (1 + q \cdot j\omega) \cdot G(j\omega) \} > -\frac{1}{K}$$

für alle $\omega \geq 0$ erfüllt ist.

Die Lösung der Popov-Ungleichung lässt sich grafisch darstellen. Um das zu erkennen, formt man sie erst einmal um in

$$\underbrace{\operatorname{Re} \{ G(j\omega) \}}_{X(\omega)} - q \cdot \omega \underbrace{\operatorname{Im} \{ G(j\omega) \}}_{Y(\omega)} > -\frac{1}{K}.$$

Nun hat man eine in ω parametrisierte Ungleichung

$$X(\omega) - q \cdot Y(\omega) + \frac{1}{K} > 0. \quad (2.5)$$

Sie ist für alle Wertepaare (X, Y) , die rechts der Geraden

$$X - q \cdot Y + 1/K = 0$$

liegen, erfüllt. Diese Gerade besitzt die Steigung $1/q$ und den Schnittpunkt $-1/K$ mit der reellen Achse. Bild 2.26 illustriert dies. Die Gerade wird *Popov-Gerade* genannt.

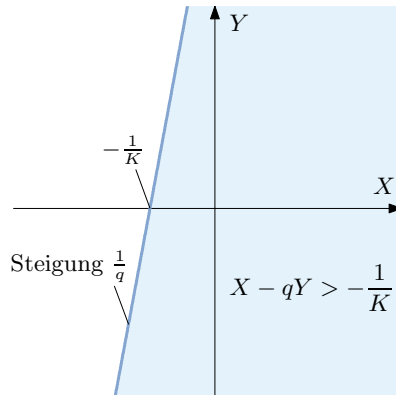


Bild 2.26: Sektor (blau), in dem $X - qY > -1/K$ erfüllt ist.

Allerdings sind nicht alle Werte von X und Y in Gl. (2.5) erlaubt, da sie ja über

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \operatorname{Re} \{G(j\omega)\}, \\ Y(\omega) &= \omega \operatorname{Im} \{G(j\omega)\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

parametrisiert sind. Die durch die Gl. (2.6) gegebene Kurve ist in einem Diagramm darstellbar. Sie ähnelt einer Ortskurve, wenn man

$$\tilde{G}(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega) = \operatorname{Re} \{G(j\omega)\} + j\omega \operatorname{Im} \{G(j\omega)\}$$

setzt. Man bezeichnet diese Ortskurve als *Popov-Ortskurve*. Sie geht aus der Ortskurve von $G(j\omega)$ durch Multiplikation des Imaginärteils von $G(j\omega)$ mit ω hervor. Grafisch betrachtet wird die Ortskurve $G(j\omega)$ der Regelstrecke also in Richtung der imaginären Achse verändert. Der Realteil dagegen erfährt keine Veränderung. Siehe hierzu Bild 2.27.

Die für X und Y möglichen Werte sind also durch Gl. (2.6) gegeben bzw. liegen auf der Popov-Ortskurve. Damit erhält man folgendes grafisch darstellbares Ergebnis. Die Popov-Ungleichung ist erfüllt, wenn die Popov-Ortskurve rechts einer Geraden mit der beliebigen Steigung $1/q$ und dem Schnittpunkt $-1/K$ mit der X -Achse, d. h. reellen Achse, liegt.

Mit dem obigen grafischen Verfahren ist die Popov-Ungleichung also lösbar. Offensichtlich erfüllen alle links der Popov-Ortskurve liegenden Geraden die Ungleichung. Aus ihnen sind der Wert $-1/K$ und damit die Sektoren absoluter Stabilität

$$[0, K] \quad \text{bzw.} \quad [\varepsilon, K]$$

direkt ablesbar. Selbstverständlich ist man daran interessiert, den größtmöglichen Sektor zu bestimmen. Zu diesem Zweck schiebt man die Popov-Gerade so

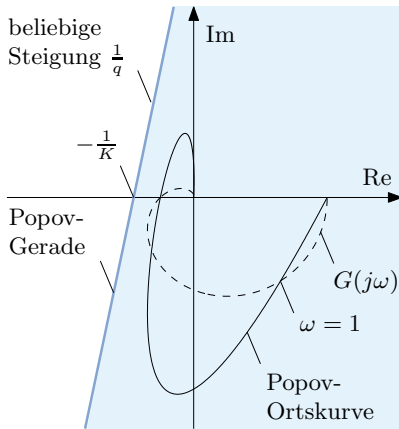


Bild 2.27: Die Ortskurve, die Popov-Ortskurve und eine mögliche Popov-Gerade.

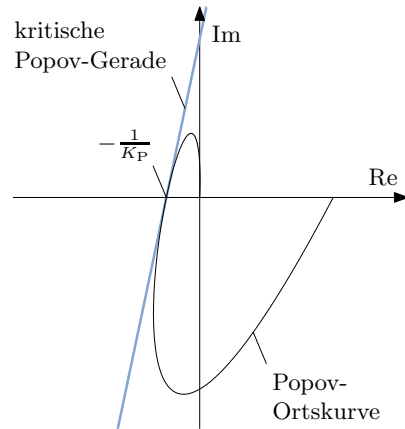


Bild 2.28: Die kritische Popov-Gerade tangiert die Popov-Ortskurve und liefert so den größten Popov-Sektor.

an die Popov-Ortskurve heran, dass sie diese tangiert und sich das größtmögliche $K = K_P$ ergibt, so wie es Bild 2.28 zeigt. Der zugehörige Sektor

$$[0, K_P]$$

heißt *Popov-Sektor*. Der Regelkreis ist dann für alle Sektoren

$$[0, K < K_P] \quad \text{bzw.} \quad [\varepsilon, K < K_P]$$

absolut stabil. Für den Popov-Sektor $[0, K_P]$ selbst ist absolute Stabilität durch das Kriterium von Popov nicht nachgewiesen, denn in der Popov-Ungleichung steht ein Größer-Zeichen und kein Größer-gleich-Zeichen. Diese Unterscheidung ist allerdings in der Praxis nicht von Bedeutung, denn man wird im Falle einer Realisierung immer einen Sicherheitsabstand zum kritischen Wert K_P einhalten.

Angemerkt sei, dass das Popov-Kriterium natürlich auch anwendbar ist, wenn der Regelkreis in der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}f(\mathbf{c}^T \mathbf{x})$$

vorliegt.

Schließlich seien noch zwei Erweiterungen des Popov-Kriteriums aufgeführt. Das Popov-Kriterium ist auch dann anwendbar, wenn $G(s)$ die Form

$$G(s) = \hat{G}(s) \cdot e^{-T s}$$

hat und $\hat{G}(s)$ stabil ist. Allerdings sind dann nur noch positive Werte q in der Popov-Ungleichung zulässig und die Nichtlinearität muss stetig sein. Für

den Fall, dass die Nichtlinearität zeitvariant ist, d. h., $u = f(e, t)$ gilt, ist das Popov-Kriterium ebenfalls anwendbar. Allerdings gelten dann zusätzlich folgende Einschränkungen:

- (1) $0 < f(e, t) < Ke$,
- (2) $G(s)$ besitzt höchstens einen Pol $s = 0$ und ansonsten nur Pole s_i mit $\operatorname{Re}\{s_i\} < 0$ und
- (3) $q = 0$.

Die Forderung $q = 0$ impliziert, dass die Popov-Gerade senkrecht ist.

2.2.3 Aisermans Vermutung

Bei vielen Systemen ist die Anwendung des Popov-Kriteriums unnötig. Denn für sie gilt Aisermans Vermutung, dass der größte Sektor absoluter Stabilität dem Hurwitz-Sektor entspricht, der viel einfacher zu bestimmen ist. Wenn die Vermutung auch im allgemeinen Fall nicht richtig ist, so stimmt sie doch zumindest für folgende Regelstrecken:

- (1) stabile und grenzstabile Systeme erster Ordnung,
- (2) stabile und grenzstabile Systeme zweiter Ordnung mit

$$G(s) = \frac{1 + bs}{1 + a_1s + a_2s^2} \quad \text{bzw.} \quad G(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1 + bs}{1 + as}$$

mit jeweils $b \geq 0$,

- (3) stabile Systeme dritter Ordnung mit

$$G(s) = \frac{1 + bs}{1 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3}, \quad b \geq 0,$$

oder grenzstabile mit

$$G(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1 + bs}{1 + a_1s + a_2s^2}, \quad b \geq 0,$$

- (4) Systeme vierter Ordnung ohne Nullstellen mit höchstens einem Pol $s = 0$ und sonst nur reellen negativen Polen.

Zumindest für obige Regelstrecken kann man also den größten Sektor absoluter Stabilität durch Bestimmung des Hurwitz-Sektors einfach ermitteln.

Wir betrachten als ein die obigen Betrachtungen ergänzendes Beispiel die Regelstrecke

$$G(s) = \frac{1}{(s^2 + 0.1s + 10)(s^2 + 0.2s + 20)}.$$

Im Bild 2.29 sind ihre Ortskurve und Popov-Ortskurve dargestellt, so dass man den Popov-Sektor zu $[0, K_P \approx 8.7]$ ablesen kann. Aus der Ortskurven-darstellung erkennt man auch, dass der Hurwitz-Sektor mit der maximalen Steigung K_H größer ist als der Popov-Sektor, denn es gilt

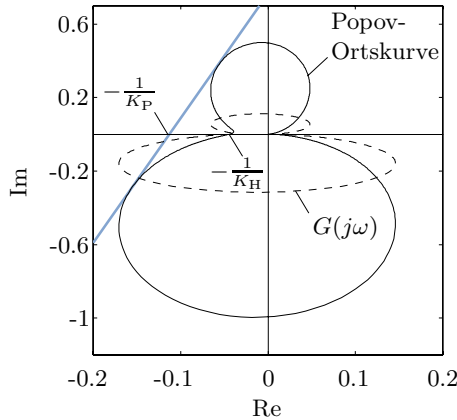


Bild 2.29: Beispiel für ein System, bei dem der Hurwitz-Sektor $[0, K_H]$ größer ist als der Popov-Sektor $[0, K_P]$.

$$K_P \approx 8.7 < \frac{1012}{45} = K_H.$$

Aus der Tatsache, dass der Popov-Sektor kleiner ist als der Hurwitz-Sektor, können wir allerdings noch nicht schließen, dass der Sektor absoluter Stabilität kleiner ist als der Hurwitz-Sektor. Denn der Beweis [171] des Popov-Kriteriums sichert nur seinen hinreichenden Charakter und wir wissen nicht, ob es den größten Sektor absoluter Stabilität geliefert hat. Aisermans Vermutung könnte für das obige System also immer noch stimmen. Wie erwähnt, stimmt sie nicht für jedes System [35, 48, 103, 146]. Dies ist aber im Einzelfall schwer nachzuweisen. Es bleibt folgende generelle Abschätzung festzuhalten:

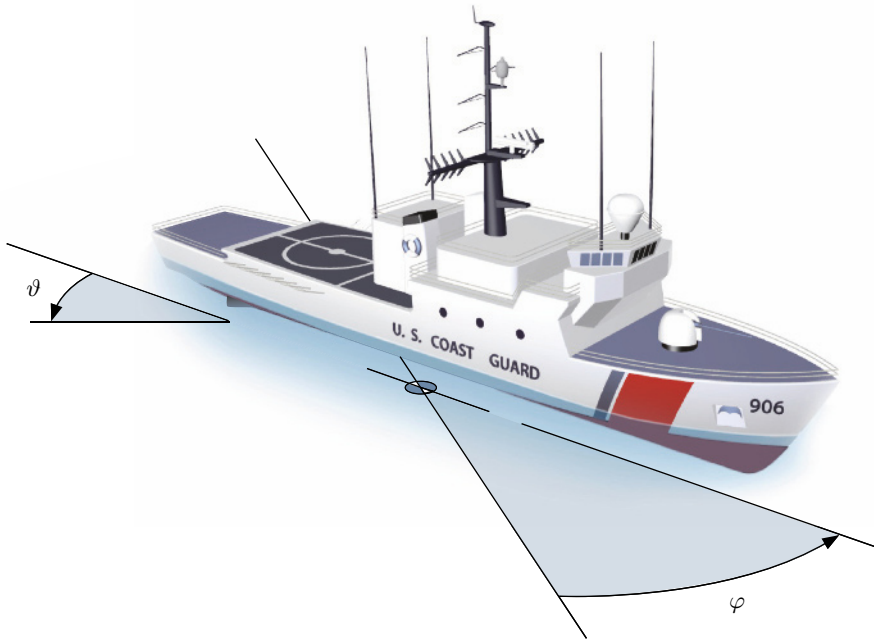
Popov-Sektor $\leq$ größter Sektor absoluter Stabilität $\leq$ Hurwitz-Sektor.

Mit dem Popov-Kriterium ist Aisermans Vermutung (für bestimmte Regelstrecken) daher nur beweisbar, wenn der Popov-Sektor dem Hurwitz-Sektor entspricht. Bis heute weder bewiesen noch widerlegt ist, ob der Popov-Sektor immer gleich dem größten Sektor absoluter Stabilität ist.

2.2.4 Beispiel Schiffsregelung

Als Anwendungsbeispiel wird eine Kursregelung des Schiffes *Tampa* der US-Küstenwache betrachtet, das in Bild 2.30 dargestellt ist. Die Regelung soll so ausgelegt sein, dass bei einer Änderung des Kurswinkels φ von 10° eine Ausregelzeit von maximal 50 s bei einer Stellgrößenbeschränkung von $\pm 10^\circ$ des Ruderwinkels ϑ erzielt wird. Die Gierrate $\dot{\varphi}$ wird über ein Gyroskop gemessen. Bild 2.30 illustriert die Aufgabe.

Die Übertragungsfunktion $G(s)$ der Tampa zwischen Ruderwinkel ϑ und Gierrate $\dot{\varphi}$ wurde experimentell [55] zu

Bild 2.30: Schiff *Tampa*.

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{\Theta(s)} = \frac{-0.0184(s + 0.0068)}{(s + 0.2647)(s + 0.0063)}$$

ermittelt, wobei $\Omega(s)$ und $\Theta(s)$ die Laplace-Transformierten von $\omega = \dot{\varphi}$ und ϑ sind. Geregelt werden soll φ . Daher wird die mittels des Gyroskops gemessene Gierrate $\dot{\varphi}$ zu φ aufintegriert. Es wird eine Kaskadenregelung mit zwei P-Reglern für Gierrate und -winkel verwendet. Der I-Anteil der Strecke stellt sicher, dass es keine bleibende Regelabweichung gibt. Damit der Ruderwinkel auf $\pm 10^\circ$ beschränkt bleibt, wird ein Sättigungsglied vor die Strecke geschaltet. Den Regelkreis zeigt Bild 2.31. Die Regelungen sind so ausgelegt, dass bei 10° Kursänderung die maximal auftretende Stellgröße gerade 10° beträgt. Für diesen Fall ist der Regelkreis linear. Bei größeren Kursänderungen läuft die Stellgröße in die Sättigung, d. h., der Kreis wird nichtlinear.

Es stellt sich nun die Frage, ob der Regelkreis auch im nichtlinearen Fall stabil ist. Um dies mittels des Popov-Kriteriums zu untersuchen, wird der Regelkreis zunächst in die Form des nichtlinearen Standardregelkreises umgeformt. Bild 2.32 zeigt das Ergebnis dieser Umformung. Da die Regelstrecke einen Integrator beinhaltet und grenzstabil ist, können nur Sektoren $[\varepsilon, K]$ untersucht werden. Der Sektor $[\varepsilon, K > 1]$ schließt jedoch die Sättigungskennlinie nicht mit ein, da sich ihre Parallele zur Abszisse immer mit jeder beliebigen Geraden der Steigung $\varepsilon > 0$ schneidet. Allerdings geschieht dies für kleine Werte ε erst bei sehr großen Werten e . Die Sättigungskennlinie liegt also

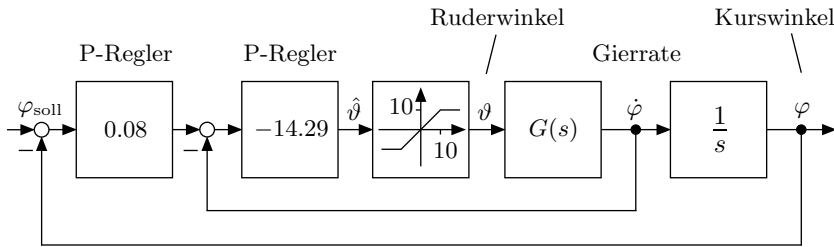


Bild 2.31: Kursregelung der Tampa.

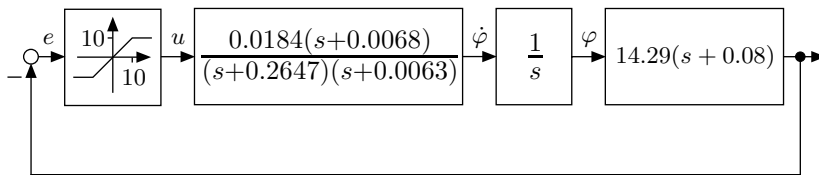


Bild 2.32: Regelkreis des Schiffes in Form eines nichtlinearen Standardregelkreises.

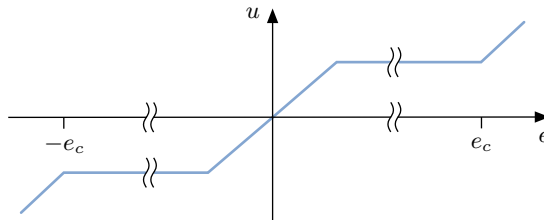


Bild 2.33: Modifizierte Sättigungskennlinie.

nicht im Sektor $[\varepsilon, K > 1]$, und das Popov-Kriterium ist deshalb eigentlich nicht anwendbar.

Um es doch anwenden zu können, verwenden wir den folgenden Kunstgriff. Es ist zu berücksichtigen, dass keine beliebig großen Werte von e in einem praktisch betriebenen Regelkreis auftreten. Daher kann die Sättigungskennlinie auch ab einem bestimmten Wert e_c , oberhalb dessen gesichert keine Werte mehr im praktischen Betrieb auftauchen, wieder ansteigen. Auf das Regelkreisverhalten hat diese geänderte Kennlinie, Bild 2.33 zeigt sie, keine Auswirkung. Durch diesen Kunstgriff liegt die Kennlinie im Sektor $[\varepsilon, K > 1]$ und die Stabilität lässt sich dann doch sicherstellen.

Zu erwähnen ist noch, dass eine Führungsgröße $\varphi_{\text{soll}} \neq 0$ die Anwendung des Popov-Kriteriums nicht beeinträchtigt. Denn die negierte Führungsgröße $-\varphi_{\text{soll}}$ kann auch als Anfangswert $\varphi(0)$ des Kurswinkels interpretiert werden.

Die zugehörige Popov-Ortskurve des Regelkreises zeigt Bild 2.34. Ersichtlich kann eine Gerade von links so an die Popov-Ortskurve geschoben werden,

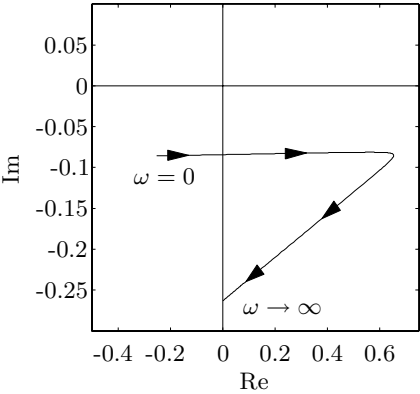


Bild 2.34: Popov-Ortskurve des Schiffes.

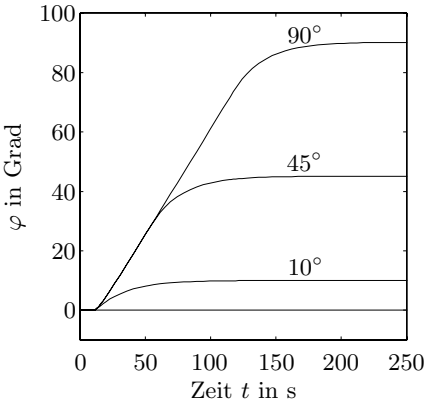


Bild 2.35: Kurswinkel φ .

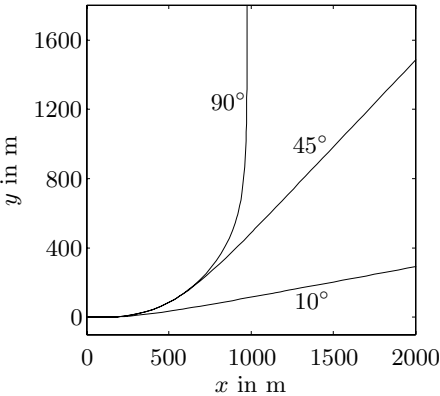


Bild 2.36: Schiffskurs in Draufsicht.

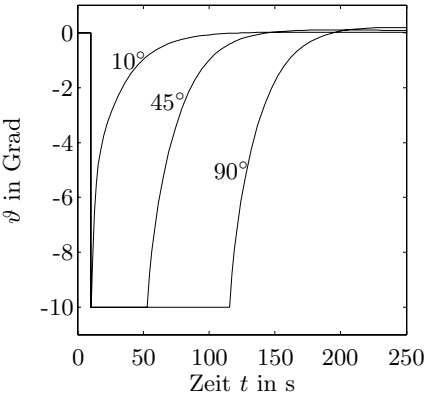


Bild 2.37: Stellgröße Ruderwinkel ϑ .

dass sie durch den Ursprung läuft. Das System ist also absolut stabil im Sektor $[\varepsilon, \infty)$.

Die Bilder 2.35, 2.36 und 2.37 zeigen die simulierten Verläufe der Kursregelung für eine Kurswinkeländerung von 10°, 45° und von 90°, die bei $t = 10\text{ s}$ beginnt. Dabei wurde eine Geschwindigkeit des Schiffes von 10 m s^{-1} angenommen. Bild 2.37 illustriert, dass ab einer Kursänderung, die mehr als 10° beträgt, die Stellgröße in die Sättigung geht. Das Schiffsruder ist dann am Anschlag. Aus den Bildern ist auch zu erkennen, dass große Kurswinkeländerungen aufgrund des Sättigungseffektes langsamer ausgeführt werden als kleine. Das ist sinnvoll, denn große Kurven sollten nicht so schnell durchfahren werden wie kleine. Bild 2.36 zeigt die gefahrenen Kurven und Kursverläufe des Schiffes in Draufsicht, d. h. in der xy -Ebene.

2.2.5 Das Kreiskriterium

Das Kreiskriterium ermöglicht wie das Popov-Kriterium die Untersuchung nichtlinearer Standardregelkreise, wie sie Bild 2.38 zeigt, auf absolute Stabilität.

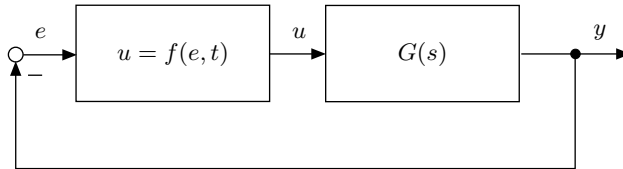


Bild 2.38: Nichtlinearer Standardregelkreis mit zeitvarianter Kennlinie.

Die nichtlineare Funktion

$$u = f(e, t)$$

kann zeitvariant sein und liegt in einem Steigungssektor $[K_1 + \varepsilon, K_2 - \varepsilon]$ mit $0 \leq K_1 < K_2 < \infty$ und beliebig kleinem $\varepsilon > 0$, d. h., es gilt

$$(K_1 + \varepsilon)e \leq f(e, t) \leq (K_2 - \varepsilon)e.$$

Insbesondere muss also $f(0, t) = 0$ erfüllt sein. Bild 2.39 illustriert die Situation.

Das Kreiskriterium liefert eine Aussage, ob in einem Sektor $[K_1 + \varepsilon, K_2 - \varepsilon]$ absolute Stabilität für den Standardregelkreis gewährleistet ist. Wie das

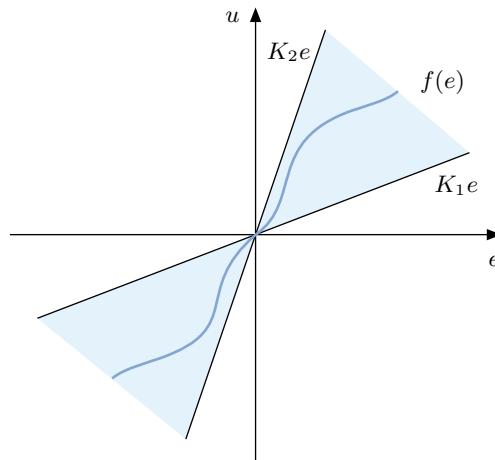


Bild 2.39: Steigungssektor $[K_1 + \varepsilon, K_2 - \varepsilon]$ des Kreiskriteriums.

Popov-Kriterium ist das Kreiskriterium allerdings nur hinreichend. Daher wissen wir im Allgemeinen nicht, ob der maximal mögliche Sektor absoluter Stabilität bestimmt wurde.

Satz 2 (Kreiskriterium). *Gegeben sei der nichtlineare Standardregelkreis*

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)U(s), \\ e &= -y, \\ u &= f(e, t). \end{aligned}$$

Die Kennlinie $u = f(e, t)$ liege im Sektor $[K_1 + \varepsilon, K_2 - \varepsilon]$ mit $0 \leq K_1 < K_2 < \infty$ und beliebig kleinem $\varepsilon > 0$. Es gelte $f(0, t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Des Weiteren sei f zeitinvariant und stückweise stetig oder zeitvariant und stetig. Die Übertragungsfunktion $G(s)$ sei stabil und ihr Zählergrad m sei kleiner als ihr Nennergrad n . Wenn unter obigen Voraussetzungen die Ortskurve $G(j\omega)$ den Kreis, der in der komplexen Ebene seinen Mittelpunkt auf der reellen Achse besitzt und durch die Punkte

$$-\frac{1}{K_1} \quad \text{und} \quad -\frac{1}{K_2}$$

geht, weder umfasst noch schneidet, dann ist der Regelkreis absolut stabil im Sektor $[K_1 + \varepsilon, K_2 - \varepsilon]$.

Die Anwendung des Kreiskriteriums ist einfach. Man zeichnet die Ortskurve $G(j\omega)$ des offenen Regelkreises und den Kreis durch die Punkte $-1/K_1$ und $-1/K_2$, wie es Bild 2.40 zeigt. Für alle Kreise und die zugehörigen Sektoren $[K_1 + \varepsilon, K_2 - \varepsilon]$, die links der Ortskurve $G(j\omega)$ liegen, ist der nichtlineare Standardregelkreis stabil. Offensichtlich erfüllen viele Kreise diese Bedingung. Der

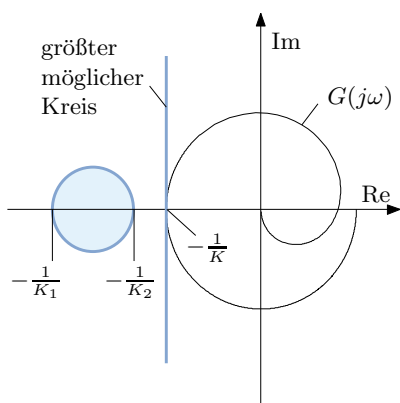


Bild 2.40: Anwendung des Kreiskriteriums.

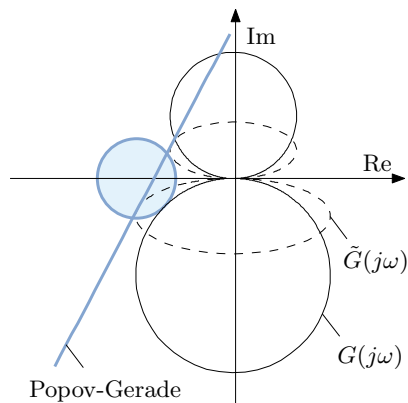


Bild 2.41: Vergleich von Popov- und Kreiskriterium.

größte von ihnen schneidet die reelle Achse in $-1/K$ und hat einen unendlich großen Durchmesser. Wir erhalten in diesem Fall dann den Sektor $[\varepsilon, K - \varepsilon]$. Man beachte, dass der Kreis die Ortskurve zwar nicht schneiden, durchaus aber tangieren darf.

Im Falle einer instabilen Regelstrecke führt man die im Abschnitt 2.2.2 schon beim Popov-Kriterium angewandte Sektortransformation durch. So erhält man eine stabile Regelstrecke und das Kreiskriterium ist wieder anwendbar.

Für den Grenzfall $K_1 \rightarrow K_2$ und $\varepsilon \rightarrow 0$ entartet der Sektor $[K_1 + \varepsilon, K_2 - \varepsilon]$ zu einer Geraden, die Kennlinie zur linearen Funktion $u = f(e) = K_1 e$ und der Kreis zum Punkt $-1/K_1$. In diesem Fall geht das Kreiskriterium in das einfache Nyquist-Kriterium über.

Das Kreiskriterium ist einfacher in der Anwendung als das Popov-Kriterium, da man nur die meist bereits vorliegende Ortskurve $G(j\omega)$ benötigt und nicht die Popov-Ortskurve $\tilde{G}(j\omega)$. In bestimmten Fällen liefert das Kreiskriterium allerdings einen anderen Sektor absoluter Stabilität. Bild 2.41 illustriert einen solchen Fall. Ergänzende Informationen finden sich in [22, 50].

2.2.6 Das Zypkin-Kriterium für zeitdiskrete Systeme

Für den Fall von Abtastregelkreisen mit der Abtastzeit T und der z-Übertragungsfunktion $G(z)$ kann der Begriff der absoluten Stabilität ganz analog zum zeitkontinuierlichen Fall definiert werden. Auch hier werden nichtlineare, statische Kennlinien f betrachtet. Zur Untersuchung der absoluten Stabilität solcher nichtlinearer zeitdiskreter Regelkreise, wie sie in Bild 2.42 dargestellt sind, hat Ja. S. Zypkin dem Popov-Kriterium vergleichbare Sätze angegeben [109, 185, 186, 204].

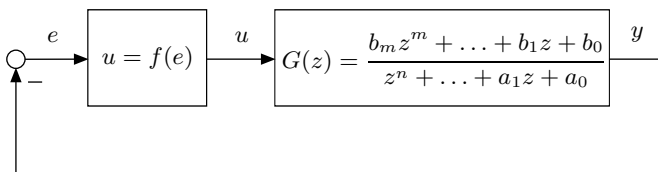


Bild 2.42: Nichtlinearer diskreter Standardregelkreis.

Wie sich zeigt, sind diese Sätze dem Popov-Kriterium sehr ähnlich und ähnlich einfach anwendbar. Allerdings sind auch die Kriterien von Zypkin, genau wie das Popov-Kriterium, nur hinreichend. Man kann daher nicht sicher sein, ob man den größten Sektor absoluter Stabilität mittels der Kriterien ermittelt hat.

Wir betrachten zunächst ein sehr einfach anwendbares Kriterium von Zypkin.

Satz 3 (Einfaches Zypkin-Kriterium). *Gegeben sei der diskrete nichtlineare Standardregelkreis*

$$Y(z) = G(z)U(z),$$

$$e = -y,$$

$$u = f(e)$$

mit einer Regelstrecke, die höchstens einen Pol bei $z = 1$ und sonst nur Pole mit $|z| < 1$ besitzt. Die Kennlinie $u = f(e)$ sei stückweise stetig, eindeutig, für alle e definiert, gehe durch null und erfülle $f(e \rightarrow \infty) \neq 0$. Dann ist obiger Regelkreis absolut stabil

(1) im Sektor $[0, K]$, wenn $G(z)$ stabil ist,

(2) im Sektor $[\varepsilon, K]$ mit einem beliebig kleinen $\varepsilon > 0$, wenn $G(z)$ höchstens einen Pol in $z = 1$ und sonst nur Pole mit $|z| < 1$ besitzt,

falls die Gleichung

$$\operatorname{Re} \{G(z = e^{j\omega T})\} > -\frac{1}{K}$$

für alle $0 \leq \omega T \leq \pi$ erfüllt ist.

Geometrisch ist das obige Kriterium sehr einfach zu interpretieren. Man zeichnet die Ortskurve zu $G(z = e^{j\omega T})$ und schiebt von links in der komplexen Ebene kommend eine senkrechte Gerade an die Ortskurve heran, bis sie diese tangiert. Der Schnittpunkt $-1/K$ mit der reellen Achse liefert den gefundenen Sektor $[0, K]$ bzw. $[\varepsilon, K]$ absoluter Stabilität. Bild 2.43 illustriert dies.

Der Vorteil dieses Kriteriums ist seine sehr einfache Anwendung. Nachteilig ist, dass es in manchen Fällen keine gute Abschätzung des Sektors absoluter Stabilität liefert. Ein erweitertes Kriterium, das eine bessere Abschätzung dieses Sektors liefert, ist das Folgende.

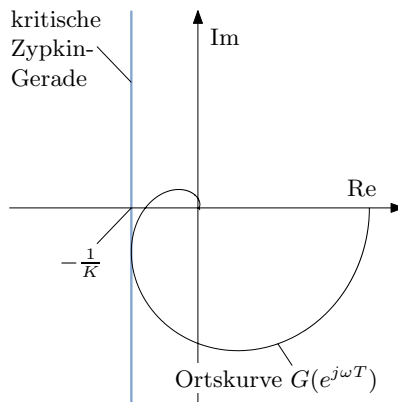


Bild 2.43: Anwendung des einfachen Zypkin-Kriteriums.

Satz 4 (Allgemeines Zypkin-Kriterium). *Gegeben sei der diskrete nicht-lineare Standardregelkreis*

$$\begin{aligned} Y(z) &= G(z)U(z), \\ e &= -y, \\ u &= f(e) \end{aligned}$$

mit der stabilen Regelstrecke $G(z)$. Die Kennlinie $u = f(e)$ sei stückweise stetig, eindeutig, für alle e definiert, gehe durch null und sei monoton. Dann ist obiger Regelkreis absolut stabil im Sektor $[0, K]$, falls sich eine reelle Zahl $q \geq 0$ findet, für die die Zypkin-Ungleichung

$$\operatorname{Re} \{ (1 + q(1 - e^{-j\omega T})) \cdot G(z = e^{j\omega T}) \} > -\frac{1}{K}$$

für alle $0 \leq \omega T \leq \pi$ erfüllt ist.

Obiges Kriterium ist analog zu Popovs Kriterium mit dem Unterschied, dass die Kennlinie $u = f(e)$ monoton sein muss. Dies ist allerdings keine große Einschränkung, da fast alle in der Praxis vorkommenden Kennlinien diese zusätzliche Bedingung erfüllen. Des Weiteren muss $q \geq 0$ sein.

Das allgemeine Zypkin-Kriterium kann ähnlich grafisch ausgewertet werden wie das Popov-Kriterium. Man formt die Zypkin-Ungleichung

$$\operatorname{Re} \{ G(e^{j\omega T}) + q(1 - e^{-j\omega T}) \cdot G(e^{j\omega T}) \} > -\frac{1}{K}$$

um zu

$$\underbrace{\operatorname{Re} \{ G(e^{j\omega T}) \}}_{U(\omega)} - q \underbrace{(\operatorname{Re} \{ e^{-j\omega T} G(e^{j\omega T}) \} - \operatorname{Re} \{ G(e^{j\omega T}) \})}_{V(\omega)} > -\frac{1}{K}.$$

Wie im Fall des Popov-Kriteriums erhält man eine parametrisierte Ungleichung:

$$U(\omega) - qV(\omega) + \frac{1}{K} > 0.$$

Auch hier kann man einen künstlichen Frequenzgang bzw. seine Ortskurve, die *Zypkin-Ortskurve*

$$\tilde{G}(e^{j\omega T}) = U(\omega) + jV(\omega),$$

definieren. Verläuft dann die Zypkin-Ortskurve rechts bzw. unterhalb einer Geraden mit der Steigung $1/q$ und dem Schnittpunkt $-1/K$ mit der reellen Achse, so ist der Regelkreis absolut stabil. Bild 2.44 illustriert den Zusammenhang. Auch hier legt man die Gerade tangential an die Zypkin-Ortskurve, so dass sich der größtmögliche Stabilitätssektor ergibt.

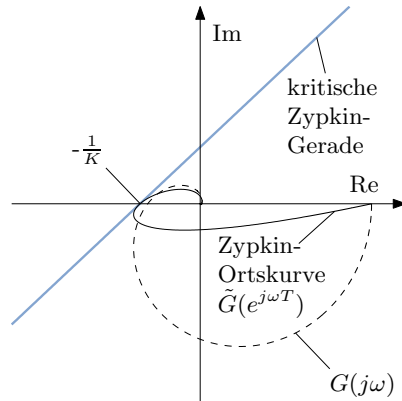
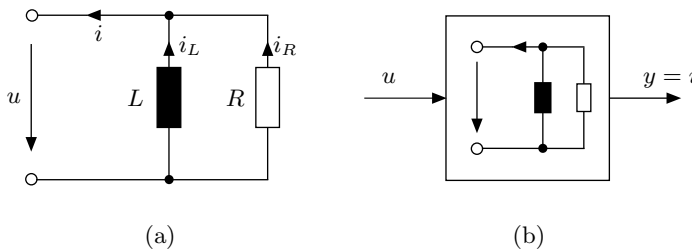


Bild 2.44: Anwendung des allgemeinen Zypkin-Kriteriums.

2.3 Hyperstabilität

2.3.1 Der Begriff der Hyperstabilität

Der Begriff *Hyperstabilität* wurde 1963 von V. M. Popov [153, 154] eingeführt. Um einen Zugang zu diesem Stabilitätsbegriff zu finden, wird zuerst das einfache lineare System mit Widerstand R und Spule L in Bild 2.45 betrachtet.

Bild 2.45: RL-Schaltung: (a) Schaltplan, (b) Blockschaltbild mit Eingangsgröße u und Ausgangsgröße $y = i$.

Die Energiebilanz dieses Systems hat die Form

$$\underbrace{- \int_0^t u(\tau) i(\tau) d\tau}_{\text{zugeführte Energie}} = \underbrace{\int_0^t R i_R^2(\tau) d\tau}_{\text{verbrauchte Energie}} + \underbrace{\frac{1}{2} L i_L^2(t) - \frac{1}{2} L i_L^2(0)}_{\text{gespeicherte Energie}}.$$

Aus obiger Gleichung ergibt sich die Abschätzung

$$-\int_0^t u(\tau) \cdot i(\tau) d\tau \geq \frac{1}{2}L(i_L^2(t) - i_L^2(0))$$

für die zugeführte Energie. Hierbei ist anzumerken, dass die zugeführte Energie positiv ist, wenn Energie vom System aufgenommen wird. Ist sie negativ, so gibt das System Energie ab.

Da die in der Spule gespeicherte Energie endlich ist, kann man sicher für alle $t \geq 0$ auch die Abschätzung

$$-\int_0^t u(\tau) \cdot i(\tau) d\tau \geq \frac{1}{2}L(i_L^2(t) - i_L^2(0)) \geq -\varepsilon_0^2 \quad (2.7)$$

treffen. Diese Abschätzung bedeutet, dass die dem System zugeführte Energie beliebig (positiv) groß werden kann. Eben größer als $-\varepsilon_0^2$. Ist die zugeführte Energie negativ, d. h., entnimmt man dem System gespeicherte Energie, so ist die Energieentnahme auf einen Wert größer $-\varepsilon_0^2$ beschränkt. Denn sonst hätte man ein Perpetuum mobile erster Art. Betrachtet man nun u als Eingangsgröße und $y = i$ als Ausgangsgröße, dann erhält man als Energieabschätzung aus Gl. (2.7)

$$\int_0^t u(\tau) \cdot y(\tau) d\tau \leq \varepsilon_0^2 \quad \text{für alle } t \geq 0. \quad (2.8)$$

Es ist nun sicher sinnvoll, die Energieabschätzung (2.8) auf beliebige lineare Systeme

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned}$$

zu erweitern. Man benutzt sie also als Forderung an die Ein- und Ausgangsgrößen linearer MIMO-Systeme. Sie ist dann nur noch im übertragenen Sinn eine Energieabschätzung.

Die Eingangs- und die zugehörigen Ausgangsgrößenvektoren sollen in der verallgemeinerten Form der Abschätzung

$$\int_0^t \mathbf{u}^T(\tau) \cdot \mathbf{y}(\tau) d\tau \leq \varepsilon_0^2 \quad \text{für alle } t \geq 0 \quad (2.9)$$

genügen. Evident muss

$$\dim \mathbf{y} = \dim \mathbf{u}$$

gelten, da sonst in Gl. (2.9) das Skalarprodukt nicht gebildet werden kann. Die Ungleichung (2.9) definiert eine Menge von Funktionen $\mathbf{u}(t)$, die für obiges System als Eingangsfunktionen zugelassen werden. Bild 2.46 illustriert dies.

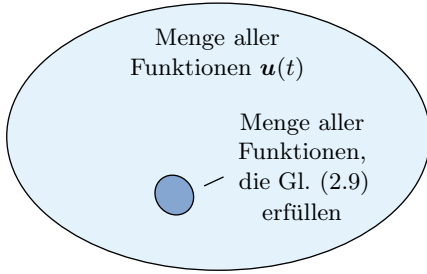
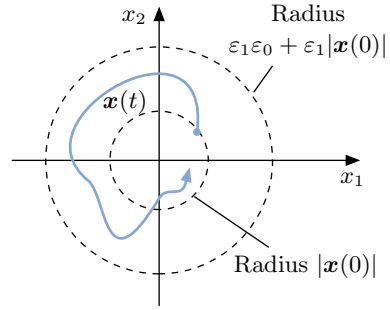
Bild 2.46: Die Menge aller zugelassenen Funktionen $\mathbf{u}(t)$.

Bild 2.47: Stabilitätsanforderung an hyperstabile Systeme.

Interessant sind nun Systeme, die für alle diejenigen Eingangsfunktionen $\mathbf{u}(t)$ stabil sind, welche die Integralungleichung (2.9) erfüllen. Stabil heißt hier, dass der Zustandsvektor $\mathbf{x}(t)$ für jede zulässige Funktion $\mathbf{u}(t)$ bei beliebigem Anfangsvektor $\mathbf{x}(0)$ gemäß

$$|\mathbf{x}(t)| \leq \varepsilon_1 \varepsilon_0 + \varepsilon_1 |\mathbf{x}(0)|, \quad \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_0 > 0,$$

beschränkt bleibt. Die beiden beliebigen positiven Konstanten ε_0 und ε_1 legen den Radius des Gebietes fest, in dem $\mathbf{x}(t)$ für alle $t \geq 0$ verbleibt. Bild 2.47 illustriert die Situation. Systeme dieser Art nennt man *hyperstabil*. Zusammengefasst lautet die Definition der Hyperstabilität für zeitinvariante lineare Systeme:

Definition 9 (Hyperstabilität). Gegeben sei das steuerbare und beobachtbare zeitinvariante System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned}$$

mit $\dim \mathbf{u} = \dim \mathbf{y}$. Wenn dann für alle Eingangsfunktionen $\mathbf{u}(t)$ und die resultierenden Ausgangsfunktionen $\mathbf{y}(t)$, welche die Ungleichung

$$\int_0^t \mathbf{u}^T(\tau) \cdot \mathbf{y}(\tau) d\tau \leq \varepsilon_0^2 \quad \text{für alle } t \geq 0$$

erfüllen, und für alle Anfangsvektoren $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ die Abschätzung

$$|\mathbf{x}(t)| \leq \varepsilon_1 \varepsilon_0 + \varepsilon_1 |\mathbf{x}(0)| \quad \text{für alle } t \geq 0$$

gilt, dann heißt das System *hyperstabil*. Dabei sind ε_0 und ε_1 positive Konstanten.

Es sei angemerkt, dass diese Definition auch für nichtlineare Systeme

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\end{aligned}$$

gilt.

In obiger Stabilitätsdefinition geht $\mathbf{x}(t)$ nicht zwingend für $t \rightarrow \infty$ gegen null. Vielmehr verbleibt die Trajektorie $\mathbf{x}(t)$ in einem bestimmten Gebiet. Das erinnert an die Stabilität im Sinne von Ljapunov. Und in der Tat gilt

Satz 5 (Ruhelage eines hyperstabilen Systems). *Ist ein lineares System hyperstabil, so besitzt es eine einzige Ruhelage in*

$$\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Diese Ruhelage ist stabil im Sinne von Ljapunov.

Man beachte, dass der Begriff der *Hyperstabilität* als Systemeigenschaft betrachtet wird und nicht als Eigenschaft einer Ruhelage. Das ist möglich, da nur eine Ruhelage existiert und ihre Stabilität global ist. In der Praxis wird man allerdings auch oft

$$\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{für} \quad t \rightarrow \infty$$

fordern. Entsprechend definiert man die asymptotische Hyperstabilität wie folgt.

Definition 10 (Asymptotische Hyperstabilität). *Ein hyperstabiles System heißt asymptotisch hyperstabil, wenn für jede Eingangsfunktion $\mathbf{u}(t)$, die die Ungleichung*

$$\int_0^t \mathbf{u}^T(\tau) \cdot \mathbf{y}(\tau) d\tau \leq \varepsilon_0^2 \quad \text{für alle} \quad t \geq 0$$

erfüllt, für den Zustandsvektor $\mathbf{x}(t)$ mit einem beliebigen Anfangsvektor $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$$

gilt.

Bild 2.48 illustriert die Definition anhand dreier Funktionen $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ und $\mathbf{u}_3$ aus der Menge der Funktionen, die die Integralungleichung erfüllen. Die zugehörigen Trajektorien $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$ und $\mathbf{x}_3(t)$ streben asymptotisch in den Ursprung. Bezüglich der Stabilität der Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ gilt im Fall asymptotischer Hyperstabilität folgender Satz.

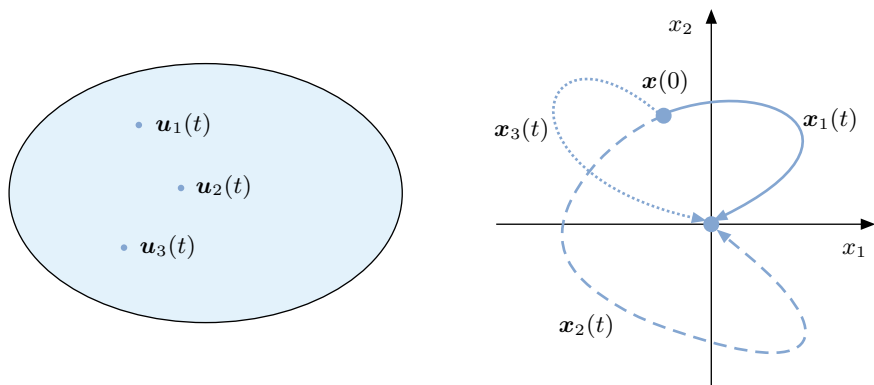


Bild 2.48: Illustrationen zur Definition 10: Links ist die Menge der erlaubten Funktionen $\mathbf{u}(t)$ gezeigt, rechts sind drei Trajektorien $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$ und $\mathbf{x}_3(t)$ dargestellt, die aus den Eingangsverläufen $\mathbf{u}_1(t)$, $\mathbf{u}_2(t)$ und $\mathbf{u}_3(t)$ resultieren.

Satz 6 (Globale Stabilität). *Ist ein lineares System asymptotisch hyperstabil, so besitzt es die global asymptotisch stabile Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$.*

Es scheint zunächst wenig sinnvoll zu sein, obige Definitionen und Sätze für lineare Systeme anzugeben. Für sie lässt sich Stabilität natürlich einfacher feststellen. Betrachtet man aber Eingangsfunktionen

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{F}\{\mathbf{y}(t), t\},$$

die vom Ausgangsvektor $\mathbf{y}(t)$ abhängen, wobei $\mathbf{F}$ ein beliebiger Operator sein kann, so erscheint die Situation in einem neuen Licht: Ein nichtlinearer Regelkreis wie in Bild 2.49 liegt vor.

Der Operator $\mathbf{F}$ kann z. B. eine nichtlineare zeitvariante Funktion

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{f}(\mathbf{y}, t)$$

oder eine Faltungsoperation

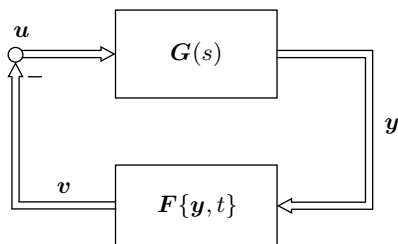


Bild 2.49: Nichtlinearer MIMO-Regelkreis mit linearer Regelstrecke und nichtlinearer Rückführung.

$$u(t) = - \int_0^t g(t - \tau) y(\tau) d\tau$$

sein. Die Einhaltung der Integralungleichung

$$\int_0^t \mathbf{u}^T(\tau) \cdot \mathbf{y}(\tau) d\tau \leq \varepsilon_0^2 \quad \text{für alle } t \geq 0$$

kann dann direkt anhand der Nichtlinearität

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{v}(t) = -\mathbf{F}\{\mathbf{y}, t\}$$

des Regelkreises überprüft werden. Im Regelkreis des Bildes 2.49 ist also festzustellen, ob

$$\int_0^t \mathbf{v}^T(\tau) \cdot \mathbf{y}(\tau) d\tau \geq -\varepsilon_0^2 \quad \text{für alle } t \geq 0 \quad (2.10)$$

gilt. Gl. (2.10) wird als *Popov'sche Integralungleichung* bezeichnet.

2.3.2 Hyperstabilität nichtlinearer SISO-Regelkreise

Bezüglich der nichtlinearen Rückführung betrachtet man als wichtiges Beispiel ein SISO-System und alle Kennlinien im Sektor $[0, \infty)$, welcher in Bild 2.50 dargestellt ist. Offensichtlich gilt für alle Kennlinien in $[0, \infty)$ die Ungleichung

$$v \cdot y \geq 0$$

bzw.

$$u \cdot y \leq 0.$$

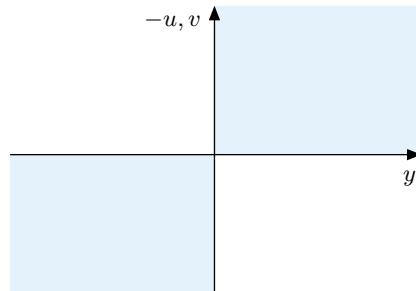


Bild 2.50: Kennliniensektor $[0, \infty)$, in dem alle Kennlinien die Popov'sche Integralungleichung erfüllen.

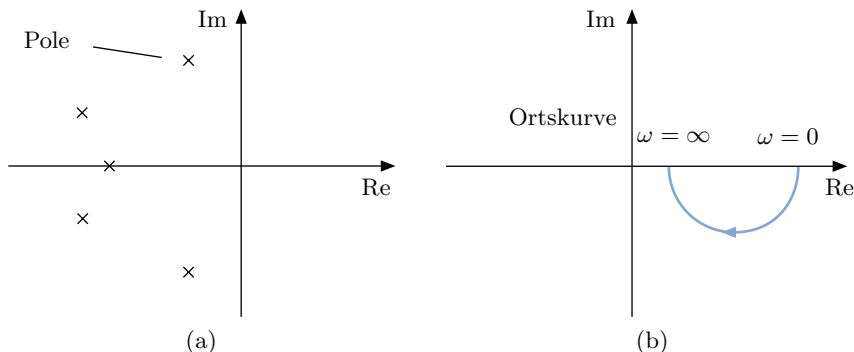


Bild 2.51: Die beiden Bedingungen für die asymptotische Hyperstabilität linearer SISO-Systeme: (a) für alle Eigenwerte gilt $\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0$, (b) für die Frequenzen $\omega \geq 0$ gilt $\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} > 0$.

Also ist die Popov'sche Integralungleichung

$$\int_0^t v y \, d\tau \geq -\varepsilon_0^2 \quad \text{für alle } t \geq 0$$

erfüllt. An diesem Beispiel erkennt man auch die Verwandtschaft zum Begriff der *absoluten Stabilität*.

Der Nachweis, dass die nichtlineare Rückführung die Popov'sche Integralungleichung erfüllt, reicht allerdings noch nicht aus, um sicherzustellen, dass der betrachtete nichtlineare Regelkreis stabil ist. Man hat nämlich noch zu überprüfen, ob die lineare Regelstrecke hyperstabil ist. Da man in der Praxis meistens an einer asymptotischen Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ interessiert ist, wird im Weiteren nur der Fall der asymptotischen Hyperstabilität betrachtet.

Es lässt sich nun zeigen, dass steuer- und beobachtbare, zeitinvariante SISO-Systeme

$$G(s) = d + \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}$$

genau dann asymptotisch hyperstabil sind, wenn die Übertragungsfunktion $G(s)$ stabil ist und $\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} > 0$ für alle $\omega \geq 0$ gilt. Diese Bedingung illustriert Bild 2.51. Eine Übertragungsfunktion $G(s)$, die beide Forderungen erfüllt, nennt man *streng positiv reell*.

Es gilt für den Regelkreis des Bildes 2.49 im SISO-Fall folgender wichtiger Stabilitätssatz.

Satz 7 (Hyperstabilität von SISO-Regelkreisen). *Gegeben sei der nichtlineare Regelkreis*

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s),$$

$$u = -v,$$

$$v = F\{y, t\}$$

mit der steuer- und beobachtbaren, zeitinvarianten Regelstrecke $G(s)$. Erfüllt die lineare Regelstrecke die Bedingungen

- (1) $G(s)$ ist stabil und
 (2) $\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} > 0$ für alle $\omega \geq 0$

und erfüllt die nichtlineare Rückführung die Popov'sche Integralungleichung

$$(3) \int_0^t v(\tau)y(\tau) d\tau \geq -\varepsilon_0^2 \quad \text{für alle } t \geq 0,$$

dann und nur dann ist der Regelkreis asymptotisch hyperstabil.

In den meisten praktischen Fällen wird die Bedingung (2) des obigen Satzes nicht erfüllt sein. Man kann aber auch diesen Fall behandeln, indem man die Ortskurve soweit nach rechts verschiebt, bis $G(s)$ vollständig in der rechten Halbebene liegt. Bild 2.52 illustriert dies. Dies ist möglich, indem man $\tilde{d}$ als künstlichen Durchgriff zur Streckenbeschreibung gemäß

$$\tilde{G}(s) = \tilde{d} + G(s)$$

addiert. Damit dabei der Regelkreis in seinem Verhalten unverändert bleibt, muss man den künstlichen Durchgriff der Strecke durch eine Rückkopplung bei der Nichtlinearität wieder aufheben. Bild 2.53 zeigt im Teilbild (a) den entsprechenden Regelkreis und die neue Nichtlinearität im Teilbild (b), die durch den künstlichen Durchgriff entstanden ist.

Man hat nun die nichtlineare Rückführung

$$v = F\{\hat{y} + v\tilde{d}, t\} \quad (2.11)$$

zu untersuchen. Es entsteht also eine neue Nichtlinearität, die in die Popov'sche Integralungleichung einzusetzen ist. Leider ist die nichtlineare Funktion (2.11) implizit in v . Für die Auswertung der Popov'schen Integralgleichung benötigen wir den Zusammenhang zwischen v und $\hat{y}$ aber im Allgemeinen in expliziter Form. Leider lässt sich Gl. (2.11) nicht in jedem Fall in eine explizite Form bringen. Die Auswertung der Popov'schen Integralgleichung kompliziert sich dann.

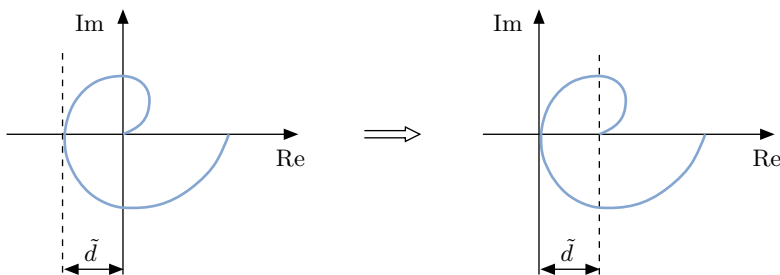


Bild 2.52: Verschiebung der Ortskurve $G(j\omega)$ um $\tilde{d}$.

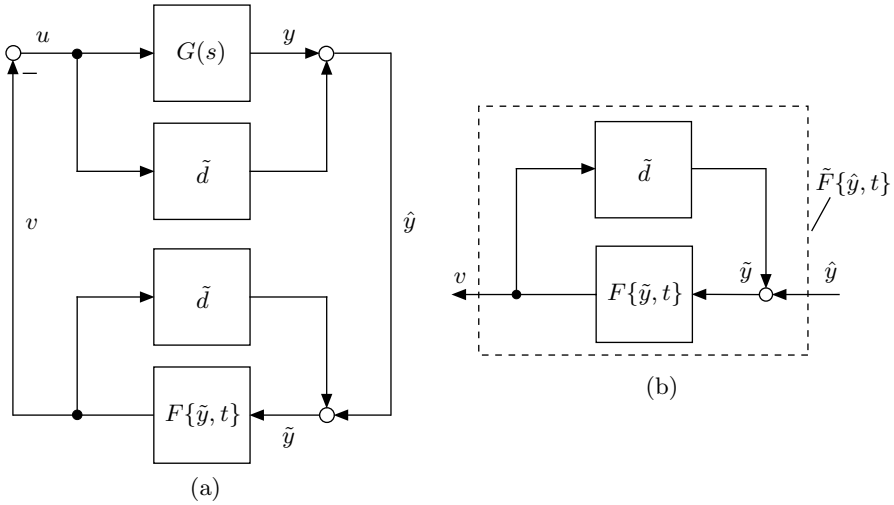


Bild 2.53: (a) Regelkreis mit künstlichem Durchgriff $\tilde{d}$. (b) Nichtlinearität $\tilde{F}\{\hat{y}, t\} = F\{\hat{y} + v\tilde{d}, t\}$.

2.3.3 Hyperstabilität nichtlinearer MIMO-Systeme

Auch für MIMO-Systeme gibt es ein Stabilitätskriterium im Frequenzbereich [138, 154]. Es ist aber nicht ganz einfach anzuwenden. Deshalb betrachten wir im Weiteren ein leichter handhabbares Kriterium auf Basis der Zustandsraumdarstellung.

Es lässt sich zeigen, dass steuer- und beobachtbare, zeitinvariante MIMO-Systeme

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}$$

mit der Rückführung

$$\mathbf{u} = -\mathbf{F}\{\mathbf{y}, t\},$$

dargestellt in Bild 2.54, genau dann asymptotisch hyperstabil sind, wenn folgender Satz erfüllt ist.

Satz 8 (Hyperstabilität von MIMO-Regelkreisen). *Gegeben sei ein nichtlinearer Regelkreis mit der steuer- und beobachtbaren Regelstrecke*

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}$$

und der Rückführung

$$\mathbf{u} = -\mathbf{v} = -\mathbf{F}\{\mathbf{y}, t\}.$$

Erfüllt

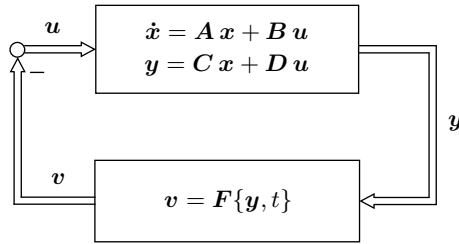


Bild 2.54: Nichtlinearer MIMO-Regelkreis.

(1) die Regelstrecke die Kalman-Jakubovich-Gleichungen

$$\begin{aligned} A^T R + RA &= -LL^T, \\ LV &= C^T - RB, \\ D^T + D &= V^T V \end{aligned}$$

mit positiv definitem R , beliebig regulärem L und beliebigem V und

(2) die Rückführungsnichtlinearität F die Popov'sche Integralgleichung

$$\int_0^t v^T(\tau) y(\tau) d\tau \geq -\varepsilon_0^2 \quad \text{für alle } t \geq 0,$$

dann und nur dann ist der Regelkreis asymptotisch hyperstabil.

Die Popov'sche Integralungleichung überprüft man im MIMO-Fall ähnlich wie im SISO-Fall. Aber wie löst man die Kalman-Jakubovich-Gleichungen? Wir betrachten im Folgenden verschiedene Lösungsansätze.

Für ein System ohne Durchgriff, d. h. $D = 0$, vereinfachen sich die Kalman-Jakubovich-Gleichungen zu

$$\begin{aligned} A^T R + RA &= -LL^T, \\ C^T &= RB. \end{aligned}$$

Bei Systemen mit Durchgriff $D \neq 0$ ist die Situation komplizierter. Oft kann man dann in den folgenden drei Schritten vorgehen:

Schritt 1: Man wählt eine beliebige reguläre Matrix L , z. B.

$$L = I$$

und bestimmt aus dem linearen Gleichungssystem

$$A^T R + RA = -LL^T$$

die positiv definite Matrix $\mathbf{R}$.

Schritt 2: Da $\mathbf{L}$ regulär ist, bestimmt man aus

$$\mathbf{L}\mathbf{V} = \mathbf{C}^T - \mathbf{R}\mathbf{B}$$

die Matrix

$$\mathbf{V} = \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{C}^T - \mathbf{R}\mathbf{B}).$$

Schritt 3: Und schließlich setzt man $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$ voraus und erhält aus

$$\mathbf{D} + \mathbf{D}^T = \mathbf{V}^T \mathbf{V}$$

die Matrix

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \mathbf{V}^T \mathbf{V}. \quad (2.12)$$

Es fällt nun sofort auf, dass die Matrix (2.12) im Allgemeinen nicht mit der Durchgangsmatrix $\mathbf{D}$ der Systembeschreibung übereinstimmt. Man verwendet daher folgenden Trick. Man bildet die künstliche Durchgriffmatrix

$$\tilde{\mathbf{D}} = \frac{1}{2} \mathbf{V}^T \mathbf{V} - \mathbf{D}.$$

Dann formt man den Regelkreis aus Bild 2.54, wie in Bild 2.55 dargestellt, um.

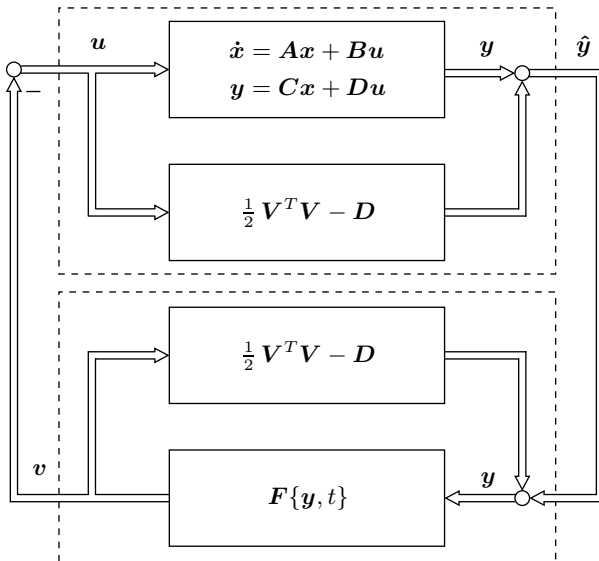


Bild 2.55: Regelkreis mit zusätzlichem künstlichen Durchgriff.

Ersichtlich heben sich die zusätzlichen Zweige mit $\frac{1}{2}\mathbf{V}^T\mathbf{V} - \mathbf{D}$ gegenseitig auf. Die Regelstrecke hat dann, wie in Gl. (2.12) gefordert, die Durchgangsmatrix

$$\frac{1}{2}\mathbf{V}^T\mathbf{V}.$$

Bezüglich der Popov'schen Integralungleichung ist jetzt die Nichtlinearität

$$\mathbf{v} = \mathbf{F}\{\hat{\mathbf{y}} + \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{v}, t\}$$

zu betrachten. Auch hier tritt, ähnlich wie im SISO-Fall, eine implizite Gleichung für $\mathbf{v}$ auf. Dies kann bei der Auswertung der Popov'schen Integralungleichung zu Schwierigkeiten führen.

Manchmal können die Kalman-Jakubovich-Gleichungen auch auf andere Weise als durch obige drei Schritte gelöst werden. So kann auch zuerst die Matrix $\mathbf{V}$ mittels einer Cholesky-Zerlegung aus

$$\mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{D}^T + \mathbf{D}$$

ermittelt werden. Die verbleibenden zwei Kalman-Jakubovich-Gleichungen

$$\mathbf{A}^T\mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{A} = -\mathbf{L}\mathbf{L}^T \quad \text{und} \quad \mathbf{L}\mathbf{V} = \mathbf{C}^T - \mathbf{R}\mathbf{B}$$

bilden dann ein nichtlineares Gleichungssystem in $\mathbf{R}$ und $\mathbf{L}$. Dieses löst man und überprüft, ob eine Lösung mit positiv definitem $\mathbf{R}$ und regulärem $\mathbf{L}$ existiert.

2.3.4 Illustrationsbeispiele

Wir betrachten als ein einfaches Beispiel [86] das System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Von den Kalman-Jakubovich-Gleichungen lösen wir zuerst die Gleichung $\mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{D} + \mathbf{D}^T$. Es gilt in diesem Fall mit $\mathbf{D} = \mathbf{I}$ die Gleichung

$$\mathbf{V} = \sqrt{2}\mathbf{I}.$$

Aus den beiden verbleibenden Kalman-Jakubovich-Gleichungen

$$\mathbf{A}^T\mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{A} = -\mathbf{L}\mathbf{L}^T \quad \text{und} \quad \mathbf{R}\mathbf{B} = \mathbf{C}^T - \mathbf{L}\mathbf{V}$$

folgt hier, wenn wir der Einfachheit halber $\mathbf{R}$ und $\mathbf{L}$ als Diagonalmatrizen ansetzen,

$$-2 \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & 3r_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} l_1^2 & 0 \\ 0 & l_2^2 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

und

$$\begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \sqrt{2} \begin{bmatrix} l_1 & 0 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Die Gleichungen (2.14) und (2.15) bilden das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{l_1^2}{2} = 1 - \sqrt{2}l_1, \\ r_2 &= \frac{l_2^2}{6} = 1 - \sqrt{2}l_2. \end{aligned}$$

Es besitzt die Lösungen

$$\begin{aligned} r_1 &= 3 \mp 2\sqrt{2} > 0, & r_2 &= 7 \mp 4\sqrt{3} > 0, \\ l_1 &= \pm 2 - \sqrt{2} \neq 0, & l_2 &= \pm 2\sqrt{6} - 3\sqrt{2} \neq 0, \end{aligned}$$

so dass die Matrix $\mathbf{R}$ positiv definit und die Matrix $\mathbf{L}$ regulär ist. Die Kalman-Jakubovich-Gleichungen sind also erfüllt.

Aus der Zustandsraumdarstellung (2.13) und auch aus der zugehörigen Übertragungsmatrix

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{s+4}{s+3} \end{bmatrix}$$

ist ersichtlich, dass die beiden Differenzialgleichungen bzw. Teilsysteme nicht verkoppelt sind. Wir können in diesem Fall auch beide Teilsysteme mittels Satz 7 getrennt voneinander daraufhin untersuchen, ob sie positiv reell sind. Da die Ortskurven von

$$G_{11}(s) = \frac{s+2}{s+1} \quad \text{und} \quad G_{22}(s) = \frac{s+4}{s+3}$$

in Bild 2.56 rechts der imaginären Achse liegen und beide Teilsysteme stabil sind, ist das Gesamtsystem, wie erwartet, streng positiv reell.

Als Regler verwenden wir zwei P-Regler, die einer Stellgrößenbeschränkung unterliegen. Das Regelgesetz hat dann die Form

$$\mathbf{u} = -\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -\text{sat}(K_{R1}y_1) \\ -\text{sat}(K_{R2}y_2) \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \text{sat}(x) = \begin{cases} -x_{\max}, & x < -x_{\max}, \\ x, & |x| \leq x_{\max}, \\ x_{\max}, & x > x_{\max}, \end{cases} \quad (2.16)$$

wobei $K_{R1} > 0$ und $K_{R2} > 0$ die Parameter der P-Regler sind.

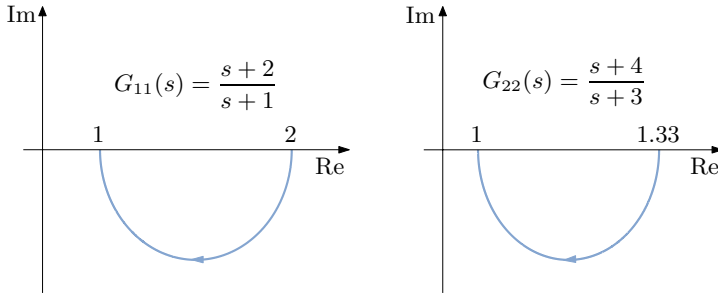


Bild 2.56: Ortskurven der beiden Teilsysteme.

Für die Popov'sche Integralungleichung erhält man

$$\int_0^t \mathbf{v}^T(\tau) \mathbf{y}(\tau) d\tau = \int_0^t (y_1(\tau) \operatorname{sat}(K_{R1}y_1(\tau)) + y_2(\tau) \operatorname{sat}(K_{R2}y_2(\tau))) d\tau \geq -\varepsilon_0^2.$$

Diese Ungleichung ist sicher erfüllt für alle $t \geq 0$, da

$$y_i \operatorname{sat}(K_{Ri}y_i) \geq 0$$

für alle $y_i \in \mathbb{R}$ und alle $K_{Ri} > 0$, $i = 1, 2$, gilt. Der Regelkreis (2.13), (2.16) besitzt also in $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ eine global asymptotisch stabile Ruhelage.

In einem weiteren Beispiel für die Anwendung von Satz 8 betrachten wir eine Regelstrecke ohne Durchgriff

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Wir gehen davon aus, dass für sie die Kalman-Jakubovich-Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{R} + \mathbf{R} \mathbf{A} &= -\mathbf{L} \mathbf{L}^T, \\ \mathbf{C}^T &= \mathbf{R} \mathbf{B} \end{aligned}$$

erfüllt sind. Uns interessiert nun, welche Regler

$$\mathbf{u} = -\mathbf{v} = -\mathbf{K}(t) \cdot \mathbf{y} \tag{2.18}$$

zu einem stabilen Regelkreis führen. Um dies herauszufinden, setzen wir das Regelgesetz (2.18) in die Popov'sche Integralungleichung ein und erhalten

$$\int_0^t \mathbf{y}^T \mathbf{K}(\tau) \mathbf{y} d\tau \geq -\varepsilon_0^2.$$

Hinreichend für die Erfüllung dieser Ungleichung und damit auch für die Stabilität des Regelkreises (2.17), (2.18) ist die Forderung, dass die Matrix $\mathbf{K}(t)$ positiv semidefinit für alle $t \geq 0$ ist. Man beachte, dass die Reglermatrix $\mathbf{K}(t)$ auch von $\mathbf{x}(t)$ oder $\mathbf{y}(t)$ abhängen darf, d. h. die Form $\mathbf{K}(\mathbf{x}(t))$ oder $\mathbf{K}(\mathbf{y}(t))$ aufweisen darf.

2.4 Die Stabilitätstheorie von Ljapunov

2.4.1 Die Idee und die direkte Methode

In den vorherigen Kapiteln wurden Verfahren zur Stabilitätsanalyse nichtlinearer Regelkreise betrachtet, die bestimmten eingeschränkten Systemklassen zuzuordnen sind. Dies waren u. a. das Verfahren der harmonischen Balance, das Popov-Kriterium und das Hyperstabilitätskriterium. Für die Regelungstechnik sind oben genannte Verfahren wichtig, da sie in der Praxis oft vorkommende Regelkreisstrukturen behandeln.

Allgemeine Verfahren zur Stabilitätsanalyse nichtlinearer Systeme sind diese Verfahren aber leider nicht. Ein solches Verfahren wurde 1892 von A. M. Ljapunov^[1] angegeben [117, 118, 119]. Es hat eine Vielzahl von Erweiterungen erfahren [12, 64, 66, 157]. Prinzipiell sind mit Ljapunovs Verfahren alle dynamischen Systeme auf ihre Stabilität hin untersuchbar. Es wird sich allerdings zeigen, dass dies praktisch oft nicht möglich ist. Das Verfahren Ljapunovs löst das Problem der Stabilitätsuntersuchung nichtlinearer Systeme also auch nicht vollständig.

Um die Grundidee Ljapunovs zu skizzieren, betrachtet man verschiedene Fälle möglichen Stabilitätsverhaltens anhand des Beispiels einer Kugel mit Reibung unter Einwirkung der Erdbeschleunigung g . Bild 2.57 illustriert entsprechende Anordnungen. Nur die linke weist eine stabile Ruhelage auf.

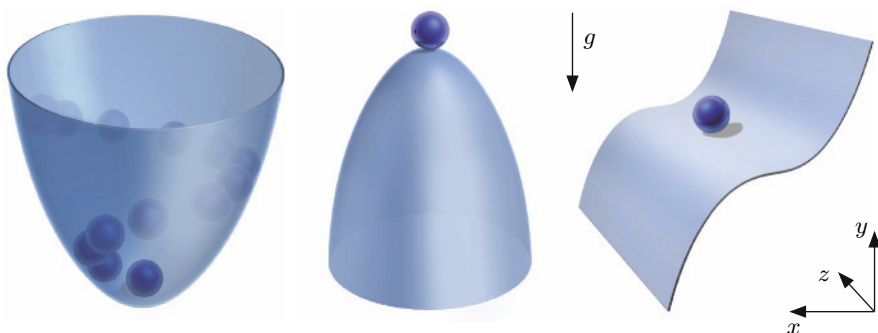


Bild 2.57: Stabilitätssituationen einer Kugel im Gravitationsfeld.

^[1] Im Deutschen ist auch die Schreibweise Ljapunow, im Englischen Lyapunov oder seltener Liapunov gebräuchlich.

Die potenzielle Energie

$$E_p = mgy$$

der Kugel mit der Masse m ist proportional zur Höhe y . Durch die jeweilige Anordnung ist eine Zwangsbewegung auf einer bestimmten Bahn vorgeschrieben, so dass die y -Koordinate eine Funktion f von x und z ist. Für die potenzielle Energie gilt also auch

$$E_p = mgf(x, z).$$

Offensichtlich ist eine Ruhelage nur stabil, wenn die potenzielle Energie in der Ruhelage ein Minimum besitzt. D.h., dass im betrachteten Beispiel die Funktion f ein Minimum besitzen muss.

Dies allein reicht allerdings noch nicht aus, um die Stabilität sicherzustellen, wie folgende Erweiterung des Beispiels zeigt. Nun soll in der Kugel ein Antrieb enthalten sein, der dazu führt, dass sie aufschwingt, wie es Bild 2.58 illustriert. Dann ist die Ruhelage nicht stabil, obwohl die potenzielle Energie

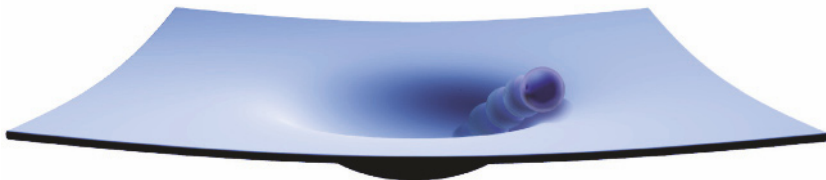


Bild 2.58: Kugel mit Energiequelle und Antrieb zum Aufschwingen.

ein Minimum aufweist. Dies ist darauf zurückzuführen, dass das System eine innere Energiequelle besitzt.

Außer der Forderung, dass die potenzielle Energie ein Minimum besitzt, ist offensichtlich eine weitere Bedingung nötig, damit eine Ruhelage stabil ist. Man fordert daher zusätzlich, dass die potenzielle Energie entlang aller Trajektorien in der Umgebung der Ruhelage abnimmt oder zumindest konstant bleibt.

Betrachtet man diese Überlegungen genauer, so scheint man sich von der Ausgangsposition einer potenziellen Energiefunktion lösen und obige Vorgehensweise verallgemeinern zu können. Es scheint ausreichend zu sein, eine beliebige Funktion zu betrachten, die folgende zwei Forderungen erfüllt, damit eine Ruhelage stabil ist:

- (1) Die Funktion muss in der Ruhelage ein Minimum besitzen.
- (2) Die Funktion muss in einer Umgebung der Ruhelage entlang aller Trajektorien abnehmen.

Das ist die Grundidee der *direkten Methode von Ljapunov*, auch *zweite Methode* genannt. Und A. M. Ljapunov hat den folgenden, für die Stabilitätsanalyse dynamischer Systeme zentralen Satz bewiesen.

Satz 9 (Direkte Methode von Ljapunov). *Die Differenzialgleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ mit der Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ besitze für jeden Anfangswert aus einer Umgebung $U_1(\mathbf{0})$ des Ursprungs eine stetige und eindeutige Lösung. Existiert dann eine Funktion $V(\mathbf{x})$ mit*

$$(1) V(\mathbf{0}) = 0,$$

die in einer Umgebung $U_2(\mathbf{0}) \subseteq U_1(\mathbf{0})$ stetig ist, stetige partielle Ableitungen besitzt und dort mit Ausnahme von $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ die Bedingungen

$$(2) V(\mathbf{x}) > 0,$$

$$(3) \dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (\text{bzw. } \dot{V}(\mathbf{x}) < 0)$$

erfüllt, so ist die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ stabil im Sinne von Ljapunov (bzw. asymptotisch stabil).

Die Bedingungen (1) und (2) stellen sicher, dass V ein Minimum in $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ besitzt. Die Bedingung (3) bedeutet, dass V entlang aller Trajektorien aus $U_2(\mathbf{0})$ mit der Zeit abnimmt oder konstant bleibt. Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass die Annahme einer Ruhelage in $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ keine Einschränkung der Allgemeinheit ist. Denn jede Ruhelage kann, wie in Abschnitt 1.1.3 festgestellt, nach $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ transformiert werden.

Satz 9 ermöglicht es zu überprüfen, ob eine Ruhelage stabil im Sinne von Ljapunov oder asymptotisch stabil ist. Abhängig ist dies davon, ob $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ oder $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ ist. Bild 2.59 illustriert den Fall $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$. Im Fall, dass auch $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ gilt, können Trajektorien $\mathbf{x}(t)$, die nicht in die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ laufen, die Ungleichung $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ erfüllen. D. h., die Ruhelage ist nur stabil im Sinne von Ljapunov. In Bild 2.60 dagegen ist der Fall der asymptotischen Stabilität dargestellt. Er liegt vor, wenn $V(\mathbf{x})$ entlang aller Trajektorien $\mathbf{x}(t)$ abnimmt, also für die zeitliche Ableitung $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ gilt.

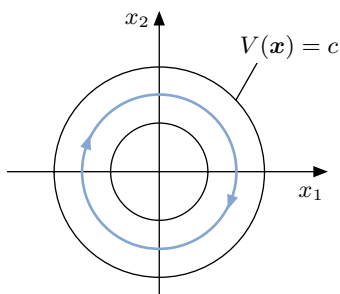


Bild 2.59: Stabilität im Sinne von Ljapunov.

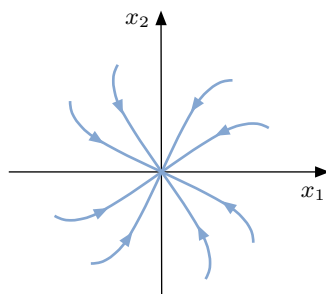


Bild 2.60: Beispiel für asymptotische Stabilität.

Sind die Bedingungen (2) und (3) im gesamten Zustandsraum erfüllt und gilt zusätzlich

$$V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad (2.19)$$

so ist die Ruhelage global stabil im Sinne von Ljapunov (bzw. global asymptotisch stabil). Eine Funktion mit der Eigenschaft (2.19) bezeichnet man als *radial unbeschränkt*.

Funktionen $V(\mathbf{x})$, welche die Bedingungen des Stabilitätssatzes 9 erfüllen, nennt man *Ljapunov-Funktionen*. Praktisch bildet man die Ableitung einer Ljapunov-Funktion $V(\mathbf{x})$ nach der Zeit mittels des Gradienten

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \text{grad } V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (2.20)$$

und setzt die Ableitung des Zustandsvektors

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

in Gl. (2.20) ein. Dann hat man zu prüfen, ob $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ bzw. $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ für $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ gilt. Dies veranschaulicht Bild 2.61. Man benötigt bei der Anwendung von Satz 9 also nicht die Lösung der Differenzialgleichung, die im Falle nicht-linearer Systeme oft auch gar nicht analytisch bestimmbar ist. Die direkte Verwendung der Differenzialgleichung bei der Berechnung von $\dot{V}(\mathbf{x})$ gibt der Methode ihren Namen.

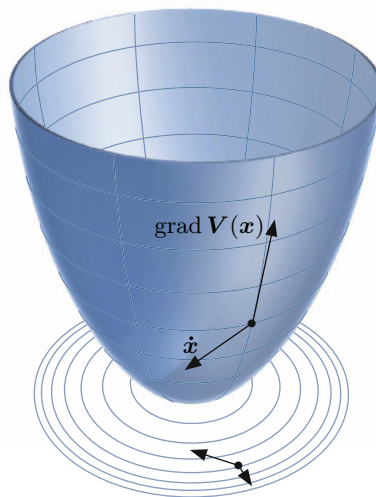


Bild 2.61: Veranschaulichung der Gleichung $\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \text{grad } V(\mathbf{x}) < 0$.

Wir wollen nun noch den Fall betrachten, dass wir eine Ljapunov-Funktion V für ein System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ kennen, für die wir nur $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ und daher mit Satz 9 nur Stabilität im Sinne von Ljapunov und keine asymptotische Stabilität nachweisen können. Existiert nun keine Trajektorie $\mathbf{x}(t)$, die bei irgendeinem Anfangswert $\mathbf{x}(0)$ beginnt und entlang derer die Ableitung $\dot{V}(\mathbf{x}(t))$ fortwährend identisch null ist, so nimmt V entlang aller Trajektorien aus der Umgebung der Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ ab. Folglich ist die asymptotische Stabilität der Ruhelage auch in diesem Fall nachweisbar [13]. Wir formulieren dies präziser in

Satz 10 (Satz von Barbashin und Krasovskii). *Die Differenzialgleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ mit der Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ besitze für jeden Anfangswert aus einer Umgebung $U_1(\mathbf{0})$ des Ursprungs eine stetige und eindeutige Lösung. Es existiere eine Funktion $V(\mathbf{x})$ mit*

$$(1) V(\mathbf{0}) = 0,$$

die in einer Umgebung $U_2(\mathbf{0}) \subseteq U_1(\mathbf{0})$ stetig ist, stetige partielle Ableitungen besitzt und dort mit Ausnahme von $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$(2) V(\mathbf{x}) > 0$$

$$(3) \dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$$

$$(4) \text{ Die Menge von Zuständen } \mathbf{x}, \text{ für die } \dot{V}(\mathbf{x}) = 0 \text{ gilt, enthält keine Trajektorie } \mathbf{x}(t).$$

Dann ist die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ asymptotisch stabil.

Ist die Ljapunov-Funktion des obigen Satzes außerdem noch radial unbeschränkt und ist $U_2(\mathbf{0}) = \mathbb{R}^n$, so ist die Ruhelage global asymptotisch stabil.

Satz 10 erweist sich in der Praxis oft als nützlich, wenn man nur eine Ljapunov-Funktion mit $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ finden kann. Die Bedingung (4) lässt sich überprüfen, indem man die Menge der Werte $\mathbf{x}$ bestimmt, für die $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ ist. Diese Werte setzt man in $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein. Enthalten sie eine andere Lösung der Differenzialgleichung als $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, so ist die Bedingung (4) nicht erfüllt. Meistens ist sie allerdings erfüllt, denn nur in seltenen Fällen verläuft eine Trajektorie $\mathbf{x}(t)$ fortwährend auf einer Höhenlinie der Ljapunov-Funktion V , was identisch mit $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = 0$ ist.

Das Problem bei der Anwendung obiger Stabilitätssätze ist das Auffinden einer Ljapunov-Funktion $V(\mathbf{x})$. Für das eine oder andere nichtlineare System, wie das im nachfolgenden Abschnitt, und für lineare Systeme ist die Ermittlung einer Ljapunov-Funktion aufgrund der Anschauung einfach. Im allgemeinen Fall stellt es sich allerdings als außerordentlich problematisch heraus, eine Ljapunov-Funktion zu bestimmen. Zwar gibt es eine Reihe von Konstruktionsmethoden für Ljapunov-Funktionen [52, 144] wie die Methoden von Aiserman, die von Schultz und Gibson, die von Ingwerson oder die Methode von Zubow. Doch sind sie nur auf Spezialfälle anwendbar und in vielen Fällen aufwendig zu handhaben. Letztendlich ist man daher in der Mehrzahl der Fälle auf das Ausprobieren verschiedener Funktionsansätze für $V(\mathbf{x})$ angewiesen.

2.4.2 Illustrationsbeispiel

Es folgt ein Beispiel. Und zwar betrachten wir das schon im Abschnitt 1.1.6 behandelte System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(x_2 - 1), \\ \dot{x}_2 &= x_2(x_1 - 1)\end{aligned}$$

mit den Ruhelagen $\mathbf{x}_{R1} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{x}_{R2} = [1 \ 1]^T$. Seine Trajektorien zeigt Bild 2.62. Eine Kandidatin für eine Ljapunov-Funktion zum Nachweis der Stabilität der Ruhelage $\mathbf{x}_{R1} = \mathbf{0}$ ist

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2,$$

denn es gilt $V(\mathbf{0}) = 0$ und sonst $V(\mathbf{x}) > 0$. Die Höhenlinien von V haben die Form von Kreisen. Die Ruhelage $\mathbf{x}_{R2}$ ist, wir erinnern uns, instabil.

Es ist jetzt zu überprüfen, ob die Funktion

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$$

entlang aller Systemtrajektorien $\mathbf{x}(t)$ in der Nähe der Ruhelage abnimmt. Man bildet zu diesem Zweck

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{x}}^T \text{grad } V(\mathbf{x}) \\ &= [\dot{x}_1 \ \dot{x}_2] \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \\ &= 2x_1^2(x_2 - 1) + 2x_2^2(x_1 - 1).\end{aligned}$$

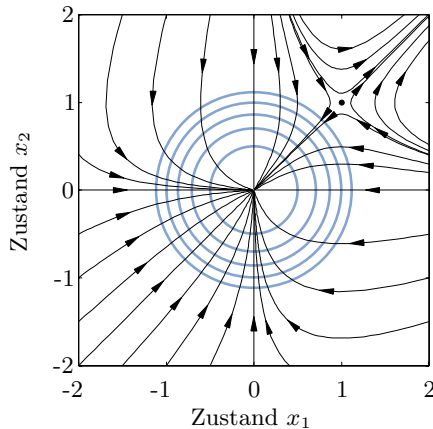


Bild 2.62: Trajektorien $\mathbf{x}(t)$ und kreisförmige Höhenlinien (blau) der Ljapunov-Funktion $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$.

Es gilt

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \quad \text{für} \quad x_1 < 1 \quad \text{und} \quad x_2 < 1,$$

so dass die Ruhelage

$$\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$$

asymptotisch stabil und

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$$

eine Ljapunov-Funktion ist. Bild 2.62 illustriert diese Ergebnisse, wobei die Höhenlinien von $V(\mathbf{x})$, wie gesagt, Kreise bilden.

2.4.3 Quadratische Ljapunov-Funktionen

Funktionen mit kreis- oder ellipsoidförmigen Höhenlinien scheinen, aus rein anschaulichen Motiven heraus, geeignete Kandidatinnen von Ljapunov-Funktionen für verschiedene Systeme zu sein. Ihre allgemeine Form ist durch positiv definite quadratische Formen

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x}$$

gegeben. Bild 2.63 zeigt die Höhenlinien einer solchen Funktion.

Die Bedingung (1) des Satzes 9,

$$V(\mathbf{0}) = 0,$$

ist ersichtlich erfüllt, und wenn $\mathbf{R}$ eine positiv definite Matrix ist, ist es auch die Bedingung (2), d. h.

$$V(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{für} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

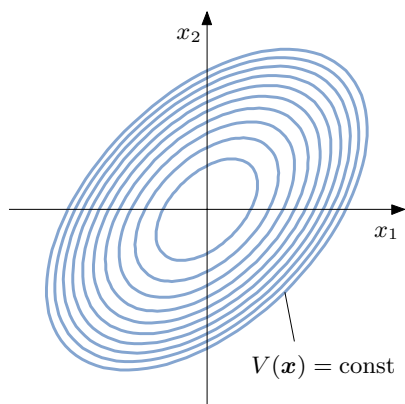


Bild 2.63: Höhenlinien einer quadratischen Funktion.

Es bleibt die Überprüfung der Bedingung (3), d. h.

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \text{bzw.} \quad \dot{V}(\mathbf{x}) < 0,$$

für das jeweils betrachtete System.

Inwieweit sich der Ansatz quadratischer Formen $\mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x}$ für eine Ljapunov-Funktion als tragfähig erweist, soll anhand linearer Systeme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} \tag{2.21}$$

untersucht werden. Es gilt mit

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x}$$

für $\dot{V}(\mathbf{x})$ die Gleichung

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{R} \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{R} \mathbf{x}.$$

Setzt man Gl. (2.21) hierin ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{R} \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T \underbrace{(\mathbf{R} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{R})}_{-\mathbf{Q}} \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Fordert man für asymptotische Stabilität

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} < 0,$$

so muss die Matrix $\mathbf{Q}$ positiv definit sein.

Ergibt sich also aus der Matrixgleichung

$$\mathbf{A}^T \mathbf{R} + \mathbf{R} \mathbf{A} = -\mathbf{Q} \tag{2.22}$$

eine positiv definite Matrix $\mathbf{Q}$, dann ist $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x}$ eine Ljapunov-Funktion und das System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$ asymptotisch stabil. Man kann auch umgekehrt vorgehen, eine beliebige positiv definite Matrix $\mathbf{Q}$ vorgeben und – wenn das System (2.21) stabil ist – eine positiv definite Matrix $\mathbf{R}$ und damit eine Ljapunov-Funktion bestimmen. Die Gleichung (2.22) heißt *Ljapunov-Gleichung*. Es gilt der folgende Satz.

Satz 11 (Ljapunov-Gleichung). *Die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ des linearen Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$ ist genau dann asymptotisch stabil, wenn für eine beliebige reelle, symmetrische, positiv definite Matrix $\mathbf{Q}$ ein $\mathbf{R}$ existiert, so dass*

$$\mathbf{A}^T \mathbf{R} + \mathbf{R} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}$$

gilt. Die Funktion $V = \mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x}$ ist dann eine Ljapunov-Funktion des Systems.

Für stabile lineare Systeme können also immer quadratische Ljapunov-Funktionen gefunden werden. Zumindest in diesem Fall erweist sich der Ansatz solcher Ljapunov-Funktionen als sehr geeignet.

Satz 11 hat eigentlich keine Bedeutung bei der Stabilitätsanalyse linearer Systeme. Diese kann man bekanntlich anhand der Systemeigenwerte einfacher durchführen. Seine Bedeutung liegt vielmehr in der Entwurfstheorie vieler nichtlinearer Regelungen und auch in der Stabilitätsanalyse linearisierter nichtlinearer Systeme. Wir werden uns diesen Themen später noch widmen.

2.4.4 Die direkte Methode für zeitdiskrete Systeme

Ähnlich wie im Fall kontinuierlicher Systeme kann die direkte Methode von Ljapunov auch bei zeitdiskreten Systemen

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$$

genutzt werden. Die ersten beiden Bedingungen des Stabilitätssatzes 9, $V(\mathbf{0}) = 0$ und $V(\mathbf{x}) > 0$ für alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, gelten unvermindert. Lediglich die dritte Bedingung,

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \quad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0},$$

die wir hier nur für den asymptotisch stabilen Fall betrachten, ist durch die Bedingung

$$\Delta V_k = V(\mathbf{x}_{k+1}) - V(\mathbf{x}_k) < 0 \quad \text{für alle} \quad \mathbf{x}_k \neq \mathbf{0}$$

zu ersetzen.

Im Fall linearer Systeme

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi} \mathbf{x}_k$$

und quadratischer Ljapunov-Funktionen

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_k^T \mathbf{R} \mathbf{x}_k$$

erhält man

$$\begin{aligned} \Delta V_k &= \mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{R} \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k^T \mathbf{R} \mathbf{x}_k \\ &= \mathbf{x}_k^T \mathbf{\Phi}^T \mathbf{R} \mathbf{\Phi} \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^T \mathbf{R} \mathbf{x}_k \\ &= \mathbf{x}_k^T (\mathbf{\Phi}^T \mathbf{R} \mathbf{\Phi} - \mathbf{R}) \mathbf{x}_k < 0. \end{aligned}$$

Die obige Ungleichung ist offensichtlich erfüllt, wenn die Matrix $\mathbf{Q}$ in der Gleichung

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{R} \mathbf{\Phi} - \mathbf{R} = -\mathbf{Q} \tag{2.23}$$

positiv definit ist. Gl. (2.23) wird als *diskrete Ljapunov-Gleichung* bezeichnet. Im Gegensatz zur Ljapunov-Gleichung im kontinuierlichen Fall ist die Ljapunov-Gleichung (2.23) quadratisch von der Systemmatrix $\mathbf{\Phi}$ abhängig.

2.4.5 Die indirekte Methode

Die obigen Ergebnisse für zeitkontinuierliche lineare Systeme sind der Ausgangspunkt für die Stabilitätsbetrachtung nichtlinearer Systeme der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (2.24)$$

mit der Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$. Dabei soll $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ stärker gegen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ streben als $|\mathbf{x}|$. Dies ist der Fall, wenn

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow 0} \frac{\mathbf{g}(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|} = \mathbf{0}$$

gilt.

Diese Klasse nichtlinearer Systeme (2.24) ist deshalb so interessant, weil man ein nichtlineares System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

in eine Taylor-Reihe entwickeln

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{0})}_{\mathbf{0}} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

und dadurch in die Form (2.24) bringen kann. Es lässt sich dann mittels der Ljapunov'schen Stabilitätstheorie folgender Satz beweisen, den man auch als *Ljapunovs Methode der ersten Näherung*^[2] oder *indirekte Methode von Ljapunov* bezeichnet.

Satz 12 (Indirekte Methode von Ljapunov). *Das System*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

besitze in $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ eine Ruhelage. Es gelte ferner

- (1) $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ *ist stetig,*
- (2) $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ *ist so beschaffen, dass jeder Anfangswert in einer Umgebung von $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ zu einer stetigen, eindeutigen Trajektorie führt,*
- (3) $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow 0} \frac{\mathbf{g}(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|} = \mathbf{0}.$

Ist dann $\mathbf{A}$ stabil, so ist die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ asymptotisch stabil. Falls $\mathbf{A}$ instabil ist, ist die Ruhelage instabil. Falls $\mathbf{A}$ keine Eigenwerte λ_i mit positivem Realteil, aber mindestens einen mit $\operatorname{Re}\{\lambda_i\} = 0$ besitzt, dann ist die Ruhelage

^[2] Die Methode der ersten Näherung ist nicht identisch mit der hier nicht behandelten *ersten Methode von Ljapunov*. Bei Letzterer basiert die Stabilitätsanalyse auf der Kenntnis der Systemlösungen.

je nach Gestalt von $\mathbf{g}$ stabil oder instabil. Ist $\mathbf{A}$ stabil, so existiert immer eine Ljapunov-Funktion

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x}$$

für $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x})$, deren Matrix $\mathbf{R}$ sich aus

$$\mathbf{A}^T \mathbf{R} + \mathbf{R} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}$$

mit beliebigem positiv definiten $\mathbf{Q}$ ergibt.

Der letzte Satz ist von außerordentlicher Bedeutung. Denn er besagt, dass man das Stabilitätsverhalten der Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ einer großen Klasse nicht-linearer Systeme anhand der zugehörigen linearisierten Systeme untersuchen kann.

2.4.6 Einzugsgebiete

Bisher wurde eine Ruhelage auf ihre Stabilität hin untersucht. Für die Praxis ist aber nicht nur von Bedeutung, ob eine Ruhelage stabil ist. Sondern es interessiert uns auch die größte Umgebung der Ruhelage, in der alle Trajektorien, die in dieser Umgebung beginnen, in die Ruhelage streben. Diese Umgebung nennt man *maximales Einzugsgebiet* oder *Attraktionsgebiet* der Ruhelage. In Bild 2.64 ist dieses Gebiet für das Beispielsystem aus Abschnitt 2.4.2 skizziert. Die Linie bzw. im Höherdimensionalen die Fläche, die stabile Trajektorienverläufe von instabilen trennt, bezeichnet man als *Separatrix*. In Bild 2.64 ist die Separatrix durch den Rand des maximalen Einzugsgebiets gegeben, der durch die instabile Ruhelage $\mathbf{x}_{R2} = [1 \ 1]^T$ verläuft.

Ist das maximale Einzugsgebiet einer stabilen Ruhelage sehr klein, so ist die Ruhelage praktisch als instabil anzusehen. Der Nachweis der Stabilität

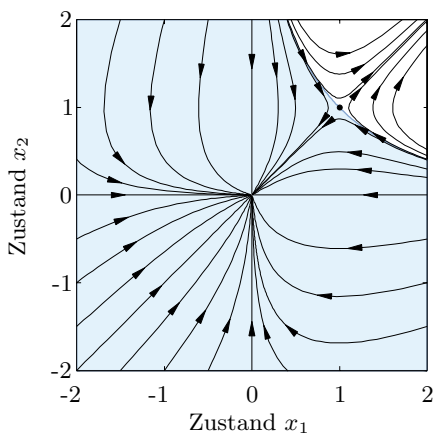


Bild 2.64: Maximales Einzugsgebiet (blau) des Beispielsystems aus Abschnitt 2.4.2.

einer Ruhelage ist in der Praxis also nicht ausreichend. Vielmehr muss man auch die Umgebung der Ruhelage betrachten und das maximale Einzugsgebiet muss so groß sein, dass alle interessierenden Trajektorien in ihm starten.

Im Allgemeinen kann man das maximale Einzugsgebiet einer Ruhelage nicht analytisch bestimmen. Es lassen sich aber Teilgebiete des maximalen Einzugsgebietes ermitteln, wenn man eine Ljapunov-Funktion bestimmt hat. Ein solches Teilgebiet ist dann ein Einzugsgebiet^[3], d. h., alle in ihm startenden Trajektorien verlassen das Gebiet nie wieder und streben in die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$. Umgrenzt sind solche Einzugsgebiete z. B. durch die Höhenlinien einer Ljapunov-Funktion. Genauer gilt:

Satz 13 (Einzugsgebiet). *Ist $V(\mathbf{x})$ eine Ljapunov-Funktion für das System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ mit der Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$, dann ist das Gebiet*

$$G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid V(\mathbf{x}) < c\},$$

falls es beschränkt ist, ein Einzugsgebiet der Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$, wenn überall in G

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$$

gilt.

Ein Einzugsgebiet G mit den oben genannten Eigenschaften wird gemeinhin als *Ljapunov-Gebiet* bezeichnet. Die Forderung $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ sichert, dass V entlang aller Trajektorien abnimmt. Also müssen, wie aus Bild 2.61 ersichtlich, alle Trajektorien in das Gebiet G laufen. Da auch dort überall $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ gilt und G beschränkt ist, streben sie auch nach null.

Die Forderung, dass das Gebiet G beschränkt sein soll, ist wesentlich. Ist sie nicht erfüllt, so ist G nicht zwingend ein Einzugsgebiet, wie folgendes Beispiel zeigt. Wir betrachten als Ljapunov-Funktion

$$V(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{1 + x_1^2} + 2x_2^2. \quad (2.25)$$

Die Funktion ist nicht unbegrenzt, d. h., es gilt nicht $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ für $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, und somit existieren auch Gebiete

$$G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid V(\mathbf{x}) < c\},$$

die nicht beschränkt sind. D. h., die Höhenlinien sind nicht in jedem Fall geschlossen, sondern laufen für Werte $c \geq 1$ ins Unendliche. In Bild 2.65 sind der Graph und die Höhenlinien dieser Funktion dargestellt.

Es existieren nun Systeme mit $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ als Ruhelage, für die $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ überall in $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ gilt und bei denen Trajektorien sich entlang einer Höhenlinie von

^[3] Im Englischen ist der Begriff *contractive (positively) invariant set* üblich. Im Deutschen wird dagegen selten der Begriff *kontraktive (positiv) invariante Menge* verwendet.

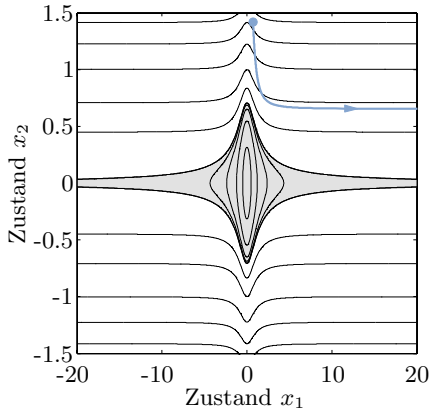


Bild 2.65: Höhenlinien von $V(\mathbf{x})$. Das Gebiet mit geschlossenen Höhenlinien ist grau, eine instabile Trajektorie des Systems (2.26) blau dargestellt.

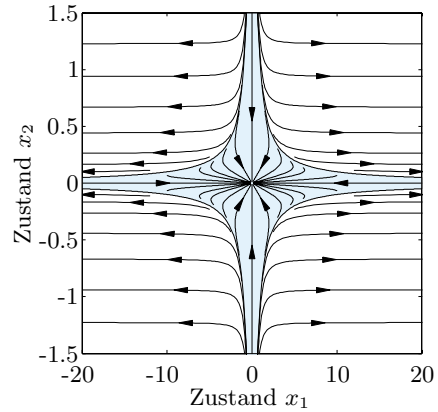


Bild 2.66: Trajektorienverläufe $\mathbf{x}(t)$ des Systems (2.26). Das Einzugsgebiet $G_{\max}$ ist blau dargestellt. Alle Trajektorien außerhalb von $G_{\max}$ sind instabil.

$V(\mathbf{x})$ mit $c > 1$ ins Unendliche davonschleichen können, obwohl entlang der Trajektorie ja $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ gilt. Bild 2.65 zeigt eine solche Trajektorie. Offensichtlich ist G dann kein Einzugsgebiet der Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$.

Ein solches System [18] ist

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + 2x_1^3x_2^2, \\ \dot{x}_2 &= -x_2.\end{aligned}\tag{2.26}$$

Seine Trajektorien zeigt Bild 2.66. Für dieses System mit der einzigen Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ gilt in der Tat mit der Ljapunov-Funktion (2.25)

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\frac{2x_1^2 + 4x_2^2(1 + 2x_1^2)}{(1 + x_1^2)^2} < 0$$

für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ ist also asymptotisch stabil. Sie ist aber, wie wir gleich sehen werden, nicht global asymptotisch stabil. Man beachte, dass Letzteres mit der Ljapunov-Funktion (2.25) auch nicht nachweisbar ist, weil sie nicht radial unbeschränkt ist. Radiale Unbeschränktheit ist aber eine notwendige Eigenschaft von V für den Nachweis globaler Stabilität, wie in Gl. (2.19) gefordert.

Die Lösungen des Systems (2.26) lauten

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \frac{x_{10}e^t}{\sqrt{x_{10}^2x_{20}^2 + (1 - x_{10}^2x_{20}^2)e^{4t}}}, \\ x_2(t) &= x_{20}e^{-t}\end{aligned}\tag{2.27}$$

mit $x_{10} = x_1(0)$ und $x_{20} = x_2(0)$. Hieraus ist direkt ersichtlich, dass $\mathbf{x}(t)$ für $x_{10}^2 x_{20}^2 < 1$ stabil in die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ läuft und für $x_{10}^2 x_{20}^2 \geq 1$ ins Unendliche strebt. Die Anfangswerte, die die Gleichung $x_{10}^2 x_{20}^2 = 1$, d. h.

$$x_{20} = \pm \frac{1}{x_{10}},$$

erfüllen, bilden die Separatrix. Auf ihr ist die Grenze zwischen stabilen und instabilen Trajektorien. Die Trajektorien auf der Separatrix selbst sind instabil und durch

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_{10} e^t, \\ x_2(t) &= x_{20} e^{-t} \end{aligned}$$

gegeben. Im Fall $x_{10}^2 x_{20}^2 > 1$ laufen die Trajektorien in endlicher Zeit ins Unendliche. Denn der Nenner in Gl. (2.27) wird in diesem Fall für eine endliche Zeit identisch null und damit x_1 unendlich groß.

Das maximale Einzugsgebiet ist also durch

$$G_{\max} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 x_2^2 < 1\}$$

gegeben. Bild 2.66 illustriert außer den Trajektorienverläufen $\mathbf{x}(t)$ auch das Gebiet $G_{\max}$, dessen Rand die Separatrix des Systems bildet. In Bild 2.65 ist darüber hinaus die instabile Trajektorie, die in $x_{10} = x_{20} = 1.5$ startet, dargestellt. Sie illustriert, wie erwähnt, dass $V(\mathbf{x})$ entlang der Trajektorie abnimmt und diese trotzdem ins Unendliche entschwindet.

2.4.7 Beispiel Mutualismus

Wir betrachten ein dynamisches System aus der Ökologie. In ökologischen Systemen existieren verschiedene, teilweise ganz unterschiedliche Abhängigkeiten zwischen den Arten. Am bekanntesten sind Räuber-Beute-Beziehungen, die oft durch die Lotka-Volterra-Gleichungen modelliert werden. Auch Wechselwirkungen zwischen zwei Arten, bei denen beide Arten Nutzen aus der Beziehung ziehen, werden durch Differenzialgleichungen beschrieben, die eng mit den Lotka-Volterra-Gleichungen verwandt sind. Solch ein für beide Arten nützliches Zusammenleben bezeichnet man als Mutualismus.

Ein Beispiel hierfür ist der in Bild 2.67 dargestellte Mutualismus zwischen Clownfisch (*Amphiprion ocellaris*) und Prachtanemone (*Heteractis magnifica*). Zum einen schützt die Anemone den Clownfisch mittels ihrer giftigen Nesselzellen gegen Fressfeinde, zum anderen verteidigt auch der Clownfisch die Anemone gegen Fressfeinde, z. B. Feilenfische. Ein weiteres Beispiel ist der Mutualismus zwischen Mensch und Weizen. Modelliert wird ein solcher Mutualismus durch die Systemgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 - cx_1^2 + ex_1x_2, \\ \dot{x}_2 &= bx_2 - dx_2^2 + fx_1x_2, \end{aligned} \tag{2.28}$$

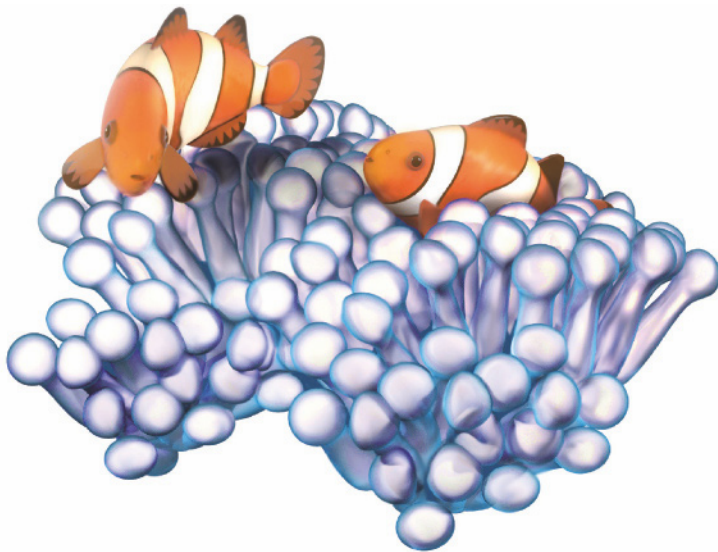


Bild 2.67: Mutualismus zwischen Clownfisch und Anemone.

in denen x_1 die Individuenzahl der einen Art und x_2 die der anderen darstellt. Die Werte a, b, c, d, e und f sind konstante Parameter.

Die Gleichungsanteile $\dot{x}_1 = ax_1$ und $\dot{x}_2 = bx_2$ in Gl. (2.28) beschreiben lineare Wachstumsgesetze, bei denen die Populationen umso stärker wachsen, je größer sie sind. Der Term $-cx_1^2$ dagegen hemmt das Wachstum der Population x_1 mit zunehmender Populationsgröße, z. B. aufgrund von Nahrungskonkurrenz innerhalb der eigenen Art. Dies wird auch als intraspezifische Konkurrenz bezeichnet. Der Term $-dx_2^2$ hat die gleiche Wirkung. Die Anteile ex_1x_2 und fx_1x_2 bewirken eine gegenseitige Förderung des Wachstums beider Populationen. Diese beiden Anteile beschreiben also den Mutualismus innerhalb des Systems.

Das Modell besitzt die Ruhelagen

$$\mathbf{x}_{R1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{R2} = \begin{bmatrix} a/c \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{R3} = \begin{bmatrix} 0 \\ b/d \end{bmatrix}.$$

Ist des Weiteren die Ungleichung $ef < cd$ erfüllt, so existiert eine vierte Ruhelage bei

$$\mathbf{x}_{R4} = \begin{bmatrix} \frac{be + ad}{cd - ef} \\ \frac{bc + af}{cd - ef} \end{bmatrix},$$

die durch den Mutualismus verursacht wird. Für den Fall $ef > cd$ existiert diese Ruhelage nicht, denn dann ist der Mutualismus viel stärker als die in-

traspezifische Konkurrenz und die Populationen x_1 und x_2 wachsen ins Unendliche.

Wir betrachten den speziellen Fall

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - 10^{-3}x_1^2 + 0.5 \cdot 10^{-3}x_1x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_2 - 10^{-3}x_2^2 + 0.5 \cdot 10^{-3}x_1x_2\end{aligned}\quad (2.29)$$

mit den Ruhelagen

$$\mathbf{x}_{R1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{R2} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{R3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1000 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{R4} = \begin{bmatrix} 2000 \\ 2000 \end{bmatrix}.$$

Bild 2.68 zeigt beispielhaft die Trajektorienverläufe dieses ökologischen Systems.

Uns interessiert insbesondere die Ruhelage $\mathbf{x}_{R4}$ des Mutualismus. Um ihre Stabilität nachzuweisen, transformieren wir $\mathbf{x}_{R4}$ zuerst mittels

$$\mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{x}_{R4}$$

in den Ursprung und erhalten für das System (2.29) nach der Transformation

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= (z_1 + 2000) - 10^{-3}(z_1 + 2000)^2 + 0.5 \cdot 10^{-3}(z_1 + 2000)(z_2 + 2000), \\ \dot{z}_2 &= (z_2 + 2000) - 10^{-3}(z_2 + 2000)^2 + 0.5 \cdot 10^{-3}(z_1 + 2000)(z_2 + 2000).\end{aligned}$$

Die Trajektorienverläufe des transformierten Systems zeigt Bild 2.69.

Nun setzt man

$$V(\mathbf{z}) = z_1^2 + z_2^2$$

als Ljapunov-Funktion an und erhält

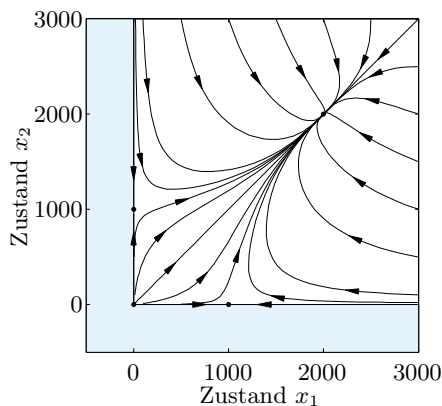


Bild 2.68: Trajektorien des mutualistischen Systems. Für negative Individuenzahlen x_1 und x_2 (blauer Bereich) existieren keine Trajektorien.

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{z}) &= 2z_1\dot{z}_1 + 2z_2\dot{z}_2 \\
&= -4(z_1^2 + z_2^2) - 2 \cdot 10^{-3}(z_1^3 + z_2^3) + 10^{-3}z_1z_2(z_1 + z_2) + 4z_1z_2.
\end{aligned}
\tag{2.30}$$

Um einfach feststellen zu können, wann $\dot{V}(\mathbf{z}) < 0$ gilt, formulieren wir zwei Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}
z_1 &= r \cos \varphi, \\
z_2 &= r \sin \varphi.
\end{aligned}$$

Dabei ist r der Radius und φ der Winkel der Polarkoordinaten und r^2 entspricht außerdem dem Niveau einer Höhenlinie der Ljapunov-Funktion

$$V(\mathbf{z}) = z_1^2 + z_2^2 = r^2.$$

Somit folgt aus Gl. (2.30)

$$\dot{V} = -\frac{r^2(16000 + 5r \cos \varphi + 3r \cos 3\varphi + 5r \sin \varphi - 8000 \sin 2\varphi - 3r \sin 3\varphi)}{4000} < 0,$$

was offensichtlich negativ ist, wenn

$$16000 - 8000 \sin 2\varphi + r(5 \cos \varphi + 3 \cos 3\varphi + 5 \sin \varphi - 3 \sin 3\varphi) > 0 \tag{2.31}$$

gilt. Gl. (2.31) ist äquivalent zur Forderung

$$\frac{1}{r} > \frac{3 \sin 3\varphi - 3 \cos 3\varphi - 5 \cos \varphi - 5 \sin \varphi}{8000(2 - \sin 2\varphi)},$$

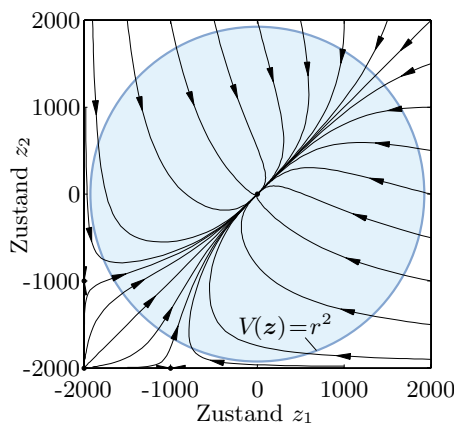


Bild 2.69: Kreisförmiges Einzugsgebiet (blau) der mutualistischen Ruhelage, die hier nach $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ transformiert ist, mit dem Radius $r = 1924$.

die sicher erfüllt ist, wenn

$$\frac{1}{r} > \max \frac{3 \sin 3\varphi - 3 \cos 3\varphi - 5 \cos \varphi - 5 \sin \varphi}{8000(2 - \sin 2\varphi)} \approx \frac{1}{1924}$$

gilt.

Für alle Werte $r < 1924$, d.h. innerhalb des Kreises mit dem Radius $r = 1924$, ist $\dot{V}(\mathbf{z}) < 0$. Die Ruhelage $\mathbf{x}_{R4}$ ist also stabil und der Kreis mit $r = 1924$ und seinem Mittelpunkt in $\mathbf{x}_{R4}$ ist ein Ljapunov-Gebiet, d.h. ein Einzugsgebiet. Allerdings bildet dieses Ljapunov-Gebiet, wie aus Bild 2.69 ersichtlich, durchaus nicht das maximale Einzugsgebiet. Letzteres besteht aus der gesamten positiven Zustandsebene. Die Koordinatenachsen gehören nicht zu diesem Einzugsgebiet, da die hier beginnenden Trajektorien in die nicht-mutualistischen Ruhelagen streben.

2.4.8 Instabilitätskriterium

Alle betrachteten Methoden zur Stabilitätsanalyse haben den Nachweis der Stabilität einer Ruhelage zum Ziel. Gelingt der Stabilitätsnachweis nicht, so kann das darin begründet sein, dass die Stabilitätsanalysemethode nicht geeignet ist oder die Ruhelage instabil ist. Letzteres ist zwar ein trivialer Grund, aber oft kein direkt ersichtlicher.

Es kann also sinnvoll sein, eine Ruhelage auf Instabilität zu prüfen. Im Prinzip ist das möglich, indem man um $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ herum

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \text{grad } V(\mathbf{x}) > 0$$

nachweist. Wir formulieren passend hierzu folgenden Satz, sozusagen als Umkehrung des Stabilitätssatzes von Ljapunov.

Satz 14 (Instabilitätssatz). *Die Differenzialgleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ mit der Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ besitze für jeden Anfangswert aus einer Umgebung $U_1(\mathbf{0})$ des Ursprungs eine stetige und eindeutige Lösung. Existiert dann eine Funktion $V(\mathbf{x})$ mit*

$$(1) V(\mathbf{0}) = 0,$$

die in einer Umgebung $U_2(\mathbf{0}) \subseteq U_1(\mathbf{0})$ stetig ist, stetige partielle Ableitungen besitzt und dort mit Ausnahme von $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ die Bedingungen

$$(2) V(\mathbf{x}) > 0,$$

$$(3) \dot{V}(\mathbf{x}) > 0$$

erfüllt, so ist die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ instabil.

Bild 2.70 illustriert die Aussagen des obigen Satzes. Mit diesem Satz kann man allerdings nicht die Instabilität einer Ruhelage nachweisen, wenn es außer Trajektorien, die von der Ruhelage weglaufen, auch Trajektorien gibt, die in diese Ruhelage einlaufen. Sätze, die eine entsprechende Untersuchung erlauben, finden sich in der weiterführenden Literatur [66, 157]. Sie werden in der Praxis allerdings selten verwendet.

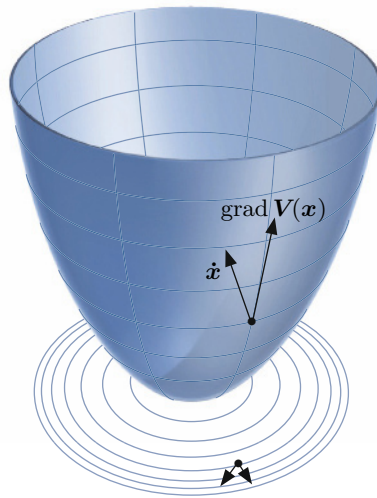


Bild 2.70: Veranschaulichung der Gleichung $\dot{V}(x) = \dot{x}^T \text{grad } V(x) > 0$.

Nichtlineare Regelungen für lineare Regelstrecken

3.1 Regler mit Antiwindup

3.1.1 Der Windup-Effekt

Jedes reale Stellglied eines Regelkreises besitzt eine Beschränkung der Stellgröße u , da seine maximale Stelleistung endlich ist. Bild 3.1 illustriert einen entsprechenden Regelkreis mit Regelstrecke $G(s)$, Regler $K(s)$ und Begrenzungsglied, wobei die beiden Letzten das Stellglied enthalten. Die Begrenzung der Stellgröße beschreibt man durch eine Sättigungskennlinie

$$u = \text{sat}(u_c) = \begin{cases} u_{\max}, & u_c > u_{\max}, \\ u_c, & u_{\min} \leq u_c \leq u_{\max}, \\ u_{\min}, & u_c < u_{\min}. \end{cases}$$

Beispiele für solche Begrenzungen der Stellgröße sind das maximale Drehmoment eines Stellmotors, der maximale Ruderwinkel eines Schiffes und der maximale Öffnungsgrad eines Ventils. Dabei hat die Sättigungskennlinie oft symmetrische Grenzen, d. h., es gilt oft

$$u_{\min} = -u_{\max}.$$

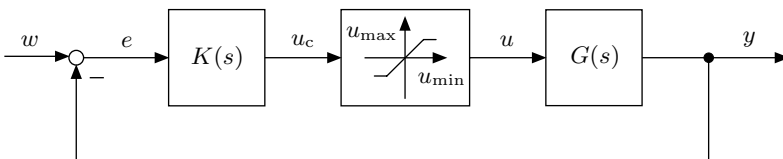


Bild 3.1: Regelkreis mit linearer Regelstrecke, linearem Regler $K(s)$ und einer Begrenzung der Stellgröße.

Überschreitet die Stellgröße die Beschränkungen, so ist der Regelkreis nicht mehr linear, was im Allgemeinen nachteilig für seine Stabilität und sein Regelverhalten ist. Wir wollen dies im Weiteren untersuchen.

Zu diesem Zweck betrachten wir die allgemeine Struktur eines PID-Reglers, d. h.

$$K(s) = K_R \left(1 + \frac{1}{T_N s} + T_V s \right) = K_{PD}(s) + \frac{K_I}{s}$$

mit $K_I = K_R/T_N$. Der Regleranteil $K_{PD}(s)$ kann je nach Typ des Gesamtreglers ein P-, PD- oder D-Regler sein oder im Falle eines reinen I-Reglers auch entfallen. Für den Fall $u = u_c$, d. h. den ungesättigten Fall, ist der Regelkreis offensichtlich linear. Im gesättigten Fall dagegen gilt

$$u = u_{\max} \quad \text{oder} \quad u = u_{\min},$$

d. h., auf die Regelstrecke $G(s)$ wirkt eine konstante Stellgröße u .

Eine Regelung kann im Fall der Sättigung aufgrund der konstanten Stellgröße u nicht stattfinden. Der Regelkreis ist dann praktisch unterbrochen. Bild 3.2 illustriert dies. Offensichtlich führt die Unterbrechung dazu, dass der Integrierer die Regelabweichung solange aufintegriert, bis die Regelabweichung ihr Vorzeichen wechselt. Diesen Vorgang nennt man *Windup*^[1]. Die Aufintegration ist nicht nur unnütz, da ein Wert von

$$u_c < u_{\min} \quad \text{bzw.} \quad u_c > u_{\max}$$

nicht auf die Regelstrecke wirken kann, sondern auch schädlich, da der hohe Integralanteil nach einem Vorzeichenwechsel der Regelabweichung e wieder abgebaut werden muss, bis u_c innerhalb der Sättigungsgrenzen liegt. Erst dann ist der Regelkreis wieder geschlossen und eine Regelung möglich. Auch nach dem Vorzeichenwechsel von e bleibt der Regelkreis also noch eine Zeit

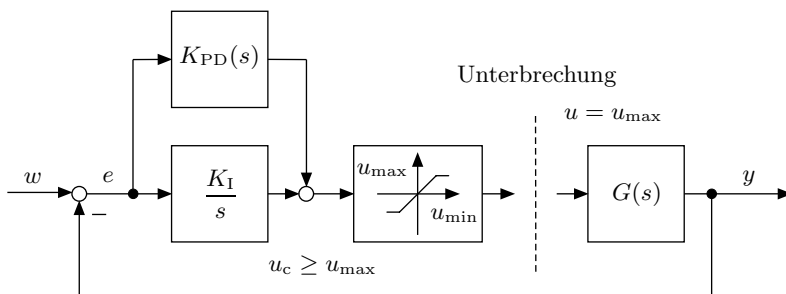


Bild 3.2: Regelkreis im Sättigungsfall.

^[1] engl.: wind up = aufwickeln, aufspulen, hochkurbeln.

lang unterbrochen. Dies ist für das Regelverhalten ungünstig und kann zu erhöhtem Überschwingen oder sogar zur Instabilität führen.

Die Situation lässt sich auch wie folgt interpretieren: Ist die Stellgröße in Sättigung, der Regelkreis also unterbrochen, so bildet der Integralanteil des Reglers ein instabiles Element im offenen Kreis. Diese Situation ist natürlich nicht erwünscht.

3.1.2 PID-Regler mit Antiwindup

Die Vermeidung des oben beschriebenen Windups ist mittels einer Antiwindup-Struktur möglich. Diese verhindert, dass die Ausgangsgröße u_c des Reglers die Grenzen $u_{\min}$ und $u_{\max}$ überschreitet. Bild 3.3 zeigt einen PID-Regler mit Antiwindup. Die Kennlinie des Antiwindup-Elements ist eine Totzone

$$v = \begin{cases} m(u_c - u_{\max}), & u_c > u_{\max}, \\ 0, & u_{\min} \leq u_c \leq u_{\max}, \\ m(u_c - u_{\min}), & u_c < u_{\min}. \end{cases}$$

Dabei gilt für die Steigung der Totzone $m \gg 0$. Die Totzone realisiert eine negative Rückkopplung des Reglerausganges auf den Eingang des I-Anteils. Liegt der Ausgangswert u_c des Reglers innerhalb der Stellgrößenbeschränkung $u_{\min}$ und $u_{\max}$, so ist die Rückkopplung nicht aktiv. D. h., der Regler arbeitet als normaler PID-Regler. Überschreitet u_c eine der Begrenzungen $u_{\min}$ oder $u_{\max}$, so wirkt die Totzone als starke Gegenkopplung auf den I-Anteil. Dabei führt die Gegenkopplung den I-Anteil sofort auf einen so niedrigen Wert zurück, dass u_c die Stellgrößenbeschränkung nicht verletzt. Da die Steigung m endlich ist, können die Grenzen $u_{\min}$ und $u_{\max}$ durch die Stellgröße u_c geringfügig überschritten werden. In der Praxis spielt das aber keine Rolle.

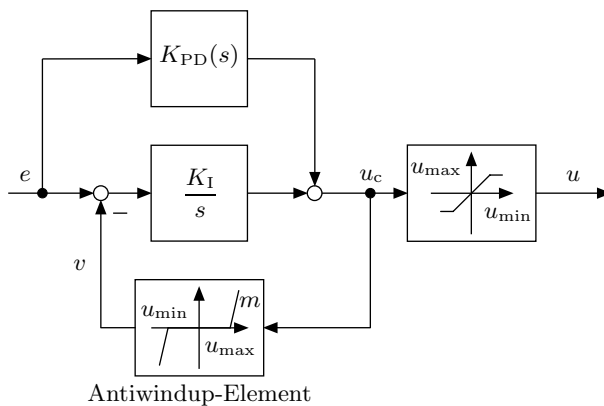


Bild 3.3: PID-Regler mit Antiwindup.

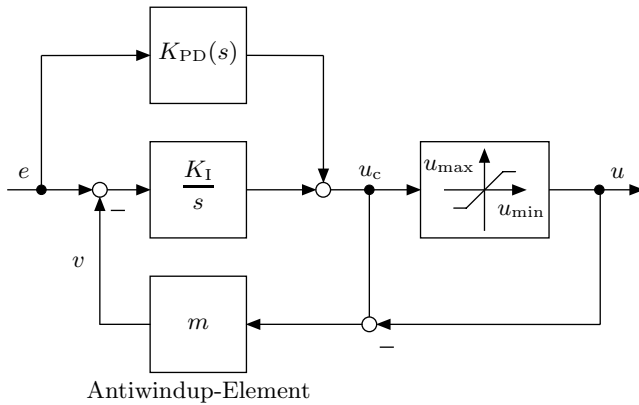


Bild 3.4: Alternative Struktur des Antiwindups aus Bild 3.3.

Eine Realisierung, die äquivalent zur Antiwindup-Struktur des Bildes 3.3 ist, aber ohne Totzone auskommt, ist in Bild 3.4 dargestellt. Diese Realisierung des Antiwindups hat den Vorteil, dass nur eine nichtlineare Kennlinie erforderlich ist.

Neben obiger klassischer Antiwindup-Methode für PID-Regler existiert eine Reihe weiterer Verfahren und dazugehöriger Erweiterungen. Ein Überblick hierzu findet sich in [198].

3.1.3 Beispiel Gleichstrommotor

Wir betrachten als Beispiel den Gleichstrommotor aus Bild 3.5, der als Servoantrieb arbeitet und zum Einstellen eines vorgebbaren Drehwinkels φ_L dient. In solchen Servoantrieben werden oft Antiwindup-Systeme in der Regelung verwendet.

Für die Ankerspannung u gilt mit der im Motor induzierten Spannung $k_1\omega$ und dem Ankerstrom i die Gleichung

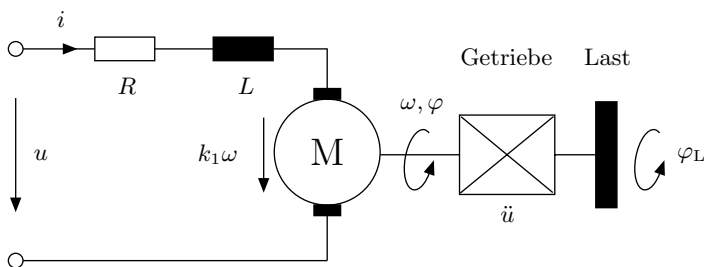


Bild 3.5: Gleichstrommotor mit Getriebe und Last.

$$u = Ri + L\dot{i} + k_1\omega. \quad (3.1)$$

Dabei ist R der Widerstand, L die Induktivität, φ der Drehwinkel und $\omega = \dot{\varphi}$ die Winkelgeschwindigkeit des Ankers. Das erzeugte Drehmoment ist

$$M = k_2 i$$

und dieses ist gleich

$$M = J\dot{\omega} + k_3\omega$$

mit dem geschwindigkeitsproportionalen Reibungsterm $k_3\omega$. Hieraus folgt

$$k_2 i = J\dot{\omega} + k_3\omega. \quad (3.2)$$

Dabei gilt mit dem Trägheitsmoment J_A des Ankers und dem Trägheitsmoment J_L der Last, das über das Getriebe mit der Übersetzung $\ddot{u}$ auf die Ankerwelle rückgerechnet wird, für das Gesamtträgheitsmoment

$$J = J_A + \frac{1}{\ddot{u}^2} J_L.$$

Die Werte k_1, k_2 und k_3 sind Motorparameter.

Aus den Gl. (3.1) und (3.2) erhält man mit den Laplace-Transformierten $U(s)$, $I(s)$, $\Phi(s)$ von u, i, φ

$$\begin{aligned} U(s) &= RI(s) + LI(s) \cdot s + k_1 \Phi(s) \cdot s, \\ I(s) &= \frac{J}{k_2} \Phi(s) \cdot s^2 + \frac{k_3}{k_2} \Phi(s) \cdot s, \end{aligned}$$

wenn alle Anfangswerte identisch null sind. Setzt man obige Gleichungen ineinander ein, so ergibt sich die Übertragungsfunktion

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{1}{s \left[\frac{LJ}{k_2} s^2 + \left(\frac{RJ}{k_2} + \frac{Lk_3}{k_2} \right) s + \left(\frac{Rk_3}{k_2} + k_1 \right) \right]}.$$

Berücksichtigt man noch $\varphi = \ddot{u}\varphi_L$, so gilt

$$G(s) = \frac{\Phi_L(s)}{U(s)} = \frac{\frac{k_2}{\ddot{u}LJ}}{s \left[s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{k_3}{J} \right) s + \left(\frac{Rk_3}{LJ} + \frac{k_1 k_2}{LJ} \right) \right]}.$$

Mit den Motor- und Lastdaten $R = 8.9 \Omega$, $L = 0.1 \text{ H}$, $J = 0.1 \text{ Nm s}^2 \text{ rad}^{-1}$, $\ddot{u} = 10$, $k_1 = 1.7775 \text{ V s rad}^{-1}$, $k_2 = 4 \text{ Nm A}^{-1}$ und $k_3 = 0.1 \text{ Nm s rad}^{-1}$ ergibt sich

$$G(s) = \frac{40}{s(s^2 + 90s + 800)}.$$

Die Motorspannung u , d. h. die Stellgröße, unterliegt den Begrenzungen

$$-100 \leq u \leq 100.$$

Als Regler verwenden wir einen PI-Regler mit

$$H(s) = K_P + K_I \cdot \frac{1}{s}$$

und den Parametern $K_P = 90$ und $K_I = 150$.

Die Simulationen in Bild 3.6 zeigen eine kleine Sprungantwort von $\varphi_L = 0 \text{ rad}$ auf $\varphi_L = 1 \text{ rad} = 57.3^\circ$ mit linearer Ausregelung und eine große von $\varphi_L = 0 \text{ rad}$ auf $\varphi_L = 10 \text{ rad} = 573.0^\circ$ mit nichtlinearer Ausregelung. Für den letztgenannten Fall eines PI-Reglers ohne Antiwindup, bei dem die Stellgröße in die Sättigung geht, sind die negativen Auswirkungen des Windups des I-Reglers klar ersichtlich. Deutlich erkennbar ist auch die positive Wirkung des Antiwindups, das die durch das unnötige Hochlaufen des Integrierers verursachten Schwingungen beseitigt.

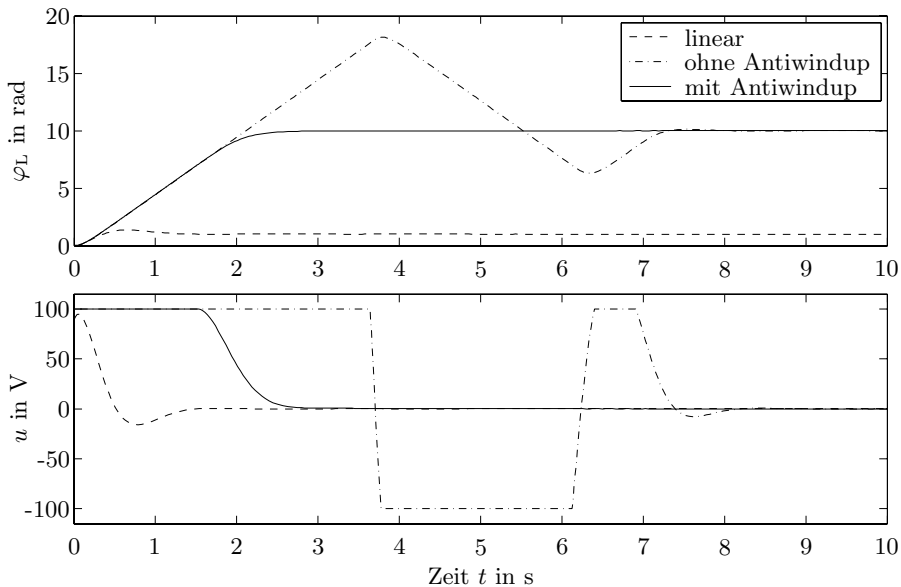


Bild 3.6: Winkelverlauf φ_L und Motorspannung u für den linearen Fall, den Fall mit Antiwindup und den Fall ohne Antiwindup, bei dem der Regler in Sättigung ist.

3.1.4 Antiwindup für allgemeine Reglerstrukturen

Es stellt sich die Frage, was im Fall eines allgemeineren Reglers

$$U_c(s) = H(s) \cdot E(s)$$

als dem PID-Regler an Antiwindup-Maßnahmen vorzusehen ist. Besitzt eine Reglerübertragungsfunktion $H(s)$ instabile Pole oder Pole mit einem Realteil gleich null, so tritt im Falle der Stellgrößenbegrenzung ebenfalls ein Weglaufen, d. h. Windup, der Reglerzustände und damit der Reglerausgangsgröße u_c auf. Bild 3.7 zeigt die Struktur dieses allgemeineren Regelkreises. Auch für diese Regelkreise gibt es verschiedene Antiwindup-Methoden [41, 89, 99, 187].

Eine besonders plausible Antiwindup-Struktur für den allgemeinen Fall erhält man, wenn man einen kleinen Umweg macht, den wir auf den nächsten Seiten verfolgen wollen. Er besteht darin, Zustandsregler mit Beobachtern zu betrachten und für diese das Problem des Sättigungsfalles zu lösen [71].

Wir betrachten den in Bild 3.8 dargestellten Zustandsregelkreis mit Beobachter, der auch *Kontrollbeobachter* genannt wird. Dabei ist die Stellgrößenbeschränkung Teil der Regelstrecke und das Vorfilter V dient der Kompensation der bleibenden Regelabweichung.

Der geschätzte Zustandsvektor $\tilde{x}$ entspricht nach einer gewissen Einschwingzeit dem Zustandsvektor x der Regelstrecke, wenn $u_{\min} \leq u_c \leq u_{\max}$ gilt, d. h., wenn der lineare Fall vorliegt. Man beachte, dass bei Nichterfüllung dieser Bedingung für u_c der Regelkreis, wie oben beschrieben, nichtlinear ist.

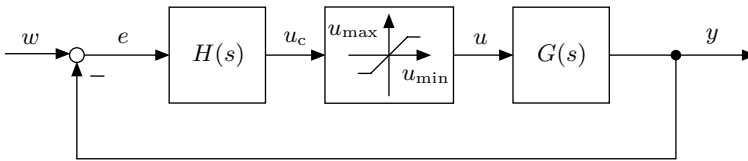


Bild 3.7: Regelkreis mit Sättigungskennlinie und beliebigem linearen Regler $H(s)$.

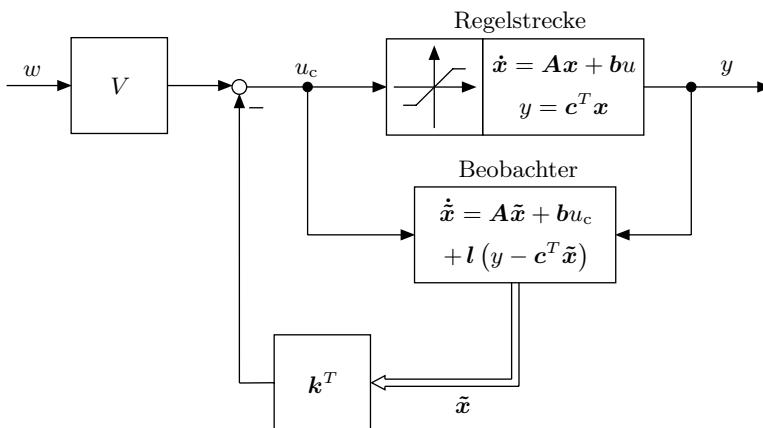


Bild 3.8: Zustandsregelkreis mit Kontrollbeobachter.

Dabei besitzt obiger Zustandsregelkreis mit Beobachter im linearen Fall $2n$ Eigenwerte. Dies sind – wie aus der Theorie linearer Beobachter und dem Separationstheorem bekannt [124] – sowohl die n Eigenwerte der mit $\mathbf{u} = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}$ geregelten Strecke, d. h. die Eigenwerte der Matrix

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T,$$

als auch die n Eigenwerte der Beobachtermatrix

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T.$$

Das charakteristische Polynom des Kontrollbeobachters ist also durch

$$P(s) = \underbrace{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T)}_{D(s)} \underbrace{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{l}\mathbf{c}^T)}_{\Delta(s)}$$

gegeben, d. h., es setzt sich aus dem charakteristischen Polynom $D(s)$ des Regelkreises und dem charakteristischen Polynom $\Delta(s)$ des Beobachters zusammen. Dabei sind die Eigenwerte des Regelkreises und die des Beobachters aufgrund des Separationstheorems durch den Reglervektor $\mathbf{k}$ und den Beobachtervektor $\mathbf{l}$ unabhängig voneinander vorgebar.

Verletzt die Stellgröße die Beschränkung, so sind u_c und u verschieden. In diesem Fall sind auch die Eingangsgrößen von Regelstrecke und Beobachter verschieden, wie aus Bild 3.8 erkennbar ist. Beobachtungsfehler sind die Folge und die Ausregelqualität wird schlecht. Dieses Problem lässt sich einfach lösen, indem man die Eingangsgröße u_c des Beobachters ebenfalls durch die Stellgrößenbegrenzung einschränkt. Dann haben Regelstrecke und Beobachter immer dieselbe Stellgröße. Bild 3.9 zeigt die modifizierte Struktur.

Durch das zusätzliche Sättigungsglied sind Beobachtungsfehler ausgeschlossen, die aus einer Verletzung der Stellgrößenbeschränkung resultieren. Obige einfache Struktur ermöglicht im Allgemeinen auch dann eine gute Ausregelqualität, wenn der Regelkreis vorübergehend in der Sättigung betrieben wird. Dies gilt vor allem für stabile Regelstrecken.

Wir betrachten nun den Beobachter

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T) \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \mathbf{l}y = \mathbf{F}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \mathbf{l}y$$

und erhalten mit den Laplace-Transformierten $\tilde{\mathbf{X}}(s)$, $U(s)$ und $Y(s)$

$$s\tilde{\mathbf{X}}(s) - \tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{F} \cdot \tilde{\mathbf{X}}(s) + \mathbf{b} \cdot U(s) + \mathbf{l} \cdot Y(s)$$

und mit $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}$ die Gleichung

$$\tilde{\mathbf{X}}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{b} \cdot U(s) + (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{l} \cdot Y(s).$$

Zusammen mit dem Zustandsregler

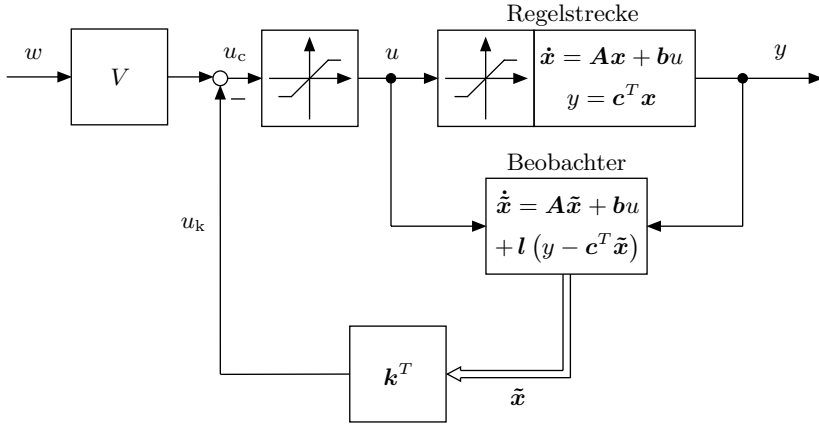


Bild 3.9: Regelkreis mit zusätzlicher Begrenzungskennlinie zur Vermeidung negativer Auswirkungen der Stellgrößenbegrenzung.

$$U_k(s) = \mathbf{k}^T \tilde{\mathbf{X}}(s)$$

gilt

$$U_k(s) = \mathbf{k}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{b} \cdot U(s) + \mathbf{k}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{l} \cdot Y(s).$$

Man erhält also zwei Übertragungsfunktionen,

$$H_1(s) = \frac{U_k(s)}{U(s)} = \mathbf{k}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{b} = \frac{Z_1(s)}{\Delta(s)}$$

und

$$H_2(s) = \frac{U_k(s)}{Y(s)} = \mathbf{k}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{l} = \frac{Z_2(s)}{\Delta(s)},$$

die den Zusammenhang zwischen u_k und u bzw. y beschreiben. $H_1(s)$ und $H_2(s)$ haben denselben Nenner

$$\Delta(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F}).$$

Wir können den Regelkreis mit Beobachter also auch mittels Übertragungsfunktionen darstellen, so wie es Bild 3.10 zeigt. Bei dieser Betrachtungsweise interpretieren wir jetzt die zusätzliche Sättigungskennlinie

$$u = \text{sat}(u_c)$$

als eine Art von Antiwindup-Element für die Übertragungsglieder $H_1(s)$ und $H_2(s)$. Denn das Antiwindup-Element vermeidet auch hier unerwünschte Auswirkungen der Stellgrößenbegrenzung bei den als Regler wirkenden Übertragungsgliedern $H_1(s)$ und $H_2(s)$.

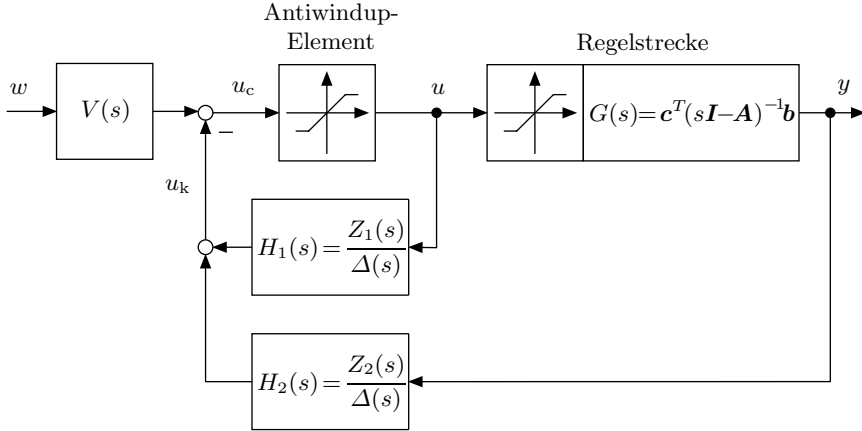


Bild 3.10: Zustandsregelkreis mit Kontrollbeobachter, dargestellt durch Übertragungsfunktionen, und Antiwindup-Element.

Es sei angemerkt, dass $H_1(s)$ und $H_2(s)$ die Nennerordnung n , also die Systemordnung von $\mathbf{A}$, besitzen, da wir den Zustandsvektor $\mathbf{x}$ vollständig rekonstruiert haben. Im Falle eines reduzierten Beobachters weisen $H_1(s)$ und $H_2(s)$ eine niedrigere Systemordnung auf, nämlich die des reduzierten Beobachters.

Wir haben des Weiteren die Struktur des Regelkreises in Bild 3.10 verallgemeinert, indem wir anstelle des Vorfilters V eine Übertragungsfunktion $V(s)$ als Vorfilter zulassen. Die Funktionsweisen des Antiwindups sowie des Zustandsreglers mit Beobachter bleiben davon unbeeinflusst.

Wir betrachten nun wieder den klassischen Regelkreis mit einer Regelstrecke $G(s)$ und einem Regler $H(s)$ für den wir ein Antiwindup suchen. Dieser Regelkreis, der in den Bildern 3.7 und 3.11 dargestellt ist, hat im linearen, d. h. ungesättigten Fall die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Z_R(s)Z(s)}{N_R(s)N(s) + Z_R(s)Z(s)}.$$

Die Regelkreisstruktur aus Bild 3.11 lässt sich in die äquivalente Struktur des Bildes 3.12 umformen. Dabei führt man zusätzlich das Polynom $\Delta(s)$ ein. Denn dann entspricht die Struktur aus Bild 3.12 bis auf das Antiwindup-Element vollständig der des Zustandsregelkreises mit Beobachter aus Bild 3.10. Das Antiwindup-Element fügt man nun auch in den Regelkreis aus Bild 3.12 ein. Bild 3.13 zeigt den sich so ergebenden Regelkreis mit Antiwindup.

Man hat auf diese Weise aus den Überlegungen zur Vermeidung von Sättigungseffekten beim Zustandsregler mit Beobachter ein Antiwindup für den Standardregelkreis mit beliebigem linearen Regler $H(s)$ gewonnen. Die zuletzt betrachtete Regelkreisstruktur des Bildes 3.13 bildet also die Lösung

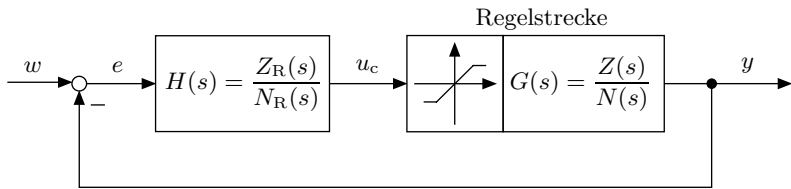


Bild 3.11: Regelkreis mit Stellgrößenbegrenzung und allgemeinem linearen Regler.

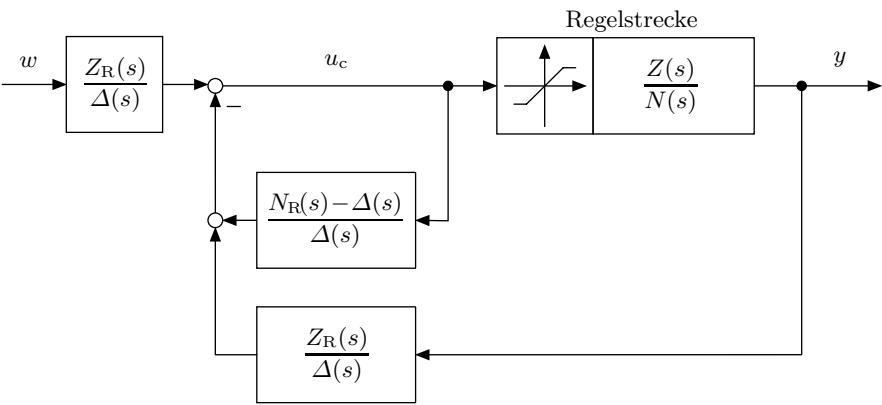


Bild 3.12: Äquivalente Regelkreisstruktur zur Struktur aus Bild 3.11.

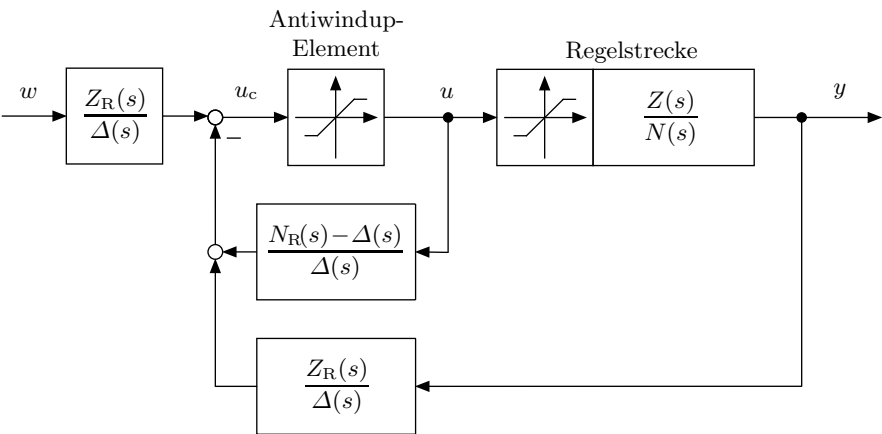


Bild 3.13: Regelkreis mit Sättigung, allgemeinem Regler und Antiwindup.

des Antiwindup-Problems des klassischen Standardregelkreises aus Bild 3.7 bzw. 3.11.

3.1.5 Dimensionierung des allgemeinen Antiwindup-Reglers

Es bleibt als Frage aus dem vorigen Abschnitt noch offen, wie das zusätzlich in den Regelkreis eingebrachte Polynom $\Delta(s)$ zu wählen ist. Zur Klärung dieser Frage vergegenwärtigt man sich, dass im linearen Fall die folgenden drei Regelkreisstrukturen identisch sind:

- (1) der Zustandsregelkreis mit Beobachter und Antiwindup aus Bild 3.9,
- (2) der Standardregelkreis aus Bild 3.11,
- (3) der Standardregelkreis mit Antiwindup aus Bild 3.13.

Für das charakteristische Polynom des Regelkreises mit Beobachter haben wir bereits

$$D(s) \cdot \Delta(s) = \det(s\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}) \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F}) \quad (3.3)$$

bestimmt. Das charakteristische Polynom des Standardregelkreises aus Bild 3.11 bzw. des Regelkreises aus Bild 3.13 ergibt sich aus seiner Übertragungsfunktion zu

$$P(s) = N_R(s)N(s) + Z_R(s)Z(s). \quad (3.4)$$

Damit beide Regelkreisstrukturen identisch sind, fordert man, dass ihre charakteristischen Polynome (3.3) und (3.4) gleich sind. Es muss somit

$$P(s) = N_R(s)N(s) + Z_R(s)Z(s) = D(s) \cdot \Delta(s)$$

gelten. Alle Nullstellen des gesuchten Polynoms $\Delta(s)$ müssen also Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P(s)$ des Standardregelkreises aus Bild 3.11 sein. Zu bemerken ist, dass $P(s)$ die Ordnung $n + k$ besitzt, wobei n die Ordnung der Regelstrecke und k die des Reglers ist. $D(s)$ hat die Ordnung n und $\Delta(s)$ die Ordnung k .

Für den Fall

$$n = k$$

repräsentiert $\Delta(s)$ das charakteristische Polynom eines vollständigen Beobachters für alle Zustände x_i der Regelstrecke. Für den Fall

$$k < n$$

hat das Polynom $\Delta(s)$ weniger als n , eben k Nullstellen und repräsentiert das charakteristische Polynom eines reduzierten Beobachters. Der Fall $k < n$ ist der Standardfall, da der Regler

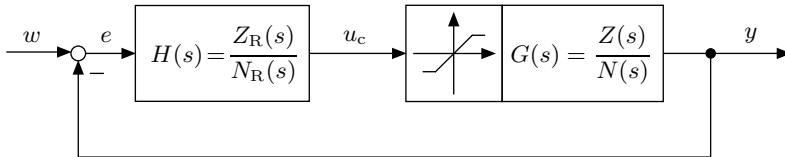
$$H(s) = \frac{Z_R(s)}{N_R(s)}$$

nur in Ausnahmefällen die Ordnung n der Regelstrecke besitzen wird.

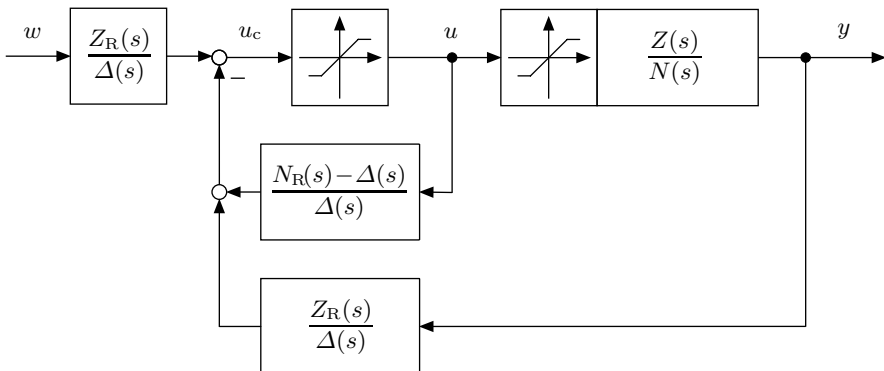
Man beachte, dass der Zustandsregelkreis mit Beobachter nicht entworfen werden muss, um das gesuchte Polynom $\Delta(s)$ zu bestimmen. Die Äquivalenz zwischen Zustandsregelkreis mit Beobachter und Standardregelkreis dient lediglich der Plausibilisierung des entworfenen Antiwindups.

Die Ergebnisse sind in folgendem Satz zusammengefasst.

Satz 15 (Allgemeines Antiwindup). *Gegeben sei der nachfolgend abgebildete Standardregelkreis*



mit dem Regler $Z_R(s)/N_R(s)$ der Ordnung k und der Regelstrecke $Z(s)/N(s)$ der Ordnung n . Der unten abgebildete Regelkreis



besitzt dasselbe lineare Übertragungsverhalten wie der Standardregelkreis und darüber hinaus ein Regler-Antiwindup. Die k Nullstellen des Polynoms $\Delta(s)$ wählt man so, dass sie k Nullstellen des charakteristischen Polynoms des Regelkreises

$$P(s) = N_R(s)N(s) + Z_R(s)Z(s)$$

entsprechen.

Bei der Anwendung des obigen Satzes sind die k Nullstellen des Polynoms $\Delta(s)$ zu wählen. In ihrer Wahl ist man völlig frei, solange sie jeweils einer der $n + k$ Nullstellen des Polynoms $P(s)$ entsprechen. Geschickterweise wird man die Auswahl so treffen, dass das Regelverhalten möglichst gut ist. Leider gibt es dabei keine Auswahlregel. Vielmehr ist man auf Ausprobieren und simulatorische Überprüfung angewiesen.

In bestimmten, eher seltenen Fällen kann die Wahl der k Nullstellen von $\Delta(s)$ schwierig sein. Das ist der Fall, wenn $P(s)$ nur konjugiert komplexe

Nullstellen besitzt und die Ordnung k von $\Delta(s)$ ungerade ist. Offensichtlich besitzt dann $\Delta(s)$ eine reelle Nullstelle. Eine reelle Nullstelle ist aber unter den ausschließlich komplexen Nullstellen von $P(s)$ nicht vorhanden. Man löst dieses Problem, indem man das konjugiert komplexe Nullstellenpaar von $P(s)$ mit der größten Dämpfung D auswählt. Zu diesem Paar gehört das Polynom $s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2$. Wir approximieren dieses Polynom durch $(s + \omega_0)^2$ und wählen ω_0 als reelle Nullstelle von $\Delta(s)$. Die verbleibenden $k - 1$ Nullstellen des Polynoms $\Delta(s)$, deren Anzahl gerade ist, wählt man, wie in Satz 15 vorgegeben, aus der Menge der konjugiert komplexen Nullstellen von $P(s)$.

3.1.6 Stabilität

Abschließend ist zu diskutieren, wie es um die Stabilität eines Regelkreises mit Antiwindup-Vorrichtung bestellt ist. Geklärt werden kann diese Frage, indem man den Regelkreis für eine konstante Führungsgröße w in einen nichtlinearen Standardregelkreis umformt, wie er in Bild 3.14 dargestellt ist.

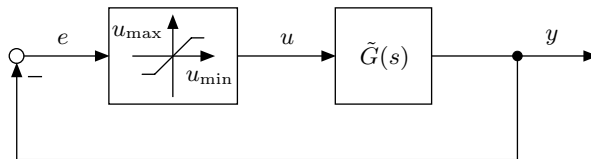


Bild 3.14: Nichtlinearer Standardregelkreis.

Die Übertragungsfunktion $\tilde{G}(s)$ ergibt sich dabei aus der Zusammenfassung der Regler- und Streckenübertragungsfunktion. In diese Standardstruktur gebracht kann dann z. B. das Popov-Kriterium zur Stabilitätsuntersuchung verwendet werden.

3.2 Zeitoptimale Regelung und Steuerung

3.2.1 Grundlagen und der Satz von Feldbaum

Beim Entwurf nichtlinearer Regler geht man oft heuristisch vor. Dies gilt insbesondere für den Entwurf von Reglern, die aus nichtlinearen Kennliniengliedern bestehen. Beispiele hierfür sind viele Zweipunktregler oder oftmals auch Regler mit Antiwindup. Man entwirft solche Regelungen auf Basis der Anschauung oder aufgrund von Kenntnissen oder Vermutungen über Regelstrecke und Regelkreisverhalten mit einem ausgewählten Regler. Nach dem Entwurf wird man dann in der Regel Simulationen durchführen, mittels einer der in Kapitel 2 betrachteten Methoden die Stabilität sicherstellen und insbesondere auch die Regelgüte überprüfen. Dieses Vorgehen ist also in drei

Schritte zu gliedern: heuristischer Reglerentwurf, Stabilitätsanalyse des Regelkreises und Simulation.

Die Gründe für dieses Vorgehen sind vor allem darin zu finden, dass für viele Problemstellungen analytische Entwurfsmethoden für Regelungen fehlen oder diese sehr komplex sind. Oder das Entwurfproblem ist sehr einfach, z. B. bei der Temperaturregelung von Bügeleisen oder Kaffeemaschinen, die im Allgemeinen mittels eines Hysteresekennliniengliedes (Bimetall) geschieht.

Auf obige Weise kommt man dann nicht zum Ziel, wenn hohe Anforderungen an die Regelgüte oder komplexe Regelstrecken vorliegen. In diesen Fällen benötigt man entsprechende Reglerentwurfverfahren. Ihr Ziel ist es, eine bessere Regelgüte, als es mit linearen Reglern möglich ist, oder sogar die bezüglich eines Gütekriteriums optimale Regelgüte zu erzielen. Eine Klasse solcher optimaler Steuerungen und Regelungen sind zeitoptimale Steuerungen und Regelungen. Bei diesen erfolgt, wie der Name schon sagt, eine Ausregelung bzw. -steuerung in schnellstmöglicher Zeit t_e von einem Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ in den Endzustand $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$.

Als Regelstrecken werden lineare SISO-Systeme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (3.5)$$

betrachtet. Ausgangspunkt für den Entwurf ist die Forderung nach minimaler Ausregelzeit t_e , d. h., man muss das Gütemaß

$$J = t_e \quad (3.6)$$

durch eine geeignet gewählte Steuerfunktion $u(t)$ minimieren. Dabei ist zu beachten, dass die Stellgröße Beschränkungen der Form

$$-u_{\max} \leq u \leq u_{\max} \quad (3.7)$$

unterliegt. Es ist also folgende Optimierungsaufgabe zu lösen: Suche die Steuerfunktion $u(t)$ für das System (3.5) mit der Stellgrößenbeschränkung (3.7) so, dass das Gütemaß (3.6) für die Anfangsauslenkung $\mathbf{x}_0$ minimal wird.

Gelöst werden kann obige Aufgabenstellung mittels des Maximum-Prinzips von Pontrjagin [51, 72, 98, 181]. Die sich dabei im allgemeinen Fall ergebenden Regelgesetze $u(t)$ sind oft sehr aufwendig zu bestimmen und außerordentlich komplex zu realisieren. In der industriellen Praxis sind zeitoptimale Regelungen, von wenigen Ausnahmen abgesehen [114, 143, 194], daher auch nicht oft zu finden. Zeitoptimale Steuerungen dagegen sind einfacher zu berechnen und zu realisieren. Sie finden sich in verschiedenen Anwendungen [11, 15, 26, 31, 56]. Im Weiteren werden wir auf das Maximumprinzip verzichten, da sich viele für die Praxis relevante Fälle, insbesondere zeitoptimale Steuerungen, auch ohne dieses berechnen lassen.

Der prinzipielle Verlauf der Stellgröße $u(t)$ einer zeitoptimalen Regelung ist sehr einfach, denn $u(t)$ wechselt sprunghaft zwischen $-u_{\max}$ und $u_{\max}$, wie es Bild 3.15 exemplarisch zeigt. Es findet also eine Reihe von Umschaltungen

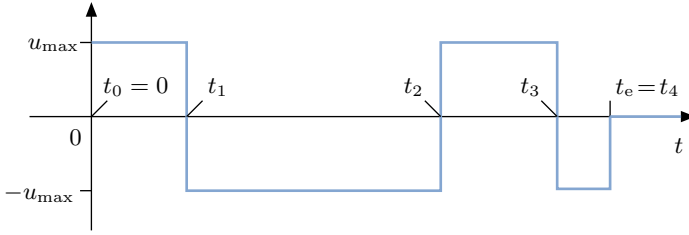


Bild 3.15: Stellgrößenverlauf einer zeitoptimalen Steuerung bzw. Regelung.

zwischen $-u_{\max}$ und $u_{\max}$ statt. Die Schwierigkeit des Entwurfes liegt in der Bestimmung der Umschaltzeitpunkte

$$t_1, t_2, t_3, \dots, t_e$$

für den Fall der Steuerung und in der Berechnung des Regelgesetzes $u(\mathbf{x})$ im Fall der Regelung.

Allerdings gibt es einen wichtigen Sonderfall, bei dem die Umschaltzeitpunkte relativ einfach zu bestimmen sind. Dies sind Regelstrecken, die ausschließlich reelle Eigenwerte besitzen. Bei ihnen kann man die zeitoptimale Steuerfunktion $u(t)$ ohne das Maximum-Prinzip ermitteln. Für sie gilt folgender Satz.

Satz 16 (Satz von Feldbaum). *Besitzt das steuerbare System*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

der Ordnung n nur reelle Eigenwerte, so besteht das zeitoptimale Steuergesetz $u(t)$ aus maximal n Schaltintervallen, in denen $u(t)$ abwechselnd $-u_{\max}$ und $u_{\max}$ ist.

Bei einem System vierter Ordnung wird also maximal dreimal zwischen $-u_{\max}$ und $u_{\max}$ umgeschaltet, wie es Bild 3.15 zeigt. Im Fall eines Systems mit konjugiert komplexen Eigenwerten kann die Anzahl der Schaltintervalle auch größer sein als n .

Zu beachten ist, dass die zeitoptimale Steuerfolge im Fall instabiler Regelstrecken nicht für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ existiert. Denn bei beschränkter Stellgröße u können nicht alle Anfangszustände $\mathbf{x}(0)$ in die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ ausgeglichen werden. Die beschränkte Stelleistung ist dafür nicht ausreichend. Für vollständig steuerbare Regelstrecken, die keine Eigenwerte mit positiven Realteilen besitzen, existiert dagegen immer eine zeitoptimale Steuerfolge bzw. Regelung für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

3.2.2 Berechnung zeitoptimaler Steuerfolgen

Für den Fall reeller Eigenwerte können die Umschaltzeitpunkte t_i wie folgt ermittelt werden. Für die Lösung der Systemgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

gilt

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b}u(\tau) d\tau. \quad (3.8)$$

Der Verlauf von $u(t)$ hat im ersten Schaltintervall das Vorzeichen

$$\alpha = 1 \quad \text{oder} \quad \alpha = -1.$$

Es gilt also für $i = 1, \dots, n$

$$u(t) = (-1)^{i-1} \alpha u_{\max} \quad \text{für } t \in [t_{i-1}, t_i).$$

Für die Berechnung der Schaltzeiten t_i lässt man vorerst die Frage, welchen Wert α annimmt, offen. Somit erhält man für Gl. (3.8)

$$\mathbf{x}(t_e = t_n) = e^{\mathbf{A}t_n} \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{\mathbf{A}(t_n-\tau)} \mathbf{b}(-1)^{i-1} \alpha u_{\max} d\tau$$

und mit

$$\mathbf{x}(t_e = t_n) = \mathbf{0}$$

ergibt sich

$$\mathbf{0} = e^{\mathbf{A}t_n} \mathbf{x}_0 + \alpha u_{\max} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{\mathbf{A}(t_n-\tau)} \mathbf{b}(-1)^{i-1} d\tau. \quad (3.9)$$

Man berücksichtigt

$$e^{\mathbf{A}(t_n-\tau)} = e^{\mathbf{A}t_n} e^{-\mathbf{A}\tau}$$

und erhält aus Gl. (3.9) nach Multiplikation mit $e^{-\mathbf{A}t_n}$

$$\mathbf{x}_0 = -\alpha \cdot u_{\max} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \underbrace{\int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{b} d\tau}_{\mathbf{w}(t_i) - \mathbf{w}(t_{i-1})}. \quad (3.10)$$

Hierbei ist $\mathbf{w}(\tau)$ der Stammfunktionenvektor von $e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{b}$. Gl. (3.10) führt zu

$$-\frac{\mathbf{x}_0}{\alpha u_{\max}} = [\mathbf{w}(t_1) - \mathbf{w}(t_0)] - [\mathbf{w}(t_2) - \mathbf{w}(t_1)] + \dots + (-1)^{n-1} [\mathbf{w}(t_n) - \mathbf{w}(t_{n-1})].$$

Aus dieser Gleichung folgt mit der Startzeit $t_0 = 0$ der Steuerung das nichtlineare Gleichungssystem

$$\mathbf{w}(t_1) - \mathbf{w}(t_2) + \mathbf{w}(t_3) - \dots + \frac{1}{2}(-1)^{n-1}\mathbf{w}(t_n) = \frac{1}{2}\mathbf{w}(0) - \frac{\mathbf{x}_0}{2\alpha u_{\max}} \quad (3.11)$$

mit n Gleichungen und den n Unbekannten $t_1, t_2, \dots, t_n$.

Im Prinzip ist auch α eine Unbekannte. Da man jedoch im Voraus nicht weiß, ob im ersten Schaltintervall $u_{\max}$ oder $-u_{\max}$ gilt, also ob $\alpha = 1$ oder $\alpha = -1$ ist, probiert man beide Fälle aus. Für einen der beiden Fälle, die in Bild 3.16 illustriert sind, hat das Gleichungssystem eine Lösung, für den anderen nicht. Das Gleichungssystem ist nur für Systeme niedriger Ordnung analytisch lösbar. Sonst ist es transzendent und muss numerisch gelöst werden.

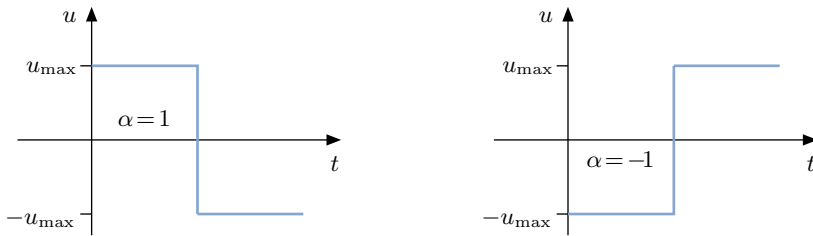


Bild 3.16: Das erste Schaltintervall einer zeitoptimalen Steuerfolge beginnt mit $u_{\max}$ oder $-u_{\max}$.

Auch die zeitoptimalen Schaltzeiten von Systemen $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$ mit konjugiert komplexen Eigenwerten erfüllen das Gleichungssystem (3.11). Allerdings weiß man dann nicht, ob man mit n Schaltintervallen auskommt. Findet man keine Lösung, muss man es mit $n+1, n+2, \dots$ Intervallen probieren. Dabei können dann auch zusätzliche Lösungen auftreten, die keine zeitoptimalen Schaltzeiten liefern.

3.2.3 Beispiel $1/s^2$

Wir betrachten als klassisches Beispiel die Regelstrecke $1/s^2$. Sie liegt z. B. dann vor, wenn eine Masse beschleunigt wird. Die zugehörige Zustandsraumdarstellung ist

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

und die Stellgröße ist symmetrisch durch

$$-u_{\max} \leq u \leq u_{\max}$$

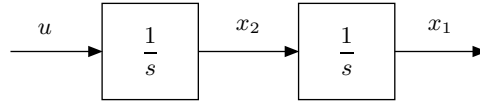


Bild 3.17: Strukturbild des Doppelintegrierers.

beschränkt. Dann ist u die Beschleunigung, x_2 die Geschwindigkeit und x_1 der zurückgelegte Weg. Bild 3.17 zeigt das zugehörige Strukturbild.

Das zeitoptimale Steuergesetz $u(t)$ hat gemäß dem Satz von Feldbaum maximal zwei Schaltintervalle bzw. eine Umschaltung zwischen $-u_{\max}$ und $u_{\max}$. Die Schaltzeitpunkte t_1 und t_2 bestimmen sich aus

$$\mathbf{w}(t_1) - \frac{1}{2}\mathbf{w}(t_2) = \frac{1}{2}\mathbf{w}(0) - \frac{\mathbf{x}_0}{2\alpha u_{\max}}. \quad (3.12)$$

Hierbei ist

$$\mathbf{w}(\tau) = \int e^{-\mathbf{A}\tau} d\tau \cdot \mathbf{b} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}.$$

Man ermittelt zuerst mittels der Laplace-Rücktransformation $\mathcal{L}^{-1}$

$$e^{-\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1} \{ (s\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1} \} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und dann

$$\mathbf{w}(\tau) = \int e^{-\mathbf{A}\tau} d\tau \cdot \mathbf{b} = \int \begin{bmatrix} -\tau \\ 1 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\tau^2 + C_1 \\ \tau + C_2 \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Gl. (3.13) eingesetzt in Gl. (3.12) liefert

$$\begin{aligned} -2t_1^2 + t_2^2 &= -2\frac{x_{10}}{\alpha u_{\max}}, \\ 2t_1 - t_2 &= -\frac{x_{20}}{\alpha u_{\max}}. \end{aligned}$$

Dieses nichtlineare Gleichungssystem ist einfach lösbar. Man erhält

$$\begin{aligned} t_1 &= -\frac{x_{20}}{\alpha u_{\max}} \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{x_{20}}{\alpha u_{\max}} \right)^2 - \frac{x_{10}}{\alpha u_{\max}}}, \\ t_2 &= -\frac{x_{20}}{\alpha u_{\max}} \pm 2\sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{x_{20}}{\alpha u_{\max}} \right)^2 - \frac{x_{10}}{\alpha u_{\max}}}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Es stellt sich noch die Frage, wann $\alpha = 1$ und wann $\alpha = -1$ ist. D. h., wann beginnt die Steuerfolge mit $u_{\max}$, wann mit $-u_{\max}$? Um dies herauszufinden, betrachtet man Gl. (3.14) etwas genauer. Evident muss

$$t_1 = -\frac{x_{20}}{\alpha u_{\max}} \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{x_{20}}{\alpha u_{\max}} \right)^2 - \frac{x_{10}}{\alpha u_{\max}}} \geq 0 \quad (3.15)$$

sein. Zuerst soll herausgefunden werden, welche Werte x_{10} und x_{20} zu einem $t_1 \geq 0$ führen, wenn $\alpha = 1$ ist. In diesem Fall hat Gl. (3.15), multipliziert mit $u_{\max}$, die Form

$$-x_{20} \pm \sqrt{\frac{1}{2} x_{20}^2 - u_{\max} x_{10}} \geq 0. \quad (3.16)$$

In dieser Gleichung muss notwendigerweise der Term in der Wurzel positiv oder null sein, d. h., es muss

$$x_{10} \leq \frac{1}{2u_{\max}} x_{20}^2 \quad (3.17)$$

gelten. In Gl. (3.16) müssen wir des Weiteren nur den Fall des positiven Vorzeichens vor der Wurzel betrachten, denn die zugehörige Lösungsmenge beinhaltet alle Lösungen, die sich für das negative Vorzeichen ergeben. Wir erhalten so als weitere Bedingung

$$x_{20} \leq \sqrt{\frac{1}{2} x_{20}^2 - u_{\max} x_{10}}. \quad (3.18)$$

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden. Im ersten Fall ist $x_{20} \leq 0$. Dann ist Gl. (3.18) offensichtlich immer erfüllt, solange Gl. (3.17) gilt. Im zweiten Fall ist $x_{20} > 0$. Wir können dann beide Seiten der Ungleichung (3.18) quadrieren und erhalten

$$x_{20}^2 \leq \frac{1}{2} x_{20}^2 - u_{\max} x_{10} \quad \text{für } x_{20} > 0$$

bzw.

$$x_{10} \leq -\frac{1}{2u_{\max}} x_{20}^2 \quad \text{für } x_{20} > 0. \quad (3.19)$$

Das Gebiet von Anfangswerten $\mathbf{x}_0 = [x_{10} \ x_{20}]^T$, für die Gl. (3.14) mit $\alpha = 1$ lösbar ist, ist somit durch die Ungleichungen (3.17) und (3.19) gegeben. Bild 3.18 illustriert diesen unterhalb der Parabelhälften liegenden Bereich, in dem $\alpha = 1$ ist. Im Bild ist er blau dargestellt. Für $\alpha = -1$ kann man ähnliche Überlegungen anstellen mit dem Resultat, dass oberhalb der Parabeläste, d. h. im weißen Bereich des Bildes 3.18, $u = -u_{\max}$ ist.

Die Bereiche des Zustandsraumes, in denen $\alpha = 1$ bzw. $\alpha = -1$ gilt, d. h. $u = u_{\max}$ bzw. $u = -u_{\max}$ gilt, sind durch die Parabeläste

$$x_{10} = \begin{cases} \frac{x_{20}^2}{2u_{\max}}, & x_{20} \leq 0, \\ -\frac{x_{20}^2}{2u_{\max}}, & x_{20} > 0 \end{cases}$$

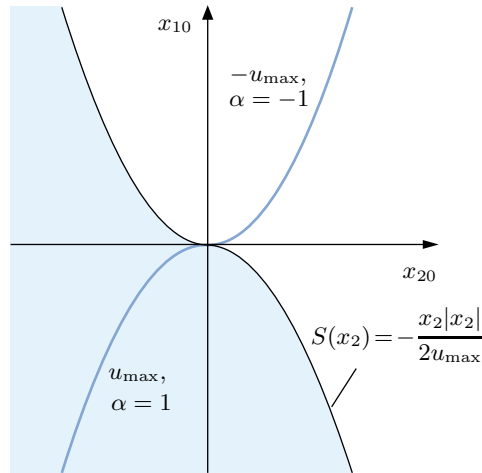


Bild 3.18: Durch die Schaltkurve $x_1 = S(x_2)$ in zwei Hälften geteilter Zustandsraum.

getrennt. Diese Parabeläste bilden zusammen die Schaltkurve

$$S(x_2) = x_1 = -\frac{x_2|x_2|}{2u_{\max}}. \quad (3.20)$$

Unterhalb von $S(x_2)$ gilt $u = u_{\max}$, oberhalb $u = -u_{\max}$. Bild 3.18 zeigt den Sachverhalt.

Mit dem obigen Ergebnis sind die Schaltzeitpunkte

$$t_1 = -\frac{x_{20}}{\alpha u_{\max}} \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{x_{20}}{\alpha u_{\max}} \right)^2 - \frac{x_{10}}{\alpha u_{\max}}},$$

$$t_2 = -\frac{x_{20}}{\alpha u_{\max}} \pm 2\sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{x_{20}}{\alpha u_{\max}} \right)^2 - \frac{x_{10}}{\alpha u_{\max}}}$$

mit

$$\alpha = \begin{cases} 1, & x_1 < S(x_2), \\ -1, & x_1 > S(x_2), \end{cases} \quad \text{und} \quad \alpha = \begin{cases} 1, & x_1 = S(x_2) < 0, \\ -1, & x_1 = S(x_2) > 0, \end{cases}$$

bestimmt. Die zeitoptimale Steuerung liegt somit vor. Auch das zeitoptimale Regelungsgesetz lässt sich jetzt ermitteln. Oberhalb der Schaltlinie $S(x_2)$ verwendet man $-u_{\max}$, unterhalb $u_{\max}$, d. h.

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} u_{\max}, & x_1 - S(x_2) < 0, \\ -u_{\max}, & x_1 - S(x_2) > 0. \end{cases}$$

Das lässt sich auch in der Form

$$\begin{aligned}
 u &= \begin{cases} u_{\max}, & \operatorname{sgn}(x_1 - S(x_2)) < 0, \\ -u_{\max}, & \operatorname{sgn}(x_1 - S(x_2)) > 0 \end{cases} \\
 &= -u_{\max} \cdot \operatorname{sgn}(x_1 - S(x_2)) = u_{\max} \cdot \operatorname{sgn}(S(x_2) - x_1)
 \end{aligned}$$

darstellen. Das zeitoptimale Regelgesetz der Strecke $1/s^2$ hat dann mit Gl. (3.20) die Form

$$u = u_{\max} \cdot \operatorname{sgn}\left(-\frac{x_2|x_2|}{2u_{\max}} - x_1\right).$$

Auf der Schaltlinie, d. h. für $x_1 = S(x_2)$, ergibt obiges Regelgesetz den Wert $u = 0$. Korrekterweise müsste dort $u = \pm u_{\max}$ sein. In der Praxis spielt das jedoch keine Rolle. Die zugehörige Regelung zeigt Bild 3.19.

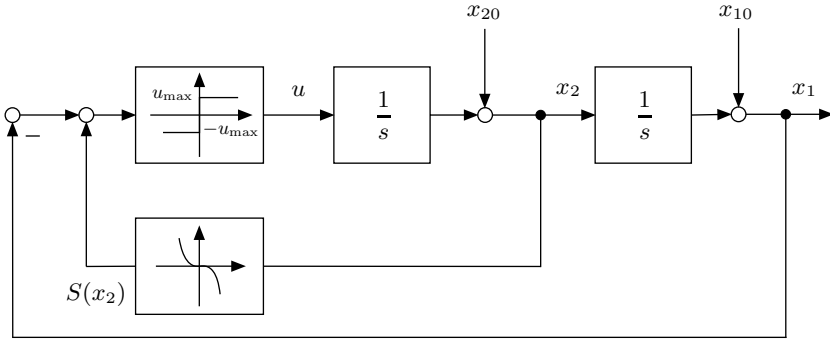


Bild 3.19: Zeitoptimale Regelung für $1/s^2$.

Obiges Regelgesetz und weitere zeitoptimale Regelgesetze für Regelstrecken zweiter Ordnung mit reellen Eigenwerten lassen sich auch relativ einfach durch Analyse der Trajektorien für $u = u_{\max}$ und $u = -u_{\max}$ in der Zustandsebene herleiten. Teile dieser Trajektorien bilden offensichtlich die Menge aller Trajektorien des zeitoptimal geregelten Systems. Insbesondere die Schaltlinie S ist identisch mit Teilen der zwei Trajektorien, die für $u = u_{\max}$ bzw. $u = -u_{\max}$ durch den Ursprung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ laufen. Es ist daher für die Herleitung des zeitoptimalen Regelgesetzes ausreichend, diese beiden Trajektorien zu berechnen und aufgrund von geometrischer Überlegungen in der Zustandsebene die Schaltlinie S aus Teilen dieser Trajektorien zusammenzusetzen.

3.2.4 Zeitoptimale Regler für Systeme niedriger Ordnung

Wir betrachten im Weiteren Systeme zweiter und dritter Ordnung und ihre zeitoptimalen Regelgesetze. Als ersten Fall behandeln wir Regelstrecken

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3.21)$$

mit einem Eigenwert bei null und einem Eigenwert $\lambda = -a < 0$. Die Stellgrößenbeschränkung ist, wie auch bei allen weiteren Regelstrecken, durch

$$|u| \leq u_{\max}$$

gegeben. Man beachte, dass alle steuerbaren Regelstrecken mit obiger Eigenwertkonfiguration in die Form (3.21), die Regelungsnormalform, gebracht werden können.

Das zeitoptimale Regelgesetz lautet

$$u = u_{\max} \operatorname{sgn}(S(x_2) - x_1)$$

mit der Schaltlinie

$$S(x_2) = -\frac{1}{a}x_2 + \frac{u_{\max}}{a^2} \operatorname{sgn}(x_2) \ln \left(1 + \frac{a|x_2|}{u_{\max}} \right).$$

Bild 3.20 zeigt das zugehörige Strukturbild.

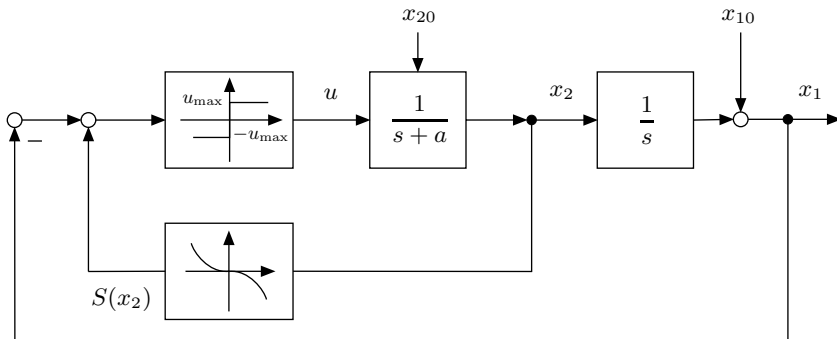


Bild 3.20: Zeitoptimale Regelung für $1/s(s+a)$.

Als zweiten Fall betrachten wir stabile Regelstrecken zweiter Ordnung mit reellen, von null verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Dabei gehen wir davon aus, dass die Systembeschreibung in der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} u \quad (3.22)$$

vorliegt oder in diese transformiert wurde. Dann hat das zeitoptimale Regelgesetz die Form

$$u = u_{\max} \operatorname{sgn}(S(x_2) - x_1)$$

mit

$$S(x_2) = u_{\max} \operatorname{sgn}(x_2) \left[\left(1 + \frac{|x_2|}{u_{\max}} \right)^{\lambda_1/\lambda_2} - 1 \right].$$

Auch für Systeme dritter Ordnung mit zwei Eigenwerten bei null und einem negativen Eigenwert $\lambda = -a$, die in Regelungsnormform vorliegen oder in diese transformiert wurden, kann das zeitoptimale Regelgesetz angegeben werden [10]. Wir transformieren zu diesem Zweck die Regelungsnormform

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

mittels

$$\tilde{x} = \frac{1}{a^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & -a \\ 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix} x$$

in die Form

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -a \\ a \\ a \end{bmatrix} u. \quad (3.23)$$

Für die zeitoptimale Regelung des Systems (3.23) gilt

$$u = u_{\max} \operatorname{sgn}(S(x_1, x_2) - x_3) \quad (3.24)$$

mit

$$\begin{aligned} S(x_1, x_2) &= u_{\max} d \left[e^c \cdot (2 - e^{\sqrt{b}}) - 1 \right], \\ d &= \operatorname{sgn} \left(x_1 + x_2 + \frac{x_2 |x_2|}{2u_{\max}} \right), \\ b &= \frac{x_2^2}{2u_{\max}^2} + \frac{d}{u_{\max}} (x_1 + x_2), \\ c &= \frac{d \cdot x_2}{u_{\max}} + \sqrt{b}. \end{aligned}$$

Lag die Regelstrecke ursprünglich nicht in der jeweiligen Zustandsraumdarstellung (3.21), (3.22) oder (3.23) vor, sondern wurde in diese Form gebracht, so muss das entsprechende Regelgesetz durch Rücktransformation auf die Ursprungskoordinaten der Regelstrecke umgerechnet werden.

Für Regelstrecken höherer Ordnung können im Allgemeinen keine analytisch angebbaren Regelgesetze mehr bestimmt werden. Im Fall stabiler Regelstrecken mit ausschließlich verschiedenen reellen Eigenwerten erhält man dann ein Regelgesetz, bei dem ein nichtlineares Gleichungssystem für die Bestimmung von u zu lösen ist [10]. Im Fall von Regelstrecken mit konjugiert komplexen Eigenwerten ist bis auf Ausnahmefälle, z. B. Regelstrecken zweiter Ordnung [51, 121], eine Bestimmung und Realisierung unter praktischen Gesichtspunkten nicht mehr möglich.

3.2.5 Beispiel U-Boot

U-Boote können dynamisch und statisch tauchen. Beim dynamischen Tauchen wird während der Fahrt des Bootes das Tiefenruder so verstellt, dass eine Abtriebskraft entsteht. Diese lässt das Boot in tiefere Wasserschichten fahren, obwohl das Boot nicht schwerer ist als das von ihm verdrängte Wasser. Beim statischen Tauchen wird dagegen Meerwasser in die dafür vorgesehenen Tanks aufgenommen. Folglich wird das Boot schwerer und sinkt. Soll das Boot steigen, so wird das Wasser wieder aus den in Bild 3.21 dargestellten Tanks mittels Pressluft herausgedrückt. Wir wollen im Weiteren eine zeitoptimale Tiefenregelung für das statische Tauchen entwerfen.

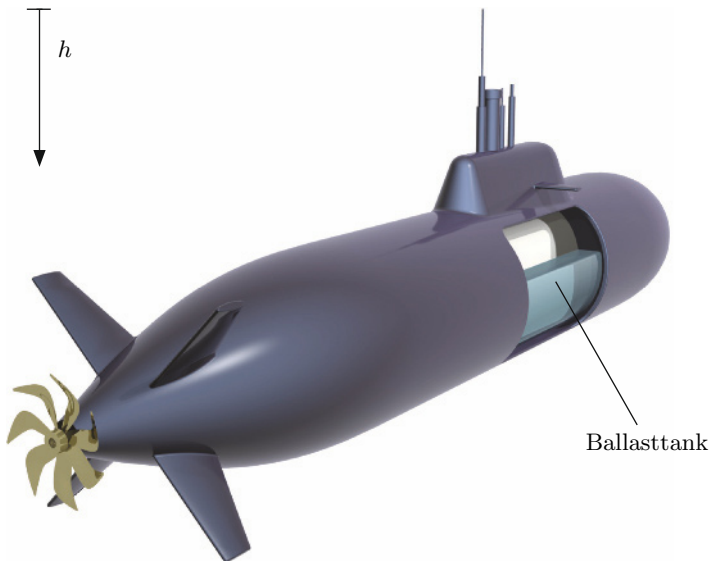


Bild 3.21: U-Boot.

Nehmen wir an, dass das U-Boot so austariert ist, dass es in einer bestimmten Tiefe h schwebt und die Masse m aufweist. Die Tiefe h messen wir beginnend von der Meeresoberfläche aus mittels des Wasserdrucks. Wird dann zusätzlich Wasser der Masse Δm in die Tanks verbracht oder ausgeblasen, so entsteht die vertikal auf das Boot wirkende Kraft

$$F = \Delta m \cdot g.$$

Dabei gilt $\Delta m \ll m$. Die Ballastwassermasse lässt das U-Boot, das insgesamt die Masse $m + \Delta m$ aufweist, mit der Beschleunigung

$$\ddot{h} = \frac{g \cdot \Delta m}{m + \Delta m} \approx \frac{g}{m} \cdot \Delta m \quad (3.25)$$

steigen oder sinken. Ist $\Delta m < 0$ steigt es, ist $\Delta m > 0$ sinkt es.

Die vom U-Boot aufzunehmende bzw. auszublasende Ballastwassermasse Δm_{soll} wird einer Regelung, die der noch zu entwerfenden Tiefenregelung unterlagert ist, als Sollwert vorgegeben. Diese Regelung lässt sich durch die Differenzialgleichung

$$(\Delta m)' + a\Delta m = a\Delta m_{\text{soll}} \quad (3.26)$$

beschreiben.

Setzt man Gl. (3.25) in Gl. (3.26) ein, so ergibt sich

$$\ddot{h} + a\dot{h} = \frac{a \cdot g}{m} \cdot \Delta m_{\text{soll}}.$$

Im Weiteren verwenden wir

$$\tilde{u} = \frac{g}{m} \cdot \Delta m_{\text{soll}}$$

als Stellgröße für die Tiefenregelung. Wir wählen als Zustandsvektor

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} h \\ \dot{h} \\ \ddot{h} \end{bmatrix}.$$

Des Weiteren wählen wir die Parameter a und m sowie die Einheiten der Variablen so, dass wir das Modell des schwedischen U-Bootes der Firma Kockumation AB,

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.005 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.005 \end{bmatrix} \tilde{u},$$

mit der Tauchtiefe als Ausgangsgröße

$$y = \tilde{x}_1$$

und $\tilde{u}_{\text{max}} = 0.005$ aus [65] erhalten.

Um das zeitoptimale Regelgesetz (3.24) als Tauchtiefenregelung verwenden zu können, transformieren wir die Stellgröße $\tilde{u}$ mittels

$$\tilde{u} = 200u$$

und erhalten so die Systembeschreibung

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.005 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (3.27)$$

$$y = \tilde{x}_1$$

mit

$$|u| \leq u_{\max} = 2.5 \cdot 10^{-5}.$$

Wir können nun das Regelgesetz (3.24) für die Regelstrecke (3.27) verwenden. Dabei müssen wir allerdings die in Gl. (3.24) auftretenden transformierten Zustandsgrößen

$$\mathbf{x} = a^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a - a \\ 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} a^3 & 0 & -a \\ 0 & a^2 & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}$$

verwenden, um u zu berechnen. Es gilt $a = 0.005$. Obige Transformationsgleichung eingesetzt in Gl. (3.24) ergibt für das zeitoptimale Regelgesetz des U-Bootes in Originalkoordinaten

$$u = u_{\max} \operatorname{sgn}(\tilde{S}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) - a\tilde{x}_3)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) &= u_{\max} d \left[e^c \cdot (2 - e^{\sqrt{b}}) - 1 \right], \\ d &= \operatorname{sgn} \left(a\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \frac{(a\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3)|a\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3|}{2u_{\max}} \right), \\ b &= \frac{a^2(a\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3)^2}{2u_{\max}^2} + \frac{da^2(a\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2)}{u_{\max}}, \\ c &= \frac{ad(a\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3)}{u_{\max}} + \sqrt{b}. \end{aligned}$$

Wir betrachten als Beispiel das Auftauchen des U-Bootes aus 100 m Tiefe. D. h., wir betrachten den Anfangsvektor

$$\tilde{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bild 3.22 zeigt den Tiefenverlauf $\tilde{x}_1(t)$ und den Stellgrößenverlauf, den die zeitoptimale Regelung produziert. Zum Vergleich sind die Verläufe auch für einen sehr guten linearen Regler,

$$\tilde{u} = 200u = - \begin{bmatrix} 4.164 \cdot 10^{-5} & 2.128 \cdot 10^{-2} & 2.592 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}},$$

dargestellt, der so entworfen wurde, dass er nicht überschwingt und gleichzeitig eine kurze Ausregelzeit aufweist. Klar ersichtlich ist die wesentlich schnellere Ausregelgeschwindigkeit der zeitoptimalen Regelung. Diese wird allerdings durch einen erhöhten Stellaufwand, d. h. Energieverbrauch, erkauft.

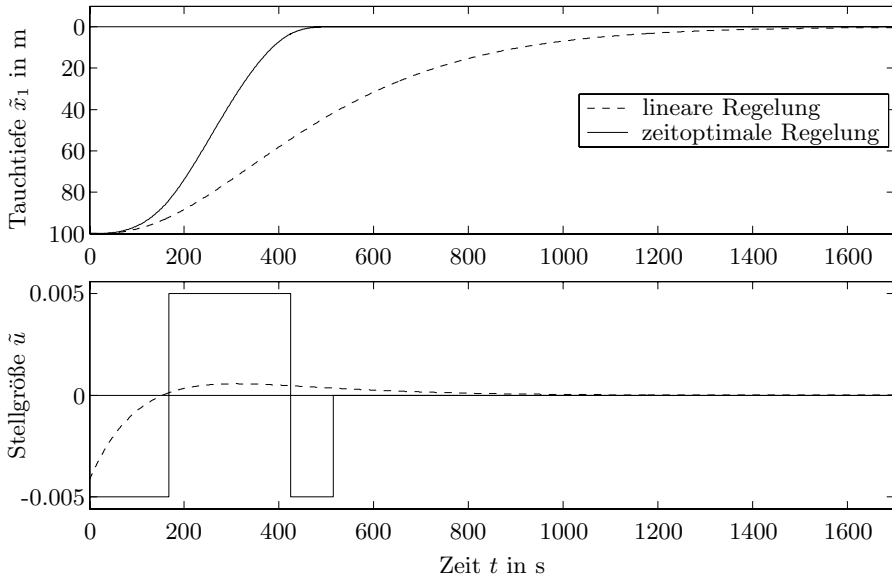


Bild 3.22: Tauchtiefenverläufe $\tilde{x}_1(t) = h(t)$ und Stellgrößenverläufe $\tilde{u}(t)$ der linearen und zeitoptimalen Regelung des U-Bootes.

3.2.6 Zeitoptimale Vorsteuerung

In den betrachteten Fällen von Regelstrecken zweiter und dritter Ordnung mit reellen Eigenwerten ist die Bestimmung des zeitoptimalen Regelgesetzes $u(\mathbf{x})$ relativ einfach. Im Fall von Regelstrecken höherer Ordnung kann im Allgemeinen das zeitoptimale Regelgesetz nicht mehr analytisch bestimmt werden. Entwurf und Realisierung sind dann, wie erwähnt, nicht mehr oder nur mit sehr hohem Aufwand möglich. Zeitoptimale Steuerungen sind dagegen meistens noch mit vertretbarem Aufwand bestimmbar und praktisch realisierbar. Insbesondere ist ihre Verwendung sinnvoll bei Systemen, die sich repetierend nur von einem Punkt $\mathbf{x}_1$ zu einem Punkt $\mathbf{x}_2$ bewegen. D. h. bei Systemen, die immer wieder erneut dieselbe Trajektorie abfahren, wie in Bild 3.23 gezeigt. Um dann eventuelle Störungen oder kleine Abweichungen zu eliminieren, verwendet man eine überlagerte Regelung, wie in Bild 3.24 dargestellt.

In der Praxis zeigt sich, dass die existierenden Algorithmen zur Berechnung der Schaltzeiten zeitoptimaler Steuerungen [23, 45] bei Strecken höherer Ordnung mit komplexen Eigenwerten numerische Probleme aufweisen. In diesen Fällen kann ebenfalls oft keine zeitoptimale Lösung sicher bestimmt werden. Eine Lösung dieser Problematik bietet die Berechnung der schrittoptimalen Steuerfolge von zeitdiskreten Systemen. Hierbei wandelt man das zeitkontinuierliche System in ein zeitdiskretes um. Die schrittoptimalen Steuerfolgen zeitdiskreter linearer Systeme können relativ problemlos mittels Verfahren der

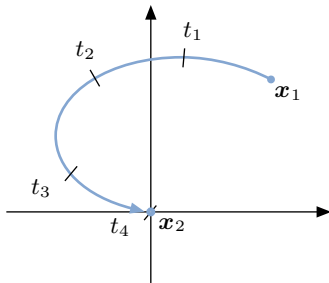


Bild 3.23: Zeitoptimale Trajektorie mit den Schaltzeiten t_1, t_2, t_3, t_4 .

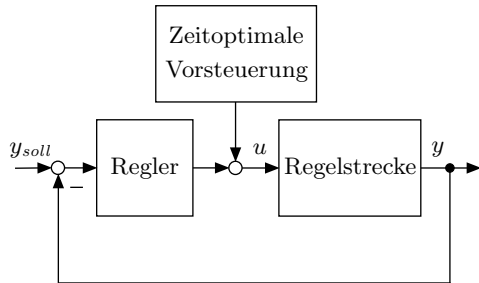


Bild 3.24: Regelkreis mit zeitoptimaler Vorsteuerung.

linearen Programmierung berechnet werden [14, 30, 166, 183]. Je kleiner dabei die Abtastzeit gewählt wurde, desto besser approximiert die schrittoptimale Steuerfolge die zeitoptimale Steuerfunktion zeitkontinuierlicher Systeme.

Vergleicht man zeitoptimale Regelungen mit linearen, so erkennt man folgendes Dilemma. Zeitoptimale Regelungen sind schnell in ihrem Ausregelverhalten, aber sehr aufwendig zu entwerfen und zu realisieren. Lineare Regelungen sind im Vergleich dazu langsam, aber sehr einfach zu berechnen und zu implementieren. Gleiches gilt in abgemilderter Form auch für zeitoptimale Steuerungen. Man kann offensichtlich nicht gleichzeitig ein sehr gutes Ausregelverhalten und die Einfachheit von Entwurf und Realisierung haben. Es gibt allerdings einen zwischen beiden Extremen liegenden Kompromiss. Diesen bilden die im nächsten Kapitel behandelten strukturvariablen Regelungen.

3.3 Strukturvariable Regelungen ohne Gleitzustand

3.3.1 Grundlagen strukturvariabler Regelungen

Bei strukturvariablen Regelungen können verschiedene Typen unterschieden werden. Eine wichtige Klasse sind *parameter- und strukturumschaltende Regelungen*. Bei diesen wird zwischen verschiedenen Reglern in Abhängigkeit vom Zustandsvektor $\mathbf{x}$ umgeschaltet. Als Regelstrecken werden lineare Systeme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

betrachtet, wobei die Stellgröße u oft einer Beschränkung

$$-u_{\max} \leq u \leq u_{\max}$$

unterliegt. Bild 3.25 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines solchen Regelkreises.

Bei umschaltenden Regelungen sind zwei mögliche Fälle von dynamischem Verhalten zu unterscheiden. Im Folgenden sollen sie an einem Beispiel

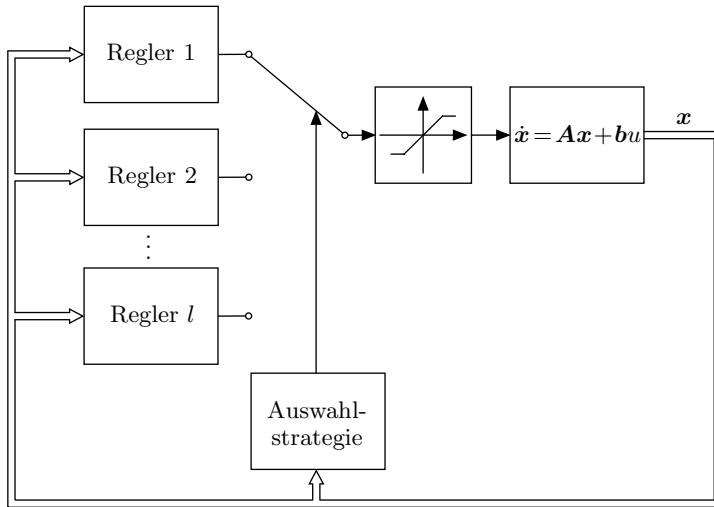
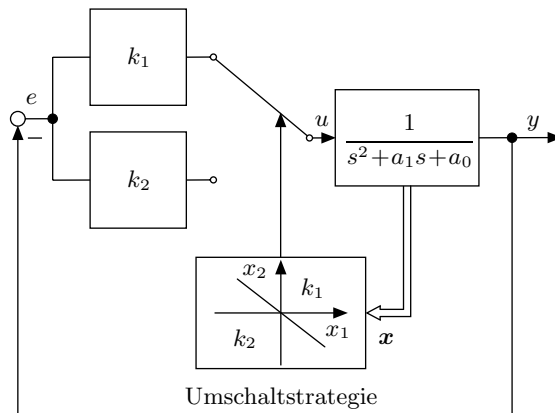


Bild 3.25: Strukturvariables Regelungssystem.

Bild 3.26: Regelkreis mit Umschaltung zwischen zwei P-Reglern mit k_1 und k_2 .

erläutert werden. Wir betrachten eine Umschaltung mit zwei P-Reglern und einer Regelstrecke zweiter Ordnung, wie in Bild 3.26 dargestellt.

Die Umschaltstrategie arbeitet wie folgt. Eine Schaltgerade

$$s(\mathbf{x}) = \mathbf{r}^T \mathbf{x} = 0$$

teilt den Zustandsraum. Rechts von ihr ist der Regler mit der Verstärkung k_1 aktiviert, links der mit k_2 . Das Regelgesetz hat die Form

$$u = \begin{cases} k_1 e, & s(\mathbf{x}) > 0, \\ k_2 e, & s(\mathbf{x}) < 0. \end{cases}$$

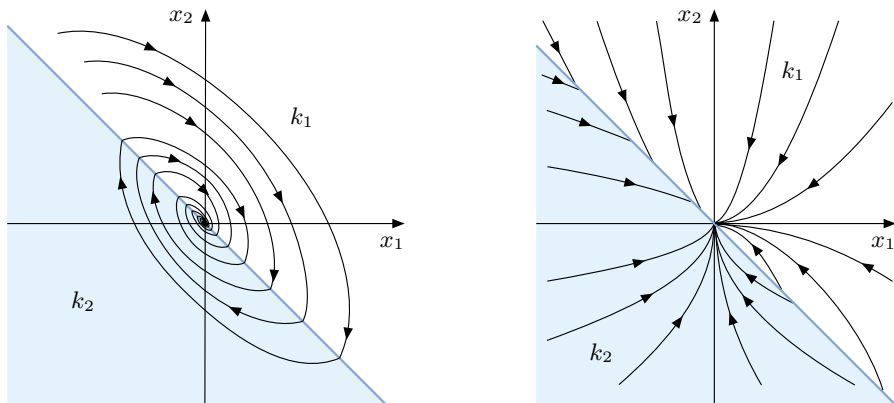


Bild 3.27: Unterschiedliche Trajektorienverläufe bei schaltenden Regelungen: links ohne, rechts mit Gleitzustand. Die blaue Gerade kennzeichnet jeweils die Schaltgerade $s(\mathbf{x}) = 0$.

Je nach Auslegung von k_1 und k_2 lassen sich unterschiedliche Trajektorienverläufe erzeugen. Dabei sind zwei prinzipielle Fälle zu unterscheiden. Im ersten wechseln die Trajektorien von einem Gebiet in das andere. Das linke Teilbild von Bild 3.27 illustriert dies.

Im zweiten laufen die Trajektorien $\mathbf{x}(t)$ von beiden Seiten auf die Schaltgerade $s(\mathbf{x})$ zu, wie im linken oberen Quadranten in Bild 3.27 rechts dargestellt. Dort angelangt wechselt die Trajektorie ständig von einer Seite auf die andere. Unter fortwährendem Schalten gleitet sie dann in die Ruhelage. Diesen fortwährenden Schaltvorgang, den wir schon in Abschnitt 1.1.8 kennengelernt haben, bezeichnet man als *Gleitzustand*. Gleitzustandsregler bilden eine spezielle Klasse von strukturvariablen Reglern und werden nicht hier, sondern in Kapitel 5.2 detailliert behandelt.

Strukturvariable Regelungen ohne Gleitzustand, denen wir uns in diesem Kapitel widmen, liegen im Entwurfsaufwand und in der Regelgüte zwischen den linearen und den zeitoptimalen Regelungen. Beispielhaft ist das in Bild 3.28 anhand typischer Sprungantworten dargestellt. Das Zurückbleiben der linearen Regelung hinter der zeitoptimalen ist dabei, wie in Bild 3.29 illustriert, auf das schlechte Ausnutzen der zur Verfügung stehenden Stellgröße $-u_{\max} \leq u \leq u_{\max}$ zurückzuführen. Aufgrund der Linearität ist die verwendete Stellgröße u bei kleinen Auslenkungen $\mathbf{x}$ bzw. Regelabweichungen e entsprechend kleiner als bei großen Auslenkungen. Würde man auch bei kleinem $\mathbf{x}$ bzw. e große Stellgrößen u nutzen, so wäre eine schnellere Ausregelung möglich.

Der Grundgedanke strukturvariabler Regelungen ist es, die Stellgröße innerhalb des erlaubten Bereiches $-u_{\max} \leq u \leq u_{\max}$ besser auszunutzen, als das bei der linearen Regelung der Fall ist. Zu diesem Zweck verwendet man dann nicht mehr einen linearen Regler, sondern mehrere, zwischen denen man

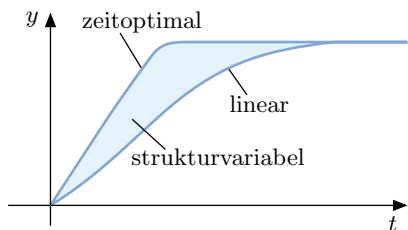


Bild 3.28: Vergleich der Sprungantworten linearer, strukturvariabler und zeitoptimaler Regelungen.

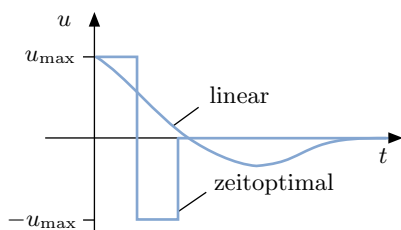


Bild 3.29: Typische Stellgrößenverläufe von linearen und zeitoptimalen Regelungen.

umschaltet. Dies geschieht so, dass im Verlauf einer Ausregelung auf immer stärkere Regler umgeschaltet wird. Das Ergebnis der Auswahlstrategie hängt vom jeweils erreichten Systemzustand ab, wie in Bild 3.25 gezeigt.

Betrachtet werden dabei im Allgemeinen lineare Regelstrecken. Die einzelnen Regler können linear oder nichtlinear sein. Meistens sind sie linear. In jedem Fall ist der Regelkreis aufgrund der Umschaltung nichtlinear.

Die Güte einer parameter- oder strukturumschaltenden Regelung wird durch drei Faktoren bestimmt: die Anzahl l der Regler, die Art und Auslegung der Regler und die Auswahlstrategie. Dabei ist die erzielbare Regelgüte prinzipiell umso größer, je mehr Regler in zeitlich möglichst dichter Folge verwendet werden.

Die Umschaltung muss nicht, wie in obigem einfachen Beispiel, an einer Schaltgeraden erfolgen. Sie kann auch an anderen Kurven oder, im Höherdimensionalen, an verschiedenen Flächentypen erfolgen. Beispielsweise geschieht die Umschaltung bei der im nächsten Abschnitt beschriebenen Regelung auf der Basis von Ellipsoiden.

Wie schon erwähnt, nimmt die erzielbare Regelgüte einer umschaltenden Regelung ohne Gleitzustand mit der Anzahl ihrer Regler zu. Das legt den Gedanken nahe, möglichst viele Regler und in letzter Konsequenz eine unendliche Zahl von Reglern zu verwenden. Dann erfolgt die Regleränderung nicht mehr durch Umschalten zwischen den Reglern, sondern durch eine stetige Verstellung der Reglerparameter in dem Regelgesetz

$$u = k(\mathbf{x}, p),$$

wobei über den stetig von $\mathbf{x}$ abhängigen Auswahlparameter

$$p = p(\mathbf{x})$$

das Regelgesetz variiert wird. Diese Klasse von Regelungen bezeichnet man auch als *weiche strukturvariable Regelungen* [3, 27, 54, 77, 113], die als systematische Weiterentwicklung und Verbesserung schaltender Regelungen angesehen werden können. In Bild 3.30 ist die Struktur solcher Regelungen dargestellt.

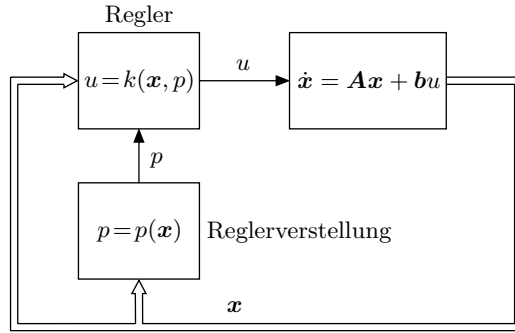


Bild 3.30: Weiche strukturvariable Regelung.

3.3.2 Regler mit abschnittsweise linearer Struktur

Im Nachfolgenden wird eine umschaltende Regelung ohne Gleitzustand für lineare Regelstrecken mit Stellgrößenbeschränkung,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \\ |u| &\leq u_{\max},\end{aligned}$$

betrachtet [97, 172, 196]. Man bestimmt eine Schar von l Reglern

$$\begin{aligned}u &= -\mathbf{k}_1^T \mathbf{x}, \\ u &= -\mathbf{k}_2^T \mathbf{x}, \\ &\vdots \\ u &= -\mathbf{k}_l^T \mathbf{x},\end{aligned}$$

die so entworfen werden, dass der geschlossene Regelkreis

$$\dot{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}_i^T \right) \mathbf{x} = \hat{\mathbf{A}}_i \mathbf{x} \quad (3.28)$$

mit zunehmendem Index i immer schneller wird. D. h., die Ausregelzeit nimmt mit steigendem Index i ab. Dies lässt sich erreichen, indem man $\mathbf{k}_i$ als linear-quadratischen Regler auf Basis des Güteintegrals

$$J = \int_0^\infty \left(p_i \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \frac{1}{p_i} r u^2 \right) dt$$

entwirft. Die Matrix $\mathbf{P}$ ist dabei positiv semidefinit. Der Faktor p_i ist so zu wählen, dass der Regelkreis (3.28) mit zunehmendem p_i immer schnellere Regler mit höherem Stellgrößenverbrauch erhält.

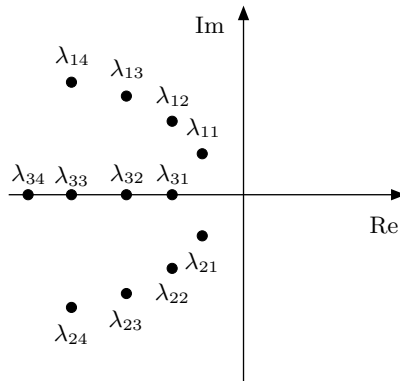


Bild 3.31: Eigenwertlagen λ_{ji} des parameterumschaltenden Regelkreises.

Es gibt eine weitere einfache Möglichkeit, die Reglervektoren $\mathbf{k}_i$ zu wählen. Man legt sie mittels Eigenwertplatzierung so fest, dass die Eigenwerte λ_{ji} , $j = 1, \dots, n$, des geschlossenen Regelkreises (3.28) mit zunehmendem Index i immer kleinere Realteile annehmen. Dies kann beispielsweise geschehen, indem man die Eigenwerte λ_{ji} auf Strahlen mit zunehmendem i

$$\lambda_{j(i+1)} = \alpha_i \cdot \lambda_{ji}, \quad \alpha_i > 1,$$

verschiebt. Auch andere Eigenwertverläufe sind möglich, wie es Bild 3.31 zeigt.

Für jeden der l Regelkreise (3.28) bestimmt man ein Ljapunov-Gebiet

$$G_i = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^T \mathbf{R}_i \mathbf{x} < c_i \},$$

wobei $\mathbf{R}_i$ aus der Ljapunov-Gleichung

$$\hat{\mathbf{A}}_i^T \mathbf{R}_i + \mathbf{R}_i \hat{\mathbf{A}}_i = -\mathbf{Q}_i$$

resultiert. Die Matrizen $\mathbf{Q}_i$ sind geeignet positiv definit zu wählen.

Die Werte c_i legen die Ausdehnung der Ljapunov-Gebiete G_i fest. Man berechnet mit der Lagrange'schen Multiplikatormethode den Skalierungsfaktor

$$c_i = \frac{u_{\max}^2}{\mathbf{k}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{k}_i},$$

der das Gebiet G_i so festlegt, dass der Rand von G_i die Hyperebenen

$$|u| = |\mathbf{k}_i^T \mathbf{x}| = u_{\max}$$

der Stellgrößenbeschränkung tangiert, wie es Bild 3.32 zeigt. Auf diese Weise ist gewährleistet, dass jede Trajektorie $\mathbf{x}(t)$, die in G_i beginnt, die Stellgrößenbeschränkung $|u| = |\mathbf{k}_i^T \mathbf{x}| \leq u_{\max}$ nicht verletzt, da G_i ein Ljapunov-Gebiet ist und deshalb von der Trajektorie $\mathbf{x}(t)$ nicht verlassen wird.

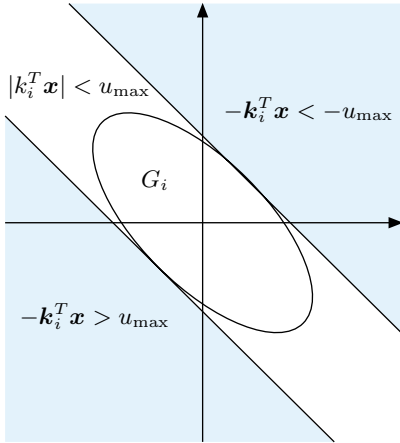


Bild 3.32: Ljapunov-Gebiet G_i und Stellgrößenbeschränkung.

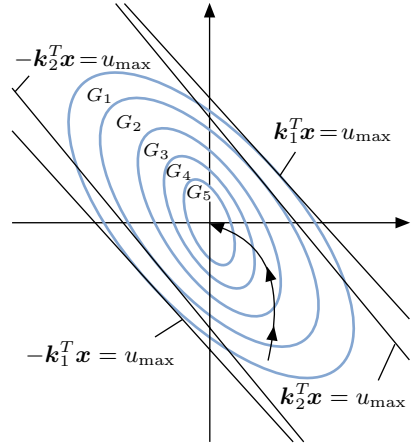


Bild 3.33: Reihe von ineinander geschachtelten Ljapunov-Gebieten G_i .

In einem nächsten Schritt überprüft man, ob alle Ljapunov-Gebiete G_i ineinander geschachtelt sind, d. h., ob

$$G_l \subset G_{l-1} \subset \dots \subset G_2 \subset G_1$$

gilt. Bild 3.33 illustriert diese Schachtelung.

Falls die Schachtelung erfüllt ist, läuft jede Trajektorie von einem größeren Gebiet G_i stets in das kleinere Gebiet G_{i+1} . Da dabei auf immer bessere, d. h. schnellere Regler $\mathbf{k}_{i+1}$, umgeschaltet wird, wird die Ausregelung von Gebiet zu Gebiet schneller.

Die Schachtelung der Gebiete G_i lässt sich leicht überprüfen. Denn die Forderung $G_{i+1} \subset G_i$ ist genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{R}_i \mathbf{x}}{c_i} < \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{R}_{i+1} \mathbf{x}}{c_{i+1}}$$

bzw.

$$0 < \mathbf{x}^T \left(\frac{\mathbf{R}_{i+1}}{c_{i+1}} - \frac{\mathbf{R}_i}{c_i} \right) \mathbf{x}$$

gilt. Letzteres ist der Fall, wenn die Matrix

$$\mathbf{S}_i = \frac{\mathbf{R}_{i+1}}{c_{i+1}} - \frac{\mathbf{R}_i}{c_i} \quad (3.29)$$

positiv definit ist. Die Schachtelung aller Gebiete G_i ist also gewährleistet, wenn alle Matrizen $\mathbf{S}_i$ für $i = 1, \dots, l-1$ positiv definit sind. Ist für eine vorgegebene Schar von Reglervektoren $\mathbf{k}_i$ und Ljapunov-Gebieten G_i bzw.

Matrizen $\mathbf{R}_i$ die Schachtelungsbedingung nicht erfüllt, dann wählt man neue Vektoren $\mathbf{k}_i$ und Gebiete G_i mit einem größeren Abstand voneinander, so dass die Bedingung (3.29) für alle $i = 1, \dots, l-1$ gültig ist.

Das Regelgesetz ist durch

$$u = -\mathbf{k}_i^T \mathbf{x}$$

mit

$$i = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathbf{x} \in G_1 \setminus G_2, \\ 2 & \text{falls } \mathbf{x} \in G_2 \setminus G_3, \\ \vdots & \vdots \\ l-1 & \text{falls } \mathbf{x} \in G_{l-1} \setminus G_l, \\ l & \text{falls } \mathbf{x} \in G_l \end{cases}$$

gegeben. Dabei bilden die Differenzmengen $G_i \setminus G_{i+1}$ gerade die Zonen zwischen zwei Gebieten G_i . Ein Regler $\mathbf{k}_i$ ist also immer gerade dann aktiv, wenn der Zustandsvektor $\mathbf{x}$ in der ringförmigen Zone $G_i \setminus G_{i+1}$ liegt. Da mit zunehmender Ausregelung die Trajektorie $\mathbf{x}(t)$ in immer kleinere Gebiete G_i eintritt, werden so auch immer schnellere Regler $\mathbf{k}_i$ aktiviert. D. h., die Ausregelung wird im Verlauf der Trajektorie immer schneller im Vergleich zu einem klassischen linearen Zustandsregler, z. B. $u = -\mathbf{k}_1^T \mathbf{x}$.

Zusammengefasst ergibt sich folgendes Entwurfsschema:

Schritt 1: Für die Regelstrecke

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad \text{mit} \quad |u| \leq u_{\max}$$

wählt man eine Schar von Reglern

$$u = -\mathbf{k}_i^T \mathbf{x}, \quad i = 1, \dots, l.$$

Schritt 2: Für jeden Teilregelkreis

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}_i^T) \mathbf{x} = \hat{\mathbf{A}}_i \mathbf{x}, \quad i = 1, \dots, l,$$

bestimmt man aus

$$\hat{\mathbf{A}}_i^T \mathbf{R}_i + \mathbf{R}_i \hat{\mathbf{A}}_i = -\mathbf{Q}_i, \quad i = 1, \dots, l,$$

mit einer beliebigen positiv definiten Matrix $\mathbf{Q}_i$ ein Ljapunov-Gebiet

$$G_i = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^T \mathbf{R}_i \mathbf{x} < c_i = \frac{u_{\max}^2}{\mathbf{k}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{k}_i} \right\}.$$

Schritt 3: Man überprüft, ob für alle $i = 1, \dots, l - 1$ die Matrizen

$$S_i = \frac{R_{i+1}}{c_{i+1}} - \frac{R_i}{c_i}$$

positiv definit sind. Ist dies für einen Index i nicht der Fall, so muss mit Schritt 1 ein neuer Entwurf begonnen werden.

Verwendet man nicht eine endliche Anzahl l von Reglern k_i , sondern unendlich viele mit unendlich vielen Gebieten G_i , so entsteht eine weiche strukturvariable Regelung [3, 77, 96, 113, 197]. Die Gebiete G_i sind dann infinitesimal dicht, also ohne Zwischenraum, geschachtelt. Hierdurch lässt sich die Ausregelgeschwindigkeit weiter verbessern. Sie wird nahezu zeitoptimal. Des Weiteren ist der Stellgrößenverlauf stetig, da keine Umschaltungen zwischen Reglern stattfinden, sondern die Reglerparameter stetig in Abhängigkeit vom Systemzustand verändert werden.

3.3.3 Beispiel Containerkran

Als Beispiel betrachten wir einen Kran [128], wie er in Häfen zum Be- und Entladen von Containerschiffen verwendet wird. Der Container ist dabei über ein Seilsystem unter einer Laufkatze aufgehängt, die den Container, wie in Bild 3.34 gezeigt, vom Kai zum Schiff oder umgekehrt transportiert.

Um eine möglichst schnelle Abfertigung des Schiffes im Hafen zu ermöglichen, sollen die Kräne so viele Container wie möglich pro Stunde be- oder

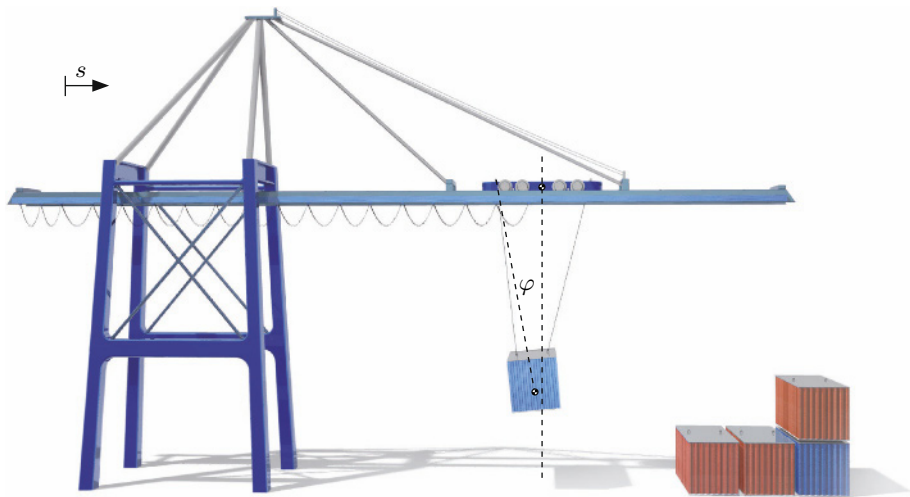


Bild 3.34: Containerkran.

entladen. Das erfordert schnelles Hin- und Herfahren der Laufkatze, was Pendelungen der Container bewirken kann. Diese sind natürlich unerwünscht, da sie ein gezieltes Absetzen der Container unmöglich machen. Mittels einer Regelung kann man eine hohe Geschwindigkeit der Laufkatze erzielen und gleichzeitig vermeiden, dass der Container über seiner Absetzposition pendelt.

Die Dynamik der im Bild 3.34 dargestellten Krananlage lässt sich durch folgendes Modell

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\beta\delta}{\alpha\gamma - \beta^2} & 0 & \frac{\gamma}{\alpha\gamma - \beta^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\alpha\delta}{\alpha\gamma - \beta^2} & 0 & \frac{\beta}{\alpha\gamma - \beta^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_s \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix} u$$

beschreiben. Dabei bilden die Position s der Laufkatze, ihre Geschwindigkeit $\dot{s}$, der Pendelwinkel φ , die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ und die Kraft F , die die Laufkatze beschleunigt, die Elemente des Zustandsvektors $\mathbf{x} = [s \ \dot{s} \ \varphi \ \dot{\varphi} \ F]^T$. Der Strom des Elektromotors der Laufkatze bildet die Eingangsgröße u . Für die Parameter des Krans gilt

$$\begin{aligned} \alpha &= m_K + m_L, \\ \beta &= m_L(f - e), \\ \gamma &= m_L(f - e)^2 + J, \\ \delta &= m_L \cdot g \cdot \left(e + \frac{b}{d-b}f + \frac{(d-b)d}{4l^2 - (d-b)^2}f \right), \\ f &= \frac{bl}{d-b} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{d-b}{l} \right)^2}. \end{aligned}$$

Dabei ist m_K die Masse der Katze, m_L die Masse des Containers und seiner Aufnahmeverrichtung, l die Seillänge, b und d bilden die Abstände der Seilbefestigungen am Container und an der Katze, e ist der vertikale Abstand der Seilbefestigung des Containers vom Containerschwerpunkt, J das Trägheitsmoment des Containers und $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ die Erdbeschleunigung. Siehe Bild 3.35. Die Konstanten K und ω_s sind Parameter des Antriebes.

Wir betrachten im Weiteren eine Ausführung mit

$$\begin{aligned} m_K &= 32 \text{ t}, & m_L &= 18.8 \text{ t}, & J &= 20.5 \text{ t m}^2, \\ d &= 3 \text{ m}, & b &= 2 \text{ m}, & e &= 1.6 \text{ m}, \\ l &= 15 \text{ m}, & \omega_s &= 0.91 \text{ s}^{-1}, & K &= 0.94 \text{ kN s}^{-1} \text{ A}^{-1} \end{aligned}$$

sowie einer Stellgrößenbeschränkung von

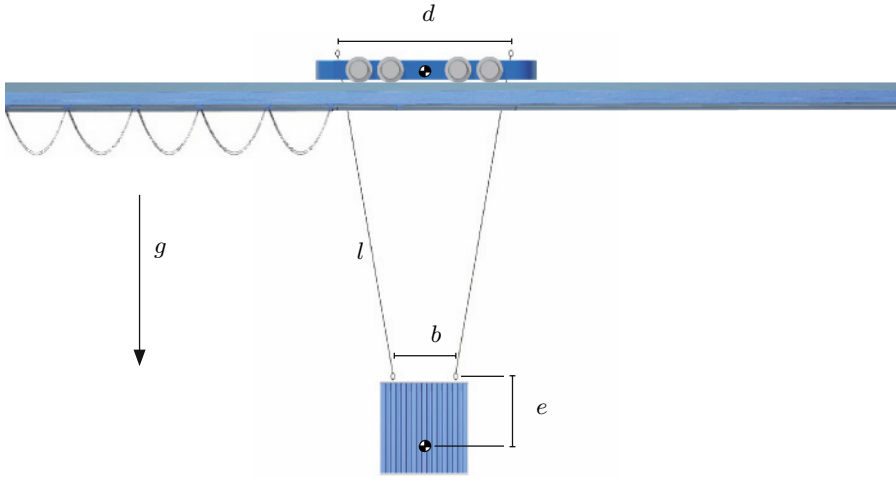


Bild 3.35: Katze und Container.

$$u_{\max} = 100 \text{ A.}$$

Mit obigen Parameterwerten erhalten wir

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12.4949 & 0 & 0.0312 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1.1895 & 0 & 0.0011 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9100 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.94 \end{bmatrix} u \quad (3.30)$$

als Modell. Der Bereich möglicher Anfangsauslenkungen $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ ist

$$X_0 = \{ \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^5 \mid |s| \leq 20 \text{ m}, |\dot{s}| \leq 3 \text{ m s}^{-1}, |\varphi| \leq 5^\circ, |\dot{\varphi}| \leq 2^\circ \text{ s}^{-1}, F = 0 \text{ kN} \}.$$

Hierbei ist zu beachten, dass der Winkel φ und die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ der Anschaulichkeit halber in Grad und Grad pro Sekunde angegeben sind. In der Differenzialgleichung (3.30) sind dagegen als Einheiten Radiant und Radiant pro Sekunde zu verwenden.

Für den Entwurf der umschaltenden Regelung wählen wir zehn Zustandsreglervektoren $\mathbf{k}_i$ und bestimmen hierzu passend zehn Ljapunov-Gebiete

$$G_i = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \mid \mathbf{x}^T \mathbf{R}_i \mathbf{x} < c_i \}.$$

Das größte dieser Gebiete, G_1 , ist so ausgelegt, dass es das Anfangsgebiet X_0 enthält. Die Daten der Regler $\mathbf{k}_i$ und der Matrizen $\mathbf{R}_i$ finden sich im Anhang A. Die Eigenwerte der Teilregelkreise

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}_i^T) \mathbf{x}$$

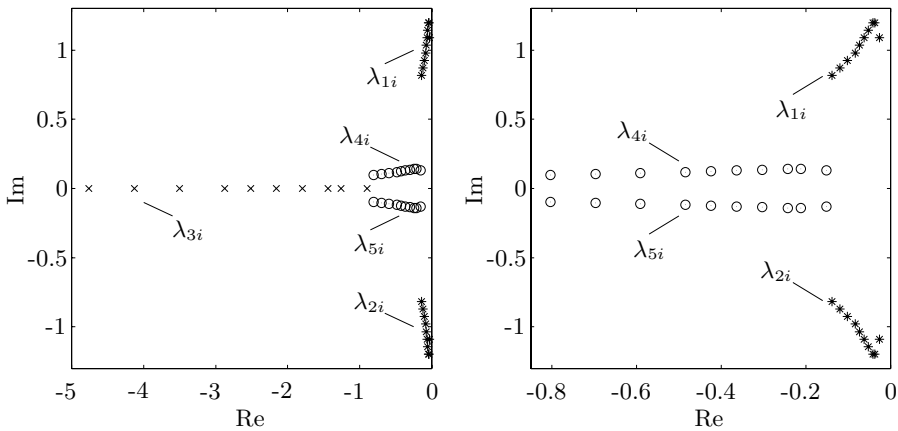


Bild 3.36: Das linke Teilbild zeigt alle Eigenwerte der zehn Teilregelkreise. Das rechte zeigt einen vergrößerten Ausschnitt des linken Teilbildes, so dass die Werte von λ_{1i} und λ_{2i} sowie λ_{4i} und λ_{5i} detaillierter zu erkennen sind.

sind in Bild 3.36 dargestellt.

Wir betrachten als Anfangsauslenkung

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} s \\ \dot{s} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die Simulation der Zustandsgrößen $x_1 = s$, $x_3 = \varphi$ und $x_5 = F$ sowie der Stellgröße u zeigt Bild 3.37. Vergleichend ist auch eine Ausregelung mit dem linearen Zustandsregler $\mathbf{k}_1$ und der zeitoptimalen Steuerung dargestellt. Wie erwartet, weist der Stellgrößenverlauf $u(t)$, d. h. der Motorstrom, des schaltenden Reglers Sprünge auf. Diese sind hier tolerierbar, denn die Kraft F , die sich aus dem Motorstrom u ergibt und den Kran antreibt, besitzt einen stetigen Verlauf.

Die Simulation zeigt beispielhaft die deutlich schnellere Ausregelung des schaltenden Reglers gegenüber dem guten linearen Regler. Der lineare Reglervektor $\mathbf{k}_1$, der auch der Anfangsregler der abschnittsweise linearen Regelung ist, wurde durch eine Parameteroptimierung so bestimmt, dass einerseits das Anfangsgebiet X_0 innerhalb von G_1 liegt und andererseits die Ausregelung möglichst gut verläuft. Eine weitere Verbesserung der Ausregelzeit lässt sich durch die Verwendung von mehr als zehn Reglern erzielen. Allerdings steigt mit einer zunehmenden Zahl von Reglern der Entwurfsaufwand. Es bleibt zu erwähnen, dass die gegenüber der linearen Regelung verbesserte Stellgrößenausnutzung den Nachteil eines höheren Stellenergieverbrauchs hat.

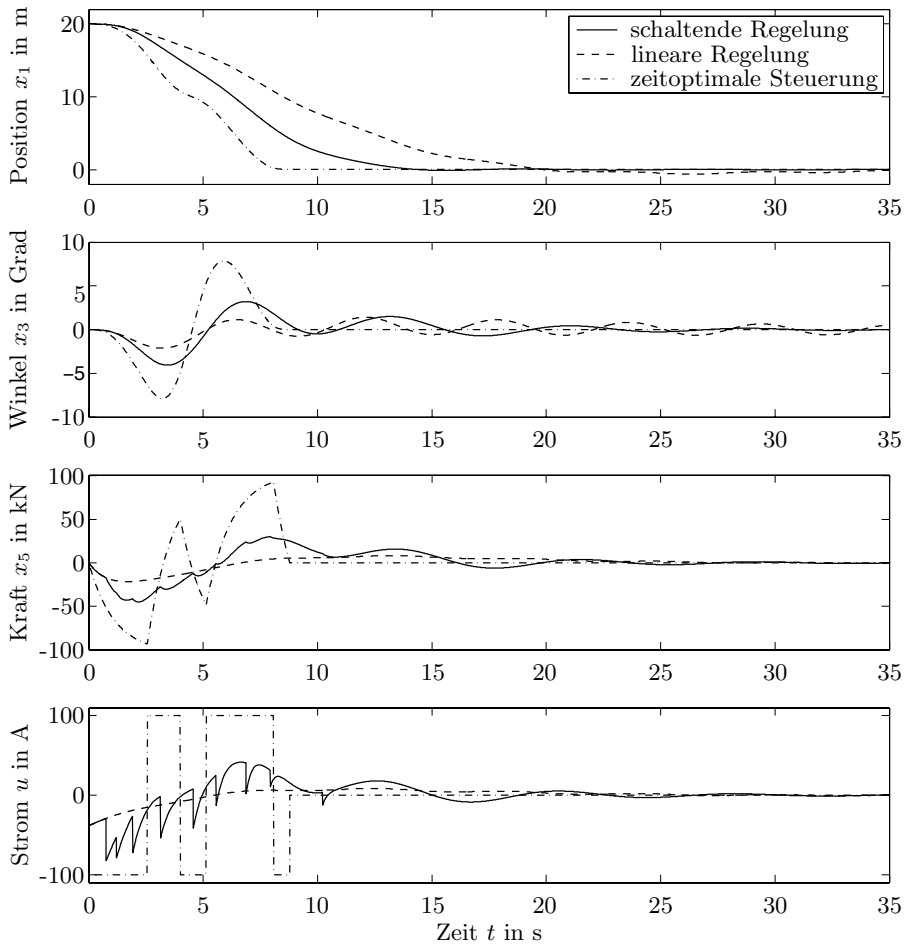


Bild 3.37: Verläufe der Position x_1 , des Pendelwinkels x_3 , der Antriebskraft x_5 und der Stellgröße u , d. h. des Motorstromes.

3.4 Sättigungsregler

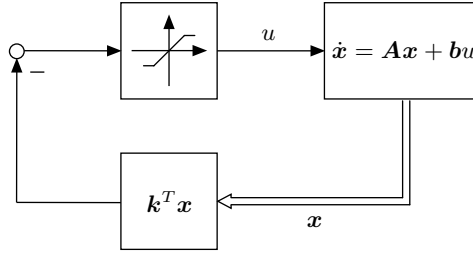
3.4.1 Funktionsweise und Stabilität

Wir betrachten wieder eine lineare Regelstrecke

$$\dot{x} = Ax + bu$$

mit der Stellgrößenbeschränkung

$$|u| \leq u_{\max}. \quad (3.31)$$

Bild 3.38: Regelkreis mit Sättigungsregler $u = -\text{sat}(\mathbf{k}^T \mathbf{x})$.

Als Regler verwenden wir einen Zustandsregler $-\mathbf{k}^T \mathbf{x}$, dem es erlaubt ist, die Begrenzung (3.31) zu verletzen. Es liegt also das Regelgesetz

$$u = \text{sat}(-\mathbf{k}^T \mathbf{x}) = \begin{cases} u_{\max}, & -\mathbf{k}^T \mathbf{x} > u_{\max}, \\ -\mathbf{k}^T \mathbf{x}, & -u_{\max} \leq -\mathbf{k}^T \mathbf{x} \leq u_{\max}, \\ -u_{\max}, & -\mathbf{k}^T \mathbf{x} < -u_{\max} \end{cases} \quad (3.32)$$

vor. Bild 3.38 zeigt die Struktur des Regelkreises. Es zeigt sich, dass man mit dieser einfachen nichtlinearen Reglerstruktur nicht nur die Stabilität des Regelkreises sicherstellen, sondern auch eine schnelle Ausregelung erzielen kann.

Hierbei ist ein Gebiet X_0 von möglichen Anfangsauslenkungen $\mathbf{x}(0)$ vorgegeben. Alle diese Anfangsauslenkungen sollen stabil in die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ ausgeregelt werden. Bei instabilen Regelstrecken ist diese Ausregelung nicht für jedes Gebiet X_0 möglich. Der Grund hierfür ist die Stellgrößenbeschränkung. Ist $u_{\max}$ zu klein oder X_0 zu groß, so reicht für große Anfangsauslenkungen $\mathbf{x}(0)$ die zur Verfügung stehende Stellgröße $u_{\max}$ nicht aus, um die in $\mathbf{x}(0)$ startende Trajektorie $\mathbf{x}(t)$ in die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ auszuregeln. Das Gebiet X_0 soll in einem ellipsoidförmigen Ljapunov-Gebiet

$$G = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x} < c \}$$

liegen, d.h. in einem Gebiet, aus dem keine Trajektorie herausläuft. Die Matrix $\mathbf{R}$, die dieses Gebiet festlegt, werden wir im Verlaufe der Stabilitätsuntersuchung noch bestimmen.

Wir formen nun für die Stabilitätsuntersuchung das Regelgesetz (3.32) in die Gestalt

$$u = -\text{sat}(\mathbf{k}^T \mathbf{x}) = -\mathbf{h}^T \mathbf{x} - p(\mathbf{k}^T \mathbf{x} - \mathbf{h}^T \mathbf{x}) \quad (3.33)$$

mit

$$p = \frac{\text{sat}(\mathbf{k}^T \mathbf{x}) - \mathbf{h}^T \mathbf{x}}{\mathbf{k}^T \mathbf{x} - \mathbf{h}^T \mathbf{x}} \quad (3.34)$$

um. Dabei ist $\mathbf{h}$ so ausgelegt, dass das Ljapunov-Gebiet G Teilmenge des Gebietes

$$Z_{\mathbf{h}} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{h}^T \mathbf{x}| \leq u_{\max} \}$$

ist. Die zwei Hyberebenen $-\mathbf{h}^T \mathbf{x} = \pm u_{\max}$ können dabei die Ellipse G tangieren, sollen das Gebiet G aber nicht schneiden. Bild 3.39 illustriert die Situation.

Der Reglervektor $\mathbf{k}$ wird so gewählt, dass er zu einer deutlich schnelleren Ausregelung führt als der Reglervektor $\mathbf{h}$. Entsprechend größer ist sein Stellgrößenbedarf und das Gebiet

$$Z_{\mathbf{k}} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{k}^T \mathbf{x}| \leq u_{\max} \right\}$$

zerschneidet das Ljapunov-Gebiet G , so wie es Bild 3.40 zeigt.

Wir betrachten nun alle Zustandsvektoren $\mathbf{x} \in G$. Diese wollen wir stabil mittels Gl. (3.32) bzw. (3.33) nach $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ausregeln. Dabei treten verschiedene Fälle auf, von denen wir zuerst den betrachten, bei dem

$$\mathbf{x} \in Z_{\mathbf{k}} \quad \text{und} \quad \mathbf{x} \in G$$

gilt. D.h., der Zustand $\mathbf{x}$ befindet sich in der grau dargestellten Zone des Bildes 3.40. Offensichtlich gelten für solche Vektoren $\mathbf{x}$ die Ungleichungen

$$|\mathbf{h}^T \mathbf{x}| \leq u_{\max} \quad \text{und} \quad |\mathbf{k}^T \mathbf{x}| \leq u_{\max},$$

so dass hier mit $\text{sat}(\mathbf{k}^T \mathbf{x}) = \mathbf{k}^T \mathbf{x}$ für den Faktor p aus Gl. (3.34)

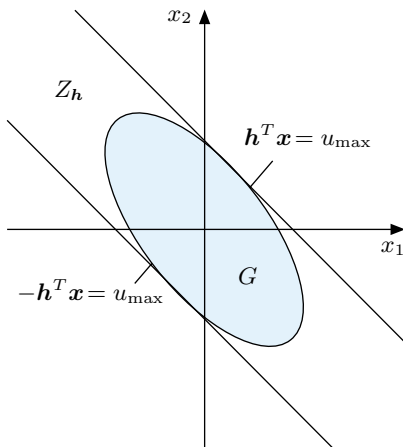


Bild 3.39: Gebiet G , Gebiet $Z_{\mathbf{h}}$ und die Hyperebenen $|\mathbf{h}^T \mathbf{x}| = u_{\max}$.

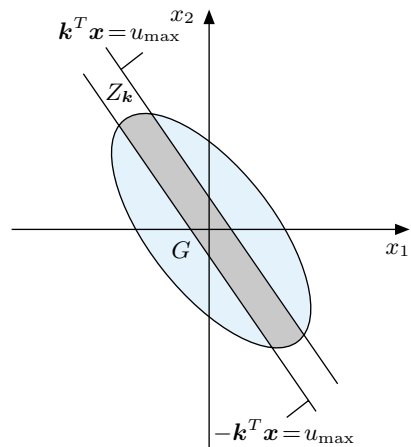


Bild 3.40: Gebiet G , Gebiet $Z_{\mathbf{k}}$ und die Hyperebenen $|\mathbf{k}^T \mathbf{x}| = u_{\max}$.

$$p = \frac{\mathbf{k}^T \mathbf{x} - \mathbf{h}^T \mathbf{x}}{\mathbf{k}^T \mathbf{x} - \mathbf{h}^T \mathbf{x}} = 1 \quad (3.35)$$

gilt. Das Regelgesetz (3.33) ist für diese Werte $\mathbf{x}$ linear, d. h., es gilt

$$u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}.$$

Als nächsten Vektor $\mathbf{x}$, den es auszuregeln gilt, betrachten wir einen beliebigen Vektor $\mathbf{x}$, der in G aber nicht in $Z_{\mathbf{k}}$ liegt. Dieser Bereich $G \setminus Z_{\mathbf{k}}$ ist in Bild 3.40 blau dargestellt. Für die Zustände $\mathbf{x} \in G \setminus Z_{\mathbf{k}}$ ist $|\mathbf{k}^T \mathbf{x}| > u_{\max}$, d. h., die Regelung befindet sich in Sättigung. Es gilt also

$$u = -\text{sat}(\mathbf{k}^T \mathbf{x}) = -u_{\max} \text{sgn}(\mathbf{k}^T \mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in G \setminus Z_{\mathbf{k}}$$

und somit ergibt sich in diesem Fall mit

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^T \mathbf{x} &= |\mathbf{k}^T \mathbf{x}| \text{sgn}(\mathbf{k}^T \mathbf{x}), \\ \mathbf{h}^T \mathbf{x} &= |\mathbf{h}^T \mathbf{x}| \text{sgn}(\mathbf{h}^T \mathbf{x}) \end{aligned}$$

für Gl. (3.34) die Beziehung

$$p = \frac{u_{\max} \text{sgn}(\mathbf{k}^T \mathbf{x}) - |\mathbf{h}^T \mathbf{x}| \text{sgn}(\mathbf{h}^T \mathbf{x})}{|\mathbf{k}^T \mathbf{x}| \text{sgn}(\mathbf{k}^T \mathbf{x}) - |\mathbf{h}^T \mathbf{x}| \text{sgn}(\mathbf{h}^T \mathbf{x})}.$$

Wir multiplizieren Zähler wie Nenner mit $\text{sgn}(\mathbf{k}^T \mathbf{x})$ und erhalten

$$p = \frac{u_{\max} - |\mathbf{h}^T \mathbf{x}| \text{sgn}(\mathbf{h}^T \mathbf{x}) \text{sgn}(\mathbf{k}^T \mathbf{x})}{|\mathbf{k}^T \mathbf{x}| - |\mathbf{h}^T \mathbf{x}| \text{sgn}(\mathbf{h}^T \mathbf{x}) \text{sgn}(\mathbf{k}^T \mathbf{x})} = \frac{u_{\max} \pm |\mathbf{h}^T \mathbf{x}|}{|\mathbf{k}^T \mathbf{x}| \pm |\mathbf{h}^T \mathbf{x}|}$$

für $\mathbf{x} \in G \setminus Z_{\mathbf{k}}$.

Aufgrund dieses Ergebnisses und

$$|\mathbf{h}^T \mathbf{x}| \leq u_{\max} < |\mathbf{k}^T \mathbf{x}| \quad \text{für } \mathbf{x} \in G \setminus Z_{\mathbf{k}}$$

erhält man

$$0 \leq p < 1 \quad (3.36)$$

für alle $\mathbf{x} \in G \setminus Z_{\mathbf{k}}$. Mit Gl.(3.36) und Gl.(3.35) ergibt sich schließlich

$$0 \leq p \leq 1$$

für alle $\mathbf{x} \in G$.

Um die Stabilität des Regelkreises

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \text{sat}(\mathbf{k}^T \mathbf{x}) = \left[\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T - p\mathbf{b}(\mathbf{k}^T - \mathbf{h}^T) \right] \mathbf{x}$$

für alle $\mathbf{x} \in G$ sicherzustellen und um G als Ljapunov-Gebiet auszulegen, setzen wir

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x}$$

als Ljapunov-Funktion an. Als zeitliche Ableitung von V erhalten wir

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \left[\left(\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{h}^T - p \mathbf{b} (\mathbf{k}^T - \mathbf{h}^T) \right)^T \mathbf{R} + \mathbf{R} \left(\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{h}^T - p \mathbf{b} (\mathbf{k}^T - \mathbf{h}^T) \right) \right] \mathbf{x} < 0. \quad (3.37)$$

Offensichtlich ist $\dot{V}(\mathbf{x})$ eine in p lineare Funktion, so dass $\dot{V}(\mathbf{x})$ sein Maximum für $p \in [0, 1]$ entweder in $p = 0$ oder in $p = 1$ annimmt. Die Bedingung (3.37) ist also für alle $p \in [0, 1]$ erfüllt, wenn für $p = 0$

$$\mathbf{x}^T \left[\left(\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{h}^T \right)^T \mathbf{R} + \mathbf{R} \left(\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{h}^T \right) \right] \mathbf{x} < 0$$

und für $p = 1$

$$\mathbf{x}^T \left[\left(\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{k}^T \right)^T \mathbf{R} + \mathbf{R} \left(\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{k}^T \right) \right] \mathbf{x} < 0$$

gilt. Wir erhalten so folgenden Stabilitätssatz für die Zustandsregelung mit Sättigung [76].

Satz 17 (Stabilitätssatz von Hu und Lin). *Der Regelkreis*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b} \text{sat}(\mathbf{k}^T \mathbf{x})$$

besitzt die asymptotisch stabile Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ mit dem Einzugsgebiet

$$G = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x} < c \},$$

wenn es einen Vektor $\mathbf{h}$ gibt, so dass

$$G \subseteq \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{h}^T \mathbf{x}| \leq u_{\max} \} \quad (3.38)$$

gilt und die Matrizen

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{h}^T \right)^T \mathbf{R} + \mathbf{R} \left(\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{h}^T \right) &= -\mathbf{Q}_h, \\ \left(\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{k}^T \right)^T \mathbf{R} + \mathbf{R} \left(\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{k}^T \right) &= -\mathbf{Q}_k, \end{aligned}$$

negativ definit sind.

Zu bemerken ist, dass der Reglervektor $\mathbf{h}$ im Regelgesetz $u = -\text{sat}(\mathbf{k}^T \mathbf{x})$ keine Rolle spielt. Für den Stabilitätsnachweis im Satz 17 dagegen ist er von zentraler Bedeutung. Die Bedingung (3.38) ist äquivalent zur Ungleichung

$$c \cdot \mathbf{h}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{h} \leq u_{\max}^2.$$

Diese Ungleichung ist durch Einsetzen von $\mathbf{h}$ und $\mathbf{R}^{-1}$ leicht zu überprüfen.

3.4.2 Entwurf in mehreren Schritten

Wir wollen uns für den Entwurf eines Sättigungsreglers noch einmal die Entwurfsaufgabe vergegenwärtigen. Der geschlossene Regelkreis besitzt die Gestalt

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \operatorname{sat}(\mathbf{k}^T \mathbf{x}),$$

wobei ein Reglervektor $\mathbf{k}$ gesucht wird, so dass alle Anfangsauslenkungen $\mathbf{x}(0) \in X_0$ stabil in die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ ausgeregelt werden. Das Gebiet möglicher Anfangsauslenkungen X_0 ist dabei oft ein Hyperquader

$$X_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid -\alpha_i \leq x_i \leq \beta_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Für den Entwurf gehen wir nun in mehreren Schritten vor:

Schritt 1: Bestimme einen Regelvektor $\mathbf{h}$, so dass

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T) \mathbf{x}$$

stabil ist.

Schritt 2: Gib eine positiv definite Matrix $\mathbf{Q}_h$ vor und bestimme aus der Ljapunov-Gleichung

$$(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T)^T \mathbf{R} + \mathbf{R} (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T) = -\mathbf{Q}_h$$

die Matrix $\mathbf{R}$ des Ljapunov-Gebietes $G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x} < c\}$.

Schritt 3: Setze

$$c = \frac{u_{\max}^2}{\mathbf{h}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{h}}.$$

Dann tangieren die beiden Hyperebenen $|\mathbf{h}^T \mathbf{x}| = u_{\max}$ gerade das Gebiet G .

Schritt 4: Prüfe anhand der Eckpunkte $\mathbf{x}_{ei}$ von X_0 , ob $X_0 \subseteq G$ gilt. D. h., prüfe ob

$$\mathbf{x}_{ei}^T \mathbf{R} \mathbf{x}_{ei} < c$$

für alle $i = 1, \dots, 2^n$ gilt. Falls dies so ist, fahre mit Schritt 5 fort. Falls dies nicht gilt, gehe zu Schritt 1 zurück und wähle einen Regler $\mathbf{h}$ mit geringerem Stellgrößenverbrauch oder gehe zu Schritt 2 und variiere $\mathbf{Q}_h$.

Schritt 5: Wähle einen Regelvektor $\mathbf{k}$ und überprüfe, ob die Matrix

$$(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)^T \mathbf{R} + \mathbf{R} (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T) = -\mathbf{Q}_k$$

negativ definit ist. Ist dies nicht der Fall, so wiederhole Schritt 5.

Schritt 6: Simuliere den Regelkreis $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \text{sat}(\mathbf{k}^T \mathbf{x})$. Ist das Regelverhalten zufriedenstellend, so beende den Entwurf. Ist es das nicht, so gehe zu Schritt 1 oder 5 und führe den Entwurf erneut durch.

Der Nachteil des obigen Entwurfsschemas liegt in seinen heuristischen Entwurfsanteilen. So müssen die Regelvektoren $\mathbf{h}$ und $\mathbf{k}$ sowie die Matrix $\mathbf{Q}_h$ aufgrund von Mutmaßungen gewählt werden. Auch kann nicht von vornherein sichergestellt werden, ob $X_0 \subseteq G$ gilt. Daher müssen unter Umständen verschiedene Entwurfsschritte mehrfach durchgeführt werden und das Vorgehen ist dabei durch Versuch und Irrtum geprägt.

Das Entwurfsvorgehen mittels obiger fünf Schritte kann auch auf einem Rechner implementiert werden und dann automatisiert ablaufen. Des Weiteren ist ein Entwurf in einem einzigen Schritt möglich [76], wenn alle Entwurfsbedingungen in linearen Matrixungleichungen [25] zusammengefasst werden. Die beschriebenen Nachteile des obigen Entwurfes in sechs Schritten treten dann nicht auf. Sättigungsregler der beschriebenen Art können auch für MIMO-Regelstrecken entworfen werden [76].

3.4.3 Beispiel Helikopter

Als Beispiel betrachten wir einen Rettungshubschrauber, wie ihn Bild 3.41 zeigt. Der Helikopter soll durch einen Autopiloten konstant über einem Ort gehalten werden können. D. h., im Fall von Windböen und die durch sie verursachten Positionsabweichungen soll die Regelung des Autopiloten den Helikopter zurück auf die konstant zu haltende Position bringen. Für Rettungseinsätze bei stürmischem Wetter ist eine solche Entlastung des Piloten von großer Bedeutung.

Wir betrachten hier die Positionsabweichung x_4 des Helikopters, gemessen in Metern, in Richtung seiner Längsachse. Als Teil des Autopiloten wollen wir diese Positionsabweichung durch eine Regelung bei null halten und sie im Falle einer Störung, z. B. durch eine Windböe, möglichst schnell reduzieren und auf null zurückführen. Die Positionsabweichung lässt sich mittels des Modells [38]

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -0.415 & 0 & -0.0111 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1.43 & 9.8 & -0.0198 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 6.27 \\ 0 \\ 9.8 \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

$$y = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \mathbf{x}$$

beschreiben, wobei x_1 die Nickwinkelrate, x_2 der Nickwinkel, x_3 die Geschwindigkeit in Längsrichtung und x_4 die Position bzw., wie erwähnt, die Positionsabweichung ist. Die Stellgröße u ist der einstellbare Rotorwinkel, gemessen in Radiant. Der Rotorwinkel ist durch

$$-0.11 \leq u \leq 0.11$$

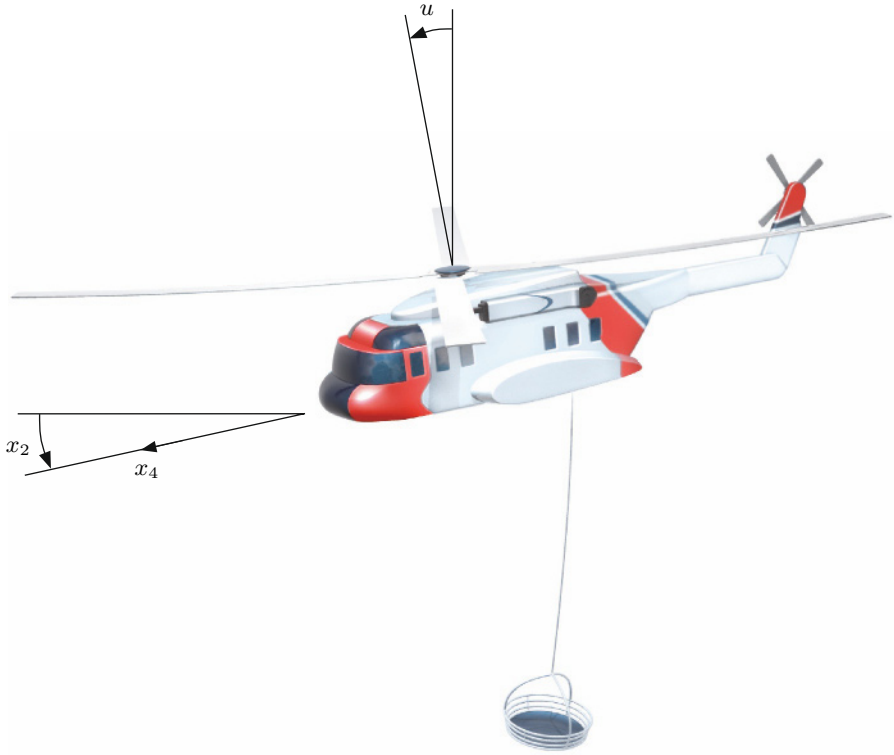


Bild 3.41: Rettungshubschrauber.

begrenzt. Als Gebiet möglicher Stör- bzw. Anfangsauslenkungen betrachten wir

$$X_0 = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid |x_1| \leq 0.1, |x_2| \leq 0.2, |x_3| \leq 1, |x_4| \leq 10 \}.$$

Wir bestimmen als Sättigungsregler, der den Helikopter für alle Störauslenkungen aus X_0 mit der Stellgrößenbeschränkung $|u| \leq 0.11$ stabil ausregelt,

$$u = -\text{sat}(\mathbf{k}^T \mathbf{x})$$

mit

$$\mathbf{k}^T = [0.16226 \quad 0.20860 \quad 0.0089414 \quad 0.0020975].$$

Für die Störauslenkung

$$\mathbf{x}_0^T = [0.1 \quad 0.2 \quad 1 \quad 10]$$

zeigt Bild 3.42 den Verlauf der Ausregelung. Zum Vergleich sind auch die Verläufe eines linearen Reglers $u = -\mathbf{k}_{\text{lin}}^T \mathbf{x}$ mit

$$\mathbf{k}_{\text{lin}}^T = [1.7719 \quad 2.8852 \quad 0.15954 \quad 0.038056]$$

und der zeitoptimalen Steuerung dargestellt. Deutlich zu erkennen ist die gegenüber dem linearen Regler schnellere Ausregelung des Sättigungsreglers. Diese wird allerdings durch eine höhere Stellgeschwindigkeit $\dot{u}$ erkauft.

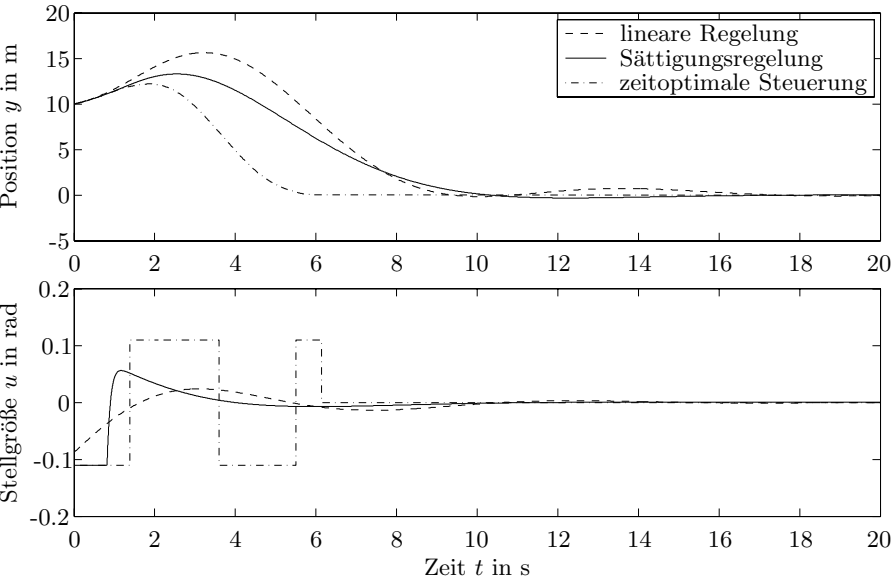


Bild 3.42: Verlauf der Position y und der Stellgröße u des Helikopters.

Nichtlineare Regelungen für nichtlineare Regelstrecken

4.1 Gain-scheduling-Regler

4.1.1 Grundlagen

Gain-scheduling-Methoden ermöglichen es auf Basis der linearen Systemtheorie, relativ einfache und in der Praxis bewährte Regelungen für nichtlineare Regelstrecken zu entwerfen. Aus diesen Gründen haben Gain-scheduling-Regler eine große Verbreitung gefunden. Typische Anwendungen sind Flugregelungen, Regelungen in der chemischen Prozessindustrie und Regelungen in mechatronischen Systemen.

Man linearisiert bei dieser Klasse von Reglern die Regelstrecke für verschiedene Arbeitspunkte. So ergibt sich eine Reihe von linearen Teilmodellen, für die man jeweils einen Regler entwirft. Während eines Ausregelvorgangs aktiviert man den Regler, dessen zugehöriges Streckenmodell der aktuellen Situation am besten entspricht, oder interpoliert zwischen den Reglern. Auf diese Weise wird es möglich, die Entwurfsmethoden der linearen Systemtheorie auf nichtlineare Regelstrecken anzuwenden. Dies kann den Entwurf von Regelungen für nichtlineare Systeme enorm vereinfachen, was sicher ein Grund für die Beliebtheit dieser Entwurfsmethode ist.

Ausgangsbasis des Gain-schedulings ist die nichtlineare Regelstrecke

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{d} \in \mathbb{R}^s, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^r.\end{aligned}$$

Dabei beschreibt der Vektor $\mathbf{d}$ mögliche äußere Einflussfaktoren oder Störgrößen. Die Ruhelage bzw. die Ruhelagen $\mathbf{x}_R$ bestimmen sich aus der Gleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{d}_R, \mathbf{u}_R) = \mathbf{0}$$

und hängen vom Eingangsvektor $\mathbf{u}_R$ der Regelstrecke und eventuell vorhandenen äußeren Einflussgrößen $\mathbf{d}_R$ ab. Diese Ruhelagen oder Arbeitspunkte

des Systems können im Allgemeinen als Funktion eines Parametervektors $\boldsymbol{\rho}$ dargestellt werden als

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_R &= \mathbf{u}_R(\boldsymbol{\rho}), \\ \mathbf{x}_R &= \mathbf{x}_R(\boldsymbol{\rho}), \\ \mathbf{d}_R &= \mathbf{d}_R(\boldsymbol{\rho})\end{aligned}$$

und

$$\mathbf{y}_R = \mathbf{g}(\mathbf{x}_R(\boldsymbol{\rho})) = \mathbf{y}_R(\boldsymbol{\rho}).$$

Die Dimension des Parametervektors $\boldsymbol{\rho}$ bezeichnen wir im Weiteren mit l .
Aus der Menge

$$E = \{\mathbf{u}_R(\boldsymbol{\rho}), \mathbf{x}_R(\boldsymbol{\rho}), \mathbf{d}_R(\boldsymbol{\rho}), \mathbf{y}_R(\boldsymbol{\rho}), \quad \boldsymbol{\rho} \in M \subset \mathbb{R}^l\} \subset \mathbb{R}^{m+n+s+r}$$

von Ruhelagen wird eine Anzahl von p Ruhelagen (bzw. Arbeitspunkten)

$$(\mathbf{u}_R(\boldsymbol{\rho}_i), \mathbf{x}_R(\boldsymbol{\rho}_i), \mathbf{d}_R(\boldsymbol{\rho}_i), \mathbf{y}_R(\boldsymbol{\rho}_i)), \quad i = 1, \dots, p,$$

ausgewählt. Um diese herum wird jeweils ein linearisiertes Modell

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}_i) \Delta \mathbf{x}_i + \mathbf{B}(\boldsymbol{\rho}_i) \Delta \mathbf{u}_i + \mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}_i) \Delta \mathbf{d}_i, \\ \Delta \mathbf{y}_i &= \mathbf{C}(\boldsymbol{\rho}_i) \Delta \mathbf{x}_i\end{aligned}$$

hergeleitet, wobei

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{x}_i &= \mathbf{x} - \mathbf{x}_R(\boldsymbol{\rho}_i), \\ \Delta \mathbf{u}_i &= \mathbf{u} - \mathbf{u}_R(\boldsymbol{\rho}_i), \\ \Delta \mathbf{d}_i &= \mathbf{d} - \mathbf{d}_R(\boldsymbol{\rho}_i), \\ \Delta \mathbf{y}_i &= \mathbf{y} - \mathbf{y}_R(\boldsymbol{\rho}_i)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}_i) &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{d}_R(\boldsymbol{\rho}_i), \mathbf{u}_R(\boldsymbol{\rho}_i))}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R(\boldsymbol{\rho}_i)}, \\ \mathbf{B}(\boldsymbol{\rho}_i) &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_R(\boldsymbol{\rho}_i), \mathbf{d}_R(\boldsymbol{\rho}_i), \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_R(\boldsymbol{\rho}_i)}, \\ \mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}_i) &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_R(\boldsymbol{\rho}_i), \mathbf{d}, \mathbf{u}_R(\boldsymbol{\rho}_i))}{\partial \mathbf{d}} \right|_{\mathbf{d}=\mathbf{d}_R(\boldsymbol{\rho}_i)}, \\ \mathbf{C}(\boldsymbol{\rho}_i) &= \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R(\boldsymbol{\rho}_i)}\end{aligned}$$

gilt.

Im Weiteren wollen wir die Vektoren $\boldsymbol{\rho}_i$ stellvertretend für

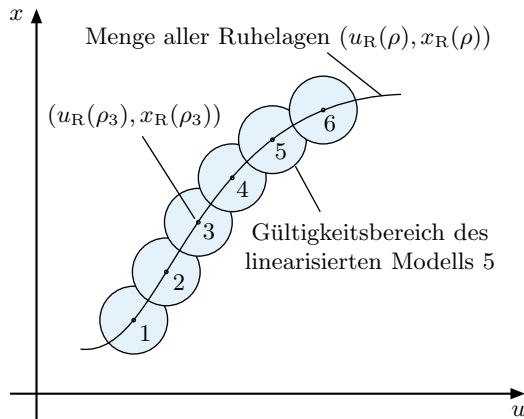


Bild 4.1: Gültigkeitsbereiche der parametrisierten Linearisierungsfamilie.

$$(\mathbf{u}_R(\boldsymbol{\rho}_i), \mathbf{x}_R(\boldsymbol{\rho}_i), \mathbf{d}_R(\boldsymbol{\rho}_i), \mathbf{y}_R(\boldsymbol{\rho}_i))$$

als Arbeitspunkte bezeichnen. Die Menge der linearisierten Modelle bezeichnet man als *parametrisierte Linearisierungsfamilie* der Regelstrecke. Diese p linearisierten Modelle haben immer nur einen beschränkten Gültigkeitsbereich um die jeweiligen Arbeitspunkte herum. Die Gültigkeitsbereiche sollten dabei lückenlos aneinander anschließen bzw. sich überlappen, wie es Bild 4.1 illustriert. Die parametrisierte Linearisierungsfamilie deckt mit ihren Gültigkeitsbereichen oft nicht den gesamten Raum der Eingangs- und Zustandsgrößen ab, so dass außerhalb dieser Bereiche diese Modellfamilie das Verhalten des nicht-linearen Systems nicht mehr widerspiegelt.

Für jedes der p linearisierten Modelle mit dem Parametervektor $\boldsymbol{\rho}_i$ wird ein Regler

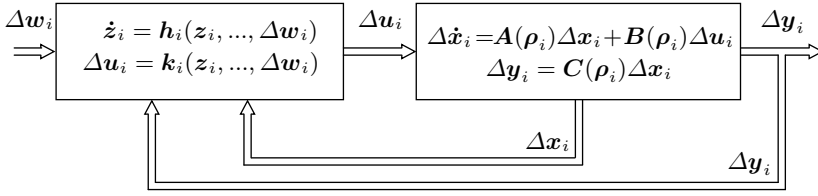
$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_i &= \mathbf{h}_i(\mathbf{z}_i, \Delta \mathbf{d}_i, \Delta \mathbf{x}_i, \Delta \mathbf{y}_i, \Delta \mathbf{w}_i), \\ \Delta \mathbf{u}_i &= \mathbf{k}_i(\mathbf{z}_i, \Delta \mathbf{x}_i, \Delta \mathbf{y}_i, \Delta \mathbf{w}_i) \end{aligned}$$

bestimmt, dessen optionale Dynamik durch eine Differenzialgleichung mit den Reglerzuständen $\mathbf{z}_i$ festgelegt ist. Dabei ist

$$\Delta \mathbf{w}_i = \mathbf{w} - \mathbf{w}_R(\boldsymbol{\rho}_i)$$

die Abweichung des Sollgrößenvektors $\mathbf{w}$ vom Arbeitspunkt $\mathbf{w}_R(\boldsymbol{\rho}_i)$. Bild 4.2 zeigt den i -ten dieser p Regelkreise, der aus dem i -ten Teilregler und der im Arbeitspunkt $\boldsymbol{\rho}_i$ linearisierten Regelstrecke besteht. Für die Regler kommen verschiedene Reglertypen in Frage, z. B. lineare Zustandsregler, PID-Regler usw.

Nach dem Entwurf der p Regler wird in einem letzten Entwurfsschritt zwischen jeweils zwei benachbarten Reglern i und j ausgewählt bzw. interpoliert. Die Auswahl bzw. Interpolation erfolgt dabei in Abhängigkeit vom

Bild 4.2: Der i -te Regelkreis einer Gain-scheduling-Regelung.

Parametervektor ρ . Allerdings ist der Vektor ρ nicht in jedem Anwendungsfall bestimmbar oder messbar. Man ersetzt ihn dann durch einen Vektor $\beta(t)$, *Schedulingvektor* genannt, wobei sich dessen Elemente $\beta_k(t)$ aus bekannten Größen zusammensetzen wie

- (1) den Zustandsvariablen x_k ,
- (2) den Ausgangsvariablen y_k ,
- (3) den Stellgrößen u_k ,
- (4) den Reglerzuständen z_k oder
- (5) den Sollgrößen w_k .

Dabei soll

$$l = \dim \rho = \dim \beta$$

und im stationären Fall

$$\beta_s = \beta(t \rightarrow \infty) = \rho \quad (4.1)$$

gelten.

Die einfachste Möglichkeit, die Stellgröße u zu generieren, ist die Aktivierung eines einzelnen Reglers i mit der Stellgröße

$$u = u_R(\rho_i) + \Delta u_i. \quad (4.2)$$

Dabei wird der Regler i durch die Gleichung

$$i = \arg \min_k \|\beta - \rho_k\| \quad (4.3)$$

bestimmt. Aktiv ist somit jener Regler i , dessen Parametervektor ρ_i dem aktuellen Schedulingvektor β am nächsten liegt.

Das Regelgesetz (4.2) ist zwar einfach, besitzt aber den Nachteil, dass zwischen den Reglern i mittels des Auswahlgesetzes (4.3) umgeschaltet wird. Unerwünschte Sprünge im Stellgrößenverlauf, die das Stellglied nicht ausführen oder verkraften kann, sind die Folge.

Sinnvoller ist es daher, ein Regelgesetz zu verwenden, das zwischen den Reglern i , d. h. ihren Stellgrößenwerten, interpoliert. Zusammengesetzt wird die Stellgröße dann anteilig aus den Werten $u_R(\rho_i)$ und Δu_i . Und zwar so, dass zwischen den Reglern i , in deren Gültigkeitsbereich sich der Schedulingvektor β befindet, interpoliert wird.

Die Interpolation zwischen den Stellgrößen $\mathbf{u}_R(\boldsymbol{\rho}_i) + \Delta \mathbf{u}_i$ der einzelnen Regler erfolgt z. B. auf Basis des gewichteten Mittelwertes, der die Gleichung des Gain-scheduling-Reglers

$$\mathbf{u} = \frac{\sum_{i=1}^p \mu_i(\boldsymbol{\beta}) \cdot (\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}_i) + \Delta \mathbf{u}_i)}{\sum_{i=1}^p \mu_i(\boldsymbol{\beta})} \quad (4.4)$$

liefert. Die Gewichtungsfunktionen $0 \leq \mu_i(\boldsymbol{\beta}) \leq 1$ sind im Arbeitspunkt

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\rho}_i$$

identisch eins und nehmen zum Rand des Gültigkeitsbereiches, der zu diesem Arbeitspunkt gehört, stetig bis auf null oder näherungsweise null ab. Eine Funktion, die diese Eigenschaft besitzt, ist beispielsweise die mehrdimensionale Gauß-Funktion

$$\mu_i(\boldsymbol{\beta}) = e^{-\|\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\rho}_i)\|^2}. \quad (4.5)$$

Die $l \times l$ Matrix $\boldsymbol{\Sigma}$ ist z. B. eine Diagonalmatrix

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sigma_1^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{2\sigma_l^2} \end{bmatrix}.$$

Durch die Matrix $\boldsymbol{\Sigma}$ erhält jede Koordinatenrichtung des Schedulingvektors $\boldsymbol{\beta}$ eine eigene Skalierung mittels $1/(2\sigma_j^2)$. So können nicht nur, wie in Bild 4.1, Kreise als Niveaulinien der Funktion (4.5) ausgeformt werden, sondern auch Ellipsen.

Normalerweise legt man die Funktionen $\mu_i(\boldsymbol{\beta})$ durch geeignete Wahl von σ_k so aus, dass sie für $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\rho}_j$ mit $i \neq j$ alle nahezu null und mit $i = j$ identisch eins sind. Dann reduziert sich für $i = j$ Gl. (4.4) auf

$$\mathbf{u} \approx \frac{\mu_i(\boldsymbol{\rho}_i) \cdot (\mathbf{u}_R(\boldsymbol{\rho}_i) + \Delta \mathbf{u}_i)}{\mu_i(\boldsymbol{\rho}_i)} = \mathbf{u}_R(\boldsymbol{\rho}_i) + \Delta \mathbf{u}_i, \quad (4.6)$$

d. h., im Arbeitspunkt i wird nur der zu ihm gehörige Regler $\Delta \mathbf{u}_i$ aktiv. Zwischen den Arbeitspunkten dagegen wird ein gewichteter Mittelwert der einzelnen Reglerausgangsgrößen $\mathbf{u}_R(\boldsymbol{\rho}_i) + \Delta \mathbf{u}_i$ gebildet. Bild 4.3 illustriert dies.

Das Interpolationsgesetz (4.4) besitzt die oftmals günstige Eigenschaft, dass für den Fall eines Vektors $\boldsymbol{\beta}$, der außerhalb der betrachteten gültigen

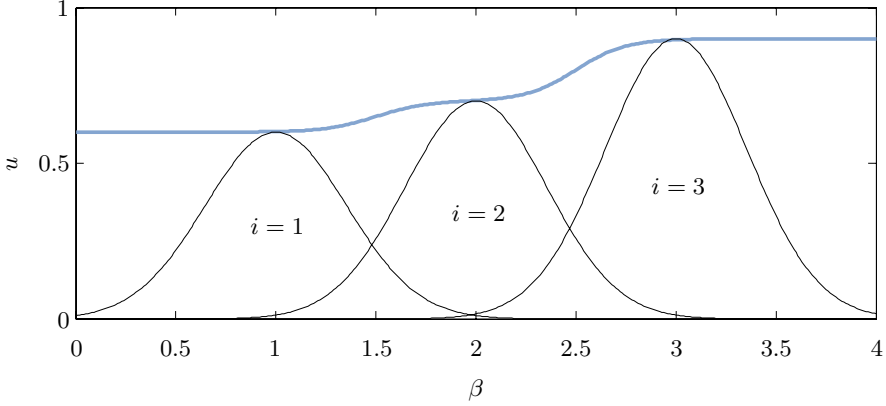


Bild 4.3: Die Interpolation u der Reglerausgangswerte $u_R(\rho_i) + \Delta u_i$ auf Basis des gewichteten Mittelwertes ist als blaue Kurve exemplarisch dargestellt. Die schwarzen Kurven entsprechen den Funktionen $\mu_i(\beta) \cdot (u_R(\rho_i) + \Delta u_i)$ für $i = 1, \dots, 3$.

Arbeitsbereiche liegt, der Regler des zu β naheliegendsten Arbeitspunktes aktiv bleibt. Dies lässt sich aus Gl. (4.4) erkennen, denn für solche Vektoren β gilt

$$\mu_i(\beta) \ll 1$$

für alle i . Dann besitzt der größte dieser Werte, d. h. derjenige mit dem kleinsten euklidischen Abstand $\|\beta - \rho_i\|$, den größten Einfluss in Gl. (4.4). Auch in diesem Fall gilt dann wieder Gl. (4.6). Bild 4.3 illustriert auch diese Eigenschaft.

Insgesamt gesehen ist der Entwurf eines Gain-scheduling-Reglers in vier Schritten darstellbar:

Schritt 1: Berechne die parametrisierte Linearisierungsfamilie.

Schritt 2: Entwerfe die linearen Teilregler mittels linearer Entwurfsmethoden.

Schritt 3: Lege das Auswahl- bzw. Interpolationsgesetz für die Teilregler in Abhängigkeit der Schedulingparameter fest.

Schritt 4: Simuliere den gesamten Regelkreis und prüfe Stabilität und Regelgüte.

Insbesondere Schritt 4 bedarf der Beachtung, denn die Stabilität kann im Allgemeinen nicht analytisch gesichert werden. Die Stabilität der linearen Teilregelkreise ist hier nicht ausreichend, da das gesamte System nichtlinear ist.

Erweiterungen und zusätzliche Betrachtungen zu Gain-scheduling-Reglern finden sich in [8, 37, 43, 111, 192, 202]. Einen Überblick bieten beispielsweise [1, 112, 159].

4.1.2 Illustrationsbeispiel

Es wird ein einfaches Beispiel betrachtet:

$$\dot{x} = -x^3 + u.$$

Das System hat die Ruhelage

$$x_R = \sqrt[3]{u_R}.$$

Als Parameter ρ wählt man

$$\rho = u_R.$$

So ergibt sich für die parametrisierte Linearisierungsfamilie

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x} &= A \Delta x + b \Delta u = \left. \frac{\partial f(x, u_R)}{\partial x} \right|_{x_R} \cdot \Delta x + \left. \frac{\partial f(x_R, u)}{\partial u} \right|_{u_R} \cdot \Delta u \\ &= -3x_R^2 \Delta x + \Delta u = -3\sqrt[3]{u_R^2} \Delta x + \Delta u. \end{aligned}$$

Man wählt des Weiteren fünf Arbeitspunkte aus mit

$$\begin{aligned} \rho_1 = u_{R1} &= -2, & x_{R1} &= -\sqrt[3]{2} \approx -1.26, \\ \rho_2 = u_{R2} &= -1, & x_{R2} &= -\sqrt[3]{1} = -1, \\ \rho_3 = u_{R3} &= 0, & x_{R3} &= \sqrt[3]{0} = 0, \\ \rho_4 = u_{R4} &= 1, & x_{R4} &= \sqrt[3]{1} = 1, \\ \rho_5 = u_{R5} &= 2, & x_{R5} &= \sqrt[3]{2} \approx 1.26 \end{aligned}$$

und

$$\Delta u_i = u - u_{Ri} \quad \text{sowie} \quad \Delta x_i = x - x_{Ri}.$$

So ergeben sich fünf linearisierte Modelle mit

$$\begin{array}{lll} \rho_1 = u_{R1} = -2 & \text{und} & \Delta \dot{x}_1 = -4.76 \Delta x_1 + \Delta u_1, \\ \rho_2 = u_{R2} = -1 & \text{und} & \Delta \dot{x}_2 = -3.00 \Delta x_2 + \Delta u_2, \\ \rho_3 = u_{R3} = 0 & \text{und} & \Delta \dot{x}_3 = \Delta u_3, \\ \rho_4 = u_{R4} = 1 & \text{und} & \Delta \dot{x}_4 = -3.00 \Delta x_4 + \Delta u_4, \\ \rho_5 = u_{R5} = 2 & \text{und} & \Delta \dot{x}_5 = -4.76 \Delta x_5 + \Delta u_5. \end{array}$$

Für jedes Modell wird nun ein P-Regler mit der Regelabweichung

$$\Delta e_i = \Delta w_i - \Delta x_i$$

und

$$\Delta u_i = k_i \Delta e_i$$

entworfen, so dass die jeweiligen Regelkreise die Eigenwerte

$$\lambda_1 = -12, \quad \lambda_2 = -4.5, \quad \lambda_3 = -1.5, \quad \lambda_4 = -4.5, \quad \lambda_5 = -12$$

aufweisen. Es ergeben sich folgende Teilregler $\Delta u_i = k_i \Delta e_i$ mit

$$k_1 = 7.24, \quad k_2 = 1.50, \quad k_3 = 1.50, \quad k_4 = 1.50, \quad k_5 = 7.24.$$

Als Regelgesetz, für das wir die umschaltende Variante wählen, ergibt sich so insgesamt mit den Gl. (4.2) und (4.3)

$$u = u_R(\rho_i) + \Delta u_i = u_{Ri} + \Delta u_i = u_{Ri} + k_i \cdot \Delta e_i$$

mit

$$i = \arg \min_{k=1,\dots,5} |\beta - u_{Rk}|.$$

Wählt man im obigen Regelgesetz als Schedulingparameter

$$\beta = \rho = u,$$

so ist das Regelgesetz implizit in u . Dies ist ungünstig. Eine geeignetere Wahl ergibt sich, wenn man, durch die Ruhelagengleichung

$$\dot{x} = -x^3 + u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = x^3$$

motiviert,

$$\beta = x^3$$

wählt. Offensichtlich ist dann die Bedingung (4.1), d. h. $\beta_s = \rho$ für den stationären Fall, erfüllt.

Bild 4.4 zeigt den kompletten Regelkreis. Es gilt

$$w_{Ri} = x_{Ri}$$

und

$$\Delta e_i = \Delta w_i - \Delta x_i = w - x = \Delta e.$$

Bild 4.5 zeigt die Simulation des Regelkreisverhaltens für einen Führungsgrößensprung von $w = 1.5$. Da wir nur einen P-Regler verwenden, existiert eine bleibende Regelabweichung. Die Unstetigkeiten im Verlauf von u kennzeichnen einen Wechsel des Index i und damit auch einen Wechsel von

$$u = u_{Ri} + \Delta u_i.$$

Wie erwähnt, ist das oftmals unerwünscht, da nicht jedes Stellglied solche Sprünge ausführen kann. Aber auch die abrupte Änderung im Verlauf der Zustandsgröße x ist, wenn man z. B. an eine Flugregelung denkt, nicht erstrebenswert. In vielen Fällen wird man sich glatte Verläufe von Stellgrößen und Zustandsgrößen wünschen.

Im nächsten Abschnitt betrachten wir ein Beispiel, bei dem zwischen den Reglern interpoliert wird, so dass keine Sprünge im Stellgrößenverlauf auftreten.

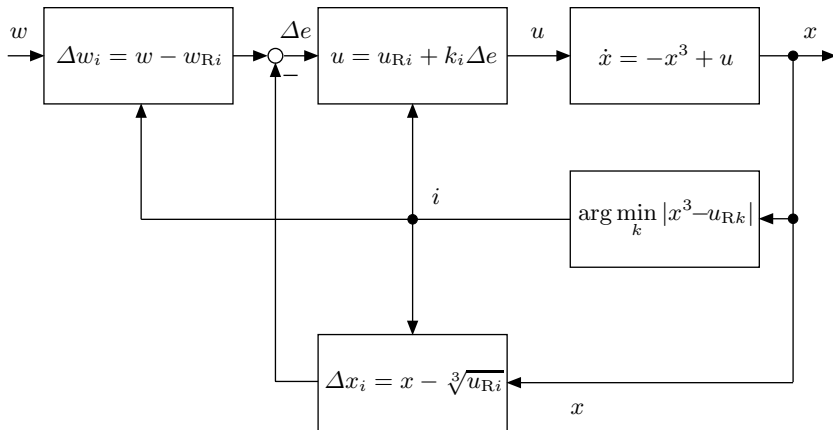
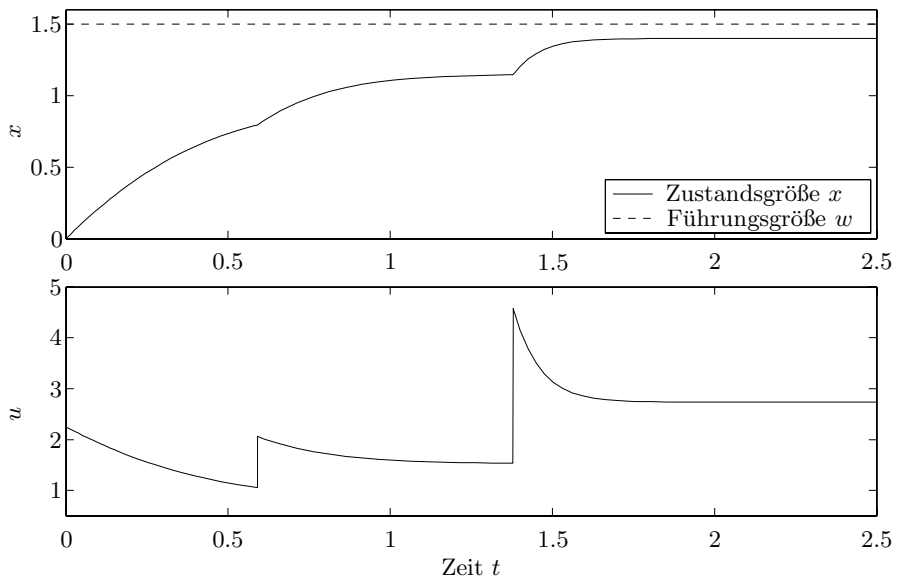


Bild 4.4: Strukturbild des kompletten Regelkreises.

Bild 4.5: Simulation von Zustandsgröße x und Stellgröße u der Gain-scheduling-Regelung der Regelstrecke $\dot{x} = -x^3 + u$.

4.1.3 Beispiel Solarkraftwerk mit Parabolrinnenkollektor

Wir betrachten das Parabolrinnenkraftwerk Acurex in Almería im Süden Spaniens [28, 85, 158]. Das Kraftwerk besitzt 480 Solarkollektoren, die bei einer Sonneneinstrahlung von 900 W m^{-2} eine elektrische Leistung von 1.2 MW erzeugen. Hierbei fokussieren Parabolrinnen über ihre verspiegelte Oberfläche

die Sonnenstrahlen in einer lichtdurchlässigen Leitung, in der Öl zirkuliert. Durch die gebündelten Sonnenstrahlen wird das Öl erhitzt und fließt dann in einen isolierten Speichertank mit einem Volumen von 140 m^3 . Von hier aus gelangt das Öl über eine Pumpe zu einem Dampferzeuger, in dem die Wärme des Öls genutzt wird, um Wasserdampf zu erzeugen. Mit diesem wird schließlich eine Turbine und ein elektrischer Generator betrieben. Das Öl wird nach dem Verlassen des Dampferzeugers mit einer Rate von 2 bis 10 ls^{-1} zurück in die Leitungen des Kollektorfeldes gepumpt. Das Öl kreist also ständig in der Anlage. Bild 4.6 zeigt den prinzipiellen Aufbau des Systems.

Die Austrittstemperatur T_a des Öls ist ein Maß für die aufgefangene Energie. Beschreiben lässt sich die Austrittstemperatur beim Verlassen des Kollektorfeldes näherungsweise über die Leistungsbilanz

$$C\dot{T}_a = \eta_0 S J - qp_{cp}(T_a - T_e). \quad (4.7)$$

Dabei ist T_e die Temperatur des Öls beim Eintritt in das Kollektorfeld. Sie ist konstant bzw. ändert sich nur sehr langsam und geringfügig. Die Stärke der Sonneneinstrahlung ist durch die Variable J berücksichtigt, wobei $0 \leq J \leq 1 \text{ kW m}^{-2}$ gilt. Im Gegensatz zu J kann der Volumenstrom q des Öls durch die Pumpleistung zwischen 2 und 10 ls^{-1} vorgegeben werden. Des Weiteren ist η_0 der optische Wirkungsgrad der Kollektoren, S die wirksame Kollektorfläche, C die Wärmekapazität des Öls und p_{cp} eine Systemkonstante. Für die Acurex-Anlage in Almería gilt

$$\begin{aligned} \eta_0 S &= 1322 \text{ m}^2, \\ C &= 2267 \text{ kJ } ^\circ\text{C}^{-1}, \\ p_{cp} &= 1.924 \text{ kJ } ^\circ\text{C}^{-1} \text{ l}^{-1}. \end{aligned}$$

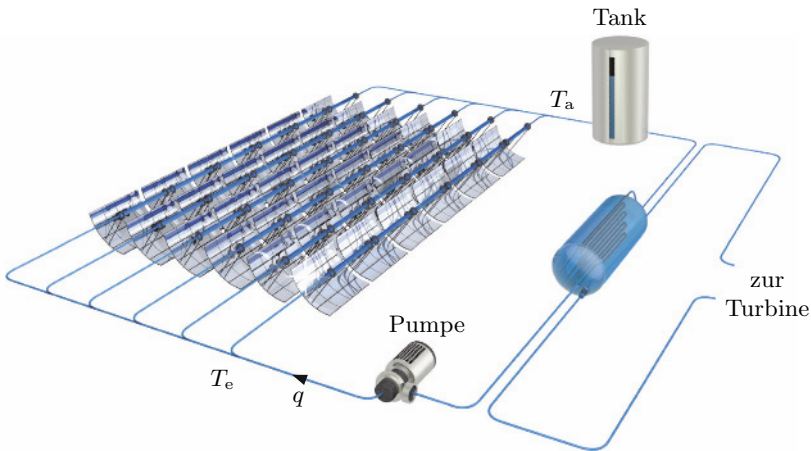


Bild 4.6: Solarkraftwerk.

Die Öltemperatur T_a darf die Temperatur von 305°C nicht überschreiten und insbesondere darf die Differenz zwischen der Eintrittstemperatur T_e und der Austrittstemperatur T_a nicht mehr als 100°C betragen. Normale Werte für diese Differenz liegen um 70°C . Ist die Temperaturdifferenz $T_a - T_e$ zu groß, so steigt der Öldruck in den Leitungen im Kollektorfeld stark an. Leckagen können die Folge sein.

Man ist daher bestrebt, die Temperaturdifferenz

$$\Delta T = T_a - T_e$$

auf dem konstanten Wert von 70°C zu halten. Dies geschieht mittels einer Regelung, die über den Volumenstrom q des Öls in Gl. (4.7) bzw. in der Gleichung

$$C(\Delta T) \cdot + C\dot{T}_e = \eta_0 S J - q p_{\text{cp}} \Delta T \quad (4.8)$$

die Temperatur T_a und damit ΔT beeinflusst. Da die Eintrittstemperatur T_e näherungsweise konstant ist bzw. sich nur sehr langsam ändert, d. h. $\dot{T}_e \approx 0$, können wir für Gl. (4.8) die Näherung

$$C(\Delta T) \cdot = \eta_0 S J - q p_{\text{cp}} \Delta T \quad (4.9)$$

ansetzen.

Wir sind konformistisch und bezeichnen den Zustand ΔT des Systems (4.9) mit x und seine Stellgröße q mit u . So gilt

$$\dot{x} = aJ - bxu \quad (4.10)$$

mit $a = \eta_0 S C^{-1} = 0.5831^\circ\text{C m}^2\text{kJ}^{-1}$ und $b = p_{\text{cp}} C^{-1} = 0.8487 \cdot 10^{-3} \text{ l}^{-1}$. Dabei wirkt die Stärke J der Sonneneinstrahlung aus regelungstechnischer Sicht als Störgröße.

Die Ruhelagen x_R des Systems (4.8) sind durch

$$x_R = \frac{aJ_R}{bu_R} \quad (4.11)$$

gegeben. Die Temperaturdifferenz x_R ist also proportional zur messbaren Stärke J der Sonneneinstrahlung. Im Falle einer konstanten Temperaturdifferenz $x_R = 70^\circ\text{C}$ gilt mit Gl. (4.11)

$$u_R = 9.82J_R.$$

Wir wollen das System (4.10), ähnlich wie in [85], mittels Gain-scheduling regeln. Zu diesem Zweck ermitteln wir zuerst die parametrisierte Linearisierungsfamilie

$$\Delta \dot{x} = \left. \frac{\partial aJ}{\partial J} \right|_{J=J_R} \cdot \Delta J - \left. \frac{\partial bxu_R}{\partial x} \right|_{x=x_R} \cdot \Delta x - \left. \frac{\partial bx_R u}{\partial u} \right|_{u=u_R} \cdot \Delta u, \quad (4.12)$$

des Systems, wobei die Variablen

$$\Delta J = J - J_R, \quad \Delta x = x - x_R, \quad \Delta u = u - u_R$$

die Abweichungen von den Ruhelagenwerten darstellen.

Aus Gl. (4.11) und Gl. (4.12) folgt

$$\Delta \dot{x} = a\Delta J - bu_R\Delta x - \frac{aJ_R}{u_R}\Delta u,$$

wobei für den Parametervektor $\boldsymbol{\rho} = [u_R \ J_R]^T$ gilt.

Wir wählen nun aus den möglichen Bereichen der Parameter,

$$2 \text{ ls}^{-1} \leq u_R \leq 10 \text{ ls}^{-1} \quad \text{und} \quad 0 \text{ kW m}^{-2} \leq J_R \leq 1 \text{ kW m}^{-2},$$

insgesamt sechs Arbeitspunkte

$$\boldsymbol{\rho}_i = \begin{bmatrix} u_{Ri} \\ J_{Ri} \end{bmatrix} \in \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0.8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 0.8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 0.8 \end{bmatrix} \right\}$$

aus. Bild 4.7 illustriert diese Wahl. Dabei liegen im Bereich oberhalb der Geraden

$$J_R = 0.1455u_R,$$

die sich aus Gl. (4.11) ergibt, Temperaturdifferenzen von $\Delta T > 100^\circ\text{C}$ vor. Dieser Bereich, in dem der Regelkreis nicht betrieben werden darf, ist in Bild 4.7 blau dargestellt. Die je nach Stärke J der Sonneneinstrahlung gewünschten stationären Zustände mit $x_{\text{soll}} = \Delta T = 70^\circ\text{C}$ sind durch die Gerade

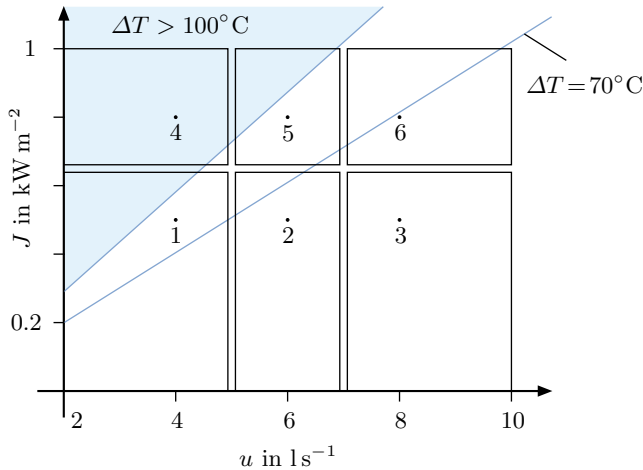


Bild 4.7: Arbeitspunkte (1, 2, 3, 4, 5 und 6) und Gültigkeitsbereiche der linearen Teilmodelle, in denen die jeweilige Gauß-Funktion eines Arbeitspunktes dominiert.

$$J_R = 0.1019 u_R$$

gegeben.

Für die linearen Teilmodelle gilt im i -ten Arbeitspunkt somit

$$\begin{aligned} i = 1 : \quad \Delta \dot{x}_1 &= 0.58 \cdot \Delta J_1 - 3.39 \cdot 10^{-3} \cdot \Delta x_1 - 73 \cdot 10^{-3} \cdot \Delta u_1, \\ i = 2 : \quad \Delta \dot{x}_2 &= 0.58 \cdot \Delta J_2 - 5.09 \cdot 10^{-3} \cdot \Delta x_2 - 49 \cdot 10^{-3} \cdot \Delta u_2, \\ i = 3 : \quad \Delta \dot{x}_3 &= 0.58 \cdot \Delta J_3 - 6.79 \cdot 10^{-3} \cdot \Delta x_3 - 36 \cdot 10^{-3} \cdot \Delta u_3, \\ i = 4 : \quad \Delta \dot{x}_4 &= 0.58 \cdot \Delta J_4 - 3.39 \cdot 10^{-3} \cdot \Delta x_4 - 117 \cdot 10^{-3} \cdot \Delta u_4, \\ i = 5 : \quad \Delta \dot{x}_5 &= 0.58 \cdot \Delta J_5 - 5.09 \cdot 10^{-3} \cdot \Delta x_5 - 78 \cdot 10^{-3} \cdot \Delta u_5, \\ i = 6 : \quad \Delta \dot{x}_6 &= 0.58 \cdot \Delta J_6 - 6.79 \cdot 10^{-3} \cdot \Delta x_6 - 58 \cdot 10^{-3} \cdot \Delta u_6. \end{aligned}$$

Wir entwerfen für jedes der Teilmodelle einen PI-Regler

$$\Delta u_i = K_i (x_{\text{soll}} - x) + K_i \omega_i \int_0^t (x_{\text{soll}} - x) d\tau,$$

mit den jeweiligen Reglerkoeffizienten

$$\begin{aligned} K_1 &= -1.3254, & \omega_1 &= 0.0248, \\ K_2 &= -1.9532, & \omega_2 &= 0.0253, \\ K_3 &= -2.5577, & \omega_3 &= 0.0257, \\ K_4 &= -0.8284, & \omega_4 &= 0.0248, \\ K_5 &= -1.2207, & \omega_5 &= 0.0253, \\ K_6 &= -1.5985, & \omega_6 &= 0.0257. \end{aligned}$$

Die Regler sind so dimensioniert, dass die geregelten Teilmodelle immer Eigenwerte bei

$$s_1 = -0.04 \quad \text{und} \quad s_2 = -0.06$$

besitzen. Um die Beschränkung der Pumpenleistung zu berücksichtigen, besitzen die PI-Regler Antiwindup-Elemente.

Als Schedulingvektor $\beta \neq \rho$ verwenden wir

$$\beta = \begin{bmatrix} u = \frac{aJ}{bx} \\ J \end{bmatrix},$$

wobei $\beta(t \rightarrow \infty) = \rho$ gilt. Die Stellgrößen $u_i = u_{Ri} + \Delta u_i$ werden über die gewichtete Mittelwertbildung (4.4) zum Gain-scheduling-Regler

$$u = \frac{\sum_{i=1}^6 e^{-\|\Sigma(\beta - \rho_i)\|^2} u_i}{\sum_{i=1}^6 e^{-\|\Sigma(\beta - \rho_i)\|^2}}$$

zusammengefasst. Dabei gilt

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

Wir simulieren den Gain-scheduling-Regelkreis des Solarkraftwerkes für den in Bild 4.8 angenommenen Tagesverlauf der Sonneneinstrahlung. Die Verläufe des Pumpendurchflusses u und der Temperaturdifferenz $x = \Delta T$ zwischen Austrittstemperatur und Eintrittstemperatur des Öls sind ebenfalls in Bild 4.8 abgebildet. Wie erkennbar, werden die Beschränkungen des Pumpendurchflusses $2 \text{ ls}^{-1} \leq u \leq 10 \text{ ls}^{-1}$ eingehalten. Auch die Temperaturdifferenz x wird auf dem gewünschten Wert von $x = 70^\circ\text{C}$ gehalten. Im Falle einer Sonneneinstrahlung J von weniger als 0.2 kW m^{-2} fällt die Temperaturdifferenz allerdings auf unter 70°C , da dann die Erwärmung des Öls durch die Sonne zu gering ist, um bei einem minimal erforderlichen Ölfluss von 2 ls^{-1} eine Temperaturdifferenz von 70°C zu erzeugen.

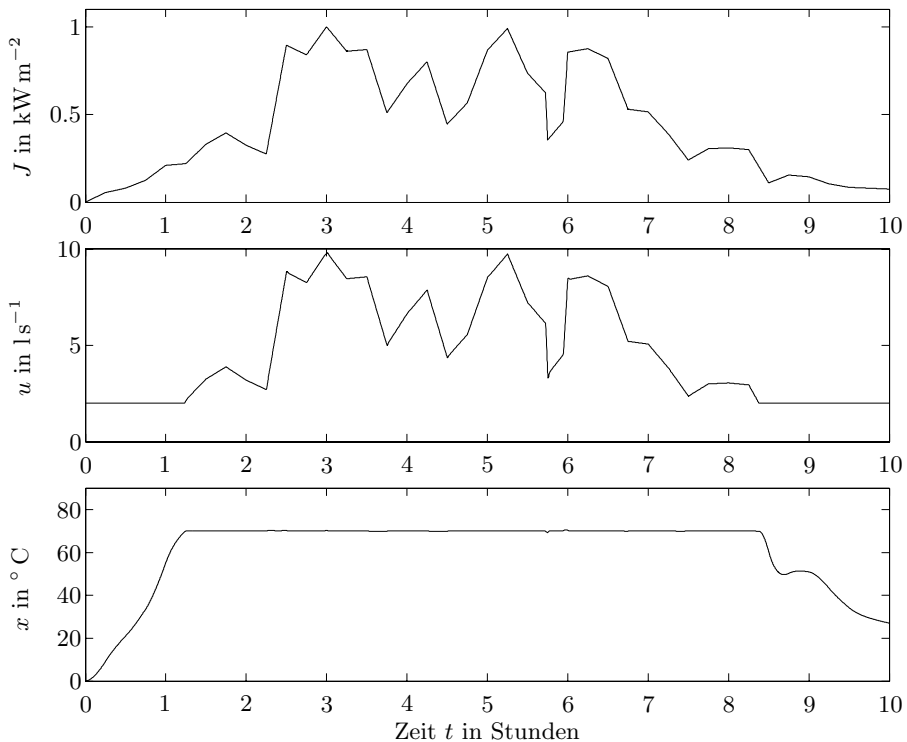


Bild 4.8: Stärke J der Sonneneinstrahlung, Volumenstrom $u = q$ der Pumpe und Temperaturdifferenz $x = \Delta T$ des Öls zwischen Eintritt und Austritt in das Kollektorfeld.

4.2 Reglerentwurf mittels exakter Linearisierung

4.2.1 Grundidee und nichtlineare Regelungsnormalform

In diesem Kapitel soll ein Verfahren betrachtet werden, mit dem es direkt und nicht über den Umweg einer linearen Näherung der Regelstrecke möglich ist, Regler für nichtlineare Regelstrecken zu entwerfen. Grundgedanke hierbei ist es, einen nichtlinearen Regler so zu entwerfen, dass er die Nichtlinearität der Regelstrecke kompensiert und insgesamt ein linearer Regelkreis entsteht.

Als Regelstrecken werden SISO-Systeme der Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot u, \\ y &= c(\mathbf{x})\end{aligned}$$

betrachtet, also Systeme, die nichtlinear in $\mathbf{x}$, aber linear in u sind. Daher bezeichnet man sie auch als *eingangslineare Systeme* oder *eingangsaffine Systeme*. Die Annahme einer linear wirkenden Stellgröße u ist keine große Einschränkung, denn viele technische Systeme sind linear in der Stellgröße u . Die Systemordnung ist $n = \dim \mathbf{x}$. Die Betrachtung von MIMO-Systemen ist ohne großen Aufwand und auf ähnliche Weise wie im SISO-Fall möglich [83, 94, 163, 195]. Wir beschränken uns hier nur deshalb auf SISO-Systeme, um die Grundidee des Verfahrens möglichst gut verständlich herauszuarbeiten.

Für den angedachten Reglerentwurf hat sich die Form der obigen Systembeschreibung als ungünstig herausgestellt. Man muss sie daher geeignet umformen. Zu diesem Zweck verwendet man die Lie-Derivierte oder Lie-Ableitung, die als Gradient einer skalaren Funktion $h(\mathbf{x})$ multipliziert mit einem Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ definiert ist, d. h. als

$$L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) = \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \text{grad}^T h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Im vorliegenden Fall gilt z. B.

$$L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x}) = \frac{\partial c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{a}(\mathbf{x}),$$

wenn man die Lie-Derivierte auf die Ausgangsfunktion c anwendet.

Man bildet nun die zeitliche Ableitung der Ausgangsgröße y und erhält

$$\dot{y} = \frac{dc(\mathbf{x})}{dt} = \frac{\partial c(\mathbf{x})}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \dots + \frac{\partial c(\mathbf{x})}{\partial x_n} \dot{x}_n = \frac{\partial c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}}.$$

Ersetzt man darin

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot u,$$

so ergibt sich

$$\dot{y} = \frac{\partial c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \frac{\partial c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot u$$

oder mittels der Lie-Derivierten die Gleichung

$$\dot{y} = L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{b}}c(\mathbf{x}) \cdot u.$$

Bei den meisten technischen Systemen ist in der letzten Gleichung

$$L_{\mathbf{b}}c(\mathbf{x}) = \frac{\partial c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}(\mathbf{x}) = 0, \quad (4.13)$$

so dass

$$\dot{y} = L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x})$$

gilt.

Ein Beispiel für Gl. (4.13) liefern lineare Systeme in Regelungsnormalform

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} &= [b_0 \ b_1 \ \cdots \ b_m \ 0 \ \cdots \ 0] \mathbf{x} \end{aligned}$$

mit $m < n - 1$. Bei diesen Systemen gilt offensichtlich

$$L_{\mathbf{b}}c(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{c}^T \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{b} = 0.$$

Es soll jetzt $\ddot{y}$ ermittelt werden. Man erhält ausgehend von $\dot{y} = L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x})$ die Beziehung

$$\ddot{y} = \frac{dL_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x})}{dt} = \frac{\partial L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\frac{\partial L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{a}(\mathbf{x})}_{L_{\mathbf{a}}L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x})} + \underbrace{\frac{\partial L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}(\mathbf{x})}_{L_{\mathbf{b}}L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x})} \cdot u.$$

Für den ersten Term in der letzten Gleichung schreibt man abkürzend

$$L_{\mathbf{a}}L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{a}}^2c(\mathbf{x}),$$

da die Lie-Derivierte $L_{\mathbf{a}}$ zweimal hintereinander angewandt wird. Für den zweiten Term gilt oftmals wieder

$$L_{\mathbf{b}}L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x}) = \frac{\partial L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}(\mathbf{x}) = 0.$$

Man erhält dann

$$\ddot{y} = L_{\mathbf{a}}^2c(\mathbf{x}).$$

Bildet man auch die höheren Ableitungen, so ergibt sich schließlich folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned}
y &= c(\mathbf{x}), \\
\dot{y} &= L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x}), \\
\ddot{y} &= L_{\mathbf{a}}^2c(\mathbf{x}), \\
&\vdots \\
y^{(\delta-1)} &= L_{\mathbf{a}}^{\delta-1}c(\mathbf{x}), \\
y^{(\delta)} &= L_{\mathbf{a}}^{\delta}c(\mathbf{x}) + \frac{\partial L_{\mathbf{a}}^{\delta-1}c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Dabei gilt

$$L_{\mathbf{b}}L_{\mathbf{a}}^i c(\mathbf{x}) = \frac{\partial L_{\mathbf{a}}^i c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}(\mathbf{x}) = 0$$

für alle Indizes

$$i = 0, \dots, \delta - 2.$$

Erst für den Index $i = \delta - 1$ wird $L_{\mathbf{b}}L_{\mathbf{a}}^{\delta-1}c(\mathbf{x})$ ungleich null. Man bezeichnet δ als *Differenzordnung* oder auch als *relativen Grad* des Systems. Der relative Grad entspricht bei linearen Systemen der Differenz zwischen Nennergrad und Zählergrad der Übertragungsfunktion.

Wir betrachten nun zuerst den Fall

$$\delta = n,$$

also den Fall, bei dem die Systemordnung $n = \dim \mathbf{x}$ dem relativen Grad δ entspricht. Dann lassen sich die folgenden neuen Zustandskoordinaten

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{a}}^2c(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_{\mathbf{a}}^{n-1}c(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \mathbf{t}(\mathbf{x}) \tag{4.15}$$

eingeführen. Ist dabei $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ stetig differenzierbar und existiert die Umkehrfunktion $\mathbf{t}^{-1}$, d. h., gilt

$$\mathbf{t}^{-1}(\mathbf{t}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$$

und ist $\mathbf{t}^{-1}$ ebenfalls stetig differenzierbar, so nennt man

$$\mathbf{t} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

wie schon in Abschnitt 1.1.10 beschrieben, einen *Diffeomorphismus*. Er transformiert das System

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}, \\
y &= c(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

eindeutig in die folgende neue Systemdarstellung

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ L_{\mathbf{a}}^n c(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{a}}^{n-1} c(\mathbf{x}) \end{bmatrix} u, \quad (4.16)$$

$$y = z_1.$$

Diese Systemdarstellung wird als *nichtlineare Regelungsnormalform* bezeichnet. Sie lässt sich unmittelbar aus Gl. (4.14) und Gl. (4.15) herleiten.

Wenn man nun noch die Eingangsgröße u transformiert, um sie in Gl. (4.16) durch eine neue Eingangsgröße w gemäß

$$u = -\frac{L_{\mathbf{a}}^n c(\mathbf{x}) + \mathbf{k}^T \mathbf{z}}{L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{a}}^{n-1} c(\mathbf{x})} + \frac{V}{L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{a}}^{n-1} c(\mathbf{x})} w \quad (4.17)$$

mit

$$\mathbf{k}^T = [a_0 \ a_1 \ \cdots \ a_{n-1}]$$

zu ersetzen, so ergibt sich das vollständig linearisierte System in Regelungsnormalform

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ V \end{bmatrix} w, \quad (4.18)$$

$$y = z_1.$$

Mittels der Transformationen (4.15) und (4.17) ist es uns gelungen, die nichtlineare Systemdarstellung in eine lineare zu überführen. Aus dieser Vorgehensweise leitet sich der Name *exakte Eingangs-/Ausganglinearisierung*, kurz *exakte Linearisierung*, ab. In der Wahl der Koeffizienten a_i im Vektor $\mathbf{k}$ sind wir frei, so dass wir dem transformierten System jede gewünschte Eigenwertkonfiguration einprägen können. Auch der Wert V ist frei wählbar.

4.2.2 Nichtlinearer Regler und linearer Regelkreis

Wir können die Transformationsvorschrift (4.17) der Eingangsgröße u in die neue Eingangsgröße w auch als Regelgesetz

$$u(\mathbf{x}, w) = -r(\mathbf{x}) + v(\mathbf{x}) \cdot w \quad (4.19)$$

mit

$$r(\mathbf{x}) = \frac{L_{\mathbf{a}}^n c(\mathbf{x}) + \mathbf{k}^T \mathbf{z}}{L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{a}}^{n-1} c(\mathbf{x})} \quad (4.20)$$

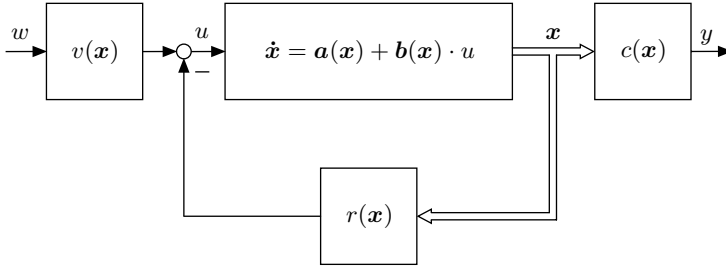


Bild 4.9: Strukturbild des Regelkreises mit insgesamt linearer Dynamik.

als Regler und

$$v(\mathbf{x}) = \frac{V}{L_b L_a^{n-1} c(\mathbf{x})}$$

als Vorfilter interpretieren. Die Größe w fungiert dabei als Führungsgröße des Regelkreises.

Für die Differenzialgleichung der Ausgangsgröße y ergibt sich aus Gl. (4.18)

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = V \cdot w.$$

Bild 4.9 zeigt das zugehörige Strukturbild. Durch die frei wählbaren Parameter a_i und V kann die Dynamik des Regelkreises offensichtlich beliebig ausgelegt werden. In der Praxis begrenzt allerdings die Beschränkung der Stellgröße, $|u| \leq u_{\max}$, die freie Wahl der Parameter a_i und V .

Um das Regelgesetz (4.19), (4.20) unabhängig von $\mathbf{z}$ zu machen, setzt man noch

$$\mathbf{z} = \mathbf{t}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} c(\mathbf{x}) \\ L_a c(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_a^{n-1} c(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

in Gl. (4.20) ein und erhält so die *nichtlineare Ackermann-Formel*

$$u = -\frac{L_a^n c(\mathbf{x}) + a_{n-1}L_a^{n-1}c(\mathbf{x}) + \dots + a_1L_a c(\mathbf{x}) + a_0c(\mathbf{x})}{L_b L_a^{n-1}c(\mathbf{x})} + \frac{V}{L_b L_a^{n-1}c(\mathbf{x})}w$$

als Regelgesetz, das nur noch vom Originalzustand $\mathbf{x}$ abhängt.

Um alle Ergebnisse zu überblicken, fassen wir sie in folgendem Satz zusammen.

Satz 18 (Exakte Linearisierung bei maximalem relativen Grad). *Betrachtet wird der Regelkreis*

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot u, \\ y &= c(\mathbf{x}), \\ u &= -r(\mathbf{x}) + v(\mathbf{x}) \cdot w\end{aligned}$$

mit dem relativen Grad $\delta = n$. Hat dann der Regler die Form

$$r(\mathbf{x}) = \frac{L_{\mathbf{a}}^n c(\mathbf{x}) + a_{n-1} L_{\mathbf{a}}^{n-1} c(\mathbf{x}) + \dots + a_1 L_{\mathbf{a}} c(\mathbf{x}) + a_0 c(\mathbf{x})}{L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{a}}^{n-1} c(\mathbf{x})}$$

und ist das Vorfilter durch

$$v(\mathbf{x}) = \frac{V}{L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{a}}^{n-1} c(\mathbf{x})}, \quad V \in \mathbb{R},$$

mit

$$L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{a}}^{n-1} c(\mathbf{x}) \neq 0$$

gegeben, so hat der Regelkreis das lineare Übertragungsverhalten

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = V \cdot w.$$

Wir bezeichnen das Vorgehen in Satz 18 als *exakte Linearisierung bei maximalem relativen Grad*, da es auf den höchsten möglichen Wert $\delta = n$ zugeschnitten ist. Den Fall $\delta < n$ behandeln wir in Abschnitt 4.2.4.

4.2.3 Beispiel Magnetlager

Wir betrachten ein aktives Magnetlager [130, 184], wie es in elektrischen Generatoren und Motoren, Pumpen und Turbinen eingesetzt wird. Es ermöglicht eine reibungsfreie Lagerung der Maschinenwelle und so die Einsparung von Energie. Das prinzipielle Funktionsschema eines Magnetlagers mit einem Freiheitsgrad zeigt Bild 4.10. Die beiden Elektromagneten halten die Welle in der Position $h = 0$.

Die von den Strömen i_1 und i_2 verursachten magnetischen Flüsse Φ_1 und Φ_2 bewirken dabei die Kräfte F_1 und F_2 , die auf die Welle wirken. Diese Kräfte werden so eingestellt, dass die Lagerung berührungslos erfolgt. Dabei kann man, um elektrische Energie einzusparen, die Elektromagneten wechselseitig ein- bzw. ausschalten. Diese Betriebsart bezeichnet man als Zero-bias-Betrieb oder Low-bias-Betrieb.

Die auf die Welle wirkenden Kräfte

$$F_i = \frac{1}{\mu_0 A} \Phi_i^2, \quad i = 1, 2, \quad (4.21)$$

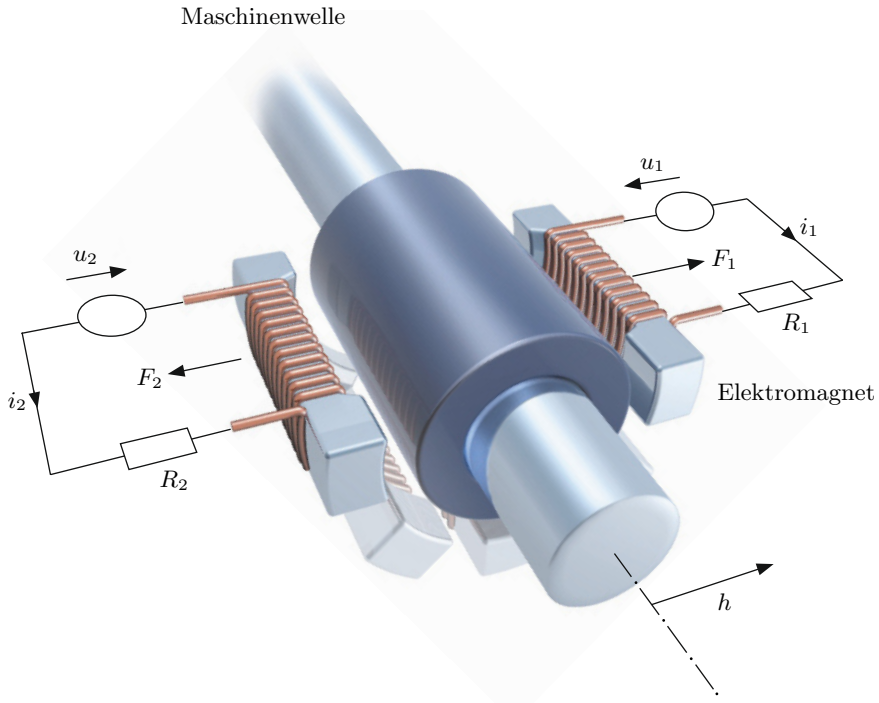


Bild 4.10: Prinzipielles Funktionsschema eines aktiven Magnetlagers mit einem Freiheitsgrad in Richtung von h . Weitere, nicht betrachtete Freiheitsgrade sind durch zusätzliche Elektromagneten angedeutet.

hängen variabel vom magnetischen Fluss Φ_i des jeweiligen Elektromagneten i ab. Dabei ist μ_0 die magnetische Feldkonstante und A die Fläche eines Pols der Elektromagneten. Für den magnetischen Fluss gilt des Weiteren

$$\Phi_i = \Phi_0 + \phi_i, \quad i = 1, 2, \quad (4.22)$$

wobei $\Phi_0 \ll \phi_i$ ist. Der Flussanteil Φ_0 ist konstant, d. h., er bildet einen Gleichanteil, den Bias. Die Flussanteile ϕ_i enthalten die zeitlich veränderlichen Komponenten. Für den Zusammenhang zwischen der Spannung u_i des Elektromagneten i und dem Fluss Φ_i gilt

$$\dot{\Phi}_i = \dot{\phi}_i = \frac{u_i}{N}, \quad i = 1, 2. \quad (4.23)$$

Dabei ist u_i die am i -ten Elektromagnet anliegende Spannung und N die Anzahl der Windungen des Elektromagneten. Man definiert nun

$$\phi = \phi_1 - \phi_2 \quad (4.24)$$

und schaltet die Spannungen der beiden Elektromagneten gemäß

$$u_1 = \begin{cases} v & \text{für } \phi < 0, \\ 0 & \text{für } \phi \geq 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

und

$$u_2 = \begin{cases} 0 & \text{für } \phi < 0, \\ -v & \text{für } \phi \geq 0 \end{cases} \quad (4.26)$$

ein und aus. Die Spannung v ist variabel und bildet die Stellgröße $u = \dot{\phi} = v/N$ des noch zu entwerfenden Reglers.

Die auf die Welle wirkende Gesamtkraft ist mit Verwendung von Gl. (4.21) durch

$$F_g = F_1 - F_2 = \frac{1}{\mu_0 A} (\Phi_1^2 - \Phi_2^2)$$

gegeben. Für die in obiger Gleichung auftretende Differenz $\Phi_1^2 - \Phi_2^2$ ergibt sich aus den Gleichungen (4.22), (4.23) und (4.24) unter Berücksichtigung der Schaltstrategien (4.25) und (4.26) nach einer Zwischenrechnung [184] die Beziehung

$$\Phi_1^2 - \Phi_2^2 = 2\bar{\Phi}_0\phi + \phi|\phi|$$

mit $\bar{\Phi}_0 = \Phi_0 + \min\{\phi_1(0), \phi_2(0)\}$.

Somit erhält man für die Beschleunigung $\ddot{h}$ der Welle mit der Masse m die Beziehung

$$\ddot{h} = \frac{1}{\mu_0 A m} (2\bar{\Phi}_0\phi + \phi|\phi|). \quad (4.27)$$

Definiert man als Zustandsvariablen des Systems $x_1 = h$, $x_2 = \dot{h}$ und $x_3 = \phi$ sowie als Stellgröße, wie erwähnt, die Spannung $u = v/N$, so ergibt sich mit $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ und Gl. (4.27) sowie $\dot{\phi} = u$ als eingangslineares Zustandsraummodell

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ \alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_3 |x_3| \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}(\mathbf{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}(\mathbf{x})} u.$$

Für die Parameter gilt $\alpha_1 = 2\bar{\Phi}_0/(\mu_0 A m)$ und $\alpha_2 = 1/(\mu_0 A m)$. Als Ausgangsgröße y des Magnetlagers ist die Auslenkung h , also

$$y = c(\mathbf{x}) = x_1,$$

zu betrachten.

Wir entwerfen nun einen Regler mittels exakter Linearisierung gemäß Satz 18. Dabei berücksichtigen wir, dass die Funktion $f(x) = x|x|$ differenzierbar ist und die Ableitung $f'(x) = 2|x|$ besitzt. Wir gehen in den folgenden Schritten vor:

Schritt 1: Die Lie-Derivierten $L_a^i c(\mathbf{x})$ lauten

$$\begin{aligned} i = 0 : \quad & L_a^0 c(\mathbf{x}) = c(\mathbf{x}) = x_1, \\ i = 1 : \quad & L_a c(\mathbf{x}) = \frac{\partial c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{a}(\mathbf{x}) = x_2, \\ i = 2 : \quad & L_a^2 c(\mathbf{x}) = \frac{\partial L_a c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_3 |x_3|, \\ i = 3 : \quad & L_a^3 c(\mathbf{x}) = \frac{\partial L_a^2 c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{a}(\mathbf{x}) = 0. \end{aligned}$$

Schritt 2: Mit den Ergebnissen aus Schritt 1 ermitteln wir die Terme

$$\begin{aligned} i = 0 : \quad & L_b c(\mathbf{x}) = \frac{\partial x_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}(\mathbf{x}) = 0, \\ i = 1 : \quad & L_b L_a c(\mathbf{x}) = \frac{\partial x_2}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}(\mathbf{x}) = 0, \\ i = 2 : \quad & L_b L_a^2 c(\mathbf{x}) = \frac{\partial (\alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_3 |x_3|)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \alpha_1 + 2\alpha_2 |x_3|. \end{aligned}$$

Also ist für $i = 2$ der Term $L_b L_a^i c(\mathbf{x})$ ungleich null und $\delta = 3 = n$.

Schritt 3: Es gilt

$$L_b L_a^2 c(\mathbf{x}) = \alpha_1 + 2\alpha_2 |x_3| \neq 0$$

für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, da $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ und $|x_3| \geq 0$ ist.

Schritt 4: Da die Differenzordnung hier $\delta = 3$ ist, hat die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Regelkreises ebenfalls die Ordnung drei, man erhält daher

$$G(s) = \frac{V}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}.$$

Man wählt drei reelle Pole $s_1 = s_2 = s_3 = -\lambda$ mit $\lambda > 0$ und erhält mit $V = \lambda^3$ die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\lambda^3}{s^3 + 3\lambda s^2 + 3\lambda^2 s + \lambda^3}.$$

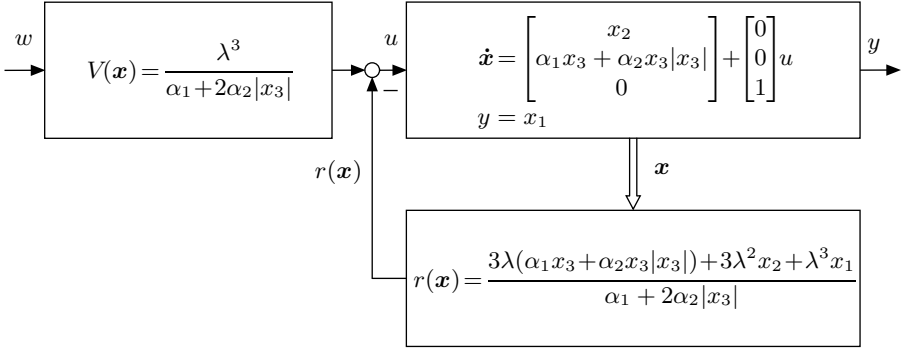


Bild 4.11: Regelung des aktiven Magnetlagers mittels exakter Linearisierung.

Schritt 5: Für den Regler gilt mit den Ergebnissen der Schritte 1, 2 und 4:

$$\begin{aligned} r(\mathbf{x}) &= \frac{L_{\mathbf{a}}^3 c(\mathbf{x}) + a_2 L_{\mathbf{a}}^2 c(\mathbf{x}) + a_1 L_{\mathbf{a}} c(\mathbf{x}) + a_0 c(\mathbf{x})}{L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{a}}^2 c(\mathbf{x})} \\ &= \frac{3\lambda(\alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_3 |x_3|) + 3\lambda^2 x_2 + \lambda^3 x_1}{\alpha_1 + 2\alpha_2 |x_3|}. \end{aligned}$$

Schritt 6: Für das Vorfilter erhält man

$$v(x) = \frac{V}{L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{a}}^2 c(\mathbf{x})} = \frac{\lambda^3}{\alpha_1 + 2\alpha_2 |x_3|}.$$

Der so ermittelte Regelkreis ist in Bild 4.11 dargestellt. Mittels des noch nicht spezifizierten dreifachen Pols bei λ kann die Dynamik des Regelkreises und insbesondere sein Stellgrößenverbrauch beeinflusst werden. So ist es möglich, den Stellgrößenverbrauch u innerhalb vorgeschriebener Grenzen, z. B. $-1 \leq u \leq 1$, zu halten [90, 127, 142].

4.2.4 Regelstrecken mit interner Dynamik

Im Weiteren wollen wir den Fall

$$\delta < n$$

betrachten, also den Fall, in dem der relative Grad δ gegenüber der Systemordnung n reduziert ist. Auch in diesem Fall kann mittels einer nichtlinearen Transformationsvorschrift, eines Diffeomorphismus $\mathbf{z} = \mathbf{t}(\mathbf{x})$, eine für den Reglerentwurf günstige Systemdarstellung gefunden werden.

Da $\delta < n$ gilt, können nur die ersten δ Komponenten $t_1, \dots, t_\delta$ in gleicher Form angesetzt werden wie im Fall $\delta = n$. Es gilt

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_\delta \\ z_{\delta+1} \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \mathbf{t}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} c(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_{\mathbf{a}}^{\delta-1}c(\mathbf{x}) \\ t_{\delta+1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ t_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

Die Funktionen $t_{\delta+1}, \dots, t_n$ können beliebig gewählt werden. Dabei ist allerdings die Einschränkung zu machen, dass $\mathbf{t}$ stetig differenzierbar sein muss und die Umkehrfunktion

$$\mathbf{x} = \mathbf{t}^{-1}(\mathbf{z})$$

existieren und ebenfalls stetig differenzierbar sein muss. Es sei angemerkt, dass die Umkehrfunktion $\mathbf{t}^{-1}$ gemäß dem Hauptsatz über implizite Funktionen [175] existiert, wenn die Jacobi-Matrix $\partial \mathbf{t}(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x}$ nicht singulär ist.

Transformiert man dann die ursprüngliche Systembeschreibung

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot u, \\ y &= c(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

mittels des Diffeomorphismus (4.28), so ergibt sich

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{\delta-1} \\ \dot{z}_\delta \\ \dot{z}_{\delta+1} \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} c(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_{\mathbf{a}}^{\delta-2}c(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{a}}^{\delta-1}c(\mathbf{x}) \\ t_{\delta+1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ t_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{a}}^2c(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_{\mathbf{a}}^{\delta-1}c(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{a}}^\delta c(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{b}}L_{\mathbf{a}}^{\delta-1}c(\mathbf{x}) \cdot u \\ \dot{t}_{\delta+1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \dot{t}_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

und somit

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{\delta-1} \\ \dot{z}_\delta \\ \dot{z}_{\delta+1} \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_\delta \\ L_{\mathbf{a}}^\delta c(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{b}}L_{\mathbf{a}}^{\delta-1}c(\mathbf{x}) \cdot u \\ \dot{t}_{\delta+1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \dot{t}_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

wobei weiterhin

$$y = z_1$$

gilt.

Mit

$$\mathbf{x} = \mathbf{t}^{-1}(\mathbf{z})$$

bestimmt man für $i = \delta + 1, \dots, n$ die Ableitungen

$$\begin{aligned} \dot{t}_i(\mathbf{x}) &= \frac{\partial t_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial t_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot u) \\ &= L_{\mathbf{a}} t_i(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{b}} t_i(\mathbf{x}) \cdot u \\ &= \hat{q}_i(\mathbf{x}, u) = \hat{q}_i(\mathbf{t}^{-1}(\mathbf{z}), u) = q_i(\mathbf{z}, u). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Hat man die Funktion t_i so gewählt, dass

$$L_{\mathbf{b}} t_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial t_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}(\mathbf{x}) = 0 \quad (4.31)$$

ist, dann vereinfacht sich Gl. (4.30). Denn in diesem Fall entfällt die Abhängigkeit von u , und es gilt

$$\dot{t}_i(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{a}} t_i(\mathbf{x}) = \hat{q}_i(\mathbf{x}) = q_i(\mathbf{z}). \quad (4.32)$$

Durch den Wegfall der Abhängigkeit von u vereinfacht sich dann die transformierte Systemdarstellung wesentlich.

Gleichung (4.31) ist eine partielle Differenzialgleichung, deren Lösung $t_i(\mathbf{x})$ in der Regel existiert, aber in vielen Fällen schwierig zu bestimmen ist. Im Weiteren wollen wir – aus dem genannten Grund der Vereinfachung – davon ausgehen, dass t_i die Gleichung (4.31) für alle $i = \delta + 1, \dots, n$ erfüllt und setzen die Funktionen $\dot{t}_i$ aus Gl. (4.32) in Gl. (4.29) ein. Wir erhalten dann die so genannte *Byrnes-Isidori-Normalform*

$$\left. \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_{\delta-1} \\ \dot{z}_\delta \\ \dot{z}_{\delta+1} \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_\delta \\ \varphi(\mathbf{z}, u) \\ q_{\delta+1}(\mathbf{z}) \\ \vdots \\ q_n(\mathbf{z}) \end{bmatrix}, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{externe Dynamik} \\ \text{interne Dynamik} \\ \text{Ausgangsgröße} \end{array} \quad (4.33)$$

$y = z_1$

als Systembeschreibung mit

$$\varphi(\mathbf{z}, u) = L_{\mathbf{a}}^\delta c(\mathbf{t}^{-1}(\mathbf{z})) + L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{a}}^{\delta-1} c(\mathbf{t}^{-1}(\mathbf{z})) \cdot u.$$

Die Systemdynamik lässt sich, wie in Gl. (4.33) dargestellt, in einen externen und einen internen Anteil aufspalten. Die externe Dynamik des Systems, die die Änderungen der Zustände $z_1, \dots, z_\delta$ beschreibt, kann mittels einer Transformation der Eingangsgröße u in die neue Eingangsgröße w , wie im Fall $\delta = n$, linearisiert werden. Anhand von Gl. (4.29) bzw. (4.33) ermitteln wir diese Transformation zu

$$u = -\frac{L_a^\delta c(\mathbf{x}) + \mathbf{k}^T \mathbf{z}}{L_b L_a^{\delta-1} c(\mathbf{x})} + \frac{V}{L_b L_a^{\delta-1} c(\mathbf{x})} \cdot w \quad (4.34)$$

mit

$$\mathbf{k}^T = [a_0 \quad \dots \quad a_{\delta-1} \quad 0 \quad \dots \quad 0].$$

Setzt man dies in Gl. (4.33) ein, so erhält man die Dynamikgleichungen des transformierten Systems zu

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{\delta-1} \\ \dot{z}_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{\delta-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{\delta-1} \\ z_\delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ V \end{bmatrix}}_{\text{externe Dynamik}} w, \quad (4.35)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{z}_{\delta+1} \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{\delta+1}(z) \\ \vdots \\ q_n(z) \end{bmatrix}}_{\text{interne Dynamik}}, \quad (4.36)$$

$$y = z_1.$$

Durch die Transformation (4.34) der Eingangsgröße ist die externe Dynamik von den Zustandsvariablen $z_{\delta+1}, \dots, z_n$ der internen Dynamik unabhängig. Insbesondere haben die Zustandsvariablen der internen Dynamik keinen Einfluss auf die Ausgangsgröße y . Das hat zur Folge, dass die interne Dynamik (4.36) nicht beobachtbar ist. Aus dieser Eigenschaft leitet sich auch die Bezeichnung *interne Dynamik* ab.

Auch hier interpretieren wir die Transformationsgleichung (4.34) als Regelgesetz, das im ersten Summanden einen Zustandsregler und im zweiten ein Vorfilter für die Führungsgröße w besitzt. Um Gl. (4.34) unabhängig vom künstlichen Zustandsvektor $\mathbf{z}$ zu machen, bilden wir

$$\mathbf{k}^T \mathbf{z} = a_{\delta-1} L_a^{\delta-1} c(\mathbf{x}) + \dots + a_1 L_a c(\mathbf{x}) + a_0 c(\mathbf{x}).$$

Offensichtlich kann die interne Dynamik nicht linearisiert werden. Glücklicherweise beeinflusst sie, wie schon festgestellt, die Ausgangsgröße $y = z_1$ und die geregelte externe Dynamik nicht. Bild 4.12 illustriert dies. Wie erwähnt, wird die interne Dynamik (4.36) durch das Regelgesetz (4.34) nicht beobachtbar. Man verursacht durch die Linearisierung des Regelkreises also seine Nichtbeobachtbarkeit.

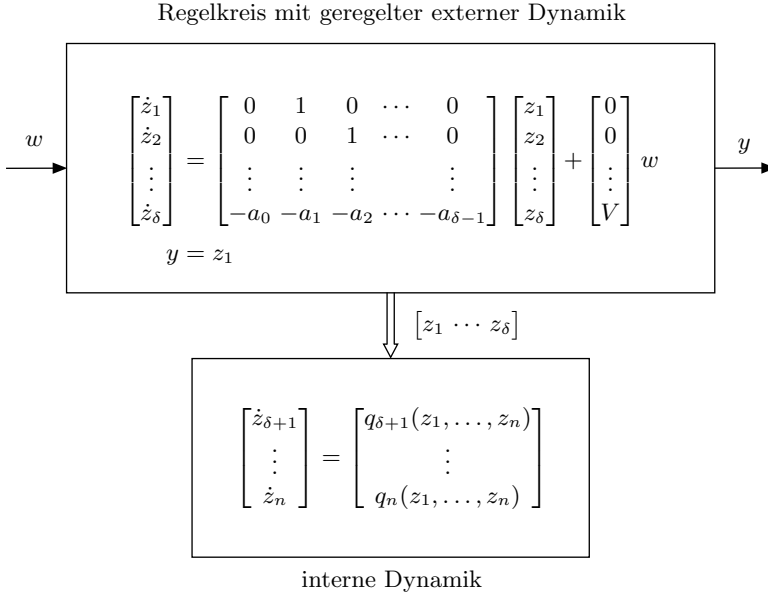


Bild 4.12: Strukturbild des Regelkreises mit geregelter externer Dynamik und nicht beobachtbarer interner Dynamik.

Die geregelte externe Dynamik, d. h. der Regelkreis (4.35) an sich, besitzt dabei dieselbe Struktur wie im Fall $\delta = n$, d. h., wie in Bild 4.9 gezeigt. Die Ausgangsgröße ist hier ähnlich wie im Fall $\delta = n$ durch eine lineare Differenzialgleichung

$$y^{(\delta)} + a_{\delta-1}y^{(\delta-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = V \cdot w$$

gegeben. Allerdings mit der Ordnung $\delta < n$.

An dieser Stelle wird eine weitere Bedeutung des relativen Grades δ für das Regelkreisverhalten deutlich. Er legt die Ordnung der linearen Differenzialgleichung des Regelkreises fest.

Für die Dynamik des linearen Regelkreises spielt die interne Dynamik zwar keine Rolle, für die Dynamik des Gesamtsystems allerdings schon. Es ist offensichtlich, dass eine instabile interne Dynamik auch zu einem instabilen Gesamtsystem führt. Man muss im Fall $\delta < n$ bezüglich der Stabilität des

Gesamtsystems also auch die interne Dynamik beachten. Auch sie muss stabil sein, damit es das Gesamtsystem ist.

Wir fassen wieder alle Ergebnisse in einem Satz zusammen.

Satz 19 (Exakte Linearisierung bei reduziertem relativen Grad).
Betrachtet wird der Regelkreis

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot u, \\ y &= c(\mathbf{x}), \\ u &= -r(\mathbf{x}) + v(\mathbf{x}) \cdot w\end{aligned}$$

mit dem relativen Grad $\delta < n$. Hat dann der Regler die Form

$$r(\mathbf{x}) = \frac{L_{\mathbf{a}}^{\delta} c(\mathbf{x}) + a_{\delta-1} L_{\mathbf{a}}^{\delta-1} c(\mathbf{x}) + \dots + a_1 L_{\mathbf{a}} c(\mathbf{x}) + a_0 c(\mathbf{x})}{L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{a}}^{\delta-1} c(\mathbf{x})}$$

und ist das Vorfilter durch

$$v(\mathbf{x}) = \frac{V}{L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{a}}^{\delta-1} c(\mathbf{x})}, \quad V \in \mathbb{R},$$

mit

$$L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{a}}^{\delta-1} c(\mathbf{x}) \neq 0$$

gegeben, so hat der Regelkreis das lineare Übertragungsverhalten

$$y^{(\delta)} + a_{\delta-1} y^{(\delta-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = V \cdot w.$$

Des Weiteren besitzt der Regelkreis die interne Dynamik

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{\delta+1} \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{\delta+1}(\mathbf{z}) \\ \vdots \\ q_n(\mathbf{z}) \end{bmatrix}$$

mit

$$\mathbf{z} = \mathbf{t}(\mathbf{x}).$$

Die interne Dynamik beeinflusst die Ausgangsgröße y nicht. Wenn sowohl die interne als auch die lineare Dynamik der geregelten Ausgangsgröße y stabil sind, dann und nur dann ist das Gesamtsystem stabil.

Satz 18 und Satz 19 sind sehr ähnlich und unterscheiden sich nur durch die Berücksichtigung der internen Dynamik in Satz 19. Es ist wichtig anzumerken, dass zwar der Regelkreis die nicht beobachtbare interne Dynamik besitzt, dass aber die Regelstrecke normalerweise beobachtbar ist. Daher kann auch der für die Regelung benötigte Zustandsvektor $\mathbf{x}$ mittels eines Beobachters geschätzt werden.

Im linearen Übertragungsverhalten des Regelkreises

$$G(s) = \frac{V}{s^\delta + a_{\delta-1}s^{\delta-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

sind die Koeffizienten $a_{\delta-1}, \dots, a_1, a_0$ und V für beide Fälle, $\delta = n$ wie auch $\delta < n$, frei wählbar. Die Dynamik des Regelkreises kann also auch hier mittels der Parameter $a_0, \dots, a_{\delta-1}$ und V beliebig vorgegeben werden. In der Praxis begrenzt allerdings wieder die Beschränkung der Stellgröße, $|u| \leq u_{\max}$, den dabei zur Verfügung stehenden Spielraum.

4.2.5 Entwurfsverfahren

Folgendes allgemeine Schema, das für $\delta = n$ wie auch für $\delta < n$ gilt, beschreibt wie der Entwurf von Regler und Vorfilter durchgeführt wird. Für den speziellen Fall des Magnetlagers in Abschnitt 4.2.3 haben wir ein ähnliches Schema schon genutzt.

Schritt 1: Man bestimmt die Terme

$$L_{\mathbf{a}}^i c(\mathbf{x}), \quad i = 0, \dots, n = \dim \mathbf{x}.$$

Schritt 2: Man bestimmt die Terme

$$L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{a}}^i c(\mathbf{x}) = \frac{\partial L_{\mathbf{a}}^i c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}(\mathbf{x}) \quad (4.37)$$

mit $i = 0, 1, 2, \dots$ in aufsteigender Reihenfolge. Der kleinste Index i , für den obiger Term (4.37) ungleich null ist, liefert die Differenzordnung

$$\delta = i + 1.$$

Der zugehörige Term in Gl. (4.37) lautet

$$L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{a}}^{\delta-1} c(\mathbf{x}) = \frac{\partial L_{\mathbf{a}}^{\delta-1} c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}(\mathbf{x}) \neq 0.$$

Schritt 3: Es muss für alle auftretenden $\mathbf{x}$

$$L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{a}}^{\delta-1} c(\mathbf{x}) \neq 0$$

gelten.

Schritt 4: Man wählt die lineare Dynamik des Regelkreises

$$G(s) = \frac{V}{s^\delta + a_{\delta-1}s^{\delta-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

durch geeignete Festlegung der frei wählbaren Parameter V und $a_{\delta-1}, \dots, a_1, a_0$.

Schritt 5: Man bestimmt mittels der Ergebnisse aus den Schritten 1, 2 und 4 den Regler

$$r(\mathbf{x}) = \frac{L_{\mathbf{a}}^{\delta} c(\mathbf{x}) + a_{\delta-1} L_{\mathbf{a}}^{\delta-1} c(\mathbf{x}) + \dots + a_0 c(\mathbf{x})}{L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{a}}^{\delta-1} c(\mathbf{x})}.$$

Schritt 6: Man bestimmt das Vorfilter

$$v(\mathbf{x}) = \frac{V}{L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{a}}^{\delta-1} c(\mathbf{x})}.$$

Schritt 7: Für $\delta < n$ ist zu testen, ob die interne Dynamik stabil ist.

Mit obigem Schema ermittelt man nur den Regler $r(\mathbf{x})$ und das Vorfilter $v(\mathbf{x})$, jedoch nicht die interne Dynamik. Um sie zu erhalten, muss man noch Gl. (4.29) bzw. Gl. (4.33) aufstellen.

4.2.6 Beispiel Mondlandefähre

Wir betrachten im Weiteren ein Beispiel mit interner Dynamik. Es handelt sich um eine Landefähre [131], wie sie z. B. das Landemodul Eagle der Apollo 11 Mission [9, 139], die Marssonde Phoenix oder die Altair-Mondlandefähre des Constellation-Programms der NASA darstellen. Auch das Landemodul einer möglichen bemannten Mars-Mission könnte ähnlich aufgebaut sein. Bild 4.13 zeigt die Mondlandefähre Eagle.

Ziel einer Antriebsregelung für eine Raumfähre obigen Typs ist vor allem die Sicherstellung einer weichen Landung. Zu diesem Zweck wird die senkrecht wirkende Schubkraft des Triebwerks benutzt, um die durch die Gravitation bedingte Annäherung an die Mondoberfläche abzubremesen.

Hierbei beschreibt

$$m\ddot{h} = -v\dot{m} - mg \quad (4.38)$$

die Kräftebilanz. Dabei ist m die Masse der Fähre einschließlich des Treibstoffvorrates, h die Flughöhe, v die Geschwindigkeit des aus dem Triebwerk austretenden Gases und $g = 1.62 \text{ m s}^{-2}$ ist die Fallbeschleunigung des Mondes. Der Term $v\dot{m}$ repräsentiert die Schubkraft des Antriebs, wobei $\dot{m} < 0$ gilt, da die Treibstoffmasse während der Landung abnimmt. Der Eagle stand in der Landephase eine Schubkraft von $4.56 \dots 45.04 \text{ kN}$ zur Verfügung. Die Austrittsgeschwindigkeit betrug $v = 3050 \text{ m s}^{-1}$.

Zu berücksichtigen ist des Weiteren, dass die Masse des Treibstoffes einen erheblichen Anteil der Gesamtmasse m ausmacht. So betrug das Gesamtgewicht der Eagle $m = 15.264 \text{ kg}$, wovon 8.165 kg Treibstoff allein für die Landephase vorhanden waren. Die Abnahme der Masse m durch den Verbrauch des Treibstoffvorrates ist also für die Bewegungsgleichung (4.38) der Fähre ein wesentlicher Gesichtspunkt.

Mit den Zustandsvariablen

$$x_1 = h, \quad x_2 = \dot{h} \quad \text{und} \quad x_3 = m$$

sowie der Stellgröße

$$u = -\dot{m}$$

erhalten wir mit Gl. (4.38) das Modell

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}(\mathbf{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ v/x_3 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}(\mathbf{x})} u, \quad (4.39)$$

$$y = c(\mathbf{x}) = x_1$$

für die Landephase der Fähre. Man beachte, dass $u = -\dot{m}$ immer positiv ist.



Bild 4.13: Mondlandefähre Eagle der Apollo 11 Mission.

Dem Entwurfsschema aus Abschnitt 4.2.5 folgend bestimmen wir

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{a}}^0 c(\mathbf{x}) &= c(\mathbf{x}) = x_1, \\ L_{\mathbf{a}}^1 c(\mathbf{x}) &= \frac{\partial c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{a}(\mathbf{x}) = x_2, \\ L_{\mathbf{a}}^2 c(\mathbf{x}) &= \frac{\partial L_{\mathbf{a}} c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{a}(\mathbf{x}) = -g. \end{aligned}$$

Des Weiteren berechnen wir

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{b}} c(\mathbf{x}) &= \frac{\partial c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}(\mathbf{x}) = 0, \\ L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{a}} c(\mathbf{x}) &= \frac{\partial L_{\mathbf{a}} c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \frac{v}{x_3}. \end{aligned}$$

Da $L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{a}} c(\mathbf{x}) \neq 0$ ist, besitzt das System den relativen Grad $\delta = 2$. Weil die Systemordnung $n = 3 > \delta$ ist, verfügt das System also über eine interne Dynamik. Die Masse $x_3 = m$ der Fähre ist immer positiv und somit gilt $L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{a}} c(\mathbf{x}) = v/x_3 > 0$. Wir können daher einen Regler mittels exakter Linearisierung entwerfen. Dabei müssen wir auch die Stabilität der internen Dynamik sicherstellen.

Wir schreiben für den Diffeomorphismus

$$\mathbf{z} = \mathbf{t}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} c(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{a}} c(\mathbf{x}) \\ t_3(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ t_3(\mathbf{x}) \end{bmatrix},$$

wobei die Funktion $t_3(\mathbf{x})$ noch zu wählen ist. Dies geschieht so, dass die partielle Differenzialgleichung (4.31), d. h. im vorliegenden Fall

$$L_{\mathbf{b}} t_3(\mathbf{x}) = \frac{\partial t_3(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}(\mathbf{x}) = 0,$$

erfüllt ist. Konkret gilt

$$L_{\mathbf{b}} t_3(\mathbf{x}) = \frac{\partial t_3(\mathbf{x})}{\partial x_2} \cdot \frac{v}{x_3} - \frac{\partial t_3(\mathbf{x})}{\partial x_3} = 0. \quad (4.40)$$

Diese partielle Differenzialgleichung besitzt die Lösung

$$t_3(\mathbf{x}) = x_3 \cdot e^{x_2/v},$$

was leicht durch Einsetzen in Gl. (4.40) zu überprüfen ist. Der Diffeomorphismus besitzt dann die Gestalt

$$\mathbf{z} = \mathbf{t}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 e^{x_2/v} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x} = \mathbf{t}^{-1}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 e^{-z_2/v} \end{bmatrix}. \quad (4.41)$$

Die Systembeschreibung mit externer und interner Dynamik errechnet sich mit Gl. (4.39) und Gl. (4.41) zu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_{\delta=2} \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{a}}^2c(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{b}}L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x})u \\ \dot{t}_3(x_2, x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -g + vu/x_3 \\ -v^{-1}gx_3e^{x_2/v} \end{bmatrix} \\ &= \left. \begin{bmatrix} z_2 \\ -g + vu/x_3 \\ -v^{-1}gz_3 \end{bmatrix} \right\} \begin{array}{l} \text{externe Dynamik} \\ \text{interne Dynamik} \end{array} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Wir entwerfen nun das Regelgesetz gemäß Satz 19 zu

$$\begin{aligned} u &= -\frac{L_{\mathbf{a}}^2c(\mathbf{x}) + a_1L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x}) + a_0c(\mathbf{x})}{L_{\mathbf{b}}L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x})} \\ &= -\frac{-g + a_1x_2 + a_0x_1}{v}x_3 = -\frac{-g + a_1z_2 + a_0z_1}{v}x_3. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Eine Führungsgröße w ist nicht erforderlich, da wir $x_1 = z_1$ und $x_2 = z_2$ in die Ruhelage $[x_{1R} \ x_{2R}]^T = \mathbf{0}$ ausregeln. Daher entfällt das Vorfilter $v(\mathbf{x})$.

Das gesamte geregelte System wird nun mit den Gl. (4.41), (4.42), (4.43) durch

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} z_2 \\ -a_1z_2 - a_0z_1 \\ -v^{-1}gz_3 \end{bmatrix}, \\ y &= z_1 \end{aligned} \quad (4.44)$$

beschrieben. Wie man in dieser Darstellung sieht, sind interne und externe Dynamik entkoppelt. Insbesondere bereitet die interne Dynamik keine Probleme, denn sie ist stabil. Man erkennt auch, dass die interne Dynamik nicht beobachtbar ist, da z_3 nicht auf $y = z_1$ wirkt.

Wir transformieren das Systemverhalten der Anschauung halber noch in die Originalkoordinaten $\mathbf{x}$ zurück und erhalten mit Gl. (4.44) und dem Diffeomorphismus (4.41) die Darstellung des Regelungssystems in der Form

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -a_1x_2 - a_0x_1 \\ v^{-1}x_3(a_1x_2 + a_0x_1 - g) \end{bmatrix}.$$

Auch in dieser Gleichung erkennt man, dass die interne Dynamik die geregelte externe nicht beeinflusst.

Als konkretes Zahlenbeispiel betrachten wir die Mondfähre Eagle und simulieren, siehe Bild 4.14, die Annäherungs- und Landephase auf dem Mond mittels des entworfenen Reglers (4.43). Wir wählen die Koeffizienten $a_0 = 0.02$ und $a_1 = 1.1$, so dass die Eigenwerte der geregelten externen Dynamik bei $\lambda_1 = -0.0185$ und $\lambda_2 = -1.0815$ liegen. So ergibt sich mit $g = 1.62 \text{ m s}^{-2}$ und $v = 3050 \text{ m s}^{-1}$ als Modell der geregelten Fähre

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -1.1x_2 - 0.02x_1 \\ x_3(3.61 \cdot 10^{-4}x_2 + 6.56 \cdot 10^{-6}x_1 - 5.31 \cdot 10^{-4}) \end{bmatrix}.$$

Wir starten die Annäherungs- und Landephase [9] in $x_1(0) = 2450 \text{ m}$ Höhe bei einer Sinkgeschwindigkeit von $x_2(0) = -45 \text{ m s}^{-1}$. Der Treibstoff-

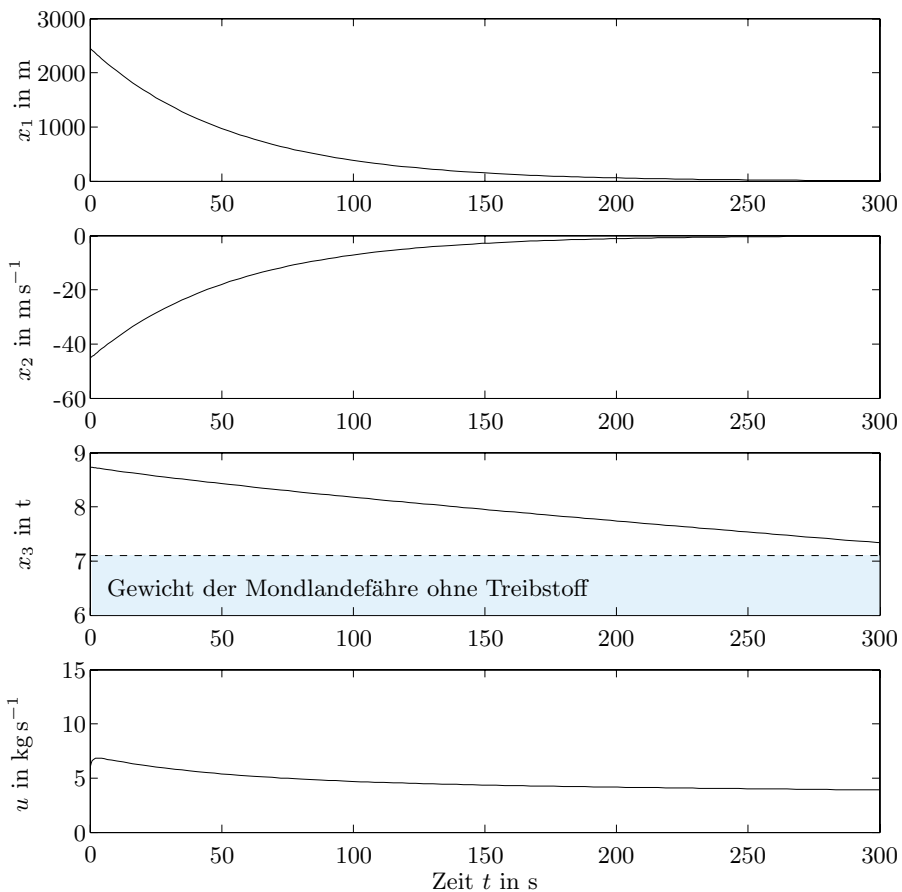


Bild 4.14: Höhe x_1 , Geschwindigkeit x_2 , Gesamtmasse x_3 und Stellgröße u .

vorrat beträgt zu diesem Zeitpunkt noch 1633 kg. Die Gesamtmasse ist somit $x_3(0) = 8732$ kg. Wir gehen davon aus, dass die Bewegung der Fähre in dieser Phase näherungsweise vertikal zur Mondoberfläche stattfindet. (In der Realität war dieser Kurs der Fähre in der letzten Phase der Landung aufgrund des um einen Teil des Mondes herumführenden Abstiegsorbits noch nicht völlig senkrecht.) Die Verläufe der Höhe x_1 , der Geschwindigkeit x_2 und der verbleibenden Gesamtmasse x_3 zeigt Bild 4.14.

4.3 Control-Ljapunov-Funktionen

4.3.1 Grundlagen

Die direkte Methode von Ljapunov wird neben der Stabilitätsanalyse auch für die Reglersynthese verwendet. Ein solches Reglersyntheseverfahren basiert zum Beispiel auf Control-Ljapunov-Funktionen $V(\mathbf{x})$, abgekürzt CLF, bei denen mittels des Stellgrößenvektors $\mathbf{u}$ einer nichtlinearen Regelstrecke

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

mit der einen Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ die Ableitung

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \cdot \text{grad } V(\mathbf{x})$$

einer Ljapunov-Funktion $V(\mathbf{x})$ so minimiert wird, dass

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$$

für alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ist. Man bestimmt also z. B. $\mathbf{u}$ so, dass das Infimum

$$\inf_{\mathbf{u}} \left\{ \dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \cdot \text{grad } V(\mathbf{x}) \right\},$$

d. h. die untere Grenze von $\dot{V}(\mathbf{x})$, für alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ kleiner als null ist. Die ermittelte Stellgröße $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ bildet dann ein Regelgesetz, das zu einem Regelkreis

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))$$

mit der global asymptotisch stabilen Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ führt.

Um die Stabilität des Regelkreises sicherzustellen, muss man nicht unbedingt dasjenige $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ als Regelgesetz wählen, das das Infimum von $\dot{V}(\mathbf{x})$ erzeugt. Vielmehr reicht ein $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, das zu $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ für alle $\mathbf{x}$ führt. Die Wahl des Reglers $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, der zum infimalen $\dot{V}$ führt, hat allerdings den Vorteil, dass $V(\mathbf{x})$ entlang der Trajektorien $\mathbf{x}(t)$ schnell abnimmt und somit auch die Ausregelung schnell ist. Aus der Tatsache, dass wir mittels einer Ljapunov-Funktion einen die Stabilität sichernden Regler $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ festlegen, leitet sich der Name *Control-Ljapunov-Funktion* ab.

Für zeitinvariante nichtlineare Systeme ist der Begriff der Control-Ljapunov-Funktion wie folgt definiert.

Definition 11 (Control-Ljapunov-Funktion). Gegeben sei das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m,$$

mit der Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ für $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Dann heißt eine stetig differenzierbare Funktion $V(\mathbf{x})$ *Control-Ljapunov-Funktion*, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (1) $V(\mathbf{0}) = 0$
- (2) $V(\mathbf{x}) > 0$ für alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- (3) $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ für $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$
- (4) Es gibt ein $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, so dass $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ für alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ gilt.

Wenn wir den Satz von Barbashin und Krasovskii, d. h. Satz 10, nutzen, können wir den Begriff der Control-Ljapunov-Funktion etwas weniger restriktiv definieren. Wir erhalten so die erweiterte

Definition 12 (Erweiterte Control-Ljapunov-Funktion). Gegeben sei das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m,$$

mit der Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ für $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Dann heißt eine stetig differenzierbare Funktion $V(\mathbf{x})$ *erweiterte Control-Ljapunov-Funktion*, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (1) $V(\mathbf{0}) = 0$
- (2) $V(\mathbf{x}) > 0$ für alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- (3) $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ für $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$
- (4) Es gibt ein $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, so dass $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ für alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ gilt.
- (5) Die Menge von Zuständen $\mathbf{x}$ des mit $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ geregelten Systems, für die $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ gilt, enthält keine Trajektorie $\mathbf{x}(t)$.

Definition 12 weicht die Forderung $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ aus Definition 11 auf. Nun können wir auch den Fall $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ für $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ nutzen, solange gemäß Bedingung (5) entlang keiner Trajektorie $\mathbf{x}(t)$ des geregelten Systems $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = 0$ gilt.

Aufgrund der beiden Stabilitätssätze von Ljapunov und von Barbashin und Krasovskii kann mittels obiger Definitionen folgender Satz direkt abgeleitet werden.

Satz 20 (Existenz eines Regelgesetzes). Gegeben sei das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m,$$

mit der Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ für $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Existiert dann eine Control-Ljapunov-Funktion oder eine erweiterte Control-Ljapunov-Funktion $V(\mathbf{x})$ für das System, so kann immer eine Regelung $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ gefunden werden, so dass die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ global asymptotisch stabil ist.

Ist Bedingung (3) der Definitionen 11 und 12 nicht erfüllt, so kann nur lokale asymptotische Stabilität sichergestellt werden.

Wie schon im Fall der Stabilitätsanalyse mit der direkten Methode, besteht auch bei obigem Satz zur Reglersynthese die Hauptschwierigkeit in der Auffindung einer geeigneten Ljapunov-Funktion $V(\mathbf{x})$. Ein generelles Verfahren zur Konstruktion einer solchen Ljapunov-Funktion existiert nicht. Man ist also in vielen Fällen auf seine Intuition oder auf das Ausprobieren verschiedener Kandidatinnen für Ljapunov-Funktionen $V(\mathbf{x})$ angewiesen.

4.3.2 Control-Ljapunov-Funktion für lineare Systeme

Als einfaches Beispiel betrachten wir zum Zwecke der Veranschaulichung die Regelstrecke

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad |u| \leq u_{\max},$$

mit einer stabilen Matrix $\mathbf{A}$ und

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x}$$

als Kandidatin für eine Control-Ljapunov-Funktion. Es ergibt sich

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \left(\mathbf{A}^T \mathbf{R} + \mathbf{R} \mathbf{A} \right) \mathbf{x} + 2\mathbf{b}^T \mathbf{R} \mathbf{x} \cdot u.$$

Offensichtlich ist $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x}$ eine Control-Ljapunov-Funktion, wenn die Matrix

$$\mathbf{A}^T \mathbf{R} + \mathbf{R} \mathbf{A}$$

negativ definit ist, denn mit

$$u = -u_{\max} \operatorname{sgn} \left(\mathbf{b}^T \mathbf{R} \mathbf{x} \right) \quad (4.45)$$

und

$$\operatorname{sgn} \left(\mathbf{b}^T \mathbf{R} \mathbf{x} \right) \mathbf{b}^T \mathbf{R} \mathbf{x} = |\mathbf{b}^T \mathbf{R} \mathbf{x}|$$

ist die Bedingung (4) der Definition 11

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \mathbf{f}^T(\mathbf{x}, u) \operatorname{grad} V(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{x}^T \left(\mathbf{A}^T \mathbf{R} + \mathbf{R} \mathbf{A} \right) \mathbf{x} - 2u_{\max} |\mathbf{b}^T \mathbf{R} \mathbf{x}| < 0 \end{aligned}$$

erfüllt.

Bei stabilen linearen Systemen ist eine Control-Ljapunov-Funktion also einfach zu ermitteln. Allerdings hat dieses Regelgesetz den Nachteil, dass zwischen $-u_{\max}$ und $+u_{\max}$ hin und her geschaltet wird. Nur wenige Stellglieder können die dafür nötige Stellgeschwindigkeit aufbringen. Des Weiteren können unerwünschte Gleitzustände entstehen.

4.3.3 Regler für eingangslinare Systeme

Nach diesem einfachen Beispiel betrachten wir einen allgemeineren Fall. Die nun betrachteten Regelstrecken sind eingangslinare Systeme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}. \quad (4.46)$$

Die Bedingung (4) der Definition 11 nimmt in diesem Fall die Form

$$\mathbf{a}^T(\mathbf{x}) \cdot V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T(\mathbf{x}) \cdot V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) < 0 \quad (4.47)$$

an. Dabei schreiben wir der Übersicht halber den Gradienten der Control-Ljapunov-Funktion $V(\mathbf{x})$ abgekürzt mit

$$V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \text{grad } V(\mathbf{x}).$$

Aus der Ungleichung (4.47) lässt sich direkt folgender Satz herleiten.

Satz 21 (Control-Ljapunov-Funktion für eingangslinare Systeme).

Für ein System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}$ ist $V(\mathbf{x})$ eine Control-Ljapunov-Funktion, wenn eine der Bedingungen

- (1) $\mathbf{B}^T(\mathbf{x})V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$,
- (2) $\mathbf{a}^T(\mathbf{x})V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) < 0$ für $\mathbf{x} \in \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \mid \mathbf{B}^T(\mathbf{x})V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \right\}$,
 $\mathbf{a}^T(\mathbf{x})V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = 0$ für $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

erfüllt ist.

Die Bedingung (2) in obigem Satz beinhaltet auch die Situation

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T(\mathbf{x})V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) &< 0 & \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}, \\ \mathbf{a}^T(\mathbf{x})V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) &= 0 & \text{für } \mathbf{x} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (4.48)$$

die den wichtigen Fall abdeckt, dass V bereits für das autonome System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x})$ eine Ljapunov-Funktion ist.

Für den Fall, dass eine Control-Ljapunov-Funktion $V(\mathbf{x})$ für die Regelstrecke $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}$ bekannt ist, hat E. D. Sontag ein Regelgesetz angegeben, das die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ des Systems global asymptotisch stabilisiert [171]. Es gilt

Satz 22 (Sontags Regelgesetz). Sei $V(\mathbf{x})$ eine Control-Ljapunov-Funktion für das System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}$ mit dem Regelgesetz

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{cases} -k_s(\mathbf{x})\mathbf{B}^T(\mathbf{x})V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) & \text{für } \mathbf{B}^T(\mathbf{x})V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}, \\ \mathbf{0} & \text{für } \mathbf{B}^T(\mathbf{x})V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \end{cases}$$

mit

$$k_s(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{a}^T(\mathbf{x})V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) + \sqrt{(\mathbf{a}^T(\mathbf{x})V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}))^2 + h^2(\mathbf{x})}}{h(\mathbf{x})},$$

$$h(\mathbf{x}) = V_{\mathbf{x}}^T(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{B}^T(\mathbf{x})V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}),$$

dann besitzt der Regelkreis die global asymptotisch stabile Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$.

Setzt man Sontags Regelgesetz in die Ungleichung (4.47) ein, so ist leicht festzustellen, dass diese erfüllt ist.

Wir betrachten nun noch zwei Regelgesetze für den Fall, dass die Control-Ljapunov-Funktion die Bedingung (4.48) und damit die Bedingung (2) des Satzes 21 erfüllt. In diesem Fall ist der autonome Teil $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x})$ des Systems (4.46) stabil. Wir stellen das System (4.46) in der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) \cdot u_i$$

dar, wobei die Vektoren $\mathbf{b}_i(\mathbf{x})$ die Spaltenvektoren der Matrix $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ sind. Wir wollen annehmen, dass es uns gelungen ist, eine entsprechende Control-Ljapunov-Funktion zu finden. Dann gilt

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \underbrace{\mathbf{a}^T(\mathbf{x})V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})}_{< 0} + \sum_{i=1}^m V_{\mathbf{x}}^T(\mathbf{x})\mathbf{b}_i(\mathbf{x}) \cdot u_i. \quad (4.49)$$

Es ist sinnvoll, damit die Ausregelung einer Trajektorie $\mathbf{x}(t)$ in die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ schnell geschieht, alle u_i in Gl. (4.49) so zu wählen, dass $\dot{V}(\mathbf{x})$ möglichst hohe negative Werte annimmt. Im Falle von Stellgrößenbeschränkungen $|u_i| \leq u_{i,\max}$ ist das der Fall, wenn man als Regelgesetz

$$u_i = -u_{i,\max} \operatorname{sgn}(V_{\mathbf{x}}^T(\mathbf{x})\mathbf{b}_i(\mathbf{x}))$$

für $i = 1, \dots, m$ wählt. Denn dann gilt

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T(\mathbf{x})V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m u_{i,\max} |V_{\mathbf{x}}^T(\mathbf{x})\mathbf{b}_i(\mathbf{x})| < 0.$$

Allerdings hat dieses schaltende Regelgesetz einen unstetigen Stellgrößenverlauf und möglicherweise unerwünschte Gleitzustände. Beides sind Nachteile, die auch schon im Fall des Regelgesetzes (4.45) auftraten.

Man vermeidet die obigen Nachteile, wenn man die Stellgröße mittels einer Sättigungsfunktion zu

$$u_i = -\operatorname{sat}(V_{\mathbf{x}}^T(\mathbf{x})\mathbf{b}_i(\mathbf{x})), \quad \operatorname{sat}(v) = \begin{cases} v_{\max}, & v > v_{\max}, \\ v, & |v| \leq v_{\max}, \\ -v_{\max}, & v < -v_{\max}, \end{cases}$$

wählt. Somit erhält man

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T(\mathbf{x})V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m V_{\mathbf{x}}^T(\mathbf{x})\mathbf{b}_i(\mathbf{x}) \operatorname{sat}(V_{\mathbf{x}}^T(\mathbf{x})\mathbf{b}_i(\mathbf{x})) < 0$$

und V nimmt auch in diesem Fall entlang einer jeden Trajektorie schnell ab.

4.3.4 Illustrationsbeispiel

Wir betrachten das Beispielsystem

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -x_1(1 - e^{-x_1^2 - x_2^2}) + x_2 e^{-x_1^2 - x_2^2} \\ -x_1 e^{-x_1^2 - x_2^2} - x_2(1 - e^{-x_1^2 - x_2^2}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}(\mathbf{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}(\mathbf{x})} \mathbf{u}$$

mit der Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$. Bild 4.15 zeigt die Trajektorienverläufe des Systems für $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Als Kandidatin für eine Control-Ljapunov-Funktion setzt man

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2)$$

an. Für den Gradienten erhält man

$$\mathbf{V}_x^T(\mathbf{x}) = [x_1 \ x_2]$$

und somit

$$\mathbf{B}^T \mathbf{V}_x(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Da $\mathbf{B}^T \mathbf{V}_x(\mathbf{x}) \neq 0$ für alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ gilt, ist V gemäß Satz 21 eine Control-Ljapunov-Funktion. Dies ist auch direkt aus

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -(x_1^2 + x_2^2) (1 - e^{-x_1^2 - x_2^2}) + x_1 u_1 + x_2 u_2$$

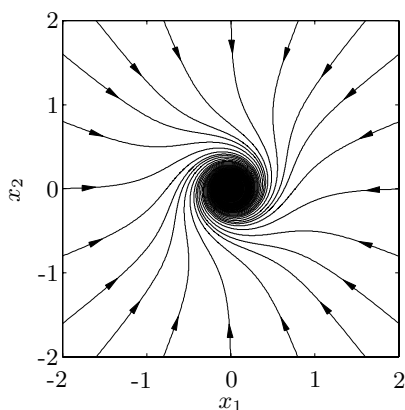


Bild 4.15: Trajektorien des unregulierten Systems.

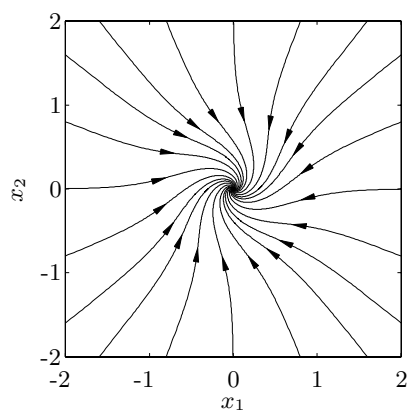


Bild 4.16: Trajektorien des geregelten Systems.

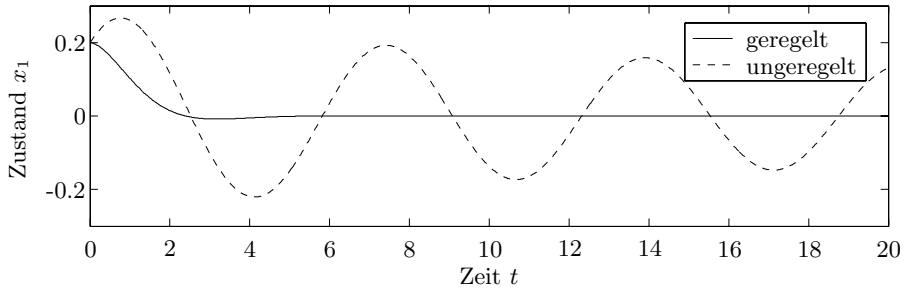


Bild 4.17: Verlauf der Zustandsgröße x_1 im geregelten und ungeregelten Fall.

erkennbar.

Es ergibt sich aus Satz 22

$$k_s(\mathbf{x}) = - \left(1 - e^{-x_1^2 - x_2^2} \right) + \sqrt{\left(1 - e^{-x_1^2 - x_2^2} \right)^2 + 1}$$

und Sontags Regelgesetz hat dann hier die Form

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \left(\left(1 - e^{-x_1^2 - x_2^2} \right) - \sqrt{\left(1 - e^{-x_1^2 - x_2^2} \right)^2 + 1} \right) \mathbf{x}.$$

Das Bild 4.16 zeigt die Trajektorien des geregelten Systems und Bild 4.17 zeigt beispielhaft den Verlauf von x_1 für das ungeregelte und das geregelte System bei einem Anfangswert von $\mathbf{x}(0) = [0.2 \ 0.2]^T$. Gegenüber dem stark schwingenden System besitzt der Regelkreis praktisch keine Schwingneigung mehr.

4.3.5 Beispiel Kraftwerk mit Netzeinspeisung

Wir betrachten ein Kraftwerk zur Erzeugung elektrischer Energie, das über eine lange Hochspannungsleitung mit dem Energieversorgungsnetz verbunden ist, und sein Verhalten nach einem Leitungskurzschluss [108, 133]. Das Energieversorgungsnetz wird dabei als starr angenommen, d. h., seine Frequenz ist konstant und die Stabilität des Netzes wird durch das betrachtete Kraftwerk nicht beeinflusst. Wasserkraftwerke in entlegenen Regionen werden über solche langen Hochspannungsleitungen an das Energieversorgungsnetz angeschlossen. Auch Braunkohlekraftwerke, die in der Nähe der Kohleförderung liegen, können so an das Netz angebunden sein, wie es Bild 4.18 illustriert.

Die Leitung kann dabei in Serie mit einem kapazitiven Widerstand X_C geschaltet werden [62, 120, 176]. Diese Schaltung wird vor allem als Ersatzmodell für die Kopplung von Netzen benutzt. Die Summe aus transientem induktiven Generatorwiderstand, induktivem Transformator- und Leitungswiderstand ist X_L . Und $\bar{E} = E e^{j\delta}$ ist die Generatorspannung und $\bar{V} = V e^{j0}$

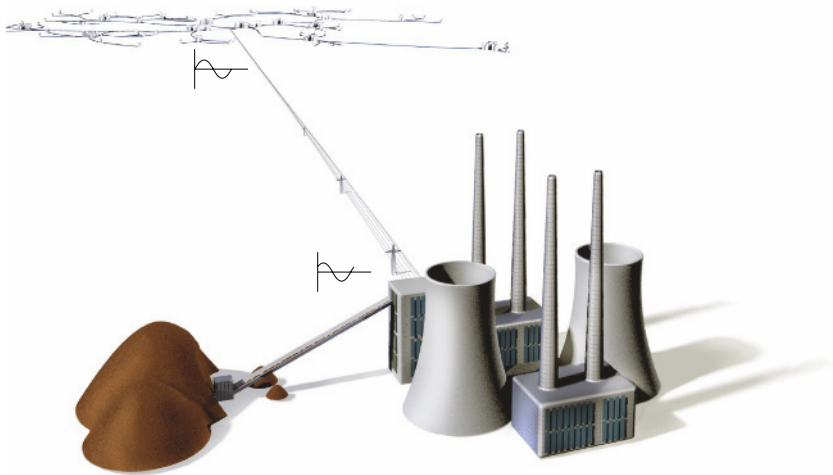


Bild 4.18: Kohlekraftwerk mit langer Verbindungsleitung zum starren Netz.

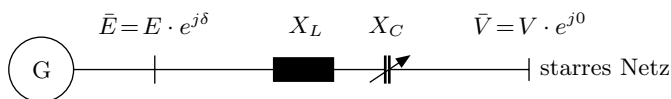


Bild 4.19: Generator mit Verbindungsleitung zum Energieversorgungsnetz.

die Spannung des starren Netzes. Bild 4.19 zeigt das Ersatzschaltbild des Systems. Der Winkel δ setzt sich aus dem Polradwinkel des Synchrongenerators und der Phasenverschiebung, die aus der Leitung resultiert, zusammen.

Die über die Leitung transportierte Wirkleistung ist

$$P = \frac{E \cdot V}{X_L - X_C} \sin \delta. \quad (4.50)$$

Nun wird auch die Bedeutung des zusätzlich in das System eingebrachten Kondensators deutlich. Er erhöht die über die Leitung transportierbare Leistung P , da er den Nenner $X_L - X_C$ in Gl. (4.50) verringert.

Die Kapazität hat eine weitere Funktion. Legt man sie veränderlich mit

$$X_C = X_{C_0} + \Delta X_C, \quad (4.51)$$

aus, so kann man sie benutzen, um Systemstörungen nach einem Leitungsfehler, z. B. einem Kurzschluss, möglichst schnell auszuregeln. Mit Gl. (4.51) erhält man für Gl. (4.50)

$$P = \frac{E \cdot V}{X_L - X_{C_0}} (1 + u) \sin \delta \quad (4.52)$$

mit

$$u = \frac{\Delta X_C}{X_L - X_{C_0} - \Delta X_C}.$$

Im stationären Betrieb gilt für die mechanische Winkelgeschwindigkeit ω_m des Polrades der Synchronmaschine mit der Polpaarzahl p und für die Frequenz ω_e der Polradspannung $E \sin(\omega_e t + \delta)$ die Beziehung

$$\omega_e = p\omega_m.$$

Treten zeitliche Änderungen des Winkels δ auf, z. B. aufgrund eines Leitungskurzschlusses, so ändert sich gezwungenermaßen die Frequenz der Polradspannung $E \sin(\omega_e t + \delta)$ und damit auch die mechanische Frequenz des Polrades gemäß

$$\omega_e + \dot{\delta} = p(\omega_m + \Delta\omega_m).$$

Hieraus resultiert für die Änderung der mechanischen Frequenz des Polrades

$$\Delta\omega_m = \frac{\dot{\delta}}{p}.$$

Wir betrachten nun die Leistungsbilanz des Systems. Die Turbinenleistung P_T , vermindert um die dämpfende Verlustleistung

$$D\Delta\omega_m = \frac{D}{p}\dot{\delta}$$

und vermindert um die den Rotor beschleunigende bzw. bremsende Leistung

$$J(\omega_m + \Delta\omega_m)(\Delta\omega_m)^\cdot \approx J\omega_m(\Delta\omega_m)^\cdot = \frac{J\omega_e}{p^2}\ddot{\delta},$$

ist gleich der vom Generator erzeugten und über die Leitung transportierten elektrischen Leistung P aus Gl. (4.52). Dabei ist D eine Dämpfungskonstante und J das Trägheitsmoment aller rotierenden Teile von Turbine und Generator. Somit gilt

$$P_T - D\Delta\omega_m - J\omega_m(\Delta\omega_m)^\cdot = P_E(1 + u) \sin \delta, \quad P_E = \frac{E \cdot V}{X_L - X_{C_0}},$$

für die Leistungsbilanz, woraus

$$P_T - \frac{D}{p}\dot{\delta} - \frac{J\omega_e}{p^2}\ddot{\delta} = P_E(1 + u) \sin \delta$$

bzw.

$$\ddot{\delta} = \frac{p^2}{J\omega_e} \left(P_T - \frac{D}{p} \dot{\delta} - P_E(1+u) \sin \delta \right) \quad (4.53)$$

folgt.

Der stationäre Betriebspunkt des Systems ergibt sich mit $\ddot{\delta} = 0$ und $\dot{\delta} = 0$ sowie $u = 0$ aus Gl. (4.53) zu

$$\delta_R = \arcsin \frac{P_T}{P_E}.$$

Der Winkel δ bewegt sich typischerweise in engen Grenzen um den Betriebspunkt δ_R herum. Nur bei größeren Störungen können auch größere Werte $\delta \in [-\pi, \pi]$ auftreten. Änderungen des Winkels δ sind unerwünscht, denn gemäß Gl. (4.52) schwankt dann die übertragene elektrische Leistung P . Des Weiteren kann bei großen Änderungen des Winkels δ der Synchrongenerator außer Tritt geraten, d. h., das Polrad läuft nicht mehr synchron mit dem Drehfeld des Stators.

Wir definieren als Zustandsvektor

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta - \delta_R \\ \dot{\delta} \end{bmatrix}$$

und des Weiteren

$$a_1 = \frac{p^2 P_T}{J\omega_e}, \quad a_2 = \frac{pD}{J\omega_e} \quad \text{und} \quad a_3 = \frac{p^2 P_E}{J\omega_e}.$$

So erhalten wir aus Gl. (4.53) das Modell des an ein starres Netz angekoppelten Kraftwerkes zu

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ a_1 - a_2 x_2 - a_3(1+u) \sin(x_1 + \delta_R) \end{bmatrix}. \quad (4.54)$$

Dabei ist u die Stellgröße des Systems. Das System (4.54) hat für $u = 0$ die Ruhelagen

$$\mathbf{x}_{R2i} = \begin{bmatrix} \pm 2i\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{R(2i+1)} = \begin{bmatrix} \pm(2i+1)\pi - 2\delta_R \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{für } i = 0, 1, 2, \dots$$

Da sich die Ruhelagen und die zugehörigen Trajektorienverläufe für Indizes $i > 0$ periodisch aufgrund der Sinusfunktion in Gl. (4.54) wiederholen, ist es ausreichend die Ruhelagen

$$\mathbf{x}_{R0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_{R1} = \begin{bmatrix} \pi - 2\delta_R \\ 0 \end{bmatrix}$$

zu betrachten. Mittels der indirekten Methode von Ljapunov, d. h. Satz 12, lässt sich anhand des linearisierten Modells des Systems (4.54) leicht nachweisen, dass die Ruhelage $\mathbf{x}_{R0}$ stabil und die Ruhelage $\mathbf{x}_{R1}$ instabil ist.

Ziel ist es, Störungen, die z. B. aufgrund von Leitungsfehlern entstehen, das bedeutet hier $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, schnell auszuregeln. D. h., man möchte Abweichungen von der Ruhelage $\mathbf{x}_{R0}$ schnell mittels einer Regelung eliminieren.

Zur Herleitung eines Regelgesetzes für das System (4.54) setzen wir die Control-Ljapunov-Funktion

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_2^2 - a_1x_1 + a_3(\cos \delta_R - \cos(\delta_R + x_1)) \quad (4.55)$$

an. Es gilt $V(\mathbf{0}) = 0$ und $V(\mathbf{x}) > 0$ in einer Umgebung der Ruhelage $\mathbf{x}_{R0} = \mathbf{0}$. Die Control-Ljapunov-Funktion erfüllt allerdings nicht für größere Werte $x_1 > 0$ die Bedingung $V(\mathbf{x}) > 0$. Dies ist auch nicht erforderlich, da große Werte von $x_1 = \delta - \delta_R$ nicht auftreten. Bild 4.20 illustriert exemplarisch den Verlauf der Funktion $V(\mathbf{x})$. Dabei beschränken wir uns auf den Fall $x_2 = 0$, denn nur für die von x_1 abhängige Komponente ist der Verlauf von $V(\mathbf{x})$ nicht direkt ersichtlich. Der Anteil $0.5x_2^2$ dagegen hat die Form einer Parabel.

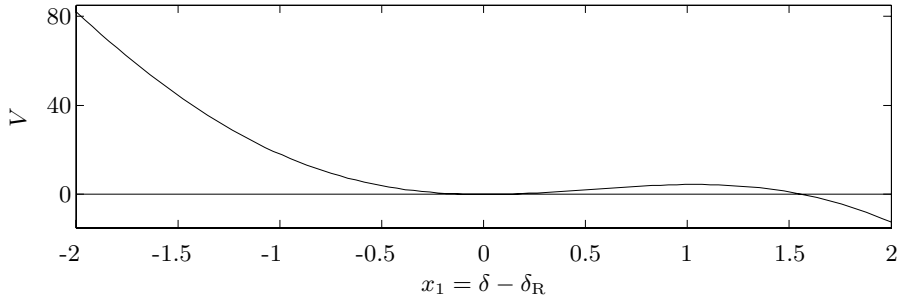


Bild 4.20: Verlauf der Control-Ljapunov-Funktion $V(\mathbf{x})$ für den Fall $x_2 = 0$ sowie $\delta_R = 60.41$, $a_1 = 43.196$ und $a_3 = 49.676$.

Wir erhalten mit Gl. (4.54) und Gl. (4.55) für die Ableitung der Control-Ljapunov-Funktion

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -a_2x_2^2 - u \cdot a_3x_2 \sin(\delta_R + x_1). \quad (4.56)$$

Wir wählen u in Gl. (4.56) zu

$$u = kx_2 \cdot \sin(\delta_R + x_1), \quad (4.57)$$

so dass

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -a_2x_2^2 - a_3kx_2^2 \sin^2(\delta_R + x_1) \leq 0$$

ist. Es gilt nur $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$, da $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ für die Menge $\{\mathbf{x} \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 = 0\}$ gilt. Da aber von den interessierenden Zuständen nur der Punkt $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ aus

dieser Menge die Differenzialgleichung (4.54) erfüllt, ist $\dot{V}(\mathbf{x})$ entlang keiner Trajektorie identisch null. Die Funktion $V(\mathbf{x})$ ist also gemäß Definition 12 eine erweiterte Control-Ljapunov-Funktion und damit ist die Stabilität der Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ gesichert. Der Wert $k > 0$ ist ein frei wählbarer Parameter.

In Originalkoordinaten hat das Regelgesetz (4.57) mit $x_1 = \delta - \delta_R$ und $x_2 = \dot{\delta}$ die Form

$$u = k\dot{\delta} \sin(\delta). \quad (4.58)$$

Wir betrachten ein Beispiel mit $P_T = 540$ MW, $P_E = 621$ MVA, $D = 4.6889$ MW s, $\omega_e = 2\pi \cdot 50$ s⁻¹, $p = 1$ und $J = 39792$ kg m² und erhalten so

$$a_1 = \frac{P_T}{J\omega_e} = 43.196,$$

$$a_2 = \frac{D}{J\omega_e} = 0.375,$$

$$a_3 = \frac{P_E}{J\omega_e} = 49.676.$$

Ein dreiphasiger Kurzschluss, der von $t = 4$ s bis $t = 4.06$ s andauert, wird als Testfall betrachtet. In diesem Fall ist die übertragene Leistung $P = P_E \sin \delta = 0$ für $t \in [4, 4.06]$. Als Reglerkonstante in Gl. (4.57) wählen wir den Wert $k = 0.075$.

Bild 4.21 zeigt die Verläufe des Winkels $\delta = x_1 + \delta_R$ und die Trajektorien $[\delta(t) \ \dot{\delta}(t)]^T$ für das mit Gl. (4.57) geregelte System (4.54) bzw. das mit Gl. (4.58) geregelte System (4.53) und das freie System. Man erkennt, dass sowohl das freie als auch das geregelte System nach Ende des Kurzschlusses wieder

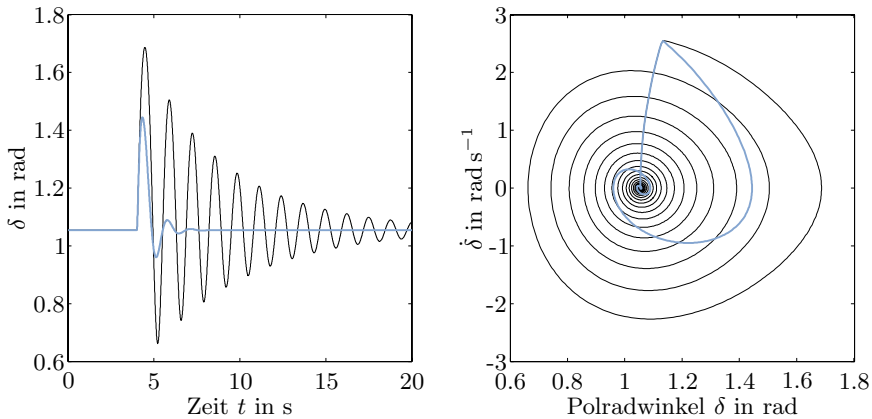


Bild 4.21: Verläufe des Polradwinkels $\delta = x_1 + \delta_R$ im Fall des unregulierten Systems (schwarz) und des geregelten Systems (blau) und die entsprechenden Trajektorienverläufe $[\delta(t) \ \dot{\delta}(t)]^T$.

in die Ruhelage, d. h. den Betriebspunkt $\delta_R = 1.05 = 60.41^\circ$, laufen. Durch die Regelung wird erreicht, dass im Gegensatz zum freien System der Winkel δ und somit die übertragene Leistung $P = P_E \sin(\delta)$ kaum noch schwingt.

4.4 Das Backstepping-Verfahren

4.4.1 Idee des Verfahrens

Das Backstepping-Verfahren ermöglicht es, Regler und Ljapunov-Funktionen für nichtlineare Regelstrecken vom Typ

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) + \mathbf{h}_1(\mathbf{x}_1) \cdot x_2, \\ \dot{x}_2 &= f_2(\mathbf{x}_1, x_2) + h_2(\mathbf{x}_1, x_2) \cdot x_3, \\ \dot{x}_3 &= f_3(\mathbf{x}_1, x_2, x_3) + h_3(\mathbf{x}_1, x_2, x_3) \cdot x_4, \\ &\vdots \\ \dot{x}_k &= f_k(\mathbf{x}_1, x_2, \dots, x_k) + h_k(\mathbf{x}_1, x_2, \dots, x_k) \cdot u\end{aligned}$$

zu bestimmen. Dabei gilt $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$, $x_2, \dots, x_k, u \in \mathbb{R}$. Die Gestalt obiger Systeme bezeichnet man als *strenge Rückkopplungsform* (engl. *strict feedback form*). Sie bilden eine Unterklasse der eingangslinearen Systeme. Bild 4.22 illustriert die Systemstruktur der Regelstrecke.

Da man eingangslineare Systeme mittels der exakten Linearisierung sehr gut regeln kann, stellt sich die Frage, warum ein weiteres Verfahren, wie das Backstepping-Verfahren oder auch die Regelung mittels Control-Ljapunov-Funktionen aus dem vorherigen Kapitel, nützlich sein könnte. Die Antwort ist zum einen darin zu sehen, dass die exakte Linearisierung auf ein genaues Modell der Regelstrecke angewiesen ist. Zum anderen linearisiert dieses Verfahren oft nützliche Nichtlinearitäten der Regelstrecke mit unnötig hohem

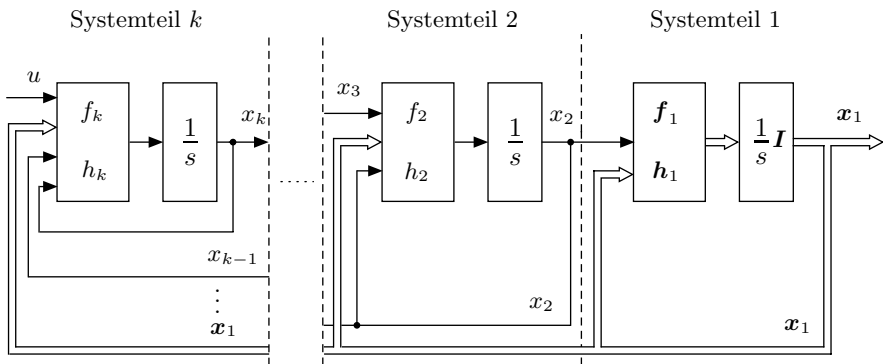


Bild 4.22: Struktur eines Systems in strenger Rückkopplungsform.

Stellaufwand. Das Backstepping-Verfahren wie auch die Control-Ljapunov-Funktionen bieten hier Möglichkeiten, geeignete Nichtlinearitäten der Strecke für die Regelung nutzbar zu machen und außerdem Robustheit der Regelung gegenüber Ungenauigkeiten des Regelstreckenmodells zu erzielen [106].

Zur Bestimmung des Reglers $u(\mathbf{x})$ und der Ljapunov-Funktion $V(\mathbf{x})$ betrachtet man vorerst nur den Spezialfall

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{h}(\mathbf{x}_1) \cdot x_2, \quad (4.59)$$

$$\dot{x}_2 = u. \quad (4.60)$$

Bild 4.23 zeigt die Struktur des Systems.

Die Zustandsgröße x_2 wird nun als Eingangsgröße des Systems (4.59) angesehen. Es sei ein stetig differenzierbares Regelgesetz

$$x_2 = \alpha(\mathbf{x}_1) \quad \text{mit} \quad \alpha(\mathbf{0}) = 0 \quad (4.61)$$

bekannt, so dass $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ eine asymptotisch stabile Ruhelage des mit α geregelten Systems ist. Hierbei ist x_2 natürlich nicht die reale Stellgröße. Der Zustand x_2 wird vielmehr zur Herleitung des eigentlichen Regelgesetzes $u(\mathbf{x}_1, x_2)$ vorübergehend als virtuelle Stellgröße angesehen.

Des Weiteren soll eine Ljapunov-Funktion $V(\mathbf{x}_1)$ für das mit dem virtuellen Regelgesetz (4.61) geregelte System (4.59) bekannt sein, d. h., es gilt

$$\dot{V}(\mathbf{x}_1) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_1} (\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{h}(\mathbf{x}_1) \cdot \alpha(\mathbf{x}_1)) < 0.$$

Um eine solche Ljapunov-Funktion $V(\mathbf{x}_1)$ und einen Regler $\alpha(\mathbf{x}_1)$ zu finden, kann man z. B. die Methodik der Control-Ljapunov-Funktionen aus dem vorherigen Abschnitt anwenden.

Das System (4.59), (4.60) wird nun in der Form

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{h}(\mathbf{x}_1) \cdot \alpha(\mathbf{x}_1) + \mathbf{h}(\mathbf{x}_1) (x_2 - \alpha(\mathbf{x}_1)), \quad (4.62)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (4.63)$$

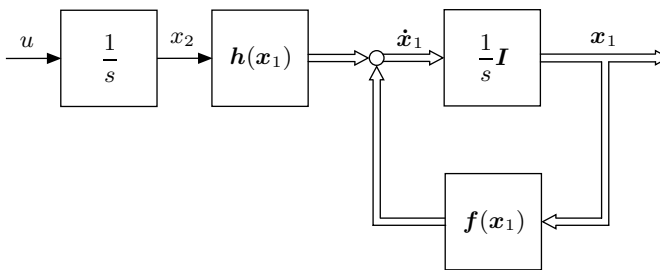


Bild 4.23: Struktur des Systems $\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{h}(\mathbf{x}_1)x_2$ mit $\dot{x}_2 = u$.

dargestellt. Das zugehörige Strukturbild zeigt Bild 4.24. Man beachte, dass die Systemdarstellungen (4.62) und (4.59) äquivalent sind.

Wir überführen mittels der Transformation

$$z = x_2 - \alpha(\mathbf{x}_1)$$

die Systemgleichungen (4.62) und (4.63) in die Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{h}(\mathbf{x}_1)\alpha(\mathbf{x}_1) + \mathbf{h}(\mathbf{x}_1) \cdot z, \\ \dot{z} &= u - \dot{\alpha}(\mathbf{x}_1),\end{aligned}\tag{4.64}$$

deren Struktur Bild 4.25 zeigt. Durch die Transformation wird das virtuelle Regelgesetz $\alpha(\mathbf{x}_1)$ vor den Integrator geschoben, was der Methode den Namen *Backstepping* bzw. *Integrator-Backstepping* gibt.

Wir setzen nun eine Ljapunov-Funktion für das Gesamtsystem (4.64) mittels der als bekannt vorausgesetzten Ljapunov-Funktion $V(\mathbf{x}_1)$ an und erhalten

$$V_{\text{ges}}(\mathbf{x}_1, x_2) = V(\mathbf{x}_1) + \frac{1}{2}z^2 = V(\mathbf{x}_1) + \frac{1}{2}(x_2 - \alpha(\mathbf{x}_1))^2.$$

Es gilt mit Gl. (4.64) für die Ableitung der Ljapunov-Funktion

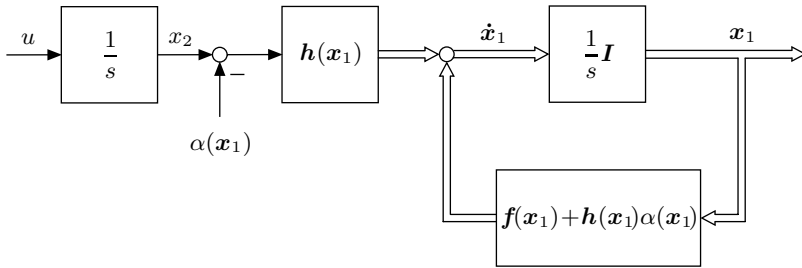


Bild 4.24: System mit virtuellem Regelgesetz $\alpha(\mathbf{x}_1)$.

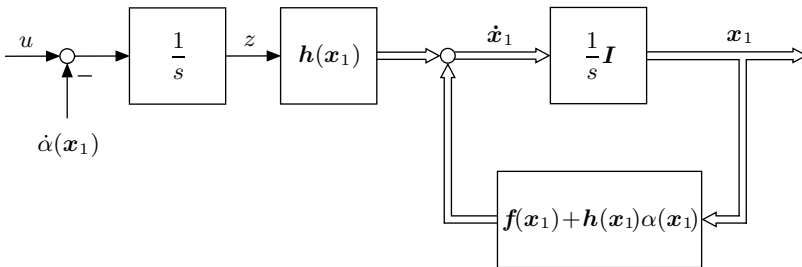


Bild 4.25: Systemstruktur aus Bild 4.24 mit verschobenem Integrator.

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{\text{ges}}(\mathbf{x}_1, x_2) &= \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_1} \dot{\mathbf{x}}_1 + z \dot{z} \\
&= \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_1} (\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{h}(\mathbf{x}_1) \alpha(\mathbf{x}_1))}_{< 0} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{h}(\mathbf{x}_1) z + z (u - \dot{\alpha}(\mathbf{x}_1)).
\end{aligned}$$

Man wählt

$$u - \dot{\alpha}(\mathbf{x}_1) = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{h}(\mathbf{x}_1) - k \cdot z, \quad k > 0, \quad (4.65)$$

so dass für alle $\mathbf{x}_1$

$$\dot{V}_{\text{ges}}(\mathbf{x}_1, x_2) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_1} (\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{h}(\mathbf{x}_1) \alpha(\mathbf{x}_1)) - k z^2 < 0$$

gilt. Des Weiteren folgt mit $\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{h}(\mathbf{x}_1) x_2$ aus Gl. (4.65)

$$\begin{aligned}
u &= \dot{\alpha}(\mathbf{x}_1) - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{h}(\mathbf{x}_1) - k \cdot z \\
&= \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}_1} \dot{\mathbf{x}}_1 - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{h}(\mathbf{x}_1) - k (x_2 - \alpha(\mathbf{x}_1)) \\
&= \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}_1} (\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{h}(\mathbf{x}_1) x_2) - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{h}(\mathbf{x}_1) - k (x_2 - \alpha(\mathbf{x}_1)).
\end{aligned}$$

Hierbei ist k ein frei wählbarer positiver Parameter, mit dem die Dynamik des Regelkreises beeinflusst werden kann. Große Werte k führen zu einer schnellen Abnahme von V_{ges} und somit meistens zu einer schnelleren Ausregelung.

Man hat also mit V_{ges} eine Ljapunov-Funktion, übrigens eine Control-Ljapunov-Funktion, und mit obigem u ein Regelgesetz für die Regelstrecke (4.59), (4.60) gefunden. Fasst man die obigen Ergebnisse zusammen, so ergibt sich

Satz 23 (Einfaches Backstepping). *Gegeben sei das System*

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{h}(\mathbf{x}_1) \cdot x_2, \quad (4.66)$$

$$\dot{x}_2 = u. \quad (4.67)$$

Es sei ein virtuelles Regelgesetz $x_2 = \alpha(\mathbf{x}_1)$ mit $\alpha(\mathbf{0}) = 0$ für das Teilsystem (4.66) bekannt, das zu einer asymptotisch stabilen Ruhelage $\mathbf{x}_{1R} = \mathbf{0}$ des Teilsystems (4.66) führt. Ferner sei für das geregelte Teilsystem (4.66) eine Ljapunov-Funktion $V(\mathbf{x}_1)$ bekannt. Dann stabilisiert das Regelgesetz

$$u = \frac{\partial \alpha(\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_1} (\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{h}(\mathbf{x}_1) x_2) - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{h}(\mathbf{x}_1) - k (x_2 - \alpha(\mathbf{x}_1))$$

mit beliebigem $k > 0$ die Ruhelage $[\mathbf{x}_{1R}^T \ x_{2R}]^T = \mathbf{0}$ asymptotisch und

$$V_{\text{ges}}(\mathbf{x}_1, x_2) = V(\mathbf{x}_1) + \frac{1}{2} (x_2 - \alpha(\mathbf{x}_1))^2$$

ist eine Ljapunov-Funktion für das geregelte System.

Gilt außerdem $V(\mathbf{x}_1) \rightarrow \infty$ für $|\mathbf{x}_1| \rightarrow \infty$ im obigen Satz, so ist die Ruhelage des Regelsystems global asymptotisch stabil.

Obiges Ergebnis ist in der bisherigen Form nur bedingt nützlich, da man das Regelgesetz $\alpha(\mathbf{x}_1)$ und die Ljapunov-Funktion $V(\mathbf{x}_1)$ für das Teilsystem (4.66) finden muss und das Teilsystem (4.66) bildet ja den wesentlichen Teil des bisher betrachteten Systems (4.66), (4.67). Das Ergebnis liefert jedoch, vorausgesetzt man kennt V und α , die Ausgangsbasis für ein wertvolles Ergebnis, das nun hergeleitet werden soll.

Wir betrachten das System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) + \mathbf{h}_1(\mathbf{x}_1) \cdot x_2, \\ \dot{x}_2 &= f_2(\mathbf{x}_1, x_2) + h_2(\mathbf{x}_1, x_2) \cdot u\end{aligned}\tag{4.68}$$

und transformieren es mittels

$$u = \frac{u_2 - f_2(\mathbf{x}_1, x_2)}{h_2(\mathbf{x}_1, x_2)}, \quad h_2(\mathbf{x}_1, x_2) \neq 0,$$

zu

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) + \mathbf{h}_1(\mathbf{x}_1) \cdot x_2, \\ \dot{x}_2 &= u_2.\end{aligned}$$

Für dieses transformierte System sind das Regelgesetz $u_2(\mathbf{x}_1, x_2)$ und die Ljapunov-Funktion $V(\mathbf{x}_1)$ gemäß Satz 23 bekannt. Daher lässt sich das Regelgesetz u auch für das System (4.68) durch folgenden Satz sofort angeben.

Satz 24 (Backstepping). *Gegeben sei das System*

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) + \mathbf{h}_1(\mathbf{x}_1) \cdot x_2, \\ \dot{x}_2 &= f_2(\mathbf{x}_1, x_2) + h_2(\mathbf{x}_1, x_2) \cdot u.\end{aligned}\tag{4.69}$$

Es sei ein virtuelles Regelgesetz $x_2 = \alpha(\mathbf{x}_1)$ mit $\alpha(\mathbf{0}) = 0$ für das Teilsystem (4.69) bekannt, das zu einer asymptotisch stabilen Ruhelage $\mathbf{x}_{1R} = \mathbf{0}$ des Teilsystems (4.69) führt. Ferner sei für das geregelte Teilsystem (4.69) eine Ljapunov-Funktion $V(\mathbf{x}_1)$ bekannt. Dann stabilisiert das Regelgesetz

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{h_2(\mathbf{x}_1, x_2)} \cdot \left(\frac{\partial \alpha(\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_1} (\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) + \mathbf{h}_1(\mathbf{x}_1) x_2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{h}_1(\mathbf{x}_1) - k(x_2 - \alpha(\mathbf{x}_1)) - f_2(\mathbf{x}_1, x_2) \right)\end{aligned}$$

mit beliebigem $k > 0$ die Ruhelage $[\mathbf{x}_{1R}^T \ x_{2R}]^T = \mathbf{0}$ asymptotisch und

$$V_{\text{ges}}(\mathbf{x}_1, x_2) = V(\mathbf{x}_1) + \frac{1}{2} (x_2 - \alpha(\mathbf{x}_1))^2$$

ist eine Ljapunov-Funktion für das geregelte System.

4.4.2 Rekursives Schema für den Reglerentwurf

Auf Basis obiger Sätze können nun für die zu Beginn des Kapitels betrachteten Systeme vom Typ

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) + \mathbf{h}_1(\mathbf{x}_1) \cdot x_2, \\ \dot{x}_2 &= f_2(\mathbf{x}_1, x_2) + h_2(\mathbf{x}_1, x_2) \cdot x_3, \\ &\vdots \\ \dot{x}_k &= f_k(\mathbf{x}_1, \dots, x_k) + h_k(\mathbf{x}_1, \dots, x_k) \cdot u\end{aligned}$$

Regelgesetze $u(\mathbf{x})$ und Ljapunov-Funktionen $V(\mathbf{x})$ bestimmt werden. Zu diesem Zweck gehen wir schrittweise mit dem folgenden rekursiven Entwurfsschema vor:

Schritt 1: Man entwirft mittels des Satzes 23 oder des Satzes 24 für das Teilsystem T_1

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) + \mathbf{h}_1(\mathbf{x}_1) \cdot x_2, \\ \dot{x}_2 &= f_2(\mathbf{x}_1, x_2) + h_2(\mathbf{x}_1, x_2) \cdot x_3\end{aligned}$$

einen virtuellen Regler

$$x_3(\mathbf{x}_1, x_2)$$

sowie eine Ljapunov-Funktion $V_1(\mathbf{x}_1, x_2)$.

Schritt 2: Man fasst das Teilsystem T_1 zu einer Differenzialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) + \mathbf{h}_1(\mathbf{x}_1) \cdot x_2 \\ f_2(\mathbf{x}_1, x_2) + h_2(\mathbf{x}_1, x_2) \cdot x_3 \end{bmatrix}$$

zusammen und ergänzt es dann zum Teilsystem T_2 :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) + \mathbf{h}_1(\mathbf{x}_1) \cdot x_2 \\ f_2(\mathbf{x}_1, x_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ h_2(\mathbf{x}_1, x_2) \end{bmatrix} \cdot x_3, \\ \dot{x}_3 &= f_3(\mathbf{x}_1, x_2, x_3) + h_3(\mathbf{x}_1, x_2, x_3) \cdot x_4.\end{aligned}$$

Dieses Teilsystem T_2 besteht aus den ersten drei Differenzialgleichungen des Gesamtsystems. Es weist aber die Darstellungsform aus Satz 24 auf. Da aus dem ersten Schritt ein virtueller Regler $x_3(\mathbf{x}_1, x_2)$ und eine Ljapunov-Funktion $V_1(\mathbf{x}_1, x_2)$ bekannt sind, kann mittels Satz 24 auch eine weitere virtuelle Regelung $x_4(\mathbf{x}_1, x_2, x_3)$ und eine Ljapunov-Funktion $V_2(\mathbf{x}_1, x_2, x_3)$ für T_2 hergeleitet werden.

Schritt 3: Man fasst das Teilsystem T_2 zu einer Differenzialgleichung

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_1 = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) + \mathbf{h}_1(\mathbf{x}_1) \cdot x_2 \\ f_2(\mathbf{x}_1, x_2) + h_2(\mathbf{x}_1, x_2) \cdot x_3 \\ f_3(\mathbf{x}_1, x_2, x_3) + h_3(\mathbf{x}_1, x_2, x_3) \cdot x_4 \end{bmatrix}$$

zusammen und ergänzt es dann zum Teilsystem T_3 :

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) + \mathbf{h}_1(\mathbf{x}_1)x_2 \\ f_2(\mathbf{x}_1, x_2) + h_2(\mathbf{x}_1, x_2)x_3 \\ f_3(\mathbf{x}_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_3(\mathbf{x}_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} x_4,$$

$$\dot{x}_4 = f_4(\mathbf{x}_1, x_2, x_3, x_4) + h_4(\mathbf{x}_1, x_2, x_3, x_4) \cdot x_5.$$

Teilsystem T_3 weist wieder die Darstellungsform aus Satz 24 auf. Des Weiteren sind aus Schritt 2 ein virtueller Regler $x_4(\mathbf{x}_1, x_2, x_3)$ und eine Ljapunov-Funktion $V_2(\mathbf{x}_1, x_2, x_3)$ bekannt, so dass mittels Satz 24 ein Regelgesetz $x_5(\mathbf{x}_1, x_2, x_3, x_4)$ und eine Ljapunov-Funktion $V_3(\mathbf{x}_1, x_2, x_3, x_4)$ für T_3 herleitbar sind.

Schritt 4: ...

⋮

Schritt $k - 1$: ...

Die Schritte 2 und 3 sind nahezu identisch und auch Schritt 4, der hier nicht aufgeführt ist, entspricht seinen Vorgängern, so dass man sich rekursiv vom Teilsystem T_1 zum Teilsystem T_2 , von diesem zu T_3 , dann zu T_4 usw. hangeln kann. Nachstehendes Schema illustriert dies:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) + \mathbf{h}_1(\mathbf{x}_1) \cdot x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(\mathbf{x}_1, x_2) + h_2(\mathbf{x}_1, x_2) \cdot x_3 \\ \dot{x}_3 = f_3(\mathbf{x}_1, \dots, x_3) + h_3(\mathbf{x}_1, \dots, x_3) \cdot x_4 \\ \dot{x}_4 = f_4(\mathbf{x}_1, \dots, x_4) + h_4(\mathbf{x}_1, \dots, x_4) \cdot x_5 \\ \vdots \\ \dot{x}_k = f_k(\mathbf{x}_1, \dots, x_k) + h_k(\mathbf{x}_1, \dots, x_k) \cdot u \end{array} \right\} \begin{array}{l} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \dots \\ T_{k-1} \end{array}$$

Nach $k - 1$ Schritten hat man schlussendlich das gesuchte Regelgesetz u gefunden und auch eine Ljapunov-Funktion des geregelten Gesamtsystems.

Die Vorteile des Backstepping-Verfahrens liegen in seiner systematischen Entwurfstechnik, die zu einem stabilen Regelkreis führt. Nachteile sind die eingeschränkte Klasse von behandelbaren Strecken sowie die nur bedingt vorhersagbare bzw. beeinflussbare Regelgüte. Erweiterungen und Ergänzendes zum Backstepping-Verfahren finden sich in [106, 107, 167, 203].

4.4.3 Illustrationsbeispiele

Wir betrachten in einem ersten Beispiel die Regelstrecke

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - x_1 + x_2, \quad (4.70)$$

$$\dot{x}_2 = u. \quad (4.71)$$

Für den Entwurf einer Regelung $u(x_1, x_2)$ und einer Ljapunov-Funktion $V_{\text{ges}}(x_1, x_2)$ wird Satz 23 genutzt. Zuerst wird eine Regelung $x_2 = \alpha(x_1)$ für das Teilsystem (4.70) entworfen:

$$x_2 = \alpha(x_1) = -x_1^2 - x_1.$$

Offensichtlich stabilisiert dieser Regler das Teilsystem (4.70), denn setzt man ihn in Gl. (4.70) ein, so gilt

$$\dot{x}_1 = -2x_1.$$

Des Weiteren ist

$$V(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2$$

eine Ljapunov-Funktion des virtuellen Regelkreises, die die globale asymptotische Stabilität des Kreises nachweist. Denn es gilt

$$\dot{V}(x_1) = x_1 \dot{x}_1 = -2x_1^2 < 0$$

für alle $x_1 \neq 0$.

Aus Satz 23 folgt dann unmittelbar das Regelgesetz für das Gesamtsystem (4.70), (4.71) zu

$$u = \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} (x_1^2 - x_1 + x_2) - \frac{\partial V}{\partial x_1} - k(x_2 - \alpha(x_1)),$$

wobei $k > 0$ gilt. Mit

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} = \frac{\partial(-x_1^2 - x_1)}{\partial x_1} = -(2x_1 + 1)$$

und

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = x_1$$

erhält man mit $k = 1$ das Regelgesetz

$$\begin{aligned} u &= -(2x_1 + 1)(x_1^2 - x_1 + x_2) - 2x_1 - x_1^2 - x_2 \\ &= -x_1 - 2x_1^3 - 2x_2 - 2x_1x_2. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Als Ljapunov-Funktion ergibt sich für das Gesamtsystem (4.70), (4.71), (4.72)

$$\begin{aligned}
 V_{\text{ges}}(x_1, x_2) &= V(x_1) + \frac{1}{2} (x_2 - \alpha(x_1))^2 \\
 &= \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} (x_1 + x_1^2 + x_2)^2.
 \end{aligned}$$

Bild 4.26 zeigt die Trajektorien des geregelten Systems und die Form der Ljapunov-Funktion V_{ges} .

Im zweiten Beispiel geht man von der Regelstrecke des ersten Beispiels aus und erweitert sie um einen Integrierer zu

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - x_1 + x_2, \quad (4.73)$$

$$\dot{x}_2 = x_3, \quad (4.74)$$

$$\dot{x}_3 = u. \quad (4.75)$$

Für den Entwurf einer Regelung $u(x_1, x_2, x_3)$ kann erneut Satz 23 verwendet werden. Zum Zweck des Reglerentwurfes teilt man das System (4.73), (4.74), (4.75) in zwei Systeme auf. Und zwar in das Teilsystem T_1 , bestehend aus den Gleichungen (4.73) und (4.74), und das Gesamtsystem T_2 , bestehend aus Gl. (4.73), (4.74), (4.75):

$$\left. \begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} x_1^2 - x_1 + x_2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(x_1, x_2)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}(x_1, x_2)} \cdot x_3, \\
 \dot{x}_3 &= u.
 \end{aligned} \right\} T_1 \left. \vphantom{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}} \right\} T_2$$

Man kennt aus Gl. (4.72) des ersten Beispiels für das Teilsystem T_1 schon einen Regler

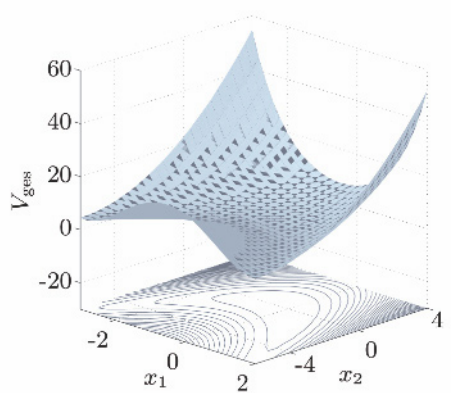
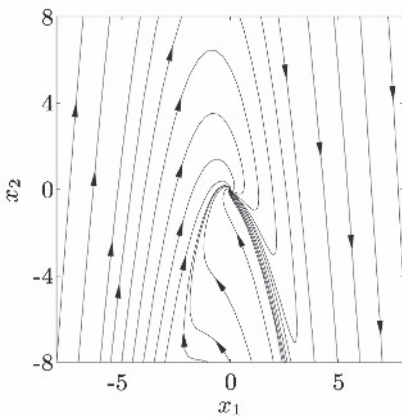


Bild 4.26: Trajektorien des geregelten Systems und Ljapunov-Funktion V_{ges} aus dem ersten Beispiel.

$$x_3 = \alpha(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_1^3 - 2x_2 - 2x_1x_2$$

und auch eine Ljapunov-Funktion

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_1^2 + x_2)^2.$$

Daher folgt wieder aus Satz 23 unmittelbar das Regelgesetz

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \alpha(x_1, x_2)}{\partial [x_1 \ x_2]^T} (\mathbf{f}(x_1, x_2) + \mathbf{h}(x_1, x_2) \cdot x_3) \\ &\quad - \frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial [x_1 \ x_2]^T} \cdot \mathbf{h}(x_1, x_2) - k(x_3 - \alpha(x_1, x_2)) \\ &= \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} (x_1^2 - x_1 + x_2) + \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} x_3 - \frac{\partial V}{\partial x_2} - k(x_3 - \alpha(x_1, x_2)) \end{aligned}$$

für das Gesamtsystem T_2 mit den Systemgleichungen (4.73), (4.74), (4.75). Mit $k = 1$ und

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha(x_1, x_2)}{\partial x_1} &= -6x_1^2 - 2x_2 - 1, \\ \frac{\partial \alpha(x_1, x_2)}{\partial x_2} &= -2x_1 - 2, \\ \frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial x_2} &= x_2 + x_1 + x_1^2 \end{aligned}$$

ergibt sich

$$u = -x_1 - 2x_1^2 + 4x_1^3 - 6x_1^4 - 4x_2 - 8x_1^2x_2 - 2x_2^2 - 3x_3 - 2x_1x_3.$$

Als Ljapunov-Funktion des Gesamtsystems erhält man

$$\begin{aligned} V_{\text{ges}}(x_1, x_2, x_3) &= V(x_1, x_2) + \frac{1}{2}(x_3 - \alpha(x_1, x_2))^2 \\ &= \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_1^2 + x_2)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(x_3 + x_1 + 2x_1^3 + 2x_2 + 2x_1x_2)^2. \end{aligned}$$

Bild 4.27 zeigt die Verläufe der Zustandsgrößen und der Stellgröße für den Anfangsvektor

$$\mathbf{x}_0 = [1 \ 1.5 \ 1]^T.$$

Zum einen sieht man den integrierenden Charakter der Regelstrecke. Ist x_3 noch konstant, so steigt x_2 bereits linear und x_1 stärker als quadratisch an. Das System ist also instabil. Wie aus der Simulation erkennbar und wie aufgrund des Entwurfes auch erwartet, stabilisiert die Regelung das System. Dabei wird eine gute Regelgüte erzielt.

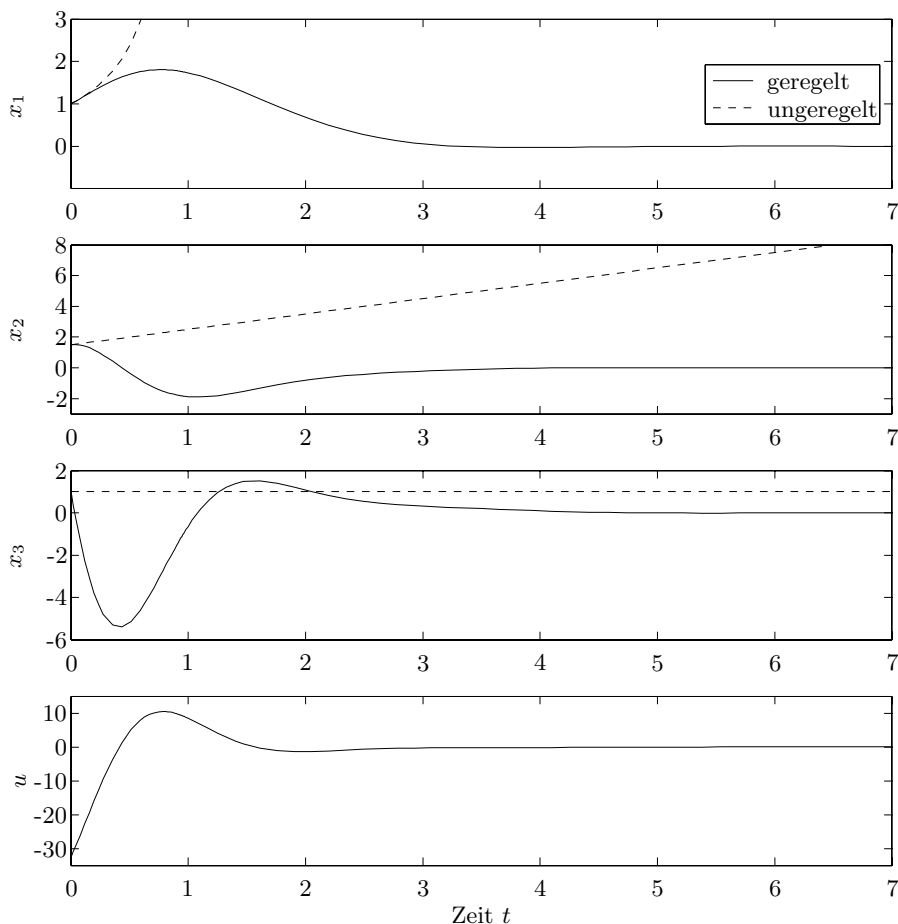


Bild 4.27: Verläufe der Zustandsgrößen x_1 , x_2 und x_3 sowie der Stellgröße u aus dem zweiten Beispiel.

4.4.4 Beispiel Fluidsystem mit chaotischem Verhalten

Wir betrachten ein experimentelles Fluidsystem [32, 169, 193], das aus einem wassergefüllten torusförmigen Rohr besteht. Dieser Torus wird in seiner unteren Hälfte über einen Heizdraht elektrisch erwärmt. Der Heizdraht ist dabei in engen Wicklungen um den Torus gelegt und mit isolierendem Material so umgeben, dass die untere Torushälfte überall gleichmäßig erwärmt wird. Die obere Torushälfte ist ringförmig mit einem Kühlmantel umgeben, durch den Kühlwasser fließt. Die Temperatur der Toruswand wird so über die gesamte obere Hälfte auf einer konstanten Temperatur gehalten. Bild 4.28 zeigt die Anordnung. Der Torus hat einen Radius von $r_1 = 38$ cm und das Torusrohr einen von $r_2 = 1.5$ cm.

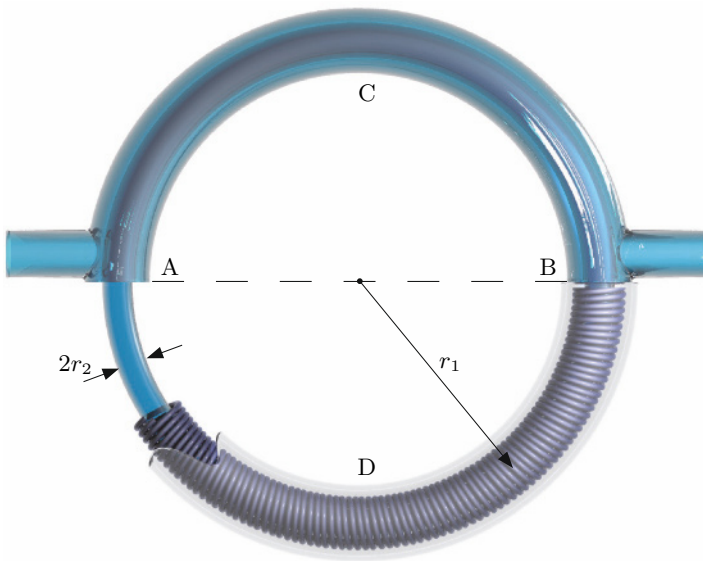


Bild 4.28: Fluidsystem mit chaotischem Verhalten. Im inneren torusförmigen Rohr befindet sich Wasser. Die obere Hälfte des Torus wird gekühlt, die untere erhitzt.

An den Stellen A, B, C und D sind jeweils Sensoren angebracht, mit denen die Temperatur des im Torus eingeschlossenen Wassers an diesen Stellen gemessen wird. Bei einer niedrigen Heizleistung, die kleiner als 190 W ist, bildet sich ein stetiger Fluss des Wassers innerhalb des Torus aus. Abhängig von den Anfangswerten fließt das Wasser im Uhrzeigersinn oder andersherum. Erhöht man nun die Heizleistung auf z.B. 600 W, so löst sich dieser stetige Wasserfluss innerhalb des Torus auf. Nun wechselt die Strömung beständig ihre Richtung. Mal fließt das Wasser im Uhrzeigersinn, mal andersherum. Dabei sind die Richtungswechsel der Strömung nicht vorhersehbar, sondern chaotisch.

Dieses chaotische Verhalten lässt sich wie folgt plausibilisieren. Verringert die Strömung aufgrund einer kleinen Unregelmäßigkeit ihre Geschwindigkeit, so bleibt das Wasser länger als vorher im Heiz- bzw. Kühlbereich des Torus. Dadurch steigt die Temperaturdifferenz zwischen dem kalten Wasser in der oberen und dem heißen Wasser in der unteren Torushälfte. Folglich steigt aufgrund der erhöhten Temperaturdifferenz die Strömungsgeschwindigkeit. Dies führt zu einer schnelleren Vermischung des heißen Wassers aus der unteren Torushälfte mit dem kalten Wasser aus der oberen. So sinkt die Temperaturdifferenz zwischen kaltem und heißem Wasser wieder, so dass die Strömungsgeschwindigkeit wieder abnimmt und sich in manchen Fällen auch umkehrt.

Obiges Verhalten führt zu Oszillationen und schließlich zu besagtem chaotischen Verhalten. Dieses kann durch die Lorenz-Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= p(z_2 - z_1), \\ \dot{z}_2 &= -z_1 z_3 - z_2, \\ \dot{z}_3 &= z_1 z_2 - z_3 - R\end{aligned}\tag{4.76}$$

beschrieben werden. Dabei ist z_1 ein Maß für die mittlere Strömungsgeschwindigkeit, z_2 ein Maß für die Temperaturdifferenz $T_B - T_A$ zwischen den Punkten A und B und z_3 eines für die Temperaturdifferenz $T_C - T_D$. Ferner ist $p > 0$ die Prandtl-Zahl^[1] und R ist die Rayleigh-Zahl^[2].

Die Rayleigh-Zahl R ist proportional zur Heizleistung, so dass wir über

$$R = R_0 + u$$

einen Stelleingriff auf das System besitzen. Der Parameter R_0 ist dabei proportional zu einer konstanten und u zu einer überlagerten, variablen Heizleistung.

Für $u = 0$ besitzt das System die Ruhelagen

$$\mathbf{z}_{R1} = \begin{bmatrix} \sqrt{R_0 - 1} \\ \sqrt{R_0 - 1} \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_{R2} = \begin{bmatrix} -\sqrt{R_0 - 1} \\ -\sqrt{R_0 - 1} \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_{R3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R_0 \end{bmatrix}.$$

Wir wollen das System (4.76) nun so regeln, dass in $\mathbf{z}_{R1}$ eine stabile Ruhelage vorliegt. Zu diesem Zweck transformieren wir in einem ersten Schritt die Koordinaten des Systems so, dass die Ruhelage $\mathbf{z}_{R1}$ nach null verschoben ist. Dies geschieht mittels der Koordinatentransformation $\mathbf{x} = \mathbf{z} - \mathbf{z}_{R1}$, d. h. mittels

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 - \sqrt{R_0 - 1} \\ z_2 - \sqrt{R_0 - 1} \\ z_3 + 1 \end{bmatrix}.$$

Das so transformierte System besitzt die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ und mit $\beta = \sqrt{R_0 - 1}$ die Gestalt

$$\dot{x}_1 = p(x_2 - x_1),\tag{4.77}$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 - (x_1 + \beta)x_3,\tag{4.78}$$

$$\dot{x}_3 = x_1 x_2 + \beta(x_1 + x_2) - x_3 - u.\tag{4.79}$$

^[1] Die Prandtl-Zahl $p = \nu/a$ ist eine konstante dimensionslose Kennzahl von Fluiden und entspricht dem Quotienten von kinematischer Viskosität ν und Temperaturleitfähigkeit a .

^[2] Die temperaturabhängige dimensionslose Rayleigh-Zahl ist ein Indikator für die Art der Wärmeübertragung in einem Fluid. Unterhalb einer kritischen Rayleigh-Zahl erfolgt die Wärmeübertragung im Fluid vorrangig durch Wärmeleitung, oberhalb durch Konvektion. Die Rayleigh-Zahl kennzeichnet dabei die Stabilität thermischer Fluidschichtungen.

Das System liegt in strenger Rückkopplungsform vor und wir können deshalb direkt die Entwurfssätze des Backstepping anwenden.

Wir beginnen mit der Wahl eines virtuellen Regelgesetzes

$$x_2 = \alpha_1(x_1) = 0,$$

welche das Teilsystem (4.77) stabilisiert. Als Ljapunov-Funktion wählen wir

$$V_1(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2.$$

Es gilt mit $x_2 = \alpha_1(x_1) = 0$ und Gl. (4.77)

$$\dot{V}_1(x_1) = -px_1^2 < 0.$$

Wir wenden nun Satz 24 auf das Teilsystem (4.77), (4.78), d. h.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \underbrace{-px_1}_{f_1(x_1)} + \underbrace{p}_{h_1(x_1)} \cdot x_2, \\ \dot{x}_2 &= \underbrace{x_1 - x_2}_{f_2(x_1, x_2)} \underbrace{-(x_1 + \beta)}_{h_2(x_1, x_2)} x_3,\end{aligned}$$

an und erhalten als virtuelles Regelgesetz

$$x_3 = \alpha_2(x_1, x_2) = -\frac{1}{x_1 + \beta}(-px_1 - k_1x_2 - x_1 + x_2).$$

Wir wählen $k_1 = 1$ und erhalten so

$$x_3 = \alpha_2(x_1, x_2) = \frac{(1+p)x_1}{x_1 + \beta}$$

und als Ljapunov-Funktion

$$V_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

Im nächsten Schritt wird Satz 24 erneut angewendet, wobei jetzt das Gesamtsystem (4.77), (4.78), (4.79) in unserem Fokus ist. Mit den in Satz 24 verwendeten Bezeichnungen gilt für die Systembeschreibung

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -px_1 + px_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_1(x_1, x_2)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -(x_1 + \beta) \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}_1(x_1, x_2)} x_3, \\ \dot{x}_3 &= \underbrace{x_1x_2 + \beta(x_1 + x_2) - x_3}_{f_2(x_1, x_2, x_3)} \underbrace{-1}_{h_2(x_1, x_2, x_3)} \cdot u.\end{aligned}$$

Somit erhält man für das Regelgesetz mit

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial [x_1 \ x_2]^T} = \begin{bmatrix} \frac{(1+p)\beta}{(x_1 + \beta)^2} & 0 \end{bmatrix}$$

und

$$\frac{\partial V_2}{\partial [x_1 \ x_2]^T} = [x_1 \ x_2]$$

die Gleichung

$$u = -x_3 + k_2 x_3 - k_2 \frac{(1+p)x_1}{x_1 + \beta} + \beta x_1 - \frac{p(1+p)\beta(x_2 - x_1)}{(x_1 + \beta)^2}.$$

Mit $k_2 = 1$ gilt schließlich für das Regelgesetz

$$u = \beta x_1 - \frac{(1+p)x_1}{x_1 + \beta} - \frac{\beta p(1+p)(x_2 - x_1)}{(x_1 + \beta)^2}.$$

Wir simulieren den ungeregelten Prozess und auch die Regelung für $p = 10$ und $\beta = 6$. Die Anfangswerte sind hierbei $x_1 = 5$, $x_2 = 5$ und $x_3 = 5$. Die sich ergebenden Verläufe für die Strömungsgeschwindigkeit x_1 zeigt Bild 4.29. Deutlich erkennbar ist, wie die Regelung das chaotische Verhalten unterdrückt und der Prozess auf den stationären Wert ausgeregelt wird.

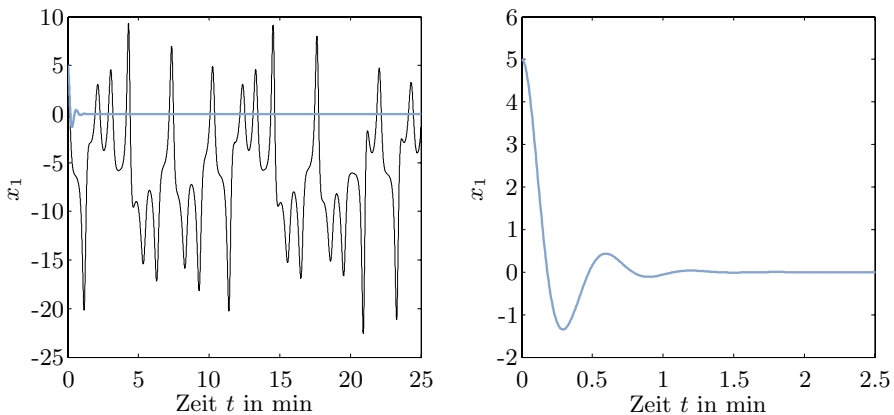


Bild 4.29: Verläufe der Abweichung x_1 der Strömungsgeschwindigkeit von der Ruhelage des ungeregelten chaotischen Prozesses (schwarz) und des geregelten Prozesses (blau). Im rechten Teilbild ist der Ausregelverlauf in vergrößertem Maßstab nochmals dargestellt.

Nichtlineare Regelungen für lineare und nichtlineare Regelstrecken

5.1 Modellbasierte prädiktive Regelung

5.1.1 Grundlagen und Funktionsweise

Modellbasierte prädiktive Regelungen (MPR) sind die am häufigsten in der Industrie eingesetzten fortgeschrittenen Regelungsverfahren [29, 78, 125, 155, 156]. In der Prozessindustrie, insbesondere in Raffinerien und der Chemieindustrie, sind MPR etablierte Standardverfahren. MPR sind nichtlineare Regelungsverfahren, die universell sowohl für lineare Regelstrecken mit Beschränkungen von Stell- und Zustandsgrößen als auch für nichtlineare Regelstrecken geeignet sind.

Die Funktionsweise von MPR basiert dabei im Wesentlichen auf den Eigenschaften mathematischer Prozessmodelle. Diese haben in der Regelungstechnik im Allgemeinen zwei Aufgaben. Zum einen soll ein Modell ein tieferes Verständnis des Prozesses und seiner Funktionsweise ermöglichen. Diese Eigenschaft wird zum Beispiel für den Entwurf von Reglern genutzt. Zum anderen erlaubt ein Modell die Prädiktion zukünftigen Verhaltens. Genau diese Möglichkeit nutzen modellbasierte prädiktive Regelungen, indem sie online anhand eines Prozessmodells den Ausgangsgrößenverlauf mittels des Stellgrößenverlaufs optimieren. Der optimierte Stellgrößenverlauf wird dann zur Regelung des eigentlichen Prozesses verwendet. Bild 5.1 illustriert den Vorgang.

Sowohl kontinuierliche wie auch diskrete Prozessmodelle können dabei zum Einsatz kommen. In der Mehrzahl der Fälle werden allerdings diskrete oder diskretisierte Modelle

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)), \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))\end{aligned}$$

verwendet, denn im Fall kontinuierlicher Modelle gestaltet sich die Optimierung des Stellgrößenverlaufes deutlich komplexer.

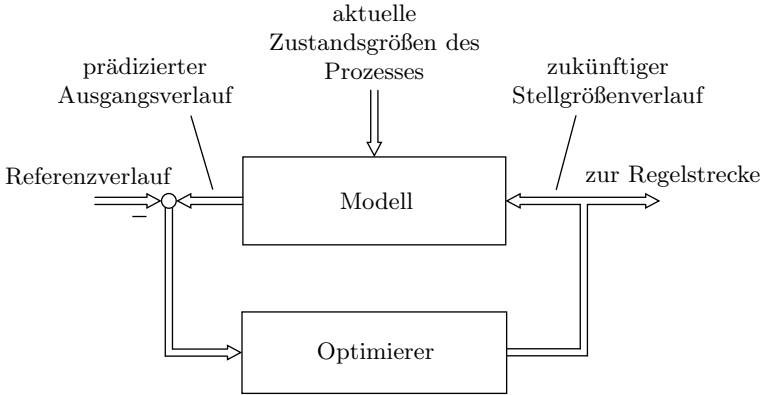


Bild 5.1: Struktur eines modellbasierten prädiktiven Reglers.

Wir gehen aus vom Zeitpunkt $k - 1$ mit bekannter Stellgröße $\mathbf{u}(k - 1)$ und beginnen ab diesem Zeitpunkt mit der Optimierung. Die Optimierung variiert den zukünftigen Stellgrößenverlauf $\mathbf{u}(k + i)$ ab dem Zeitpunkt k für eine endliche Zahl $i = 0, \dots, n_c - 1$ von Stellgrößenschritten so, dass ein vorgegebenes Gütemaß J minimal wird. Der Wert n_c wird *Stellhorizont* genannt. Häufig verwendet wird das über n_p Zeitschritte ermittelte quadratische Gütemaß

$$J = \sum_{i=1}^{n_p} \|\mathbf{Q}(\mathbf{y}(k + i) - \mathbf{y}_R(k + i))\|^2 + r \cdot \sum_{i=1}^{n_p} \|\mathbf{u}(k + i - 1)\|^2 \quad (5.1)$$

mit der positiv definiten Matrix $\mathbf{Q}$, die oft eine Diagonalmatrix ist, oder

$$J = \sum_{i=1}^{n_p} \|\mathbf{Q}(\mathbf{y}(k + i) - \mathbf{y}_R(k + i))\|^2 + r \cdot \sum_{i=1}^{n_c} \|\mathbf{u}(k + i - 1) - \mathbf{u}(k + i - 2)\|^2. \quad (5.2)$$

Der Wert n_p heißt *Prädiktionshorizont*, da das zukünftige Verhalten über n_p Zeitschritte vorausberechnet wird. In obigen Gütemaßen wird im ersten Summenterm die Differenz zwischen der Ausgangsgrößenfolge $\mathbf{y}(k + i)$ und einem Soll- oder Referenzverlauf $\mathbf{y}_R(k + i)$ bewertet. Im zweiten Summenterm werden die quadrierten Stellgrößen bzw. die Stellgrößendifferenzen addiert und mit dem Faktors r gewichtet. Bei der Minimierung von J sorgt dieser zweite Term dafür, dass die Stellgrößen $\mathbf{u}(k + i)$ in Gl. (5.1) bzw. Stellgrößenänderungen in Gl. (5.2) keine zu großen Werte annehmen.

Die Prädiktion von $\mathbf{y}(k + i)$ erfolgt im Gütemaß J über n_p Zeitschritte, wobei $n_p \geq n_c$ gilt. Der Prädiktionshorizont n_p ist also größer als der Stellhorizont n_c oder gleich groß. Damit auch für den Zeitbereich $i \geq n_c$ Stellgrößen $\mathbf{u}(k + i)$ vorliegen, um $\mathbf{y}(k + i)$ prädizieren zu können, werden alle Stellgrößen jenseits des Stellhorizontes auf $\mathbf{u}(k + n_c - 1)$ gesetzt. Bild 5.2 illustriert den Ablauf.

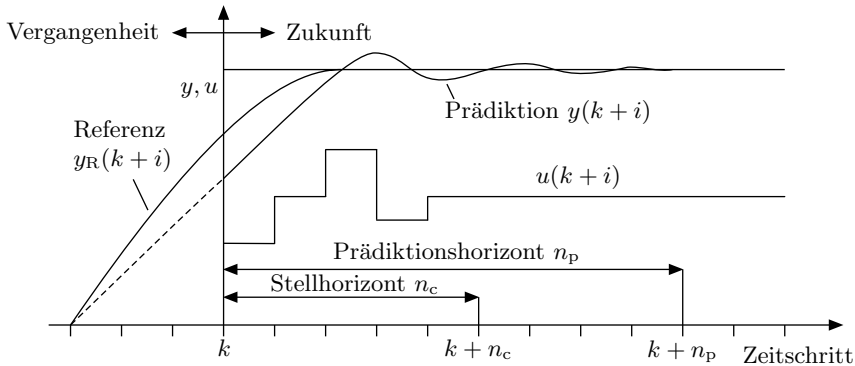


Bild 5.2: Prinzipieller Ablauf einer modellbasierten prädiktiven Regelung (MPR).

Nachdem die Optimierung die Stellgrößenfolge $\mathbf{u}_{\text{opt}}(k+i)$ mit $i = 0, \dots, n_c - 1$ ermittelt hat, wird nur der erste Wert dieser Folge, d. h. $\mathbf{u}_{\text{opt}}(k) = \mathbf{u}(k)$, auf die reale Regelstrecke gegeben. Es wird also nicht die ganze Folge $\mathbf{u}(k+i)$ für die Regelung verwendet, sondern nur ihr erster Wert $\mathbf{u}(k)$. Sofort nach der Aufschaltung von $\mathbf{u}(k)$ wird der oben beschriebene Prädiktions- und Optimierungsprozess um einen Schritt in die Zukunft verschoben. Daher spricht man auch von einem *gleitenden Horizont*. Der gleitende Horizont und die jeweils nach einem Zeitschritt neu einsetzende Optimierung der Stellfolge $\mathbf{u}(k+i)$ erlaubt eine Reaktion der MPR auf Prozessstörungen.

Man kann die Funktionsweise der MPR mit der Vorgehensweise eines Schachspielers vergleichen. Dieser spielt gedanklich verschiedene Zugfolgen durch, wobei er drei, vier oder mehr Züge im Voraus betrachtet. Den ersten der ihm optimal erscheinenden Kombination spielt er dann in der Realität.

Die nach jedem Zeitschritt neu einsetzende Prädiktion erfolgt, wie schon beschrieben, auf Basis des Prozessmodells und der durch die Optimierung errechneten Stellgrößenverläufe. Die Stellgrößenverläufe $\mathbf{u}(k+i)$ allein reichen jedoch für die Prädiktion nicht aus. Vielmehr muss auch der Zustand $\mathbf{x}(k)$ zum Beginn des Prädiktionszeitraumes bekannt sein. Denn nur auf der Basis des Zustandes $\mathbf{x}(k)$ – sozusagen dem Anfangszustand des Systems für die Prädiktion – und der Stellgrößenfolge $\mathbf{u}(k+i)$ kann die Ausgangsgrößenfolge $\mathbf{y}(k+i)$ und damit das Gütemaß J berechnet werden. Im einfachsten Fall bestimmt man $\mathbf{x}(k)$ durch Messung von $\mathbf{x}(k-1)$ und einem Rekursionsschritt $\mathbf{x}(k) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k-1), \mathbf{u}(k-1))$. Ist die Messung nicht möglich, so muss $\mathbf{x}(k)$ anhand der historischen Verläufe

$$\mathbf{u}(k-1), \mathbf{u}(k-2), \dots$$

und

$$\mathbf{y}(k-1), \mathbf{y}(k-2), \dots$$

durch einen Beobachter geschätzt werden. Fasst man alle Elemente einer MPR zusammen, so ergibt sich der in Bild 5.3 gezeigte Aufbau.

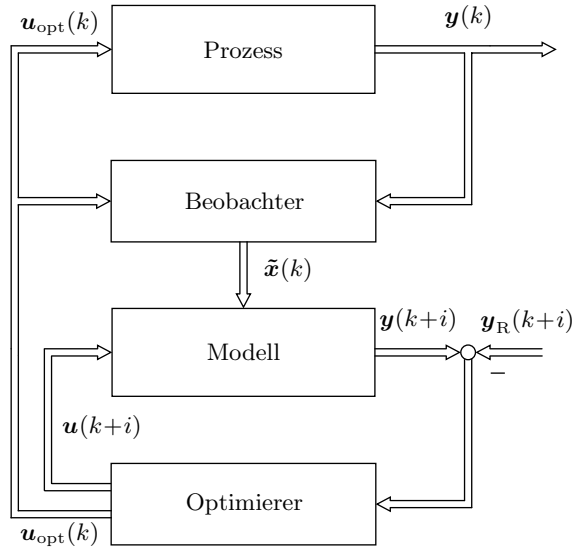


Bild 5.3: Struktur einer MPR mit Beobachter, Modell und Optimierer.

5.1.2 Lineare modellbasierte prädiktive Regelung

Die am häufigsten in der industriellen Praxis eingesetzten MPR basieren auf linearen Prozessmodellen. Solche MPR bezeichnet man als *lineare modellbasierte prädiktive Regelungen*, abgekürzt LMPR.

Verwendet man dabei das quadratische Gütemaß (5.1) oder (5.2), so ergibt sich ein linearer Regler, wie wir im Folgenden sehen werden. Lineare Regler können bekanntlich auch mit anderen, einfacheren Verfahren entworfen werden. Der wahre Nutzen einer LMPR ergibt sich daher auch erst dann, wenn man Nebenbedingungen in das Optimierungsproblem miteinbeziehen muss. Dies können z. B. Stell-, Ausgangs- oder Zustandsgrößenbeschränkungen sein. In diesem Fall ergibt sich ein nichtlinearer Regler. Die MPR wird allerdings aufgrund des linearen Prozessmodells trotzdem als LMPR bezeichnet.

Wir betrachten den Fall einer linearen zeitdiskreten Regelstrecke

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k), \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned} \tag{5.3}$$

mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^r$. Vorerst berücksichtigen wir hierbei keine Beschränkungen von $\mathbf{u}$, $\mathbf{x}$ oder $\mathbf{y}$, d. h., wir betrachten nur den rein linearen Fall. Später werden wir sehen, dass wir die hierbei erzielten Ergebnisse auch für den Fall mit Beschränkungen nutzen können. Die Betrachtung des rein linearen Sonderfalls ermöglicht uns im Besonderen einen einfachen Zugang zum detaillierten Verständnis modellbasierter prädiktiver Regelungen.

Der Stellgrößenvektor $\mathbf{u}(k)$ wird nun aus der vorherigen Stellgröße $\mathbf{u}(k-1)$ und die im Schritt k stattfindende sprungförmige Veränderung $\Delta\mathbf{u}(k)$ gemäß

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k-1) + \Delta\mathbf{u}(k) \quad (5.4)$$

zusammengesetzt. Man erhält so für die obige Systembeschreibung (5.3)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) + \mathbf{B}\Delta\mathbf{u}(k), \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Wir betrachten im Weiteren alle Ausgangsvektoren $\mathbf{y}(k+i)$ beginnend mit Schritt $k+1$ bis zum Schritt $k+n_p$, d. h. bis zum Prädiktionshorizont n_p . Wir erhalten aus Gl. (5.4) und Gl. (5.5) zuerst für $i \leq n_c$ die Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k+1) &= \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) + \mathbf{C}\mathbf{B}\Delta\mathbf{u}(k), \\ \mathbf{y}(k+2) &= \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{x}(k) + \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) + \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{B}\Delta\mathbf{u}(k) \\ &\quad + \mathbf{C}\mathbf{B}\Delta\mathbf{u}(k+1), \\ &\quad \vdots \\ \mathbf{y}(k+i) &= \mathbf{C}\mathbf{A}^i\mathbf{x}(k) + \mathbf{C}(\mathbf{A}^{i-1} + \dots + \mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) \\ &\quad + \sum_{j=1}^i \mathbf{C}(\mathbf{A}^{i-j} + \dots + \mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{B}\Delta\mathbf{u}(k+j-1), \\ &\quad \vdots \\ \mathbf{y}(k+n_c) &= \mathbf{C}\mathbf{A}^{n_c}\mathbf{x}(k) + \mathbf{C}(\mathbf{A}^{n_c-1} + \dots + \mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n_c} \mathbf{C}(\mathbf{A}^{n_c-j} + \dots + \mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{B}\Delta\mathbf{u}(k+j-1). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Obige Gleichungen beschreiben die Ausgangsgrößen bis zum Stellhorizont n_c . Hinter dem Stellhorizont $i > n_c$ ändert sich die Stellgröße nicht mehr, d. h. $\Delta\mathbf{u}(k+i-1) = 0$ für $i > n_c$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k+n_c+1) &= \mathbf{C}\mathbf{A}^{n_c+1}\mathbf{x}(k) + \mathbf{C}(\mathbf{A}^{n_c} + \dots + \mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n_c} \mathbf{C}(\mathbf{A}^{n_c+1-j} + \dots + \mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{B}\Delta\mathbf{u}(k+j-1), \\ &\quad \vdots \\ \mathbf{y}(k+n_p) &= \mathbf{C}\mathbf{A}^{n_p}\mathbf{x}(k) + \mathbf{C}(\mathbf{A}^{n_p-1} + \dots + \mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n_c} \mathbf{C}(\mathbf{A}^{n_p-j} + \dots + \mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{B}\Delta\mathbf{u}(k+j-1). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Man fasst die Vektoren $\mathbf{y}(k+1)$ bis $\mathbf{y}(k+n_p)$ im $n_p \times 1$ - Vektor

$$\bar{\mathbf{y}}(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(k+1) \\ \mathbf{y}(k+2) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(k+n_p) \end{bmatrix}$$

und die Stellgrößenänderungen $\Delta \mathbf{u}(k)$ bis $\Delta \mathbf{u}(k+n_c-1)$ im $mn_c \times 1$ - Vektor

$$\Delta \bar{\mathbf{u}}(k) = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(k) \\ \Delta \mathbf{u}(k+1) \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{u}(k+n_c-1) \end{bmatrix}$$

zusammen. Man beachte, dass der Vektor $\Delta \bar{\mathbf{u}}(k)$ im Allgemeinen eine niedrigere Dimension als der Vektor $\bar{\mathbf{y}}(k+1)$ besitzt, da $n_c \leq n_p$ gilt.

Für die Gl. (5.6) und Gl. (5.7) erhält man zusammen

$$\bar{\mathbf{y}}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k-1) + \mathbf{H}\Delta \bar{\mathbf{u}}(k), \quad (5.8)$$

wobei

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^3 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n_p} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{B} \\ \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{B} \\ \mathbf{C}(\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{C}(\mathbf{A}^{n_p-1} + \dots + \mathbf{I})\mathbf{B} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{B} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}(\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{B} & \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{B} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}(\mathbf{A}^{n_c-1} + \dots + \mathbf{I})\mathbf{B} & \mathbf{C}(\mathbf{A}^{n_c-2} + \dots + \mathbf{I})\mathbf{B} & \dots & \mathbf{C}\mathbf{B} \\ \mathbf{C}(\mathbf{A}^{n_c} + \dots + \mathbf{I})\mathbf{B} & \mathbf{C}(\mathbf{A}^{n_c-1} + \dots + \mathbf{I})\mathbf{B} & \dots & \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}(\mathbf{A}^{n_p-1} + \dots + \mathbf{I})\mathbf{B} & \mathbf{C}(\mathbf{A}^{n_p-2} + \dots + \mathbf{I})\mathbf{B} & \dots & \mathbf{C}(\mathbf{A}^{n_p-n_c} + \dots + \mathbf{I})\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

mit $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{rn_p \times n}$, $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{rn_p \times m}$ und $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{rn_p \times mn_c}$ gilt. Dabei ist der Anteil

$$\mathbf{g}(k) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k-1)$$

in Gleichung (5.8) durch die schon erfolgten Schritte $0, \dots, k-1$ der Regelung vorgegeben. Während der Term $\mathbf{g}(k)$ also konstant ist, enthält der Anteil $\mathbf{H}\Delta \bar{\mathbf{u}}(k)$ in Gl. (5.8) die zu optimierende Stellgrößenfolge $\Delta \mathbf{u}(k), \dots, \Delta \mathbf{u}(k+n_c-1)$. Man verkürzt Gl. (5.8) daher zu

$$\bar{\mathbf{y}}(k+1) = \mathbf{g}(k) + \mathbf{H} \Delta \bar{\mathbf{u}}(k). \quad (5.9)$$

Minimiert werden soll nun das konvexe Gütemaß

$$J(\Delta \bar{\mathbf{u}}(k)) = (\bar{\mathbf{y}}(k+1) - \bar{\mathbf{y}}_R(k+1))^T \mathbf{Q} (\bar{\mathbf{y}}(k+1) - \bar{\mathbf{y}}_R(k+1)) + \Delta \bar{\mathbf{u}}^T(k) \mathbf{R} \Delta \bar{\mathbf{u}}(k), \quad (5.10)$$

wobei $\mathbf{Q}$ eine positiv definite $rn_p \times rn_p$ - Matrix und $\mathbf{R}$ eine positiv definite $mn_c \times mn_c$ - Matrix ist. Der rn_p - dimensionale Vektor

$$\bar{\mathbf{y}}_R(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_R(k+1) \\ \mathbf{y}_R(k+2) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_R(k+n_p) \end{bmatrix}$$

beinhaltet den Verlauf der Referenzgröße $\mathbf{y}_R(k+i)$. Man setzt Gl. (5.9) in das Gütemaß (5.10) ein und erhält mit der Abkürzung

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{g}(k) - \bar{\mathbf{y}}_R(k+1)$$

die Darstellung

$$\begin{aligned} J(\Delta \bar{\mathbf{u}}(k)) &= (\mathbf{e}(k) + \mathbf{H} \Delta \bar{\mathbf{u}}(k))^T \mathbf{Q} (\mathbf{e}(k) + \mathbf{H} \Delta \bar{\mathbf{u}}(k)) + \Delta \bar{\mathbf{u}}^T(k) \mathbf{R} \Delta \bar{\mathbf{u}}(k) \\ &= \Delta \bar{\mathbf{u}}^T(k) (\mathbf{H}^T \mathbf{Q} \mathbf{H} + \mathbf{R}) \Delta \bar{\mathbf{u}}(k) \\ &\quad + 2 \Delta \bar{\mathbf{u}}^T(k) \mathbf{H}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}(k) + \mathbf{e}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{e}(k). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Die Bedingung für ein Minimum dieser konvexen Gütefunktion,

$$\frac{\partial J(\Delta \bar{\mathbf{u}}(k))}{\partial \Delta \bar{\mathbf{u}}(k)} = \mathbf{0},$$

liefert die lineare Gleichung

$$(\mathbf{H}^T \mathbf{Q} \mathbf{H} + \mathbf{R}) \Delta \bar{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{H}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}(k) = \mathbf{0}.$$

Hieraus ergeben sich die gesuchten Stellgrößen zu

$$\Delta \bar{\mathbf{u}}(k) = -(\mathbf{H}^T \mathbf{Q} \mathbf{H} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}(k).$$

Von den im Vektor

$$\Delta \bar{\mathbf{u}}(k) = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(k) \\ \Delta \mathbf{u}(k+1) \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{u}(k+n_c-1) \end{bmatrix}$$

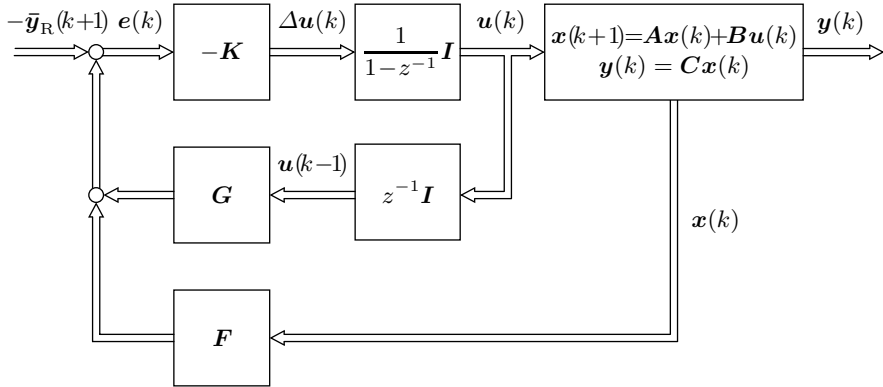


Bild 5.4: MPR für eine lineare Regelstrecke ohne Beschränkungen.

zusammengefassten Stellgrößen wird allerdings, wie bereits erwähnt, nur der erste Stellgrößenschritt $\Delta \mathbf{u}(k)$ zur Regelung genutzt. Wir betrachten daher nur das erste Element

$$\Delta \mathbf{u}(k) = -\mathbf{K} \mathbf{e}(k)$$

dieses Vektors mit

$$\mathbf{K} = [\mathbf{I} \ 0 \ \cdots 0] \left[\left(\mathbf{H}^T \mathbf{Q} \mathbf{H} + \mathbf{R} \right)^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{Q} \right],$$

wobei $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ist. Das Regelgesetz ist linear, besitzt eine Dynamik und lautet zusammengefasst

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(k) &= \mathbf{u}(k-1) + \Delta \mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k-1) - \mathbf{K} \mathbf{e}(k), \\ \mathbf{e}(k) &= \mathbf{F} \mathbf{x}(k) + \mathbf{G} \mathbf{u}(k-1) - \bar{\mathbf{y}}_R(k+1). \end{aligned}$$

Bild 5.4 zeigt die zugehörige Struktur der linearen MPR ohne Beschränkungen. Auf einen Beobachter wurde dabei verzichtet. Ein solcher kann aber ohne Weiteres zur Bestimmung des zur Regelung nötigen Zustandsvektors $\mathbf{x}(k)$ in den Regelkreis eingefügt werden.

5.1.3 LMPR mit Beschränkungen

Wie schon erwähnt, hat die lineare MPR ohne Beschränkungen keine große praktische Relevanz und wurde hier vor allem beschrieben, um einen einfach verständlichen Zugang zur Thematik zu finden und die prinzipielle Funktionsweise zu erläutern.

In der industriellen Praxis findet die lineare MPR Verwendung, wenn die zu optimierenden Variablen beispielsweise im Stellgrößenvektor $\mathbf{u}(k)$ Beschränkungen

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_{\min,1} \\ u_{\min,2} \\ \vdots \\ u_{\min,m} \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_{\min}} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_m(k) \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}(k)} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} u_{\max,1} \\ u_{\max,2} \\ \vdots \\ u_{\max,m} \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_{\max}}$$

unterliegen. Diese Beschränkungen der Stellgrößen lassen sich auch in Abhängigkeit der Stellgrößenänderungen darstellen. So schreibt man

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\min} &\leq \mathbf{u}(k) &= \mathbf{u}(k-1) + \Delta \mathbf{u}(k) &\leq \mathbf{u}_{\max}, \\ \mathbf{u}_{\min} &\leq \mathbf{u}(k+1) &= \mathbf{u}(k-1) + \Delta \mathbf{u}(k) + \Delta \mathbf{u}(k+1) &\leq \mathbf{u}_{\max}, \\ \mathbf{u}_{\min} &\leq \mathbf{u}(k+2) &= \mathbf{u}(k-1) + \Delta \mathbf{u}(k) + \Delta \mathbf{u}(k+1) + \Delta \mathbf{u}(k+2) &\leq \mathbf{u}_{\max}, \\ & &\vdots & \\ \mathbf{u}_{\min} &\leq \mathbf{u}(k+n_c-1) = \mathbf{u}(k-1) + \Delta \mathbf{u}(k) + \dots + \Delta \mathbf{u}(k+n_c-1) &\leq \mathbf{u}_{\max}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Wir definieren $\bar{\mathbf{u}}_{\min} = [\mathbf{u}_{\min}^T \dots \mathbf{u}_{\min}^T]^T$ und $\bar{\mathbf{u}}_{\max} = [\mathbf{u}_{\max}^T \dots \mathbf{u}_{\max}^T]^T$ als Vektoren der Länge mn_c . Gl. (5.12) lässt sich dann in der Matrixform

$$\bar{\mathbf{u}}_{\min} \leq \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}(k-1) + \mathbf{D} \cdot \Delta \bar{\mathbf{u}}(k) \leq \bar{\mathbf{u}}_{\max} \quad (5.13)$$

mit der $mn_c \times m$ - Matrix

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \\ \vdots \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

und der unteren $mn_c \times mn_c$ - Dreiecksmatrix

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

darstellen. Die Matrizen $\mathbf{I}$ sind Einheitsmatrizen der Dimension $m \times m$.

Von Bedeutung sind des Weiteren Beschränkungen der Änderungsrate der Stellgrößen, d. h. Beschränkungen der Art

$$\Delta \bar{\mathbf{u}}_{\min} \leq \Delta \bar{\mathbf{u}}(k) \leq \Delta \bar{\mathbf{u}}_{\max}. \quad (5.14)$$

Die Vektoren $\Delta \bar{\mathbf{u}}_{\min}$ und $\Delta \bar{\mathbf{u}}_{\max}$ sind ähnlich aufgebaut wie die Vektoren $\bar{\mathbf{u}}_{\min}$ und $\bar{\mathbf{u}}_{\max}$ und besitzen auch deren Dimension.

Außer Stellgrößen können auch Zustandsgrößen x_i oder Ausgangsgrößen y_i Beschränkungen

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_{\min,1} \\ y_{\min,2} \\ \vdots \\ y_{\min,r} \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}_{\min}} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_r(k) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}(k)} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} y_{\max,1} \\ y_{\max,2} \\ \vdots \\ y_{\max,r} \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}_{\max}}$$

unterliegen. Diese lassen sich im Fall der betrachteten linearen Systeme in Beschränkungen der Stellgrößenänderung umrechnen. So gilt für

$$\bar{\mathbf{y}}_{\min} \leq \bar{\mathbf{y}}(k+1) \leq \bar{\mathbf{y}}_{\max}$$

mit Gl. (5.9)

$$\bar{\mathbf{y}}_{\min} \leq \mathbf{g}(k) + \mathbf{H} \Delta \bar{\mathbf{u}}(k) \leq \bar{\mathbf{y}}_{\max}. \quad (5.15)$$

Dabei ist $\bar{\mathbf{y}}_{\min} = [\mathbf{y}_{\min}^T \cdots \mathbf{y}_{\min}^T]^T \in \mathbb{R}^{r n_p \times 1}$ und für $\bar{\mathbf{y}}_{\max}$ gilt Entsprechendes. Beschränkungen von x_i sehen ähnlich aus.

Zusammengefasst lassen sich die Ungleichungen (5.13), (5.14) und (5.15) in die Form

$$\mathbf{W} \Delta \bar{\mathbf{u}}(k) \leq \mathbf{w}$$

mit

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -\mathbf{D} \\ \mathbf{D} \\ -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} \\ -\mathbf{H} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{u}}_{\min} + \mathbf{E}\mathbf{u}(k-1) \\ \bar{\mathbf{u}}_{\max} - \mathbf{E}\mathbf{u}(k-1) \\ -\Delta \bar{\mathbf{u}}_{\min} \\ \Delta \bar{\mathbf{u}}_{\max} \\ -\bar{\mathbf{y}}_{\min} + \mathbf{g}(k) \\ \bar{\mathbf{y}}_{\max} - \mathbf{g}(k) \end{bmatrix}$$

bringen. So erhält man ein beschränktes Optimierungsproblem der Form

$$\min_{\Delta \bar{\mathbf{u}}(k)} J(\Delta \bar{\mathbf{u}}(k)) \quad (5.16)$$

mit den linearen Restriktionen

$$\mathbf{W} \cdot \Delta \bar{\mathbf{u}}(k) \leq \mathbf{w}. \quad (5.17)$$

Ist die Gütefunktion durch eine positiv definite quadratische Form gegeben, wie im vorherigen Abschnitt 5.1.2, so können wir die Gütefunktion (5.11) verwenden und es liegt ein konvexes quadratisches Optimierungsproblem mit linearen Restriktionen vor. In diesem Fall besitzt das quadratische Optimierungsproblem (5.16), (5.17) nur ein Minimum. Dieses Minimum kann in der Regel nicht analytisch, sondern nur numerisch bestimmt werden. Es existieren allerdings sicher konvergente Standardverfahren der quadratischen Programmierung, kurz QP-Verfahren genannt, mit denen das Minimum berechenbar ist [16, 29, 125]. An dieser Stelle werden die Nachteile der modelbasierten prädiktiven Regelung deutlich: Das Regelgesetz ist nicht explizit angebar und seine Auswertung zeitaufwendig.

5.1.4 Beispiel Entwässerungssystem

Zur Entwässerung von Gebieten mit hohem Grundwasserspiegel, wie sie z. B. in den Niederlanden oder den Everglades der USA vorkommen, werden Kanalsysteme eingesetzt. Insbesondere bei oder nach starken Regenfällen muss Wasser aus den Entwässerungskanälen in benachbarte Flüsse oder das Meer abgepumpt werden. Ansonsten würde ein zu hoher Wasserstand Deich, Dörfer und landwirtschaftliche Flächen gefährden. Ein zu niedriger Wasserstand in den Kanälen ist allerdings auch problematisch, da hierdurch Böschungsruutsche verursacht werden können. Auch große Schwankungen des Wasserstandes können durch Pumpeffekte eine Auflockerung des Erdreiches in den Kanalwandungen bewirken, die eine Beschädigung der Kanäle nach sich zieht.

Man möchte den Wasserstand in den Kanälen daher weder zu niedrig noch zu hoch werden lassen. Vielmehr soll sich der Wasserstand innerhalb eines vorgegebenen Toleranzbandes bewegen. Zu diesem Zweck setzt man Regelungen ein, mit denen die aus den Kanälen abgepumpte Wassermenge festgelegt wird. Bild 5.5 zeigt den Aufbau eines solchen Entwässerungssystems. Bei meeresnahen Anlagen werden zusätzlich Speicherkanäle genutzt, in die das Wasser bei Hochwasser gepumpt wird. Bei Niedrigwasser fließt das Wasser dann ohne zusätzliche Pumpleistung ins Meer ab.

Der Wasserstand h im Kanalsystem ist abhängig vom Regenwasser, das in die Kanäle fließt, und der Menge des abgepumpten Wassers [140] gemäß der Beziehung

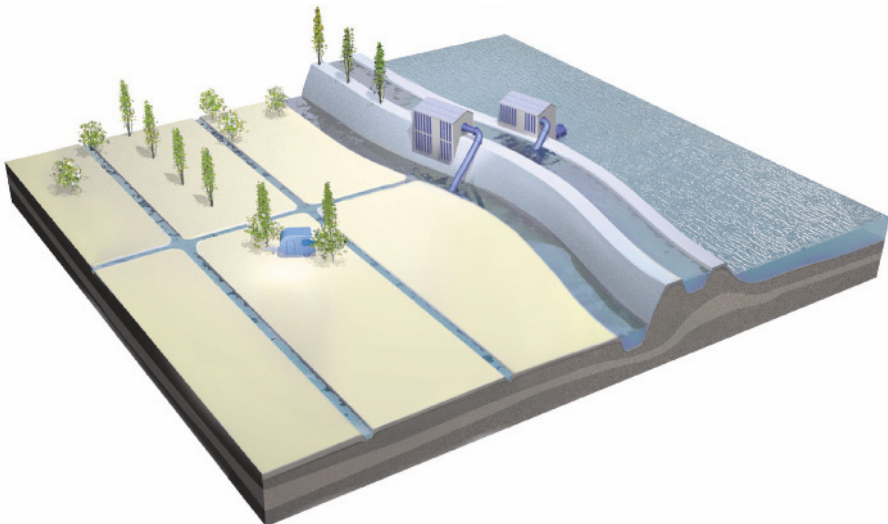


Bild 5.5: Entwässerungssystem.

$$h(k+1) = h(k) + \frac{T}{A}(q_{\text{Re}}(k) - q_{\text{P}}(k - k_{\text{d}})). \quad (5.18)$$

Dabei gibt q_{Re} die Wassermenge pro Sekunde an, die aufgrund von Regenfällen oder eventuell nachströmendem Grundwasser in die Kanäle fließt, und q_{P} die abgepumpte Wassermenge pro Sekunde. Die Fläche A umfasst die gesamte Fläche der Kanäle, T ist die Zeitspanne in Sekunden zwischen den Zeitpunkten k und $k+1$ und k_{d} ist die Anzahl der Zeitschritte, nach denen die Stellgröße q_{P} auf den Wasserstand in den Kanälen wirkt.

Wir betrachten das Entwässerungssystem des Delflandes in den Niederlanden. Es weist die Parameterwerte

$$A = 7300000 \text{ m}^2 = 7.3 \text{ km}^2, \quad T = 900 \text{ s}, \quad k_{\text{d}} = 1$$

auf. Wasserstand h und Pumpvolumenstrom q_{P} sind durch

$$-0.55 \text{ m} \leq h \leq -0.30 \text{ m}$$

und

$$0 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \leq q_{\text{P}} \leq 75 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

begrenzt. Der Sollwert des Wasserstandes h beträgt $h_{\text{soll}} = -0.40 \text{ m}$. Der Wasserstand h der Kanäle wird bezüglich des Meeresspiegels angegeben, d. h., im Fall $h = 0$ entspricht der Wasserstand der Kanäle dem Meeresspiegel. Er liegt im Delfland ungefähr einen halben Meter unter dem Meeresspiegel.

Die Zustandsgrößen des Systems aus Gl. (5.18) sind die Wasserstandshöhe $x_1(k) = h(k)$ und die um einen Zeitschritt $k_{\text{d}} = 1$ verzögerte Stellgröße $x_2(k) = q_{\text{P}}(k-1)$. Mit obigen Parameterwerten und der aktuellen Stellgröße $u(k) = q_{\text{P}}(k)$ erhalten wir aus Gl. (5.18) als Modell

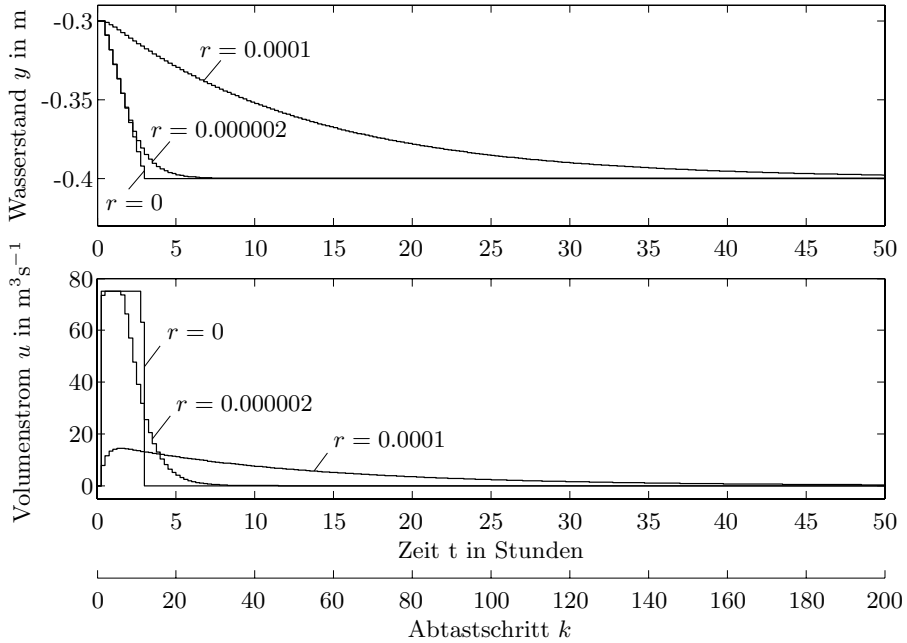
$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) - 1.23 \cdot 10^{-4} x_2(k) + 1.23 \cdot 10^{-4} q_{\text{Re}}(k), \\ x_2(k+1) &= u(k), \\ y(k) &= x_1(k). \end{aligned}$$

Dabei wirkt q_{Re} als Störung.

Ziel einer Regelung ist es nun, Störungen q_{Re} aufgrund starken Niederschlages so auszuregulieren, dass der Wasserstand x_1 unter Einhaltung der Beschränkungen $-0.55 \leq x_1 \leq -0.30$ auf den Sollwert $x_1 = -0.4$ geführt wird. Dabei soll die Stellgröße u die Beschränkungen $0 \leq u \leq 75$ nicht verletzen.

Offensichtlich ist obige Regelungsaufgabe gut geeignet für eine modellbasierte prädiktive Regelung. Denn zum einen steht mit $T = 900 \text{ s}$ zwischen zwei Regleraktionen ausreichend Rechenzeit zur Verfügung und zum anderen können mit einer modellprädiktiven Regelung die Beschränkungen von $y = x_1$ und u gut berücksichtigt werden.

Für die Auslegung der MPR wählen wir als Prädiktionshorizont $n_{\text{p}} = 97$ und als Stellhorizont $n_{\text{c}} = 2$. Der lange Prädiktionshorizont von 24 h und

Bild 5.6: Ausgangsverlauf y und Stellgrößenverlauf u .

15 min erlaubt u. a. die Einbeziehung einer prognostizierten Regenmenge aufgrund einer Wettervorhersage. Diese Regenmenge kann über q_{Re} in der Regelung Berücksichtigung finden.

Für das Gütemaß wählen wir

$$J = (\bar{\mathbf{y}}(k+1) - \bar{\mathbf{y}}_{\text{R}}(k+1))^T (\bar{\mathbf{y}}(k+1) - \bar{\mathbf{y}}_{\text{R}}(k+1)) + r \Delta \bar{\mathbf{u}}^T(k) \Delta \bar{\mathbf{u}}(k), \quad (5.19)$$

wobei für den Referenzwert des Wasserstandes $y_{\text{R}} = h_{\text{soll}} = -0.4 \text{ m}$ gilt. D. h., es gilt $\bar{\mathbf{y}}_{\text{R}}(i) = [-0.4 \text{ m} \ -0.4 \text{ m} \ \cdots \ -0.4 \text{ m}]^T$ für alle $i = 0, 1, \dots$

Als praktischen Beispielfall betrachten wir einen erhöhten Wasserstand von $x_1(0) = -0.3 \text{ m}$ nach einer Schlechtwetterfront. Der zweite Anfangswert ist $x_2(0) = 0$. Bild 5.6 zeigt die Verläufe der Stellgröße u und des Wasserstandes y . Dabei sind drei verschiedene Regler verwendet worden, die sich aus verschiedenen Gewichtungsfaktoren r im Gütemaß (5.19) ergeben. Erwartungsgemäß ist die MPR für $r = 0$ am schnellsten und wird für $r = 0.000002$ und $r = 0.0001$ langsamer. Von r hängt auch die Änderungsrate der Stellgröße u ab. Spielt ein abruptes Hoch- und Runterfahren des Pumpenvolumenstromes u keine Rolle, so kann $r = 0$ gewählt werden. Möchte man lieber weniger starke Änderungen Δu im Pumpenvolumenstrom u realisieren, so wählt man einen größeren Wert r . Oder man führt zusätzlich eine Beschränkung von Δu ein.

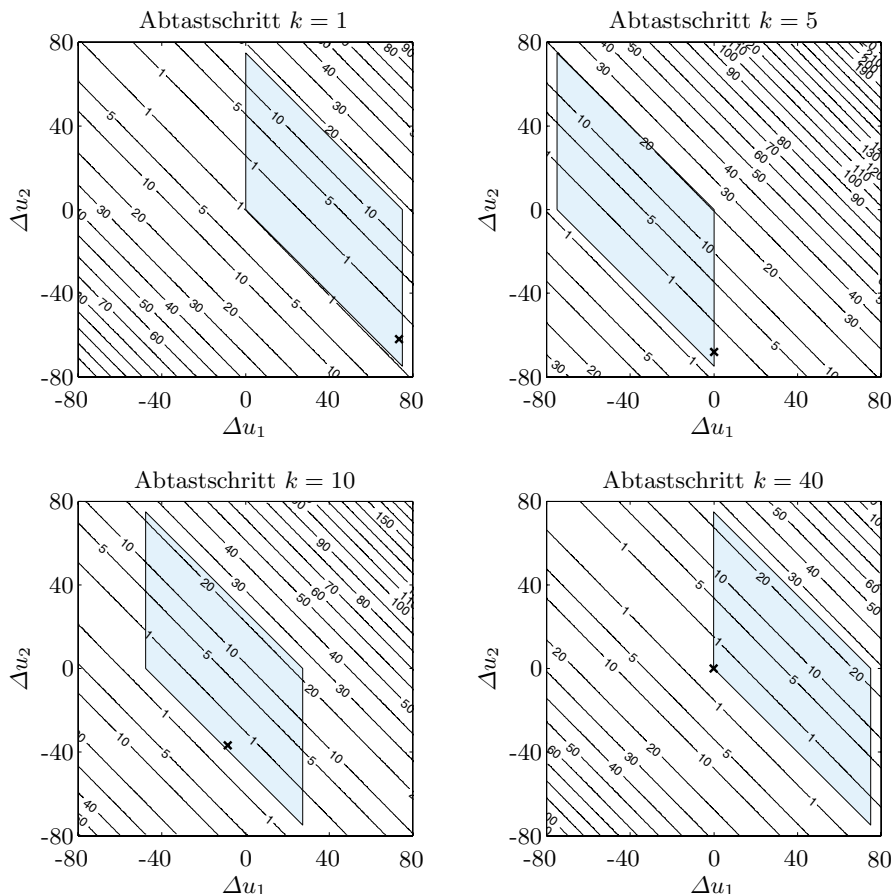


Bild 5.7: Illustration der zu lösenden Optimierungsprobleme in den Zeitschritten $k = 1$, $k = 5$, $k = 10$ und $k = 40$ für den Fall $r = 0.000002$. Dargestellt sind die Höhenlinien von J und das zulässige Optimierungsgebiet (blau). Ein Kreuz markiert das jeweilige Minimum.

In Bild 5.7 ist die während der Regelung zu minimierende Gütefunktion (5.19) dargestellt. Die Höhenlinien von J haben die Form von sehr langgestreckten Ellipsen. Dargestellt ist des Weiteren das zulässige Gebiet für die Optimierungsvariablen Δu_1 und Δu_2 , wie es sich aus den Beschränkungen ergibt. Die Form der Höhenlinien der Gütefunktion und das zulässige Gebiet hängen vom Zeitschritt k ab, d. h., sie verändern sich während eines Ausregelvorganges.

5.1.5 Nichtlineare modellbasierte prädiktive Regelung

Bei nichtlinearen Regelstrecken

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{5.20}$$

oder

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)), \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(k))\end{aligned}\tag{5.21}$$

lassen sich MPR ähnlich anwenden wie bei linearen Regelstrecken. Allerdings sind Implementierung und Ablauf meistens deutlich komplizierter und aufwendiger als im linearen Fall. Dies ist darauf zurückzuführen, dass das Optimierungsproblem aufgrund der nichtlinearen Systemdynamik (5.21) keine einfache Form mehr aufweist. Insbesondere ist es im Allgemeinen nicht mehr konvex. Die Nichtlinearität der Systemlösung von Gl. (5.21) verursacht eine komplexe Abhängigkeit des Gütefunktionswertes J von den zu optimierenden Stellgrößenwerten $\mathbf{u}(k+i)$. Ein solches nicht konvexes Optimierungsproblem besitzt oft mehrere lokale Minima und es existieren keine sicher konvergenten Lösungsverfahren. Das prinzipielle Vorgehen entspricht trotz der komplexeren Numerik dem Ablauf der LMPR.

Zur Lösung des beschränkten Optimierungsproblems verwendet man numerische Optimierungsverfahren [5, 36, 100], wobei eines der Hauptprobleme oft darin besteht, das Optimierungsproblem in Echtzeit zu lösen. Als besonders zeitaufwendig stellt sich dabei heraus, dass für jeden Stellgrößenverlauf und jede Gütewertberechnung die Lösung des Systems (5.20) bestimmt werden muss. In der Regel geschieht das im zeitkontinuierlichen Fall (5.20) mittels eines Integrationsverfahrens, z. B. des Runge-Kutta-Verfahrens. Im Fall diskreter Systeme erfolgt die Berechnung der Systemlösung unmittelbar über die Rekursionsgleichung (5.21).

Die Echtzeitproblematik hat zur Folge, dass MPR nur bei relativ langsamen Regelstrecken, z. B. in der Prozessindustrie, zum Einsatz kommen. Ein weiteres Problem nichtlinearer MPR, abgekürzt NMPR, ist die Sicherstellung der Stabilität des Regelkreises. Aufgrund der Nichtlinearität der Regelstrecke und des nicht explizit angebbaren Regelgesetzes kann diese im Allgemeinen nicht garantiert werden.

Wir betrachten die Stabilitätsproblematik im Folgenden genauer. Ausgangspunkt unserer Betrachtungen ist das System (5.21), wobei der Eingangsgrößenvektor $\mathbf{u}$ gemäß

$$\mathbf{u} \in W \subset \mathbb{R}^m$$

und der Zustandsvektor $\mathbf{x}$ gemäß

$$\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$$

beschränkt sind. Für die NMPR gelte im Weiteren $n_p = n_c$. Als zu minimierende Gütefunktion setzen wir die Funktion

$$J(k) = \sum_{i=k}^{k+n_c-1} Q(\mathbf{x}(i), \mathbf{u}(i))$$

an. Dabei kann die Funktion Q z. B. quadratische Bewertungsterme, ähnlich denen in Gl. (5.1), besitzen. In jedem Fall muss $Q(\mathbf{x}, \mathbf{u}) > 0$ für alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ und $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ gelten. Des Weiteren soll das geregelte System in

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$$

für $\mathbf{u}(k) = \mathbf{0}$ eine Ruhelage besitzen und es soll

$$Q(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$$

gelten. Aufgrund dieser Forderung gilt insbesondere auch $J(k) = 0$ für $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$ und für $\mathbf{u}(i) = \mathbf{0}$, $i = k, k+1, \dots$.

Wir beachten, dass das Gütemaß J mittelbar nur vom Zustandsvektor $\mathbf{x}$ abhängt, da der Stellgrößenvektor $\mathbf{u}$ über die NMPR von $\mathbf{x}$ abhängt. Somit scheint uns die Gütefunktion J eine Kandidatin für eine Ljapunov-Funktion des prädiktiv geregelten Systems zu sein. Denn sie ist im Ursprung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ identisch null und sonst überall positiv. Als dritte Bedingung einer Ljapunov-Funktion (siehe Abschnitt 2.4.4) muss J noch die Forderung

$$J(k) - J(k-1) < 0 \quad (5.22)$$

erfüllen, d. h., $J(k)$ muss im Verlauf jedes Ausregelvorganges abnehmen.

Die Bedingung (5.22) ist auch erfüllt, wenn $J(k)$ nur wenig kleiner ist als $J(k-1)$. Dann erfolgt die Ausregelung aber sehr langsam. Scokaert, Mayne und Rawlings [165] verschärfen die Bedingung (5.22) daher zu

$$J(k) - J(k-1) < -\mu Q(\mathbf{x}(k-1), \mathbf{u}(k-1)), \quad (5.23)$$

wobei $\mu \in (0, 1)$ gilt.

Für Werte μ nahe null wird die Optimierungsprozedur leichter eine Lösung $\mathbf{u}(k), \dots, \mathbf{u}(k+n_c-1)$ finden als für große Werte μ , weil es in diesem Fall mehr Lösungen gibt. Der Preis, der hierfür zu zahlen ist, besteht in einer oft nur geringen Abnahme des Gütewertes J . Folglich ist die Ausregelung dann wieder langsam.

Wählt man μ nahe bei eins, so ist die Abnahme von J von einem Schritt $k-1$ zum nächsten größer. Allerdings ist nun der Lösungsraum stärker eingeschränkt, so dass die Berechnung einer Lösung komplizierter wird und länger dauern kann.

Während der Ausführung der MPR muss ständig überprüft werden, ob die Ungleichung (5.23) eingehalten wird. Sobald die Optimierungsprozedur eine entsprechende Stellgrößenfolge $\mathbf{u}(k), \dots, \mathbf{u}(k+n_c-1)$ gefunden hat, sind zwei Fälle denkbar. Im ersten steht noch Optimierungszeit zur Verfügung. Sie kann benutzt werden, um das Ergebnis zu verbessern. Im zweiten ist die zur Verfügung stehende Optimierungszeit verbraucht und die Stellgröße $\mathbf{u}(k)$ wird auf die Regelstrecke geschaltet. Die Optimierung startet dann erneut mit $\tilde{k} = k+1$ und sucht eine neue Kombination von Werten $\mathbf{u}(\tilde{k}), \dots, \mathbf{u}(\tilde{k} +$

$n_c - 1$). Günstigerweise benutzt man dabei den alten Satz von Stellgrößen $\mathbf{u}(k), \dots, \mathbf{u}(k + n_c - 1)$ als Startpunkt der Optimierung.

Die Gütefunktion J ist zwar als Ljapunov-Funktion geeignet, jedoch können wir ihre Abnahme entlang einer Trajektorie, d. h. die Erfüllung der Ungleichung (5.22), nur numerisch während eines Ausregelvorganges feststellen. Der Stabilitätssatz von Ljapunov fordert aber für den Nachweis der Stabilität die Überprüfung der Bedingung (5.22) in einer Umgebung $U(\mathbf{0})$ der Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$, d. h. für alle $\mathbf{x} \in U(\mathbf{0}) \setminus \{\mathbf{0}\}$ und nicht nur für einzelne Trajektorien. Da wir die Abnahme von J jedoch nur für einzelne Trajektorien und nicht in der gesamten Umgebung von $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ prüfen können, ist die obige Vorgehensweise nicht hinreichend für den Stabilitätsnachweis.

Obige Problematik lässt sich an einem Gedankenbeispiel veranschaulichen. Wir betrachten einen nichtlinearen modellprädiktiven Regelkreis zweiter Ordnung. Er besitzt eine Ruhelage bei $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ und einen kreisförmigen stabilen Grenzzyklus mit einem Mittelpunkt bei $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Wir starten den Ausregelvorgang mittels des prädiktiven Reglers, wie wir ihn oben beschrieben haben, in einem Punkt $\mathbf{x}_0$ außerhalb des Grenzzyklus. Die Trajektorie $\mathbf{x}(k)$ des Regelkreises läuft nun vom Punkt $\mathbf{x}(0)$ asymptotisch in den Grenzzyklus hinein. Dabei nimmt das Gütemaß J beständig ab, so dass die Ungleichung (5.22) oder (5.23) erfüllt ist. Die Trajektorie $\mathbf{x}(k)$ läuft also trotz der Abnahme von J nicht in die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$. Bild 5.8 illustriert diesen Sachverhalt.

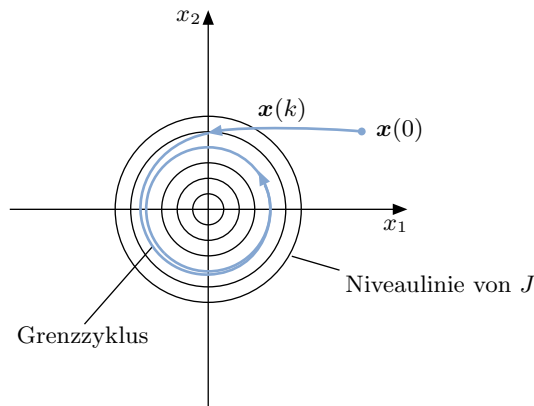


Bild 5.8: Beispiel für die kontinuierliche Abnahme des Güteintegrals J entlang einer Trajektorie, ohne dass die Trajektorie $\mathbf{x}(k)$ gegen null strebt.

Halten wir als Resümee fest, dass wir nicht feststellen können, ob das Gütemaß J eine Ljapunov-Funktion ist. Die Abnahme von J während einer Ausregelung bildet lediglich eine praxisorientierte Bedingung für die Stabilität des prädiktiven Regelungssystems. Um nun sicherstellen zu können, dass die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ auch wirklich erreicht wird, d. h. Stabilität vorliegt, fordern

wir zusätzlich zur Abnahme von J noch

$$\mathbf{x}(k + n_c) = \mathbf{0} \quad (5.24)$$

in jedem Zeitschritt k .

Gleichung (5.24) ist eine weitere Nebenbedingung in der Optimierungsaufgabe. Um sie zu erfüllen, muss der Stellhorizont n_c ausreichend groß sein. Dies kann sehr große Werte n_c erfordern, wodurch die Anzahl der zu optimierenden n_c Stellgrößenwerte $\mathbf{u}(k), \dots, \mathbf{u}(k + n_c - 1)$ ebenfalls sehr groß wird.

Die letztere Problematik wird abgeschwächt, wenn man anstelle der Restriktion (5.24) fordert, dass

$$\mathbf{x}(k + n_c) \in U(\mathbf{0})$$

gilt, wobei $U(\mathbf{0})$ eine Umgebung der Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ ist. $U(\mathbf{0})$ kann dabei ein Toleranzgebiet sein, dessen Zustandswerte $\mathbf{x} \in U(\mathbf{0})$ man als Zielwerte der Regelung akzeptiert, weil ihre Abweichung von $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hinreichend klein ist. Die Umgebung $U(\mathbf{0})$ kann aber auch ein Gebiet sein, in dem man anstelle der prädiktiven Regelung $\mathbf{u}_1(\mathbf{x})$ einen anderen Regler $\mathbf{u}_2(\mathbf{x})$ verwendet. In diesem Fall legt man den Regler $\mathbf{u}_2(\mathbf{x})$ so aus, dass er für alle $\mathbf{x} \in U(\mathbf{0})$ zu einer stabilen Ausregelung in die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ führt. Die Umgebung $U(\mathbf{0})$ wird dabei als Ljapunov-Gebiet ausgelegt. Keine Trajektorie $\mathbf{x}(k)$ verlässt $U(\mathbf{0})$ dann wieder. Eine Ausregelung für ein $\mathbf{x}_0 \notin U(\mathbf{0})$ beginnt mit der prädiktiven Regelung $\mathbf{u}_1(\mathbf{x})$ und schaltet auf den zweiten Regler $\mathbf{u}_2(\mathbf{x})$ um, sobald $\mathbf{x}(k) \in U(\mathbf{0})$ gilt. Bild 5.9 illustriert dieses Regelgesetz.

Das Regelgesetz $\mathbf{u}_2(\mathbf{x})$ kann man z. B. linear auslegen, wobei man eine um $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ linearisierte Streckenbeschreibung zugrunde legt. Regelungen dieser Art mit zwei Regelgesetzen $\mathbf{u}_1$ und $\mathbf{u}_2$ bezeichnet man als *Dual-mode-Regler*. Obige Überlegungen können wir in dem von Sokaert, Mayne und Rawlings [165]

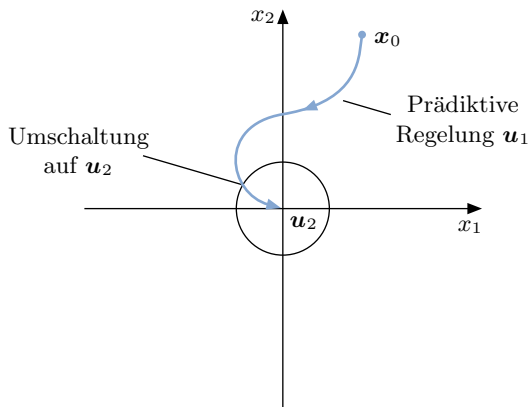


Bild 5.9: Prädiktive Dual-mode-Regelung.

vorgeschlagenen nachfolgenden Dual-mode-MPR-Algorithmus zusammenfassen:

Schritt 1: Wähle ein $\mu \in (0, 1)$.

Schritt 2: Sei $k = 0$. Wenn $\mathbf{x}(0) \in U(\mathbf{0})$, dann setze $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_2(\mathbf{x}(0))$.
Andernfalls finde durch Optimierung von J eine Stellgrößenfolge

$$\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(n_c - 1)$$

mit einer zugehörigen Zustandsgrößenfolge

$$\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(n_c),$$

so dass

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(i) &\in W && \text{für alle } i = 0, \dots, n_c - 1, \\ \mathbf{x}(i) &\in X && \text{für alle } i = 0, \dots, n_c, \\ \mathbf{x}(n_c) &\in U(\mathbf{0}) \end{aligned}$$

gilt. Verwende als aktiven Stellgrößenwert $\mathbf{u}(0)$.

Schritt 3: Sei $k \neq 0$. Wenn $\mathbf{x}(k) \in U(\mathbf{0})$, dann setze $\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}_2(\mathbf{x}(k))$.
Andernfalls finde durch Optimierung von J eine Stellgrößenfolge

$$\mathbf{u}(k), \dots, \mathbf{u}(k + n_c - 1)$$

mit einer zugehörigen Zustandsgrößenfolge

$$\mathbf{x}(k), \dots, \mathbf{x}(k + n_c),$$

so dass

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(i) &\in W && \text{für alle } i = k, \dots, k + n_c - 1, \\ \mathbf{x}(i) &\in X && \text{für alle } i = k, \dots, k + n_c, \\ \mathbf{x}(k + n_c) &\in U(\mathbf{0}) \end{aligned}$$

und

$$J(k) - J(k - 1) < -\mu Q(\mathbf{x}(k - 1), \mathbf{u}(k - 1))$$

gilt. Bei der Optimierung von J wählt man die Stellgrößenfolge des vorherigen Schrittes als Startpunkt. Verwende als aktiven Stellgrößenwert $\mathbf{u}(k)$. Wiederhole Schritt 3.

Es soll an dieser Stelle nicht verschwiegen werden, dass Stabilitätsuntersuchungen bei nichtlinearen MPR in der industriellen Praxis oft vernachlässigt

werden. Oder die Stabilität wird nur simulatorisch für ausgewählte Fälle untersucht.

5.1.6 Beispiel Eindampfanlage

Wir betrachten als Beispiel eine Eindampfanlage, wie sie z.B. zur Herstellung von Sirup in Zuckerfabriken verwendet wird [136, 188]. Wie in Bild 5.10 dargestellt, besteht die Anlage aus einem Verdampfer, einem Abscheider und einem Kondensator. Der Eingangsstoff, Rohsaft aus Zuckerrüben, wird dem Verdampfer zugeführt, der als Wärmetauscher ausgelegt ist. Der Wärmetauscher wird mit Dampf des Druckes P_D beheizt. Der im Verdampfer unter dem Druck P_V erhitzte Ausgangsstoff verlässt diesen als Gemisch aus Dampf und Flüssigkeit und gelangt dann in den Abscheider. In ihm wird der Dampf abgetrennt und in einen Kondensator geleitet. Gekühlt durch Wasser, das mit der Zuflussrate q_C in den Kondensator strömt, kondensiert der Dampf und wird aus der Anlage abgeführt. Das im Abscheider gesammelte Konzentrat hat dort den Füllstand h . Ein Teil dieses Konzentrates mit der

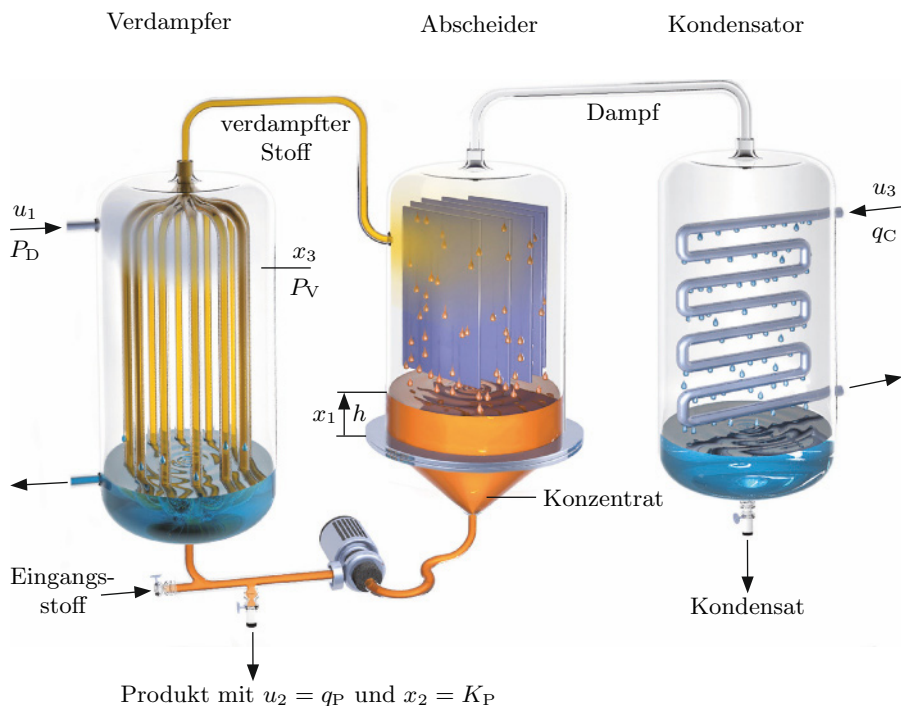


Bild 5.10: Eindampfanlage mit Verdampfer, Abscheider und Kondensator.

Konzentration K_P wird dem Prozess nun mit der Volumenrate q_P als Produkt entnommen. Der weitaus größere Teil wird jedoch, mit dem Eingangsstoff vermischt, dem Verdampfer erneut zugeführt.

Das System lässt sich durch ein nichtlineares Modell dritter Ordnung beschreiben. Dabei sind $x_1 = h$, $x_2 = K_P$ und $x_3 = P_V$ die Zustandsvariablen und $u_1 = P_D$, $u_2 = q_P$ und $u_3 = q_C$ die Stellgrößen des Systems. Wir messen x_1 in m, x_2 in %, x_3 und u_1 in kPa und u_2 sowie u_3 in kg min^{-1} . Das Modell hat die folgende Ausprägung:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_1 x_3 + a_2 x_2 - b_1 u_1 - b_2 u_2 - k_1, \\ \dot{x}_2 &= -a_3 x_2 u_2 + k_2, \\ \dot{x}_3 &= -a_4 x_3 - a_5 x_2 + b_3 u_1 - \frac{a_6 x_3 + b_4}{b_5 u_3 + k_3} u_3 + k_4.\end{aligned}\tag{5.25}$$

Die Parameter des Systems sind

$$\begin{aligned}a_1 &= 0.00751, & b_1 &= 0.00192, & k_1 &= 0.01061, \\ a_2 &= 0.00418, & b_2 &= 0.05, & k_2 &= 2.5, \\ a_3 &= 0.05, & b_3 &= 0.00959, & k_3 &= 6.84, \\ a_4 &= 0.03755, & b_4 &= 0.1866, & k_4 &= 2.5531, \\ a_5 &= 0.02091, & b_5 &= 0.14, \\ a_6 &= 0.00315.\end{aligned}$$

Die Zustandsvariablen sind auch gleichzeitig die Ausgangsvariablen $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$ und $y_3 = x_3$ des Prozesses. Sowohl die Zustandsvariablen als auch die Stellgrößen unterliegen Beschränkungen der Form

$$\begin{aligned}0 \text{ m} &\leq x_1 \leq 2 \text{ m}, \\ 0 \% &\leq x_2 \leq 50 \%, \\ 0 \text{ kPa} &\leq x_3 \leq 100 \text{ kPa}, \\ 0 \text{ kPa} &\leq u_1 \leq 400 \text{ kPa}, \\ 0 \text{ kg min}^{-1} &\leq u_2 \leq 4 \text{ kg min}^{-1}, \\ 0 \text{ kg min}^{-1} &\leq u_3 \leq 400 \text{ kg min}^{-1}.\end{aligned}\tag{5.26}$$

Die Ruhelage $\mathbf{x}_R$ des Systems (5.25) kann über die Stellgrößenwerte

$$\begin{aligned}u_{1R} &= \frac{1}{b_1} \left(a_1 x_{3R} + a_2 x_{2R} - k_1 - \frac{b_2 k_2}{a_3 x_{2R}} \right), \\ u_{2R} &= \frac{k_2}{a_3 x_{2R}}, \\ u_{3R} &= \frac{k_3 (-a_4 x_{3R} - a_5 x_{2R} + k_4 + b_3 u_{1R})}{(a_6 + a_4 b_5) x_{3R} + a_5 b_5 x_{2R} - b_5 k_4 + b_4 - b_3 b_5 u_{1R}}\end{aligned}$$

vorgegeben werden. Im Folgenden wählen wir

$$\mathbf{x}_R = [1 \quad 15 \quad 70]^T,$$

woraus sich

$$\mathbf{u}_R = [214.13 \quad 3.33 \quad 65.40]^T$$

ergibt.

Um eine modellprädiktive Regelung verwenden zu können, legen wir den Regler zeitdiskret aus. Dabei beträgt die Dauer eines Stellgrößenschrittes $T = 1$ min.

Wir wählen für den Prädiktions- und den Stellhorizont $n_p = n_c = 5$ und als Gütefunktion

$$J(k) = \sum_{i=k}^{k+4} (\mathbf{x}(i) - \mathbf{x}_R)^T \mathbf{Q} (\mathbf{x}(i) - \mathbf{x}_R) + r (\mathbf{u}(i) - \mathbf{u}_R)^T (\mathbf{u}(i) - \mathbf{u}_R).$$

Dabei ist

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

und $r = 0.1$. Die Gütefunktion mit den Nebenbedingungen (5.26) wandeln wir mittels einer Barrierefunktion so um, dass die nicht beschränkte Gütefunktion

$$\tilde{J}(k) = \begin{cases} J(k), & \text{wenn alle } \mathbf{x}(i), \mathbf{u}(i), i = 1, \dots, 4, \text{ die Gl.(5.26) erfüllen,} \\ \infty, & \text{wenn ein } \mathbf{x}(i), \mathbf{u}(i), i = 1, \dots, 4, \text{ die Gl.(5.26) nicht erfüllt,} \end{cases}$$

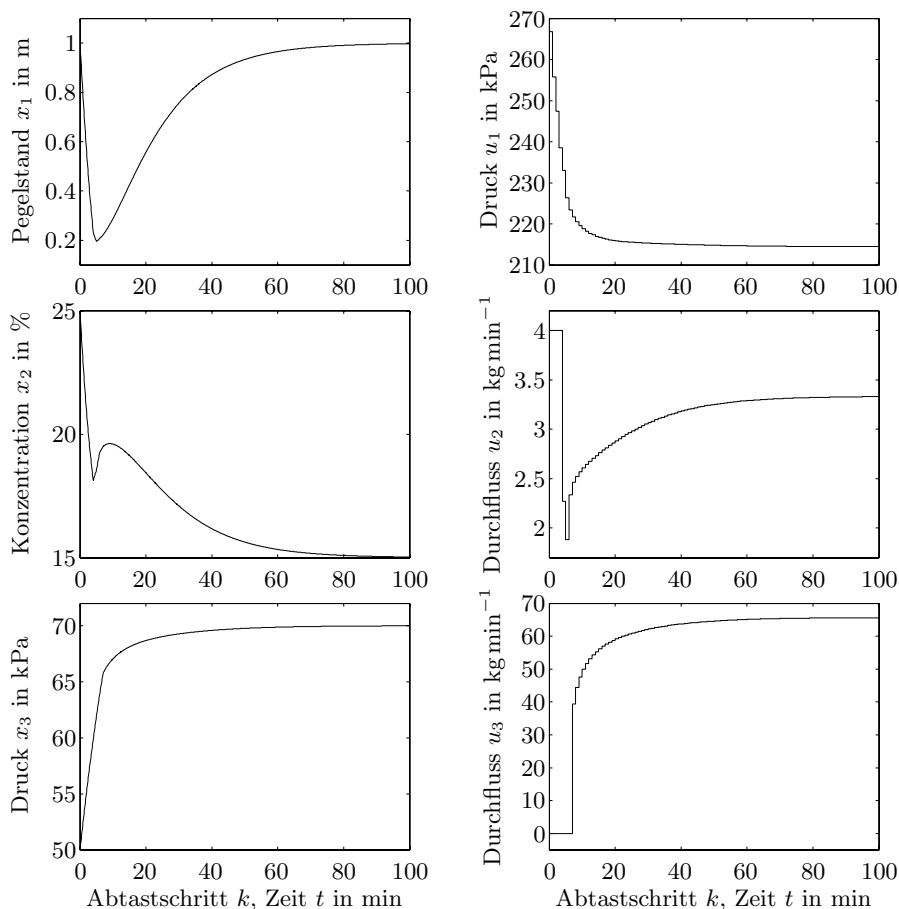
zu minimieren ist. Das Gütemaß $\tilde{J}$ lässt sich aufgrund der kartesischen Begrenzungen durch Gl. (5.26) effizient mit dem Optimierungsverfahren von Hooke und Jeeves [74, 164] minimieren. Die dabei nötige numerische Lösung der Systemgleichung (5.25) führen wir mittels des Verfahrens von Euler-Cauchy mit einer Schrittweite von 2.4 s aus.

Eine Stabilitätsuntersuchung für diese NMPR wäre kompliziert und sehr aufwendig. Daher verzichten wir auf sie. Theoretisch ist das unbefriedigend, in der Praxis aber, wie erwähnt, häufig anzutreffen.

Wir betrachten den auszuregelnden Anfangszustand

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 25 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

Die Ausregelverläufe und Stellgrößenverläufe, die die MPR bewirkt, zeigt Bild 5.11. Neben der guten Ausregelung erkennt man des Weiteren, dass alle Beschränkungen (5.26) für x_1 , x_2 , x_3 , u_1 , u_2 und u_3 eingehalten werden. Insbesondere gilt das für die Durchflüsse u_2 und u_3 , die jeweils 4 min und 7 min auf ihrem maximalen und minimalen Wert von $u_2 = 4 \text{ kg min}^{-1}$ und $u_3 = 0 \text{ kg min}^{-1}$ gehalten werden.

Bild 5.11: Eindampfanlage mit prädiktiver Regelung mit Abtastzeit $T = 1$ min.

5.2 Strukturvariable Regelungen mit Gleitzustand

5.2.1 Funktionsweise und Eigenschaften

Gleitzustandsregler^[1], auch *Sliding-mode-Regler* genannt, schalten zwischen zwei Regelgesetzen in Abhängigkeit vom Zustandsvektor hin und her. Dabei treten Gleitzustände auf, die als Vorteil die Robustheit der Regelung gegenüber Parameterschwankungen der Regelstrecke aufweisen. Nachteilig ist

^[1] In der englischsprachigen Literatur werden Gleitzustandsregler meistens als „*variable-structure-controls*“ bezeichnet. Strukturvariable Regelungen umfassen allerdings, wie in Kapitel 3.3 beschrieben, eine viel größere Klasse von Regelungen als nur Gleitzustandsregler.

das hochfrequente Schalten des Stellgliedes. Dies führt häufig zu vorzeitigem Verschleiß.

Ursprünglich zur Regelung linearer Systeme gedacht, wurden später Erweiterungen für nichtlineare Regelstrecken vorgenommen. Wir betrachten im Weiteren zuerst lineare Regelstrecken, da anhand dieser Systeme die wesentlichen Grundlagen der Gleitzustandsregelung erfassbar sind. Darauf aufbauend werden im Abschnitt 5.2.6 dann auch nichtlineare Regelstrecken in die Betrachtungen einbezogen.

Um das Prinzip der Gleitzustandsregelung zu erläutern, wird zu Beginn als einfaches Beispiel die Regelstrecke

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= a \cdot u, \quad a > 0,\end{aligned}\tag{5.27}$$

mit dem Regler

$$u = -u_{\max} \operatorname{sgn}(x_2 + mx_1)\tag{5.28}$$

betrachtet. Hierbei sind $u_{\max}$ und m reelle Konstanten des Reglers. Betrachtet man obigen Regelkreis in der Zustandsebene, so lässt sich feststellen, dass das Regelgesetz die Zustandsebene durch die Schaltgerade

$$x_2 = -mx_1\tag{5.29}$$

in zwei Bereiche teilt. Unterhalb der Schaltgeraden gilt

$$u = u_{\max},$$

oberhalb

$$u = -u_{\max}.$$

Bild 5.12 zeigt beispielhaft die Schaltgerade (5.29) und die Trajektorien der Regelstrecke für die Stellgrößen $u = \pm u_{\max}$, die der Regler (5.28) ausgeben kann.

Für die Trajektorien $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$ des Systems ergeben sich Parabeläste. Um sie zu bestimmen, ermittelt man für $u = u_{\max}$ die Lösungen der Differenzialgleichungen (5.27) zu

$$x_2 = x_2(0) + \int_0^t au_{\max} d\tau = au_{\max}t + x_2(0),\tag{5.30}$$

$$x_1 = x_1(0) + \int_0^t x_2 d\tau = \frac{1}{2}au_{\max}t^2 + x_2(0)t + x_1(0).\tag{5.31}$$

Aus Gl. (5.30) resultiert

$$t = \frac{x_2 - x_2(0)}{au_{\max}}.$$

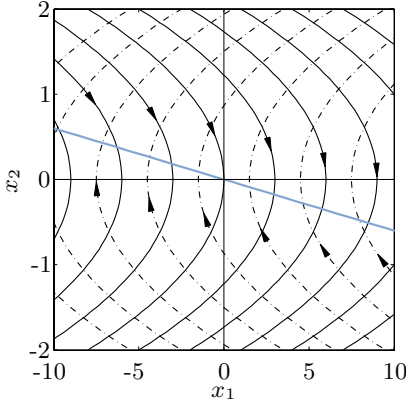


Bild 5.12: Systemtrajektorien für $u = -u_{\max}$ (durchgezogen) und für $u = u_{\max}$ (strichpunktiert) sowie die blau dargestellte Schaltgerade.

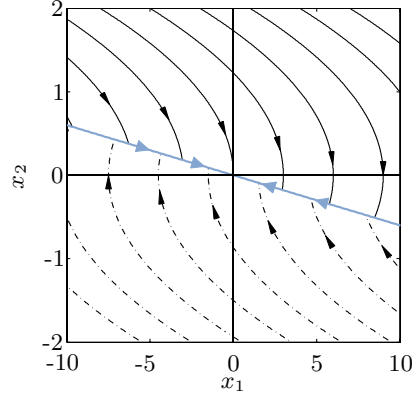


Bild 5.13: Trajektorien des Regelkreises mit blau dargestelltem Gleitzustand. Oberhalb der Schaltgeraden ist $u = -u_{\max}$, unterhalb gilt $u = u_{\max}$.

Eingesetzt in Gl. (5.31) ergibt sich

$$x_1 = \frac{x_2^2}{2au_{\max}} - \frac{x_2(0)^2}{2au_{\max}} + x_1(0).$$

Die Parabeläste sind also symmetrisch zur x_2 -Achse, d. h., sie haben ihre Scheitelpunkte auf der x_2 -Achse. Für den Fall $u = -u_{\max}$ ergibt sich analog

$$x_1 = -\frac{x_2^2}{2au_{\max}} + \frac{x_2(0)^2}{2au_{\max}} + x_1(0).$$

Das Regelgesetz (5.28) bewirkt, dass die Trajektorien von beiden Seiten auf die Schaltgerade $x_2 = -mx_1$ zulaufen. Bild 5.13 illustriert dies für den Wert $m = 0.06$. Dieser Trajektorienverlauf verursacht nach dem Auftreffen auf die Schaltgerade ein ständiges Hin- und Herschalten zwischen $-u_{\max}$ und $u_{\max}$. Dabei gleitet die Trajektorie $\mathbf{x}(t)$ auf der Schaltgeraden in die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$. Beschrieben wird die Dynamik des Gleitens durch die Schaltgerade (5.29) selbst, die über

$$x_2 = \dot{x}_1 = -mx_1 \quad (5.32)$$

eine Dynamik vorgibt. Theoretisch wechselt die Trajektorie dabei unendlich schnell mit infinitesimal kleiner Auslenkung von einer Seite der Schaltgeraden zur anderen.

Dabei tritt ein Schalten zwischen $-u_{\max}$ und $u_{\max}$ mit unendlich hoher Frequenz auf, das als *Rattern* bezeichnet wird. In der Praxis ist die Schaltfrequenz natürlich nicht unendlich groß, sondern hängt von der Geschwindigkeit des Stellglieds ab. Das Rattern ist, wie schon erwähnt, ein eklatanter Nachteil der Gleitzustandsregelung, denn mechanische Stellglieder verschleifen dadurch schnell.

Die Regelung hat aber auch einen Vorteil, denn im Gleitzustand ist die Regelung robust gegen Variationen der Regelstrecke. D. h., die Regelkreisdynamik ist immer dieselbe, auch wenn sich die Regelstrecke ändert. So liegt beim vorangegangenen Beispiel im Gleitzustand mit Gl. (5.32) die Dynamik

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -mx_1, \\ \dot{x}_2 &= \dot{x}_1 = -m\dot{x}_1 = m^2x_1 = -mx_2\end{aligned}$$

vor. Diese Dynamik ist also unabhängig vom Parameter a der Regelstrecke (5.27).

5.2.2 Entwurf für lineare Regelstrecken

Der Ausregelvorgang einer Gleitzustandsregelung kann in drei Bereiche unterteilt werden:

- (1) die Eintreffphase, in der die Trajektorien auf die Schaltgerade bzw. Schalthyperebene zulaufen und sie in endlicher Zeit erreichen,
- (2) die Gleitzustandsphase, in der die Trajektorie auf der Schalthyperebene in die Ruhelage gleitet und
- (3) die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$, in der das System stabil verbleibt.

Für eine global stabile Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ muss sichergestellt sein, dass alle Trajektorien des Systems in endlicher Zeit auf die Schaltebene und dann im Gleitzustand in die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ laufen.

Wir betrachten, wie erwähnt, lineare Regelstrecken

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

mit einer Schaltfläche

$$s(\mathbf{x}) = 0$$

und dem Regelgesetz

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} u_+(\mathbf{x}) & \text{für } s(\mathbf{x}) > 0, \\ u_-(\mathbf{x}) & \text{für } s(\mathbf{x}) < 0. \end{cases}$$

Die Stellgröße u ist hierbei nicht für $s(\mathbf{x}) = 0$ definiert. In den meisten Fällen verwendet man als Schaltfunktion

$$s(\mathbf{x}) = \mathbf{r}^T \mathbf{x},$$

also eine Schaltfläche $\mathbf{r}^T \mathbf{x} = 0$.

Als erstes soll die Erreichbarkeit der Schaltfläche für alle Trajektorien des Zustandsraumes sichergestellt werden. Eine notwendige Bedingung hierfür ist, dass die Trajektorien des Regelkreises von beiden Seiten auf die Schaltfläche zulaufen, so wie es Bild 5.13 zeigt. D. h., es muss

$$\dot{s} < 0 \quad \text{für} \quad s(\mathbf{x}) > 0$$

und

$$\dot{s} > 0 \quad \text{für} \quad s(\mathbf{x}) < 0$$

gelten. Fasst man beide Bedingungen zusammen, so erhält man

$$s\dot{s} < 0$$

als Bedingung für einen Gleitzustand. Hierbei gilt

$$\dot{s} = \text{grad}^T s(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}}$$

und für den Fall $s(\mathbf{x}) = \mathbf{r}^T \mathbf{x}$ ergibt sich dann $\dot{s} = \mathbf{r}^T \dot{\mathbf{x}}$. Leider sichert die Bedingung $s\dot{s} < 0$ nicht für jeden denkbaren Fall, dass die Trajektorien die Schaltebene $s(\mathbf{x}) = 0$ in endlicher Zeit erreichen. Die Bedingung ist also notwendig, aber nicht hinreichend für eine funktionsfähige Gleitzustandsregelung.

Es gibt verschiedene Ansätze, die Erreichbarkeit der Schaltfläche für alle Trajektorien in endlicher Zeit zu gewährleisten. Ein sehr verbreiteter Ansatz ist der von Gao und Hung [58]. Hier wird die Abnahme $\dot{s}(\mathbf{x})$ der Schaltfunktion entlang der Trajektorien $\mathbf{x}(t)$ vorgegeben. Es gilt

$$\dot{s}(\mathbf{x}) = -q \text{sgn}(s(\mathbf{x})) - k s(\mathbf{x}) \quad (5.33)$$

mit positiven Konstanten q und k . Offensichtlich erfüllt im Falle der Gl. (5.33) die Schaltfläche s die notwendige Bedingung

$$s\dot{s} = -q|s| - k \cdot s^2 < 0.$$

Da s aufgrund der Wahl von $\dot{s}$ in Gl. (5.33) auch für sehr kleine Werte von $|s|$ eine Abnahmerate $\dot{s} < -q$ bzw. eine Zunahmerate von $\dot{s} > q$ aufweist, erreichen die Trajektorien $\mathbf{x}(t)$ die Schaltfläche auch in endlicher Zeit.

Berücksichtigt man, dass

$$\dot{s}(\mathbf{x}) = \text{grad}^T s(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}} = \text{grad}^T s(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u)$$

ist, so erhält man aus Gl. (5.33) für das Regelgesetz

$$u(\mathbf{x}) = -\frac{\text{grad}^T s(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}\mathbf{x} + q \text{sgn}(s(\mathbf{x})) + k s(\mathbf{x})}{\text{grad}^T s(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}}.$$

Für den Fall einer Schalthyperebene als Schaltfläche

$$s(\mathbf{x}) = \mathbf{r}^T \mathbf{x} = 0$$

ergibt sich

$$u(\mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{r}^T \mathbf{A}\mathbf{x} + q \text{sgn}(\mathbf{r}^T \mathbf{x}) + k \mathbf{r}^T \mathbf{x}}{\mathbf{r}^T \mathbf{b}}.$$

Durch die frei wählbaren positiven Parameter q und k kann die Regeldynamik günstig beeinflusst werden.

Es sei angemerkt, dass Gleitzustandsregler auch für Systeme mit mehreren Eingangsgrößen, also für

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u},$$

entworfen werden können [80, 160, 189].

5.2.3 Dynamik im Gleitzustand

Wenn die Trajektorien $\mathbf{x}(t)$ die Schaltfläche erreichen und der Gleitzustand einsetzt, stellt sich die Frage, welche Dynamik der Regelkreis im Gleitzustand besitzt. Problematisch bei der Betrachtung dieser Frage ist die Unstetigkeit der Differenzialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad u(\mathbf{x}) = \begin{cases} u_+(\mathbf{x}) & \text{für } s(\mathbf{x}) > 0, \\ u_-(\mathbf{x}) & \text{für } s(\mathbf{x}) < 0, \end{cases}$$

des geschlossenen Regelkreises auf der Schaltfläche

$$s(\mathbf{x}) = \mathbf{r}^T \mathbf{x} = 0.$$

Die Differenzialgleichung ist offensichtlich auf der Schaltfläche nicht definiert, d. h., die Existenz und Eindeutigkeit ihrer Lösung ist dort nicht gesichert. Es existieren verschiedene Verfahren [80] dieses Problem zu lösen, wie z. B. die Methode von Filippov [47].

Wir bestimmen die Dynamik des Systems im Gleitzustand hier nach der folgenden, häufig verwendeten Methode. Man transformiert die Regelstrecke in die Regelungsnormalform

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n, \\ \dot{x}_n &= -a_0x_1 - a_1x_2 - \dots - a_{n-1}x_n + u. \end{aligned} \tag{5.34}$$

Des Weiteren löst man die Gleichung der Schaltfläche

$$\mathbf{r}^T \mathbf{x} = r_1x_1 + \dots + r_{n-1}x_{n-1} + r_nx_n = 0 \tag{5.35}$$

nach x_n auf, d. h., es gilt

$$x_n = -r_1x_1 - \dots - r_{n-1}x_{n-1}. \tag{5.36}$$

Der Koeffizient r_n wurde dabei, $r_n \neq 0$ vorausgesetzt, ohne Einschränkung der Allgemeinheit zu $r_n = 1$ gewählt werden.

Nun substituiert man in der Regelungsnormalform (5.34) der Strecke die Zustandsgröße x_n durch Gl. (5.36) und erhält das Differenzialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-2} &= x_{n-1}, \\ \dot{x}_{n-1} &= -r_1 x_1 - \dots - r_{n-1} x_{n-1},\end{aligned}\tag{5.37}$$

das die Dynamik des Regelkreises im Gleitzustand beschreibt. Man beachte, dass die Zustandsgröße x_n in diesem Fall durch die algebraische Gleichung (5.36) gegeben ist und die Gleichung für $\dot{x}_n$ daher entfällt. Die Differenzialgleichungen (5.37) sind nicht mehr von den Parametern a_i der Regelstrecke abhängig. D. h., der Regelkreis (5.37) ist robust gegenüber Parameterschwankungen der Regelstrecke. Beachtenswert ist darüber hinaus, dass sich die Systemordnung um einen Grad auf die Ordnung $n - 1$ verringert hat und die Koeffizienten r_i der Schaltfläche (5.35) die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms der linearen Dynamik (5.37) im Falle des Gleitzustandes bilden.

5.2.4 Nachweis der Robustheit

Der wesentliche Vorteil von Sliding-mode-Reglern ist ihre Robustheit gegenüber Variationen $\Delta \mathbf{A}$ der Regelstreckenparameter oder äußeren Störungen $\mathbf{d}(t)$, wenn diese in der Systembeschreibung

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}) \mathbf{x} + \mathbf{b}u + \mathbf{d}$$

auftauchen. D. h., die Dynamik des geschlossenen Regelkreises hängt, wie in Gl. (5.37), im Gleitzustand nur von den Parametern r_i der Schaltfläche $s(\mathbf{x}) = \mathbf{r}^T \mathbf{x}$ ab. Die Dynamik ist unabhängig von $\Delta \mathbf{A}$ und $\mathbf{d}$.

Wenn die folgenden Bedingungen beide erfüllt sind [39], stellt sich die oben beschriebene Robustheit auch wirklich ein:

- (1) Es gibt einen Vektor $\mathbf{p}$, so dass $\Delta \mathbf{A} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{p}^T$ gilt.
- (2) Es gibt ein $\alpha(t)$, so dass $\mathbf{d}(t) = \mathbf{b} \cdot \alpha(t)$ gilt.

Wenn das System beispielsweise in Regelungsnormalform

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

vorliegt, ist die Bedingung $\Delta \mathbf{A} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{p}^T$ offensichtlich erfüllbar, falls nur die Koeffizienten a_i variieren.

5.2.5 Beispiel DC-DC-Wandler

Ein DC-DC-Wandler, auch Gleichstromsteller oder getakteter Spannungssteller genannt, dient dazu, eine Gleichspannung in eine niedrigere bzw. höhere Spannung umzuwandeln. Dabei soll er möglichst verlustarm arbeiten. Wir betrachten einen Abwärtswandler [178], also einen Wandler, der eine Spannung u_e in eine niedrigere Spannung u_a umwandelt. Bild 5.14 zeigt einen solchen Wandler einschließlich des zugehörigen Reglers.

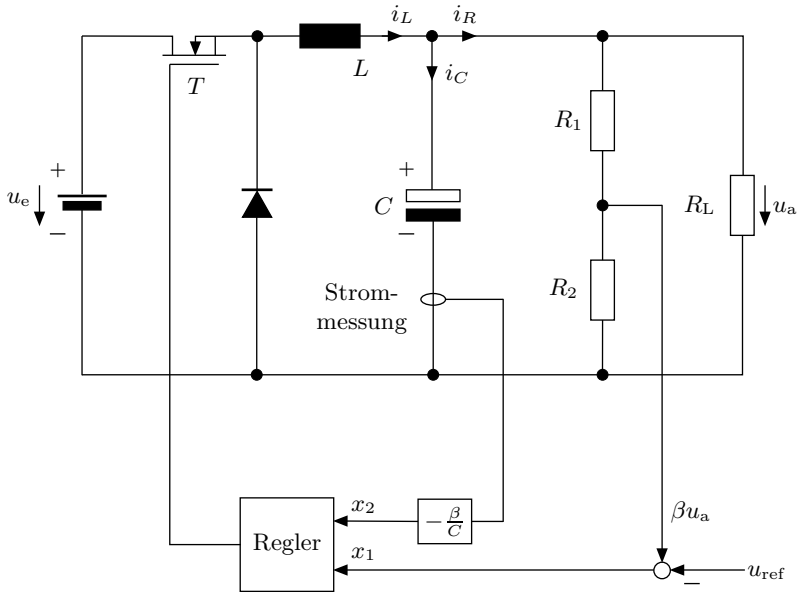


Bild 5.14: DC-DC-Wandler.

Aufgabe der Schaltung ist es, die Ausgangsspannung u_a auf Basis einer konstanten Referenzspannung u_{ref} so einzustellen, dass

$$\beta u_a = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_a = u_{\text{ref}} \quad (5.38)$$

gilt. Zu diesem Zweck wird ein Leistungs-MOSFET, im Bild 5.14 mit T gekennzeichnet, als Schalter benutzt und über den Regler ein- bzw. ausgeschaltet. Eine Schaltvariable z kennzeichnet den Schaltzustand des Transistors T . Ist $z = 1$, so leitet der Transistor. Ist $z = 0$, so ist der Transistor gesperrt. Dabei wird eine Pulsweitenmodulation (PWM) durchgeführt. Diese bewirkt in der Induktivität L einen kontinuierlichen Stromfluss i_L so, dass die Spannung βu_a über R_2 der Referenzspannung u_{ref} entspricht, d. h., Gl. (5.38) erfüllt ist.

Für die Ableitung $\dot{u}_a$ der Spannung über dem Lastwiderstand R_L bzw. dem Glättungskondensator C gilt

$$\dot{u}_a = \frac{1}{C} i_C = \frac{1}{C} (i_L - i_R) = \frac{1}{C} \left(\int \frac{u_e z - u_a}{L} dt - \frac{u_a}{R_G} \right). \quad (5.39)$$

Dabei ist

$$R_G = \frac{(R_1 + R_2)R_L}{R_1 + R_2 + R_L}.$$

Man erhält aus Gl. (5.39)

$$\ddot{u}_a = -\frac{1}{LC} u_a - \frac{1}{R_G C} \dot{u}_a + \frac{u_e z}{LC}. \quad (5.40)$$

Wir definieren als Zustandsvariablen

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta u_a - u_{\text{ref}}, \\ x_2 &= \dot{x}_1 = \beta \dot{u}_a. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Mit den Gl. (5.40) und (5.41) ergibt sich das Zustandsraummodell

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{1}{R_G C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u, \quad (5.42)$$

wobei sich die Stellgröße u aus

$$u = \beta u_e z - u_{\text{ref}} \quad (5.43)$$

ergibt.

Das System (5.42), (5.43) ist ideal für die Anwendung einer Gleitzustandsregelung. Denn zum einen ist durch die digitale Stellgröße z schon ein Schaltvorgang vorgegeben. Zum anderen verträgt der Leistungstransistor ein hochfrequentes Schalten, wie es bei Gleitzuständen auftritt. Ziel der Regelung ist das Erreichen des Arbeitspunktes

$$x_1 = \beta u_a - u_{\text{ref}} = 0, \quad (5.44)$$

d. h. $u_a = u_{\text{ref}}/\beta$.

Das System (5.42) besitzt jeweils eine stabile Ruhelage $\mathbf{x}_R$ für $z = 1$ und $z = 0$. Im Fall $z = 1$ ist

$$\mathbf{x}_{R1} = \begin{bmatrix} \beta u_e - u_{\text{ref}} \\ 0 \end{bmatrix},$$

was nach Gl. (5.41) einer Ausgangsspannung von $u_a = u_e$ entspricht. Im Fall $z = 0$ gilt

$$\mathbf{x}_{R2} = \begin{bmatrix} -u_{\text{ref}} \\ 0 \end{bmatrix},$$

woraus nach Gl. (5.41) eine Ausgangsspannung $u_a = 0$ resultiert. Man beachte, dass der zu erreichende Arbeitspunkt (5.44) des Regelkreises nicht mit einer der beiden Ruhelagen der Regelstrecke identisch ist.

Wir wollen nun auch die Trajektorien $\mathbf{x}(t)$ des Wandlers betrachten. Für $z = 1$ ergeben sie sich aus Gl. (5.42) und sind in Bild 5.15 dargestellt. Für $z = 0$ ergeben sich die Trajektorien ebenfalls als Lösungen von Gl. (5.42), solange $i_L > 0$ gilt. Ist die in der Spule gespeicherte Energie verbraucht, so wird $i_L = 0$. Dann sperrt die Diode und der Kondensator C entlädt sich gemäß

$$\dot{u}_a + \frac{1}{R_G C} u_a = 0,$$

woraus mit $u_{a0} = u_a(0)$ die Beziehung

$$u_a = u_{a0} e^{-t/(R_G C)}$$

folgt. Für die Trajektorien $\mathbf{x}(t)$ gilt dann mit Gl. (5.41)

$$x_1(t) = \beta u_{a0} e^{-t/(R_G C)} - u_{\text{ref}}, \quad (5.45)$$

$$x_2(t) = \frac{-\beta u_{a0}}{R_G C} e^{-t/(R_G C)} \quad (5.46)$$

und somit durch Einsetzen von Gl. (5.45) in Gl. (5.46)

$$x_2 = -\frac{1}{R_G C} x_1 - \frac{u_{\text{ref}}}{R_G C}. \quad (5.47)$$

Im Fall $z = 0$ setzen sich die Trajektorien $\mathbf{x}(t)$ also aus zwei Teilstücken zusammen. Solange $i_L > 0$ gilt, resultieren die Trajektorien aus den Lösungen von Gl. (5.42). Wird $i_L = 0$, so laufen die Trajektorien auf die Gerade (5.47) und auf ihr gemäß den Gl. (5.45) und (5.46) in die Ruhelage $\mathbf{x}_{R2}$. Bild 5.16 zeigt die Trajektorien hierzu.

Man wählt nun eine Schaltgerade

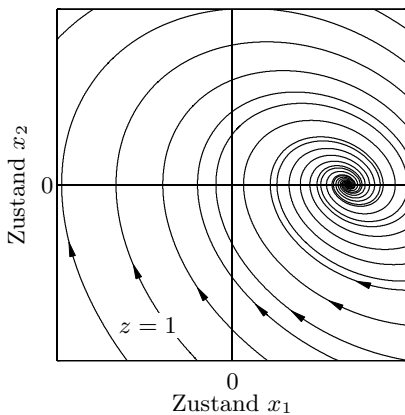


Bild 5.15: Ruhelage $\mathbf{x}_{R1}$ und Trajektorien für den Fall $z = 1$.

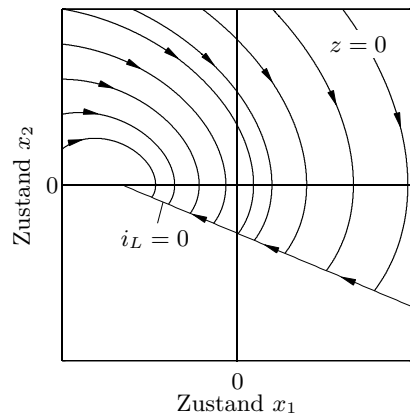


Bild 5.16: Ruhelage $\mathbf{x}_{R2}$ und Trajektorien für den Fall $z = 0$.

$$s(\mathbf{x}) = r_1 x_1 + x_2 = 0 \quad (5.48)$$

mit $r_1 > 0$ und teilt so den Zustandsraum in zwei Bereiche. In einem Bereich gilt $z = 0$, im anderen $z = 1$, gemäß

$$z = \begin{cases} 0 & \text{für } s(\mathbf{x}) > 0, \\ 1 & \text{für } s(\mathbf{x}) < 0. \end{cases}$$

Bild 5.17 zeigt beide Bereiche und die jeweiligen Trajektorien. Bild 5.17 ist dabei jeweils zur Hälfte aus den Bildern 5.15 und 5.16 zusammengesetzt. An der Schaltgeraden tritt ein Gleitzustand auf.

Wir wollen im Weiteren aus der notwendigen Bedingung für die Existenz eines Gleitzustandes, $s\dot{s} < 0$, den Parameter r_1 der Schaltgeraden (5.48) bestimmen. Aus

$$s\dot{s} = s(\mathbf{x}) \cdot \text{grad}^T s(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}} < 0$$

und den Systemgleichungen (5.42) und (5.43) folgt

$$s\dot{s} = s(\mathbf{x}) \left[\left(r_1 - \frac{1}{R_G C} \right) x_2 - \frac{1}{LC} x_1 + \frac{\beta u_e z - u_{\text{ref}}}{LC} \right] < 0. \quad (5.49)$$

Man wählt

$$r_1 = \frac{1}{R_G C},$$

denn dann ist die Existenzbedingung (5.49) unabhängig von $x_2 = \beta \dot{u}_a$. Es ergibt sich mit dieser Wahl von r_1 für Gl. (5.49) unter Nutzung der Gl. (5.41) die Bedingung

$$s\dot{s} = s(\mathbf{x}) \frac{\beta}{LC} (u_e z - u_a) < 0. \quad (5.50)$$

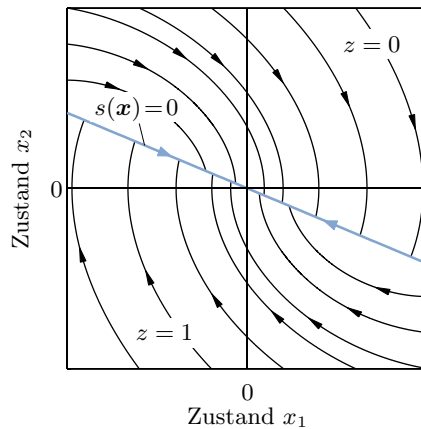


Bild 5.17: Trajektorien, Schaltgerade (blau) und Gleitzustand des DC-DC-Wandlers.

Aus dieser Bedingung erhalten wir im Fall $s(\mathbf{x}) < 0$ und $z = 1$

$$u_e > u_a. \quad (5.51)$$

Im Fall $s(\mathbf{x}) > 0$ und $z = 0$ erhält man aus der Bedingung (5.50)

$$u_a > 0. \quad (5.52)$$

Da die Gl. (5.51) und (5.52) offensichtlich erfüllt sind, ist es die notwendige Bedingung (5.50) für die Existenz des Gleitzustandes ebenfalls. Weil des Weiteren

$$\dot{s} = \frac{\beta}{LC}(u_e z - u_a)$$

immer eine Abnahmerate von $-u_a\beta/LC < 0$ für $s(\mathbf{x}) > 0$ und $z = 0$ bzw. eine Zunahmerate von $(u_e - u_a)\beta/LC > 0$ für $s(\mathbf{x}) < 0$ und $z = 1$ aufweist, streben die Trajektorien der Regelung auch in endlicher Zeit in den Gleitzustand.

Die Dynamik des geregelten Wandlers im Gleitzustand ergibt sich aus $s(\mathbf{x}) = r_1 x_1 + x_2 = 0$ und $x_2 = \dot{x}_1$ zu

$$x_1(t) = x_1(0)e^{-r_1 t}, \quad (5.53)$$

d. h., die Dynamik im Gleitzustand ist unabhängig von Änderungen des Lastwiderstandes R_L oder Schwankungen der Eingangsspannung, d. h. der Batteriespannung u_e .

Wir betrachten eine konkrete Ausführung mit den Parametern $u_e = 24\text{ V}$, $C = 100\text{ }\mu\text{F}$, $L = 110\text{ }\mu\text{H}$, $R_L = 6\text{ }\Omega$, $u_a = 12\text{ V}$ und $u_{\text{ref}} = 3.3\text{ V}$. Somit ist $\beta = u_{\text{ref}}/u_a = 0.275$. Aus $R_2 = \beta R_1/(1 - \beta)$ und $R_1 = 870\text{ }\Omega$ ergibt sich $R_2 = 330\text{ }\Omega$. Die Zeitkonstante $1/r_1$ im Gleitzustand beträgt 0.6 ms .

In Bild 5.18 ist der Verlauf einer Ausregelung für den Fall einer plötzlichen Abnahme der Eingangsspannung u_e um 3 V dargestellt. Wie erwartet, ändert

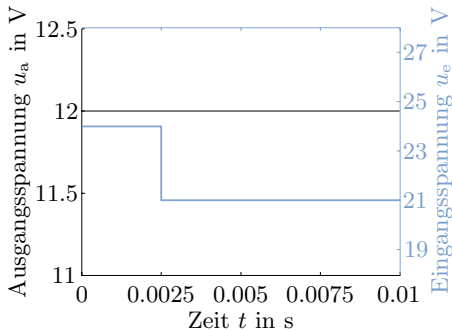


Bild 5.18: Ausregelung der Ausgangsspannung u_a nach einem Abfall der Eingangsspannung u_e .

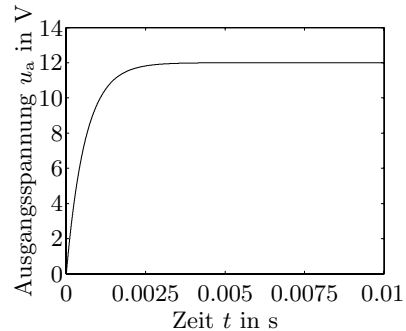


Bild 5.19: Verlauf der Ausgangsspannung u_a nach Einschalten des Wandlers.

sich die Ausgangsspannung u_a nicht. In realen Geräten ist ein Spannungsabfall von einigen 10 mV zu beobachten. Bild 5.19 zeigt den Einschaltverlauf. Der Ausgangswert von $u_a = 12 \text{ V}$ ist nach einer Zeit von ungefähr $5/r_1 = 3 \text{ ms}$ erreicht.

5.2.6 Entwurf für nichtlineare Regelstrecken

Der Entwurf von Gleitzustandsreglern für nichtlineare Regelstrecken ist in bestimmten Fällen nicht schwieriger als der für lineare Regelstrecken. Dies gilt beispielsweise für eingangslineare Regelstrecken

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot u, \\ y &= c(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{5.54}$$

mit einem relativen Grad von $\delta = n$. Für $\delta < n$ ist der Entwurf ähnlich.

Die obige Systemdarstellung überführen wir, wie in Abschnitt 4.2.1 im Fall des Reglerentwurfes mittels exakter Linearisierung, in die nichtlineare Regelungsnormalform. Zu diesem Zweck verwenden wir die Lie-Derivierte

$$L_f h(\mathbf{x}) = \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \text{grad}^T h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}y &= c(\mathbf{x}), \\ \dot{y} &= \frac{\partial c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = L_a c(\mathbf{x}), \\ \ddot{y} &= \frac{\partial L_a c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = L_a^2 c(\mathbf{x}), \\ &\vdots \\ y^{(n-1)} &= \frac{\partial L_a^{n-2} c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = L_a^{n-1} c(\mathbf{x}), \\ y^{(n)} &= \frac{\partial L_a^{n-1} c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = L_a^n c(\mathbf{x}) + L_b L_a^{n-1} c(\mathbf{x}) \cdot u\end{aligned}$$

und erhalten mit den neuen Zustandskoordinaten $z_1 = y, z_2 = \dot{y}, \dots, z_n = y^{(n-1)}$ und der daraus folgenden Transformation $\mathbf{z} = \mathbf{t}(\mathbf{x})$ die Darstellung des Systems (5.54) in nichtlinearer Regelungsnormalform

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ L_a^n c(\mathbf{x}) + L_b L_a^{n-1} c(\mathbf{x}) \cdot u \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ \alpha(\mathbf{z}) \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{z})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta(\mathbf{z}) \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{z})} u \tag{5.55}$$

mit $\alpha(\mathbf{z}) = L_{\mathbf{a}}^n c(\mathbf{t}^{-1}(\mathbf{z}))$ und $\beta(\mathbf{z}) = L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{a}}^{n-1} c(\mathbf{t}^{-1}(\mathbf{z}))$.

Der Entwurf eines Gleitzustandsreglers mit der Schaltfläche $s(\mathbf{z}) = 0$ geschieht ähnlich wie im linearen Fall. Wir verwenden wieder den Ansatz

$$\dot{s}(\mathbf{z}) = -q \operatorname{sgn}(s(\mathbf{z})) - ks(\mathbf{z}) \quad (5.56)$$

von Gao und Hung. Dieser, wir erinnern uns, stellt sicher, dass die Trajektorien $\mathbf{z}(t)$ die Schaltfläche in endlicher Zeit erreichen. Es gilt $q > 0$ und $k > 0$.

Unter Verwendung von $\dot{s}(\mathbf{z}) = \operatorname{grad}^T s(\mathbf{z}) \cdot \dot{\mathbf{z}}$ und Gl. (5.55) sowie Gl. (5.56) ergibt sich für das Regelgesetz

$$u(\mathbf{z}) = - \frac{\operatorname{grad}^T s(\mathbf{z}) \cdot \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{z}) + q \operatorname{sgn}(s(\mathbf{z})) + ks(\mathbf{z})}{\operatorname{grad}^T s(\mathbf{z}) \cdot \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{z})}.$$

Für den Fall einer Schalthyperebene $s(\mathbf{z}) = \mathbf{r}^T \mathbf{z} = 0$ vereinfacht es sich zu

$$u(\mathbf{z}) = - \frac{\mathbf{r}^T \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{z}) + q \operatorname{sgn}(\mathbf{r}^T \mathbf{z}) + k \mathbf{r}^T \mathbf{z}}{\mathbf{r}^T \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{z})}. \quad (5.57)$$

Setzen wir nun $\mathbf{r}^T = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_{n-1} \ 1]$, so gilt für Gl. (5.57)

$$u(\mathbf{z}) = - \frac{r_1 z_2 + \dots + r_{n-1} z_n + k \mathbf{r}^T \mathbf{z} + \alpha(\mathbf{z}) + q \operatorname{sgn}(\mathbf{r}^T \mathbf{z})}{\beta(\mathbf{z})}. \quad (5.58)$$

Eingesetzt in die Regelstrecke (5.55) ergibt sich so für den Regelkreis

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ -kr_1 z_1 - (r_1 + kr_2) z_2 - \dots - (r_{n-1} + k) z_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q \operatorname{sgn}(\mathbf{r}^T \mathbf{z}) \end{bmatrix}.$$

Dieser Regelkreis ist frei von Nichtlinearitäten der Regelstrecke. Weiterführendes, z. B. für nichtlineare MIMO-Systeme, findet sich in [33, 58, 145, 170].

5.2.7 Beispiel optischer Schalter

Wir entwerfen im Weiteren einen Gleitzustandsregler für einen optischen Schalter. Dieser ist als mikro-elektro-mechanisches System, abgekürzt MEMS, ausgelegt und dient dazu, die Lichtbahn zwischen verschiedenen Lichtwellenleitern umzuschalten [24, 141]. So ist es möglich, ein optisches Signal ohne Wandlung in ein elektrisches und wieder zurück von einem Lichtwellenleiter in einen anderen zu leiten.

Das Bild 5.20 zeigt den Aufbau eines solchen optischen Schalters. Der Kammantrieb wandelt eine elektrische Spannung v , die das Eingangssignal des Schalters bildet, in eine translatorische Veränderung der Position x_1 eines

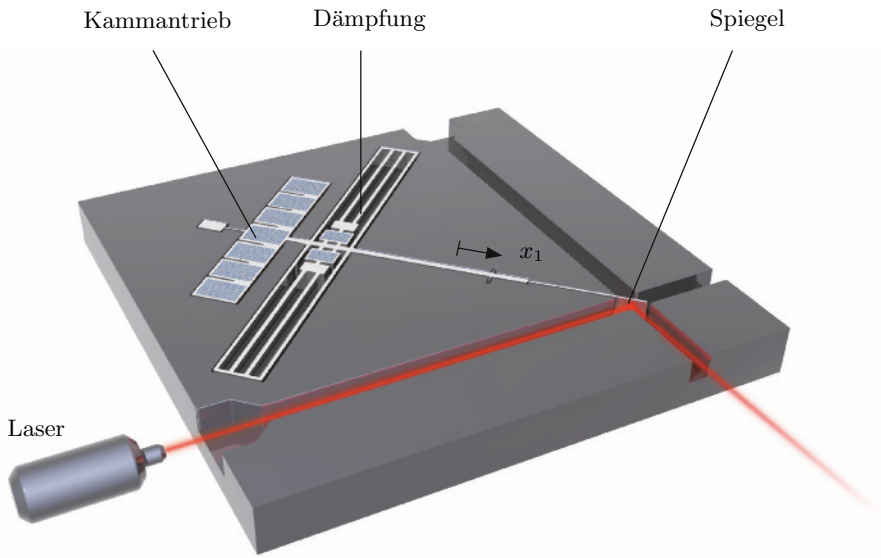


Bild 5.20: Optischer Schalter in mikro-elektro-mechanischer Ausführung.

Stabes um. An dem Stab ist ein Spiegel befestigt, der auf diese Weise in den optischen Pfad hinein- und herausgeschoben werden kann. Das Modell des optischen Schalters ist in nichtlinearer Regulationsnormalform

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\kappa}{m}x_1 - \frac{1}{m}(d_1x_1 + d_0) \cdot x_2 + \frac{k_e}{m}u + d\end{aligned}\quad (5.59)$$

gegeben. Dabei ist $u = v^2$, für die Ausgangsgröße des Systems gilt $y = x_1$ und d ist eine z. B. mechanisch einwirkende, zeitabhängige Störung. Die zur Verfügung stehende Spannung v ist beschränkt. Es gilt $0 \leq v \leq 35$ V.

Die Parameter sind die bewegte Masse $m = 2.35 \cdot 10^{-9}$ kg, die Steifigkeit der Aufhängung, $\kappa = 0.6$ N m $^{-1}$, die Dämpfungskoeffizienten $d_1 = 0.0363$ kg s $^{-1}$ m $^{-1}$ und $d_0 = 5.45 \cdot 10^{-7}$ kg s $^{-1}$ sowie die Wandlerkonstante $k_e = 17.8 \cdot 10^{-9}$ N V $^{-2}$ des Kammantriebes. Die Dämpfungskoeffizienten d_0 und d_1 müssen hierbei als unsichere Schätzung angesehen werden. Der Übersichtlichkeit halber kürzen wir

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{\kappa}{m} = 2.55 \cdot 10^8 \text{ N m}^{-1} \text{ kg}^{-1}, \\ a_1 &= \frac{d_1}{m} = 1.54 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-1}, \\ a_2 &= \frac{d_0}{m} = 232 \text{ s}^{-1}, \\ b &= \frac{k_e}{m} = 7.57 \text{ N kg}^{-1} \text{ V}^{-2}\end{aligned}$$

ab.

Wir wollen verschiedene Positionen x_{1R} des Spiegels vorgeben können. Diese Sollpositionen x_{1R} korrespondieren mit den Ruhelagen

$$\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} \frac{b}{a_0} u_R \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.60)$$

wobei u_R die Stellgröße ist, die im Falle der Ruhelage $\mathbf{x}_R$ benötigt wird. Wir erhalten so unter Verwendung von Gl. (5.60) und

$$x_1 = x_{1R} + \Delta x_1 = \frac{b}{a_0} u_R + \Delta x_1$$

für das Modell (5.59) die Darstellung

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -(a_0 + a_1 x_2)(x_{1R} + \Delta x_1) - a_2 x_2 + b u + d. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Als Schaltgerade betrachten wir

$$s(\mathbf{x}) = r \cdot \Delta x_1 + x_2 = 0$$

mit einem noch zu bestimmenden Parameter r . Mit dem Ansatz von Gao und Hung aus Gl. (5.56) gilt

$$\dot{s}(\mathbf{x}) = -q \operatorname{sgn}(s(\mathbf{x})) - k s(\mathbf{x}).$$

Hieraus folgt durch Gleichsetzen mit $\dot{s}(\mathbf{x}) = \operatorname{grad}^T s(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})u)$ das Regelgesetz, das wir schon in Gl. (5.58) allgemein hergeleitet hatten, zu

$$u(\mathbf{x}) = -\frac{rx_2 - (a_0 + a_1 x_2)(x_{1R} + \Delta x_1) - a_2 x_2 + q \operatorname{sgn}(s(\mathbf{x})) + ks(\mathbf{x})}{b}. \quad (5.62)$$

Dabei sind q und k noch zu wählende Konstanten. Setzt man das Regelgesetz (5.62) in die Systemdynamik (5.61) ein, so ergibt sich für den Regelkreis

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -rx_2 - q \operatorname{sgn}(s(\mathbf{x})) - ks(\mathbf{x}) + d \end{aligned}$$

bzw. nach Einsetzen von $s(\mathbf{x}) = r\Delta x_1 + x_2$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -kr\Delta x_1 - (r+k)x_2 - q \operatorname{sgn}(r\Delta x_1 + x_2) + d. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Dieser Regelkreis besitzt, wenn man den nichtlinearen Teil einmal ausblendet, d. h. $q = 0$ gilt, eine lineare Dynamik mit dem charakteristischen Polynom

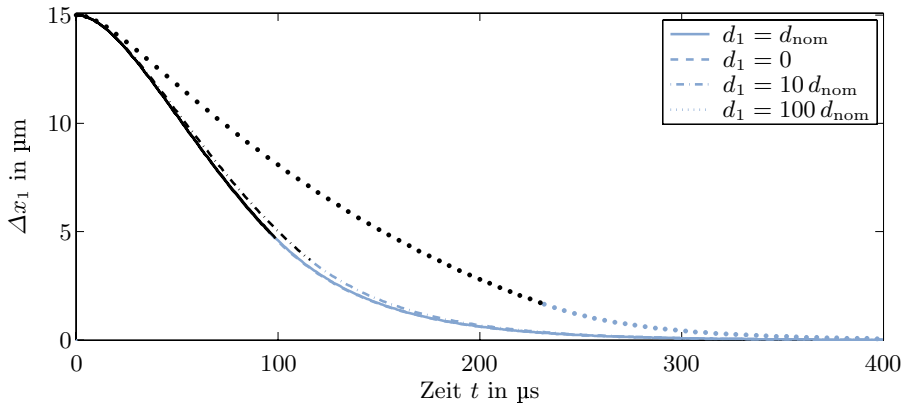


Bild 5.21: Ausregelung der Ausgangsspannung u_a nach einem Abfall der Eingangsspannung u_e für verschiedene Dämpfungswerte d_1 . Bei blauen Kurventeilen ist das System im Gleitzustand, bei schwarzen nicht.

$$P(\lambda) = \lambda^2 + (r + k)\lambda + rk.$$

Das Polynom hat die Nullstellen $\lambda_1 = -r$ und $\lambda_2 = -k$, die mit den Eigenwerten der linearen Systemdynamik des Modells (5.63) identisch sind.

Wir simulieren den Regelkreis (5.63) für die Parameter $k = 20000$, $r = 20000$ und $q = 1000$ für verschiedene Dämpfungswerte

$$d_1 = d_{\text{nom}} = 0.0363,$$

$$d_1 = 0,$$

$$d_1 = 10d_{\text{nom}},$$

$$d_1 = 100d_{\text{nom}}.$$

Dabei betrachten wir eine Anfangsauslenkung von $x_1(0) = 25 \mu\text{m}$ und $x_2(0) = 0 \mu\text{m s}^{-1}$. Die Ruhelage x_{R1} liegt bei $10 \mu\text{m}$. Somit ist $\Delta x_1(0) = 15 \mu\text{m}$. Für die Störung gilt hier $d = 0$. Bild 5.21 zeigt die Ausregelverläufe für die vier verschiedenen Dämpfungswerte. Man erkennt das in allen vier Fällen gute Regelverhalten. Bei blau gezeichneten Verläufen befindet sich der Regelkreis im Gleitzustand, bei schwarz gezeichneten Verläufen bewegt sich das System noch auf die Schaltgerade zu. Bei den Werten $d_1 = d_{\text{nom}}$ und $d_1 = 0$ sind die Verläufe nahezu identisch.

Angemerkt sei auch, dass eine Gleitzustandsregelung immer nur dann robust ist, wenn sie sich im Gleitzustand befindet. Verändert sich die Regelstrecke so, dass der Gleitzustand nicht mehr existiert oder nicht mehr erreicht wird, so ist der Regelkreis auch nicht mehr robust im beschriebenen Sinne. Für den obigen Regelkreis reduziert sich die Robustheit erst für sehr große Werte $d_1 \gg d_{\text{nom}}$.

5.3 Fuzzy-Control

5.3.1 Einführung

Einfache nichtlineare Regler, wie z. B. Zwei- und Dreipunktregler, werden oftmals auf Basis menschlicher Erfahrung entworfen. Ein gutes Beispiel hierfür ist eine einfache Temperaturregelung, etwa die eines Ofens, wie sie Bild 5.22 zeigt. Zwei einfache Regeln beschreiben das Reglerverhalten dieses Regelkreises:

- (1) *Wenn die Regelabweichung e negativ ist, dann schalte die Heizung aus.*
- (2) *Wenn die Regelabweichung e positiv ist, dann schalte die Heizung ein.*

Beschreibt man die Regelabweichung e durch eine Boole'sche Variable ϑ mit

$$\vartheta = 0 \quad \text{für} \quad e \leq 0$$

und

$$\vartheta = 1 \quad \text{für} \quad e > 0$$

und den Zustand der Heizung durch $z = 0$ für Heizung aus und $z = 1$ für Heizung ein, dann sind obige Regeln auch durch einfache Verknüpfungen der Boole'schen Logik gemäß

$$z = \vartheta$$

beschreibbar.

Obige Regelung besitzt einige vorteilhafte Eigenschaften: Sie ist einfach und kostengünstig zu realisieren. Für ihren Entwurf benötigt man kein Prozessmodell. Der Entwurf basiert auf einfach formulierbaren Regeln, die aus dem menschlichen Erfahrungswissen resultieren.

Die Vorteile dieses Entwurfs sind so attraktiv, dass sich die Frage stellt, ob wir eine allgemeine Entwurfsmethodik für Regler mit den oben genannten Vorteilen angeben können. Eine solche Entwurfsmethodik wäre offensichtlich sehr nützlich, denn mit ihr könnte man auf der Basis menschlichen Erfahrungswissens, d. h. anhand von sprachlich formulierbaren Regeln, einfach zu realisierende Regler entwerfen. Zu Ende gedacht bedeutet dies, dass man menschliches Verhalten oder Kausalwissen mathematisieren und auf einem Rechner imitieren könnte, z. B. um das Verhalten eines Prozessbedieners nachzubilden.

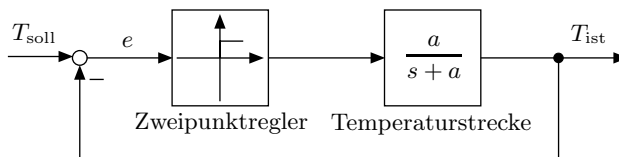


Bild 5.22: Regelung mit einem Zweipunktglied.

Die von L. A. Zadeh 1965 entwickelte Fuzzy-Logik [19, 40, 84, 87, 132, 199] ist eine Verallgemeinerung der Boole'schen Logik und ermöglicht die oben skizzierte Vorgehensweise. Die durch Fuzzy-Logik nachzubildende menschliche Verhaltensweise muss dabei durch „Wenn-dann-Regeln“ beschreibbar sein, beispielsweise der folgenden Art:

Wenn die Kesseltemperatur T sehr hoch ist oder der Kesseldruck P sehr hoch ist, dann stelle die Öffnung des Gaszufuhrventils auf ganz zu

oder

Wenn die Kesseltemperatur T hoch ist und der Kesseldruck P niedrig, dann stelle die Öffnung des Gaszufuhrventils auf halb auf.

Das wirft die Frage auf, wie man solche sprachlich formulierten Regeln mittels Fuzzy-Logik mathematisieren kann. Dies wird im Folgenden erläutert, wobei in den folgenden fünf Schritten vorgegangen wird:

Schritt 1: Man mathematisiert Begriffe wie *sehr hoch*, oder *niedrig* oder *ganz zu*.

Schritt 2: Verknüpfungen wie Und bzw. Oder werden durch mathematische Operatoren definiert.

Schritt 3: Die „Wenn-dann-Schlussfolgerung“ wird mathematisiert.

Schritt 4: Die Ergebnisse aller Schlussfolgerungen, d. h. aller Regeln, werden verknüpft.

Schritt 5: Das logische Verknüpfungsergebnis ist in einen technisch verwendbaren Zahlenwert zu verwandeln.

Schritt 1 bezeichnet man als *Fuzzifizierung*, die Schritte 2, 3 und 4 als *Inferenz* und Schritt 5 als *Defuzzifizierung*. In den nächsten drei Kapiteln wird detailliert auf sie eingegangen.

5.3.2 Fuzzifizierung

Es wird nochmals die folgende Regel betrachtet: Wenn die Kesseltemperatur T hoch ist und der Kesseldruck P niedrig ist, dann stelle die Ventilöffnung der Brennstoffzufuhr auf *halb auf*. In einer solchen Regel bezeichnet man veränderliche Größen wie die *Kesseltemperatur*, den *Kesseldruck* oder die *Ventilöffnung* als *linguistische Variablen*. Begriffe wie *hoch*, *niedrig* oder *halb* werden als *linguistische Werte* bezeichnet. Linguistische Werte beschreiben im Gegensatz zu Zahlenwerten nicht einen einzelnen Wert, sondern einen ganzen Wertebereich.

Ein solcher Wertebereich ist im Fall der klassischen Logik bzw. klassischen Mengenlehre z. B. eine Menge der Form

$$M_{hoch} = \{T \in \mathbb{R} \mid 300^\circ\text{C} \leq T \leq 500^\circ\text{C}\}.$$

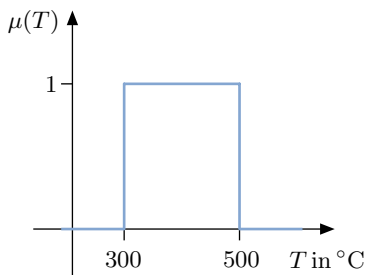


Bild 5.23: Beispiel einer unstetigen Zugehörigkeitsfunktion der Menge M_{hoch} .

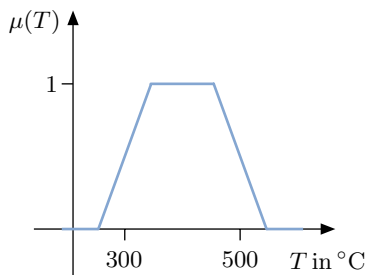


Bild 5.24: Beispiel für eine stetige Zugehörigkeitsfunktion der Menge M_{hoch} .

D. h., ein Temperaturwert T gehört entweder zu dieser Menge oder nicht. Im Bild 5.23 ist die Menge M_{hoch} dargestellt, wobei als Maß für die Zugehörigkeit zu einer Menge wie M_{hoch} eine Zugehörigkeitsfunktion μ benutzt wird. Für die Zugehörigkeitsfunktion μ gilt in diesem Fall

$$\mu(T) = \begin{cases} 0 & \text{für } T \notin M_{hoch}, \\ 1 & \text{für } T \in M_{hoch}. \end{cases}$$

Die obige scharfe Trennung in Wertebereiche, zu denen eine Temperatur gehört oder nicht, entspricht allerdings nicht der Vorstellung des Menschen, wenn er den Begriff *hoch* benutzt. So würde der Mensch es als unsinnig bezeichnen, wenn die Temperatur $T = 299.99^\circ\text{C}$ die Zugehörigkeit $\mu(299.99^\circ\text{C}) = 0$ besitzt, im Gegensatz dazu aber $T = 300.01^\circ\text{C}$ die Zugehörigkeit $\mu(300.01^\circ\text{C}) = 1$.

Offensichtlich stellt der Mensch sich hier keinen sprunghaftigen Übergang der Zugehörigkeit zu einer Menge vor, sondern einen stetigen. Bild 5.24 zeigt ein Beispiel für eine stetige Zugehörigkeitsfunktion. Durch die Verwendung einer stetigen Zugehörigkeitsfunktion μ gibt es nun auch Werte T mit

$$0 \leq \mu(T) \leq 1,$$

die zu einem linguistischen Wert wie *hoch* gehören. Beispielsweise wird $T = 300^\circ\text{C}$ nur zu $\mu(300^\circ\text{C}) = 0.5$ als hoch eingestuft.

Die Zuordnung zu einer Menge ist dann nicht mehr völlig klar und μ weist Werte zwischen null und eins auf. Man sagt, die Zuordnung ist *unscharf* oder *fuzzy* (engl. *fuzzy* = verschwommen, unscharf). Man spricht dann von *Fuzzy-Mengen* und definiert diese wie folgt.

Definition 13 (Fuzzy-Menge). Eine Menge

$$F = \{(x, \mu(x)) \mid x \in G \text{ und } \mu(x) \in [0, 1]\}$$

von Paaren $(x, \mu(x))$ heißt Fuzzy-Menge in G . Die Abbildung

$$\mu : G \rightarrow [0, 1]$$

wird als Zugehörigkeitsfunktion von F bezeichnet. Sie ordnet jedem Element x der Grundmenge G den Zugehörigkeitsgrad $\mu(x)$ zu.

Die Verknüpfung einer Variablen x mit einem Zugehörigkeitsgrad $\mu(x)$ zu einem linguistischen Wert bezeichnet man auch als *Fuzzifizierung* von x . Die Grundmenge G ist oft identisch mit der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Der interessierende Wertebereich einer linguistischen Variablen, wie der Temperatur T in obigem Beispiel, wird im Allgemeinen in mehrere linguistische Werte unterteilt, wie es Tabelle 5.1 beispielhaft zeigt. Zu den einzelnen linguistischen Werten gehört jeweils eine Fuzzy-Menge bzw. eine Zugehörigkeitsfunktion. Bild 5.25 illustriert eine mögliche Auswahl, die durch den Menschen aufgrund seiner gefühlsmäßigen Einschätzung des Sachverhaltes getroffen wird. Dabei werden als Zugehörigkeitsfunktionen oft dreieckförmige, trapezförmige oder rampenförmige Funktionen verwendet. Aber auch andere Funktionen, wie die Gauß-Funktion oder die $\cos^2$ -Funktion, kommen zum Einsatz.

Wenn-dann-Regeln werden oft in der standardisierten Form

Wenn $x_1 = LW_{1,j}$ und ... und $x_n = LW_{n,l}$, dann $y = LW_p$

dargestellt. Dabei sind $x_1, x_2, \dots, x_n$ die n Eingangsgrößen der Regel, $LW_{i,1}, \dots, LW_{i,q}$ die q linguistischen Werte der Eingangsgrößen x_i , die linguistische Variable y die Ausgangsgröße der Regel und $LW_1, \dots, LW_r$ die r linguistischen Werte der Ausgangsgröße y . Die linguistischen Werte $LW_{i,j}$ sind über die zu ihnen gehörigen Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_{i,j}$ zahlenmäßig definiert. Der Ausdruck $x_i = LW_{i,k}$ ist daher gleichbedeutend mit der Angabe des Zugehörigkeitswertes von x_i zu $LW_{i,k}$, d. h. mit $\mu_{i,k}(x_i)$.

Tabelle 5.1: Beispiele für linguistische Werte.

Linguistische Variable	Linguistische Werte			
Temperatur T	<i>null</i>	<i>niedrig</i>	<i>hoch</i>	<i>sehr hoch</i>

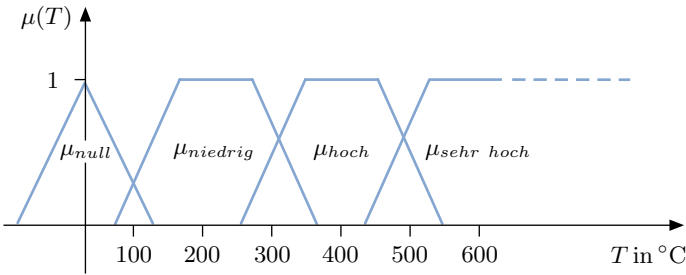


Bild 5.25: Beispiele für Zugehörigkeitsfunktionen.

5.3.3 Inferenz

Im Weiteren sollen die Und- bzw. Oder-Verknüpfungen in den Regeln durch mathematische Operatoren, d. h. durch Fuzzy-Operatoren, realisiert werden. Zu Beginn wird wieder der Fall der klassischen Logik betrachtet. Hier gibt es nur die Zugehörigkeitswerte null und eins. Die Und-Verknüpfung und Oder-Verknüpfung sind aus der Boole'schen Schaltlogik bekannt und in den Tabellen 5.2 und 5.3 dargestellt. Offensichtlich kann man die Boole'sche Und-Verknüpfung durch

$$\mu_y = \min\{\mu_a, \mu_b\} \quad (5.64)$$

und die Boole'sche Oder-Verknüpfung durch

$$\mu_y = \max\{\mu_a, \mu_b\} \quad (5.65)$$

realisieren.

Tabelle 5.2: Boole'sches Und.

μ_a	μ_b	μ_y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$\mu_y = \mu_a \wedge \mu_b$$

Tabelle 5.3: Boole'sches Oder.

μ_a	μ_b	μ_y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$\mu_y = \mu_a \vee \mu_b$$

Für den Fall der Fuzzy-Logik verallgemeinert man nun die logischen Verknüpfungen in den Gl. (5.64) und (5.65) und lässt für die Zugehörigkeitswerte neben den Werten 0 und 1 auch alle Zwischenwerte zu. Entsprechend definiert man das Fuzzy-Und und das Fuzzy-Oder.

Definition 14 (Fuzzy-Und und Fuzzy-Oder). Die Fuzzy-Und-Verknüpfung zweier Zugehörigkeitswerte $\mu_a, \mu_b \in [0, 1]$ ist durch

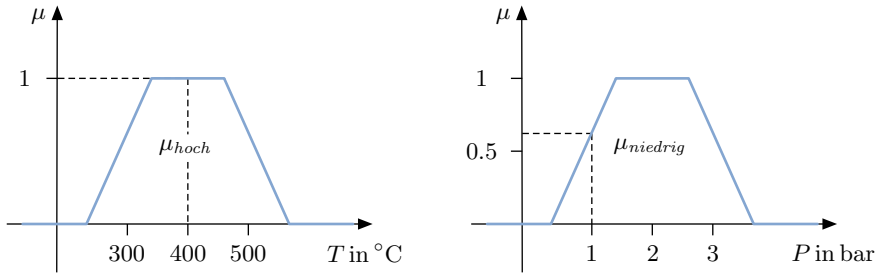
$$\mu_{a \wedge b} = \min\{\mu_a, \mu_b\}$$

gegeben. Die Fuzzy-Oder-Verknüpfung durch

$$\mu_{a \vee b} = \max\{\mu_a, \mu_b\}.$$

Mit den bisherigen Ergebnissen kann der Wenn-Teil einer Regel, *Prämisse* genannt, bereits in einen mathematischen Ausdruck umgesetzt werden. Betrachten wir beispielsweise den Wenn-Teil der Regel

Wenn die Kesseltemperatur T hoch ist und der Kesseldruck P niedrig ist, dann stelle die Ventilöffnung auf halb.

Bild 5.26: Zugehörigkeitsfunktionen der Temperatur *hoch* und des Druckes *niedrig*.

Aus diesem Wenn-Teil ergibt sich die Gleichung

$$\mu_{hoch \wedge niedrig}(T, P) = \min\{\mu_{hoch}(T), \mu_{niedrig}(P)\}.$$

Dazu nachfolgend ein Beispiel. Für die Temperatur $T = 400^\circ\text{C}$ und den Druck $P = 1\text{ bar}$ in obiger Regel erhält man z.B. aus den Zugehörigkeitsfunktionen des Bildes 5.26 die Werte

$$\mu_{hoch}(T = 400^\circ\text{C}) = 1$$

und

$$\mu_{niedrig}(P = 1\text{ bar}) = 0.6.$$

Somit ergibt sich für diesen einzelnen Punkt $(400^\circ\text{C}, 1\text{ bar})$ als Ergebnis der Und-Verknüpfung

$$\mu_{hoch \wedge niedrig}(T = 400^\circ\text{C}, P = 1\text{ bar}) = \min\{1, 0.6\} = 0.6.$$

Die mathematische Auswertung des Wenn-Teils einer Regel, *Aggregation* genannt, lautet, wenn sie nur Und-Verknüpfungen aufweist,

$$\mu_{agg}(x_1, \dots, x_n) = \min\{\mu_{LW1,k}(x_1), \dots, \mu_{LWn,l}(x_n)\}.$$

Anzumerken ist, dass es noch eine Reihe von weiteren Operatoren neben dem min- und dem max-Operator gibt, mit denen die Fuzzy-Und-Verknüpfung bzw. die Fuzzy-Oder-Verknüpfung realisiert werden kann [40, 84, 87]. In der industriellen Praxis werden der min- und der max-Operator am häufigsten eingesetzt. Gebräuchlich sind des Weiteren als Fuzzy-Und-Operator das algebraische Produkt $\mu_a(x) \cdot \mu_b(x)$ und als Fuzzy-Oder-Operator die algebraische Summe $\mu_a(x) + \mu_b(x) - \mu_a(x)\mu_b(x)$. Gegenüber den Operatoren min und max haben diese beiden den Vorteil, differenzierbar zu sein. Die Differenzierbarkeit der Operatoren ist z.B. von Bedeutung, wenn man die Parameter der Zugehörigkeitsfunktion mittels des Gradientenverfahrens optimieren möchte.

Im folgenden Schritt ist nun festzustellen, wie der Dann-Teil einer Regel, den man auch *Konklusion* nennt, mathematisch beschrieben werden kann.

Den Schlussfolgerungsvorgang vom Wenn-Teil auf den Dann-Teil der Regel bezeichnet man als *Implikation*. Hierbei wird der Wenn-Teil mit dem Dann-Teil über einen Fuzzy-Operator verknüpft.

Für die Wirkung des Wenn-Teils auf den Dann-Teil ist es sinnvoll, vorauszusetzen, dass der Wahrheitsgehalt der Schlussfolgerung nicht größer sein soll als der Wahrheitsgehalt der Prämisse.

Wäre dies nicht so, könnten falsche Schlussfolgerungen gezogen werden. Wir veranschaulichen uns dies an folgender Regel: Wenn die Tomate rot ist, dann ist sie reif. Nehmen wir nun an, dass die Tomate grün ist, also die Prämisse den Wahrheitsgehalt $\mu_{\text{agg}} = 0$ besitzt. Dann wäre es offensichtlich falsch daraus abzuleiten, dass die Tomate doch reif ist, d. h. die Schlussfolgerung, dass eine reife Tomate vorliegt, den Wahrheitsgehalt von $\mu = 1$ aufweist.

Für die Umsetzung obiger Forderung gibt es folgende einfache Möglichkeit. Man begrenzt den Dann-Teil, d. h. seine Zugehörigkeitsfunktion

$$\mu_{LW_p}(y),$$

auf das Ergebnis des Wenn-Teils

$$\mu_{\text{agg}}(x_1, \dots, x_n).$$

Auf einfache Weise ist das über den Minimum-Operator möglich. Die Fuzzy-Implikation wird also z. B. mittels des Minimum-Operators realisiert. Für eine Regel k ergibt sich dann das Ergebnis

$$\mu_k(x_1, \dots, x_n, y) = \min\{\mu_{\text{agg},k}(x_1, \dots, x_n), \mu_{LW_p}(y)\}.$$

Anzumerken ist auch hier, dass anstelle des min-Operators auch andere Operatoren für die Fuzzy-Implikation genutzt werden können. Gebräuchlich ist z. B. das Produkt $\mu_{\text{agg},k}(x_1, \dots, x_n) \cdot \mu_{LW_p}(y)$.

Zur grafischen Veranschaulichung wird nochmals die Regel

Wenn die Kesseltemperatur T hoch ist und der Kesseldruck P niedrig ist, dann stelle die Ventilöffnung V auf halb

betrachtet. Umgesetzt in Fuzzy-Logik gilt mit obigen Ergebnissen

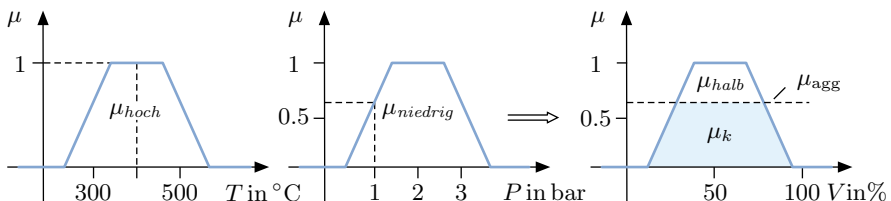


Bild 5.27: Auswertung einer Regel mit dem Ergebnis μ_k (blau unterlegte Zugehörigkeitsfunktion).

$$\mu_k(T, P, V) = \min\{\mu_{hoch}(T), \mu_{niedrig}(P), \mu_{halb}(V)\}.$$

Für alle möglichen Wertekombinationen (T, P, V) ergäbe sich ein vierdimensionales, grafisch nicht darstellbares Kennfeld. Bei zwei konstanten Werten T, P , z. B. $T = 400^\circ\text{C}$ und $P = 1$ bar, reduziert sich die Darstellung auf den zweidimensionalen Fall, wie er in Bild 5.27 dargestellt ist. Das Beispiel illustriert die Begrenzung von μ_k auf das Ergebnis der Prämissenauswertung. Das Resultat ist die auf μ_{agg} abgeschnittene Zugehörigkeitsfunktion μ_{halb} .

Die Beschreibung einer menschlichen Verhaltensweise wird im Allgemeinen mehrere Regeln beinhalten. Im nächsten Schritt wird daher ermittelt, wie die Ergebnisse mehrerer Regeln miteinander zu verknüpfen sind. Diese Verknüpfung wird *Akkumulation* genannt.

Angegeben wird die Gesamtheit aller Regeln, die Regelbasis, entweder in Tabellenform oder in Matrixform. Tabelle 5.4 und Tabelle 5.5 zeigen Beispiele.

Tabelle 5.4: Regelbasis in Tabellenform.

Regel 1: Wenn $x_1 = LW_{1,k}$ und ... und $x_n = LW_{n,l}$, dann $y = LW_p$.
Regel 2: Wenn $x_1 = LW_{1,i}$ und ... und $x_n = LW_{n,j}$, dann $y = LW_q$.
$\vdots$
Regel m : Wenn $x_1 = LW_{1,r}$ und ... und $x_n = LW_{n,s}$, dann $y = LW_u$.

Tabelle 5.5: Regelbasis in Matrixform. Für leere Felder existieren keine Regeln.

		x_2			
$x_1 = LW_{1,1}$	x_3	$LW_{2,1}$	$LW_{2,2}$	$LW_{2,3}$	$LW_{2,4}$
	$LW_{3,1}$	LW_1	LW_3	LW_1	LW_1
	$LW_{3,2}$	LW_1	LW_2		
	$LW_{3,3}$	LW_2	LW_3		
		x_2			
$x_1 = LW_{1,2}$	x_3	$LW_{2,1}$	$LW_{2,2}$	$LW_{2,3}$	$LW_{2,4}$
	$LW_{3,1}$	LW_1	LW_3	LW_1	LW_1
	$LW_{3,2}$	LW_1	LW_3	LW_1	LW_1
	$LW_{3,3}$	LW_3	LW_1	LW_2	LW_2
		x_2			
$x_1 = LW_{1,3}$	x_3	$LW_{2,1}$	$LW_{2,2}$	$LW_{2,3}$	$LW_{2,4}$
	$LW_{3,1}$	LW_1	LW_3	LW_1	LW_3
	$LW_{3,2}$		LW_2	LW_1	LW_2
	$LW_{3,3}$	LW_1	LW_3	LW_2	LW_1

le. Die Tabellenform eignet sich insbesondere für Regelbasen mit sehr vielen Eingangsgrößen.

Die Matrixform ist ähnlich aufgebaut wie das Karnaugh-Diagramm der Boole'schen Logik. Sie ist übersichtlicher als die Tabellenform, eignet sich allerdings nur für Regelbasen mit wenigen Eingangsgrößen x_i . Ein Vorteil der Matrixform liegt in der Tatsache, dass die Regelbasis automatisch widerspruchsfrei ist. Denn jedes Feld innerhalb der Matrix entspricht genau einer bestimmten Prämisse. Keine Prämisse kann mehrfach vorkommen und so durch unterschiedliche Schlussfolgerungen zu einer widersprüchlichen Regelbasis führen. Vorteilhaft ist des Weiteren, dass direkt ersichtlich ist, für welche Prämissen keine Regeln existieren.

Die Akkumulation kann auf verschiedene Weisen erfolgen. Die gebräuchlichste ist die Bildung der Vereinigungsmenge aller Regelergebnisse. Das ist gleichbedeutend mit der Oder-Verknüpfung, d. h., alle Regeln der Regelbasis werden mit Oder verknüpft.

Die Fuzzy-Oder-Verknüpfung kann, wie bereits beschrieben, durch den max-Operator realisiert werden. Als Akkumulationsergebnis erhält man dann die Beziehung

$$\mu_{\text{res}}(x_1, \dots, x_n, y) = \max\{\mu_1(x_1, \dots, x_n, y), \dots, \mu_m(x_1, \dots, x_n, y)\}. \quad (5.66)$$

Dieses Ergebnis lässt sich wieder grafisch veranschaulichen. Man betrachtet die beiden Regeln

Wenn die Kesseltemperatur T hoch ist und der Kesseldruck P niedrig ist, dann stelle die Ventilöffnung V auf halb

und

Wenn die Kesseltemperatur T sehr hoch ist und der Kesseldruck P niedrig ist, dann stelle die Ventilöffnung V auf zu.

Mit den entsprechenden Zugehörigkeitsfunktionen können diese Regeln dann für eine Eingangssituation (T, P) ausgewertet werden. Hier wird $(T, P) = (450^\circ\text{C}, 3\text{ bar})$ gewählt. In Bild 5.28 ist die sich ergebende Situation dargestellt. Es illustriert, wie aus den Fuzzy-Mengen bzw. den Zugehörigkeitswerten der zwei Regelergebnisse, die als blaue Flächen dargestellt sind, durch den Oder-Operator die Vereinigungsmenge μ_{res} der Akkumulation gebildet wird.

Als Ergebnis der Akkumulation erhält man also eine Überlagerung der Ergebnisse, die sich aus den einzelnen Regeln ergeben. Für eine bestimmte Situation $(x_1, \dots, x_n)$ ist das Akkumulationsergebnis (5.66) eine Funktion in y . Die Auswertung aller Regeln durch Aggregation, Implikation und Akkumulation bezeichnet man als *Inferenz*.

Aufgrund der Überlagerung vieler Regelergebnisse hat die Fuzzy-Menge μ_{res} die Form eines Gebirges, das durch einen Polygonzug umrissen ist, wie in Bild 5.29 zu sehen. Als Endergebnis der gesamten Regelauswertung ist dieses Gebirge im Allgemeinen nicht brauchbar. Man denke z. B. daran, dass

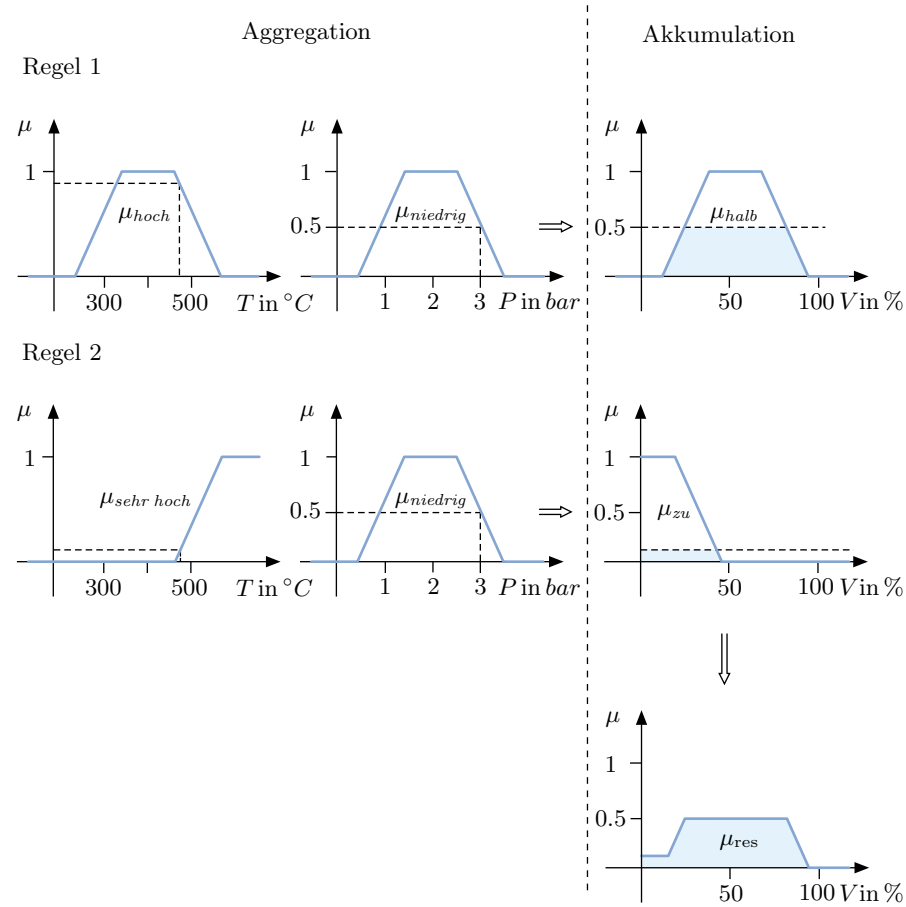


Bild 5.28: Auswertung einer Regelbasis mittels Aggregation und Akkumulation.

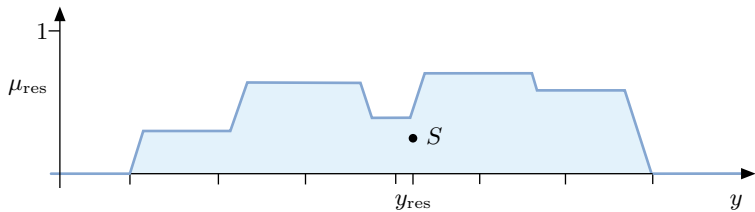


Bild 5.29: Überlagerung aller Reglerergebnisse und Flächenschwerpunkt (S) der resultierenden Fuzzy-Menge. Der Wert y_{res} gibt die y -Koordinate von S an.

es die sich ergebende Ventilstellung V des betrachteten Beispiels beschreiben soll und man vor der Aufgabe steht, die Ventilstellung mittels eines Öffnungsgrades einstellen zu müssen.

5.3.4 Defuzzifizierung

Das Ergebnis μ_{res} der Inferenz ist, wie oben festgestellt, nicht direkt nutzbar. Man benötigt in der Praxis im Allgemeinen einen Zahlenwert. Somit steht man vor der Aufgabe, aus der Fuzzy-Menge μ_{res} einen Zahlenwert, der für das Auswertungsergebnis repräsentativ ist, zu bestimmen. Sozusagen einen Kompromiss- oder Mittelwert. Dieser Vorgang heißt *Defuzzifizierung*.

Der Flächenschwerpunkt, genauer seine y -Koordinate

$$y_{\text{res}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \mu_{\text{res}}(x_1, \dots, x_n, y) dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \mu_{\text{res}}(x_1, \dots, x_n, y) dy},$$

ist ein solcher Wert. Er bildet das Endergebnis, d. h. den Ausgangswert der gesamten Regelbasisauswertung. Bild 5.29 zeigt ein Beispiel hierfür. Dieses Verfahren der Defuzzifizierung, dass die bekannteste Defuzzifizierungsmethode bildet, wird als *Flächenschwerpunktmethode* oder *COA-Verfahren* bezeichnet (engl. Abk. für „center of area“).

Die Bestimmung des Flächenschwerpunktes ist allerdings aufwendig, da die betrachtete Zugehörigkeitsfunktion μ_{res} die Form eines vielteiligen Polygonzuges aufweist. Man kann die Berechnung des Flächenschwerpunktes y_{res} aber wesentlich vereinfachen, indem man für die Zugehörigkeitsfunktionen der linguistischen Werte LW_i von y keine Trapeze oder Dreiecke wählt, sondern Singletons. Singletons $\mu_{LW_i}(y)$ nehmen nur an einer Stelle y_s den Funktionswert eins an und sonst überall den Funktionswert null, d. h.

$$\mu_{LW_i}(y) = \begin{cases} 1 & \text{für } y = y_s, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bild 5.30 zeigt exemplarisch einen Singleton.

Das Ergebnis der Akkumulation nimmt dann die in Bild 5.31 beispielhaft dargestellte Form an. Die Einzelergebnisse der Akkumulation überlagern sich in diesem Fall also nicht mehr zu einem Polygonzug. Und man kann die Zugehörigkeitsfunktion μ_{res} zerlegen in

$$\mu_{\text{res}} = \mu_{\text{res},1} + \mu_{\text{res},2} + \mu_{\text{res},3} + \dots$$

Dabei sind die Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_{\text{res},i}$ die akkumulierten Ergebnisse all derjenigen Regeln, die auf den Singleton i wirken.

Für den Fall, dass alle m Ausgangszugehörigkeitsfunktionen Singletons sind, ist der Flächenschwerpunkt, der dann korrekterweise kein Flächenschwerpunkt mehr ist, sondern ein Mittelwert, einfach zu berechnen. Man erhält

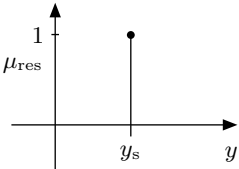


Bild 5.30: Singleton.

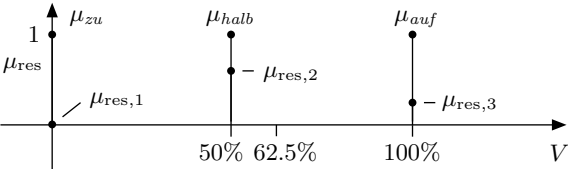


Bild 5.31: Defuzzifizierung im Fall von Singletons.

$$y_{\text{res}} = \frac{\sum_{i=1}^m y_{s,i} \cdot \mu_{\text{res},i}(x_1, \dots, x_n)}{\sum_{i=1}^m \mu_{\text{res},i}(x_1, \dots, x_n)}.$$

Dieser Abkömmling der Flächenschwerpunktmethode COA wird allgemein als *COS-Verfahren* bezeichnet (engl. Abk. für „center of singletons“). Das Beispiel einer Ventilstellung aus Bild 5.31 mit den drei Zugehörigkeitsfunktionen *zu*, *halb* und *auf* illustriert die Defuzzifizierungsmethode. Als Ergebnis erhält man mit $\mu_{\text{res},1} = 0$, $\mu_{\text{res},2} = 0.75$ und $\mu_{\text{res},3} = 0.25$ in diesem Fall

$$y_{\text{res}} = \frac{50 \cdot 0.75 + 100 \cdot 0.25}{0.75 + 0.25} \% = 62.5\%$$

als Ergebnis der Defuzzifizierung.

5.3.5 Fuzzy-Systeme und Fuzzy-Regler

Mittels Fuzzifizierung, Aggregation, Implikation, Akkumulation und Defuzzifizierung können wir mit den Ergebnissen der vorherigen Abschnitte sprachlich formulierte Regeln in eine mathematische Funktion umformen. Bild 5.32 illustriert dies.

Diese Funktion

$$y_{\text{res}} = f(x_1, \dots, x_n)$$

ist mehrfach verkettet, wobei im Detail die Verkettung aus folgenden Teilfunktionen resultiert:

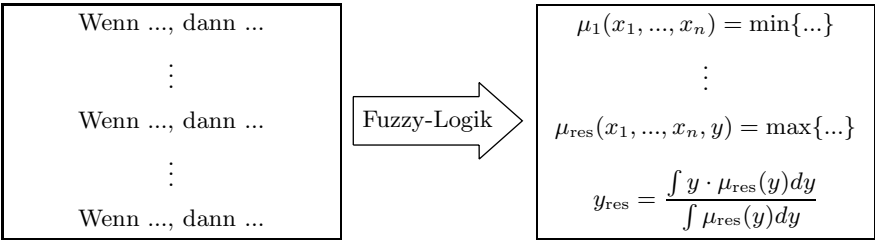


Bild 5.32: Umwandlung von Regeln in Gleichungen mittels Fuzzy-Logik.

<i>Fuzzifizierung:</i>	Bestimmung aller Zugehörigkeitswerte $\mu_{LW_{i,j}}(x_i)$,
<i>Aggregation:</i>	$\mu_{\text{agg},k}(x_1, \dots, x_n) = \min\{\mu_{LW_{1,i}}(x_1), \dots, \mu_{LW_{n,i}}(x_n)\},$ $k = 1, \dots, m,$
<i>Implikation:</i>	$\mu_k(x_1, \dots, x_n, y) = \min\{\mu_{\text{agg},k}(x_1, \dots, x_n), \mu_{LW_p}(y)\},$ $k = 1, \dots, m,$
<i>Akkumulation:</i>	$\mu_{\text{res}}(x_1, \dots, x_n, y) = \max\{\mu_1(x_1, \dots, x_n, y), \dots,$ $\mu_m(x_1, \dots, x_n, y)\},$
<i>Defuzzifizierung:</i>	$y_{\text{res}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \mu_{\text{res}}(x_1, \dots, x_n, y) dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \mu_{\text{res}}(x_1, \dots, x_n, y) dy}.$

Bei der Berechnung von y_{res} für eine Situation $(x_1, \dots, x_n)$ arbeitet man obige Liste ab. Man kann die Variablen $x_1, \dots, x_n$ als Eingangsvariablen und y als Ausgangsvariable eines Systems auffassen, wie es Bild 5.33 zeigt.

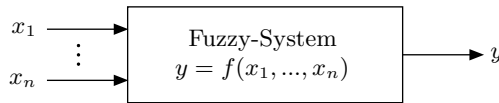


Bild 5.33: Fuzzy-System.

Die Anwendungsmöglichkeiten von Fuzzy-Systemen sind sehr groß. Dies ist darauf zurückzuführen, dass mittels Fuzzy-Logik viele menschliche Verhaltensweisen durch eine mathematische Funktion beschreibbar sind. Wichtige Anwendungsgebiete sind, wie bereits erwähnt, Steuerungen und Regelungen. Dieser Zweig der Fuzzy-Logik heißt *Fuzzy-Control* [46, 69, 201]. Bild 5.34 zeigt einen solchen mit einem Fuzzy-Regler ausgestatteten Regelkreis.

In vielen Anwendungsbereichen kann menschliches Verhalten nachgebildet werden. Beispiele sind die Regelung von Kläranlagen [134], ABS-Bremssysteme [129], die Regelung von U-Bahnen [179], die Regelung von Papiermaschinen [2], ein Alarmsystem für die Anästhesie [190], die Autofokussteuerung bei Kameras [110], eine Waschmaschinensteuerung [177] usw. [179, 190].

Beim Entwurf von Fuzzy-Reglern wird wie folgt vorgegangen:

Schritt 1: Man bestimmt die interessierenden linguistischen Variablen x_i, y_i , die die Eingangs- und Ausgangsgrößen des Fuzzy-Reglers bilden.

Schritt 2: Jeder linguistischen Variablen x_i, y_i wird eine Reihe von linguistischen Werten $LW_{i,j}$ zugeordnet.

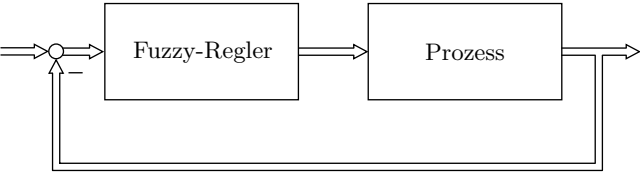


Bild 5.34: Regelkreis mit Fuzzy-Regler.

Schritt 3: Zu den $LW_{i,j}$ werden Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_{i,j}$ gewählt.

Schritt 4: Die Regeln werden ermittelt.

Dabei imitiert man mittels des Fuzzy-Reglers in den meisten Fällen einen Menschen, der die Regelung vornimmt oder vornehmen könnte. Dies kann z. B. der Prozessbediener eines chemischen oder biotechnologischen Prozesses oder der Fahrer einer U-Bahn sein.

Mit obigem Entwurf kann der Regler oder eine Steuerung nur in seltenen Fällen auf Anhieb so ausgelegt werden, dass er bereits das gewünschte Verhalten zeigt. Denn der erste Entwurf wird die menschliche Verhaltensweise nicht genau genug nachzeichnen können. Folglich führt man den Entwurf solange erneut mit veränderten Parametern und Regeln durch, bis sich ein zufriedenstellendes Verhalten ergibt. In Bild 5.35 ist diese Vorgehensweise dargestellt.

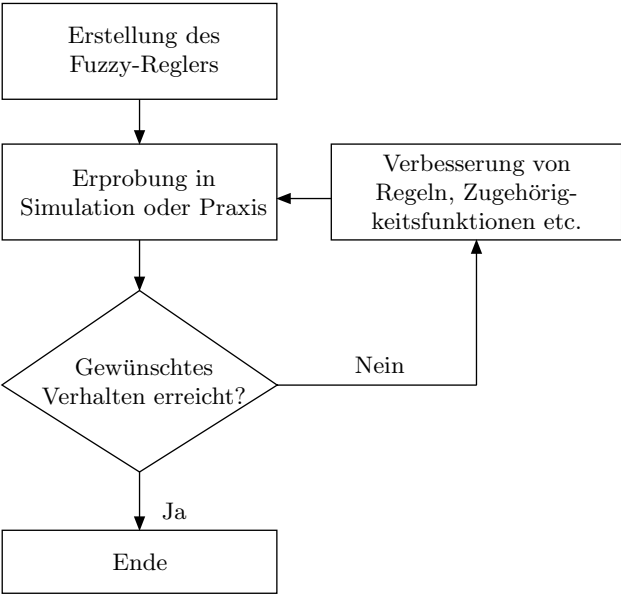


Bild 5.35: Vorgehensweise bei der Auslegung eines Fuzzy-Reglers.

Der Entwurf basiert auf Versuch und Irrtum und wird mehrfaches Optimieren erfordern.

Es ist zu beachten, dass der Fuzzy-Regler ein rein statischer Kennfeldregler ist. Er ist nichtlinear, aber ohne Dynamik. Seine Nichtlinearität zieht die Problematik nach sich, dass die Stabilität des Regelkreises nicht oder nur mit größerem Aufwand nachweisbar ist. Dies ist einer der Gründe dafür, dass Fuzzy-Regler hauptsächlich in Fällen eingesetzt werden, bei denen man mit klassischen Reglern und der mit ihnen einhergehenden Stabilitätssicherung des Regelkreises keine befriedigenden Ergebnisse erzielt.

5.3.6 Beispiel Abstandsregelung für Automobile

Als Anwendungsfall für einen Fuzzy-Regler soll eine Abstandsregelung für Automobile betrachtet werden, wie sie in ähnlicher Form in [61, 73] beschrieben wird. Ziel ist es, die Geschwindigkeit v bzw. Beschleunigung a eines Automobils so zu bestimmen, dass der Abstand zu einem vorausfahrenden Fahrzeug dem gesetzlich vorgeschriebenen Wert (halber Tacho), d. h.

$$x_{\text{soll}} = \frac{1}{2} v_{\text{ist}}$$

mit x_{soll} in Metern und v_{ist} in Kilometern pro Stunde, entspricht. Bild 5.36 illustriert die Situation.

Folgende Größen sind für die Abstandsregelung relevant:

v_{leit}	: Geschwindigkeit des vorausfahrenden Fahrzeuges,
v_{ist}	: Geschwindigkeit des geregelten Fahrzeuges,
$v_{\text{rel}} = v_{\text{leit}} - v_{\text{ist}}$	: Relativgeschwindigkeit,
x_{rel}	: Abstand,
$\Delta x_{\text{rel}} = x_{\text{rel}} - x_{\text{soll}}$	: Abstandsabweichung,
a_{soll}	: Wunschbeschleunigung des geregelten Fahrzeuges,
a_{ist}	: Beschleunigung des geregelten Fahrzeuges.

Als Messwerte stehen für die Regelung neben v_{ist} auch v_{rel} und x_{rel} zur Verfügung. Gemessen werden Letztere mittels Radarsensor oder Laser. Die Regelstrecke ist eine Beschleunigungs-Weg-Strecke, d. h., sie ist durch einen

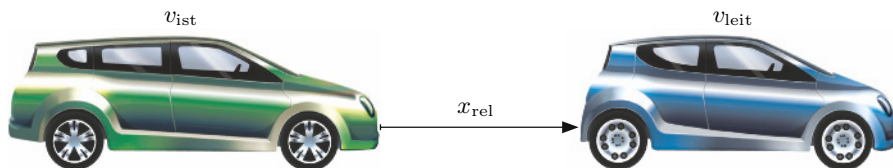


Bild 5.36: Abstandsregelung.

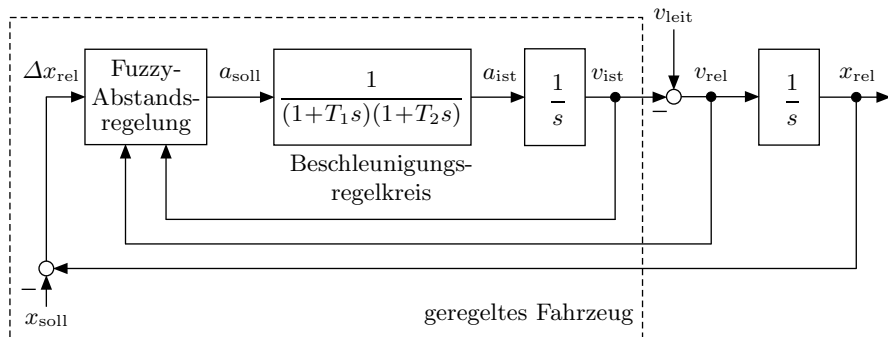


Bild 5.37: Abstandsregelkreis.

Doppelintegrierer zu beschreiben. Hinzu kommen noch zwei Verzögerungsglieder erster Ordnung für einen unterlagerten Beschleunigungsregelkreis. Die Übertragungsfunktion des Regelkreises lautet also

$$G(s) = \frac{1}{s^2(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

mit $T_1 = 0.074 \text{ s}$ und $T_2 = 0.14 \text{ s}$. Es ergibt sich dann der in Bild 5.37 dargestellte Regelkreis.

Es liegt nahe, für den Abstandsregler die Verhaltensweise des Menschen mittels eines Fuzzy-Reglers nachzuahmen. Auch der Mensch benutzt Δx_{rel} , v_{rel} und v_{ist} als Orientierungsgrößen, um die Beschleunigung a_{soll} seines Fahrzeuges zu verringern oder zu erhöhen. Prinzipiell könnte solch eine Abstandsregelung auch durch einen linearen Regler realisiert werden. Jedoch garantiert ein linearer Regler kein ausreichend sicheres Fahrverhalten bei einscherenden Fahrzeugen oder langsamen Fahrzeugen, die nach Kurven auftauchen. Der Fuzzy-Abstandsregler leistet dies und hat dann die Form, wie sie in Bild 5.37 dargestellt ist.

Im ersten Entwurfsschritt legt man linguistische Werte und die Zugehörigkeitsfunktionen von Δx_{rel} , v_{ist} , v_{rel} und a_{soll} fest. Für die Eingangsgrößen ergeben sich die Zugehörigkeitsfunktionen gemäß Bild 5.38, für die Ausgangsgröße die Zugehörigkeitsfunktionen gemäß Bild 5.39.

Im nächsten Schritt werden die Regeln festgelegt, wobei man die Matrixform in Tabelle 5.6 benutzt. Dabei sind die linguistischen Werte geeignet abgekürzt. Die Matrixeinträge geben die Beschleunigung a_{soll} an.

Als Operatoren nutzt man für Aggregation und Implikation den min-Operator und für die Akkumulation den max-Operator. Für die Defuzzifizierung verwenden wir die COS-Methode. Obige Festlegungen haben den Vorteil, dass eine kostengünstige und einfache Realisierung, z. B. mit einem Festkomprozessor, möglich ist. Insbesondere bei der Verwendung von anderen Zugehörigkeitsfunktionen als Singletons und der Flächenschwerpunktmethode

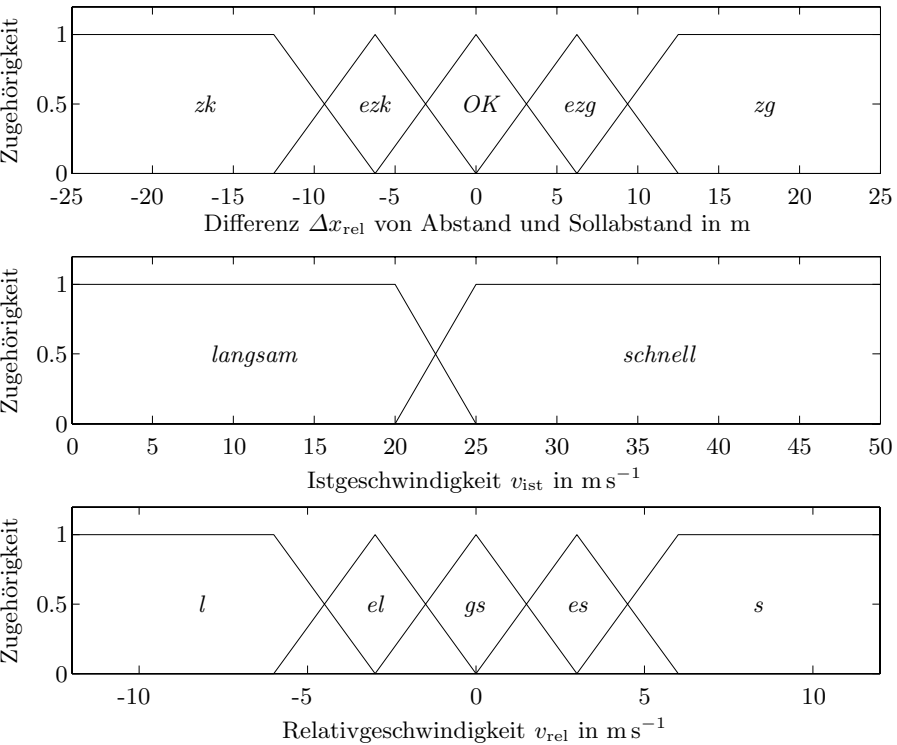


Bild 5.38: Zugehörigkeitsfunktionen der Eingangsgrößen.

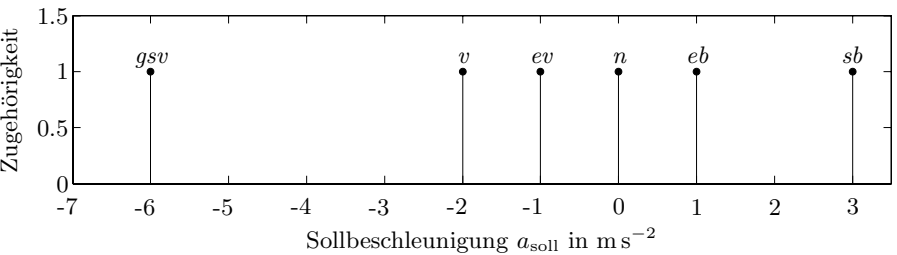


Bild 5.39: Zugehörigkeitsfunktionen der Ausgangsgröße.

COA als Defuzzifizierungsmethode würde die Auswertung wesentlich komplexer und auch kostenintensiver. Im hier vorliegenden Fall ergäben sich außerdem keine Vorteile, denn das Regelverhalten ist bei beiden Varianten sehr ähnlich.

Insgesamt erhält man 50 Regeln. Dabei bildet der Fuzzy-Regler einen Kennfeldregler, dessen Kennfeld vierdimensional ist. Für die Fahrzeuggeschwindigkeiten $v_{\text{ist}} = 10 \text{ m s}^{-1}$, d. h. für *langsam*, und $v_{\text{ist}} = 30 \text{ m s}^{-1}$, d. h.

Tabelle 5.6: Fuzzy-Regeln der Abstandsregelung mit den Eingangsgrößen v_{ist} , Δx_{rel} und v_{rel} sowie der Ausgangsgröße a_{soll} .

$v_{\text{ist}} = \text{langsam}$		Δx_{rel}				
		zk	ezk	ok	ezg	zg
v_{rel}	l	gsv	v	v	v	n
	el	v	v	v	ev	eb
	gs	ev	ev	n	eb	sb
	es	ev	ev	eb	sb	sb
	s	n	n	eb	sb	sb
$v_{\text{ist}} = \text{schnell}$		Δx_{rel}				
		zk	ezk	ok	ezg	zg
v_{rel}	l	v	v	v	v	n
	el	v	v	v	ev	eb
	gs	ev	ev	n	eb	sb
	es	ev	ev	eb	sb	sb
	s	n	n	eb	sb	sb

Abk.	Bedeutung
l	langsamer
el	etwas langsamer
gs	gleich schnell
es	etwas schneller
s	schneller
zk	zu klein
ezk	etwas zu klein
ok	ok
ezg	etwas zu groß
zg	zu groß
gsv	ganz stark verzögern
v	
ev	etwas verzögern
n	null
eb	etwas beschleunigen
sb	stark beschleunigen

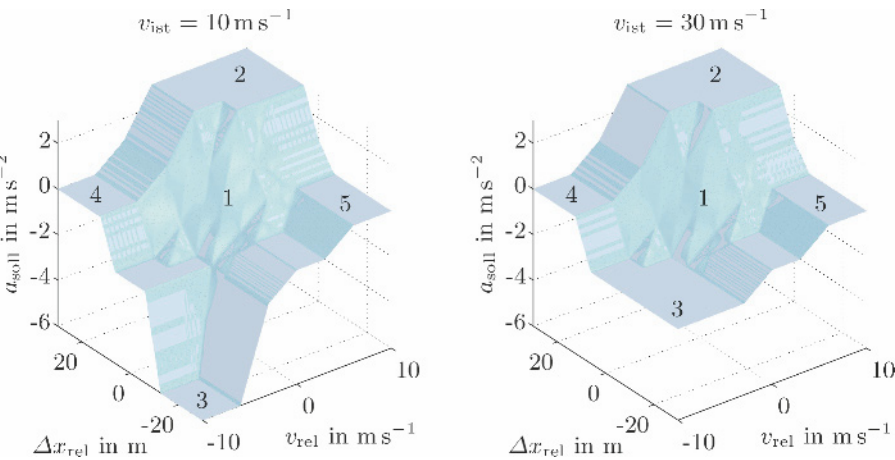


Bild 5.40: Kennfelder des Fuzzy-Abstandsreglers bei den Geschwindigkeiten $v_{\text{ist}} = 10 \text{ m s}^{-1}$ und $v_{\text{ist}} = 30 \text{ m s}^{-1}$ des geregelten Fahrzeuges.

für *schnell*, sind die entsprechenden Teil-Kennfelder in Bild 5.40 grafisch darstellbar. Fünf wesentliche Bereiche sind in diesem nichtlinearen Reglerkennfeld zu erkennen. Im Bereich 1 entspricht das Reglerverhalten annähernd einem linearen Regler. Dieser Bereich kennzeichnet den stationären Zustand mit $v_{\text{rel}} \approx 0 \text{ m s}^{-1}$ und korrektem Abstand $x_{\text{rel}} \approx x_{\text{soll}}$, d. h. $\Delta x_{\text{rel}} \approx 0$. Im Bereich 2 kann der Wagen mit maximaler Beschleunigung aufholen, da der Abstand

groß ist und sich der vorausfahrende Wagen entfernt. Im Bereich 3 muss maximal gebremst werden, denn der Abstand ist viel zu gering. Im Bereich 4 nähert man sich mit geringer Relativgeschwindigkeit aus großem Abstand. Hier wird die Geschwindigkeit nicht verändert. Also gilt $a_{\text{soll}} = 0 \text{ ms}^{-2}$, bis der Wagen aufgeholt hat. Im Bereich 5 fährt der vorausfahrende Wagen bei zu geringem Abstand davon. Daher wird nicht beschleunigt oder gebremst, bis der richtige Abstand erreicht ist.

Aus den Kennfeldern ist auch erkennbar, dass nur in den relativ kleinen Bereichen 4 und 5 weder beschleunigt noch gebremst wird. Folglich wird bei einer Abstandsregelung bei dichtem Verkehr ständig beschleunigt oder gebremst. In der Praxis ist eine Abstandsregelung mit einem Tempomat kombiniert, so dass bei geringer Verkehrsdichte die Geschwindigkeitsregelung durch den Tempomat ausgeführt wird. Die Brems- und Beschleunigungsvorgänge entfallen dann.

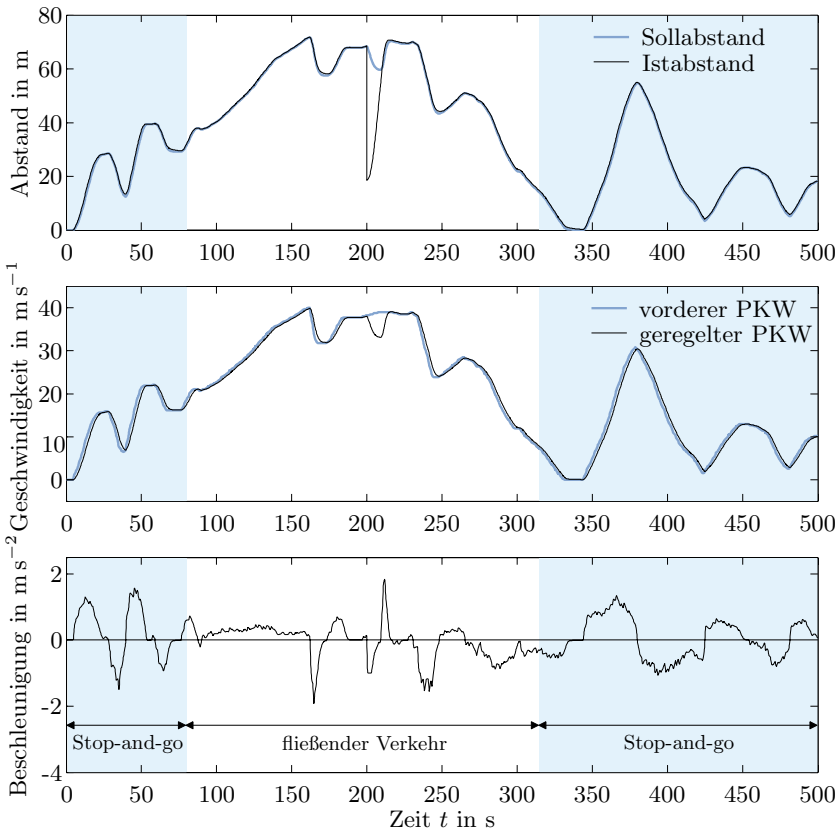


Bild 5.41: Messungen auf einer simulierten Autobahnfahrt.

In Bild 5.41 sind die Beschleunigung a_{soll} , die Geschwindigkeiten v_{ist} und v_{leit} und der Abstand x_{rel} sowie der Sollabstand x_{soll} zweier Fahrzeuge während einer Fahrt auf der Autobahn von ca. 8 min bei sehr dichtem Verkehr dargestellt. Deutlich erkennbar ist das in allen Bereichen gute Regelverhalten. Das nachfolgende, geregelte Fahrzeug hält den gesetzlich vorgeschriebenen Abstand fast exakt ein. Das gilt auch für den Vorfall bei $t = 200\text{ s}$, als ein Fahrzeug mit einem zugehörigen Abstand von ca. 18.5 m bei einer Geschwindigkeit von $38\text{ m s}^{-1} \approx 137\text{ km h}^{-1}$ vor dem geregelten Fahrzeug einschert. Die Regelung stellt danach innerhalb von ca. 10 s wieder den korrekten Abstand her.

Beachtenswert ist auch der Zeitraum zwischen den Sekunden 320 und 350, in dem der Verkehr völlig zum Erliegen kommt. Es gelingt der Regelung auch hier, einen sicheren Abstand einzuhalten, der beim Stillstand der Fahrzeuge allerdings nur noch im Zentimeterbereich liegt. Für den praktischen Einsatz wird man den Sollabstand durch einen einzuhaltenden Wert von z. B. $x_{\text{min}} = 2\text{ m}$ nach unten begrenzen. Man ersetzt dann die Gleichung $x_{\text{soll}} = 0.5v_{\text{ist}}$ durch $x_{\text{soll}} = 0.5v_{\text{ist}} + x_{\text{min}}$.

Beobachter für nichtlineare Systeme

6.1 Beobachtbarkeit nichtlinearer Systeme

6.1.1 Definition der Beobachtbarkeit

Im Fall nichtlinearer Regelkreise mit Zustandsregler stellt sich die Frage, wie man die Zustandsgrößen x_i der Regelstrecke ermittelt, wenn man sie nicht messen kann oder will. Die Situation ist also vergleichbar mit dem Fall linearer Systeme in Zustandsraumdarstellung, bei denen auch oft die Zustandsgrößen x_i nicht messbar sind oder die Messung zu kostenintensiv ist.

Im linearen Fall setzt man zur Lösung dieses Problems Beobachter ein, mittels derer die Zustandsgrößen x_i geschätzt werden. Bild 6.1 zeigt einen solchen Zustandsregelkreis mit Beobachter. Insbesondere gilt im linearen Fall das Separationstheorem, d. h., man kann die Dynamik des Beobachters und die des Regelkreises unabhängig voneinander über die Beobachtermatrix $\mathbf{L}$ und die Reglermatrix $\mathbf{K}$ festlegen.

Beobachter sind auch im Fall nichtlinearer Systeme einsetzbar. Allerdings ist dies nicht so einfach wie im linearen Fall möglich. Die Stabilität von nichtlinearen Regelungssystemen mit Beobachter ist nämlich oft nicht oder nur

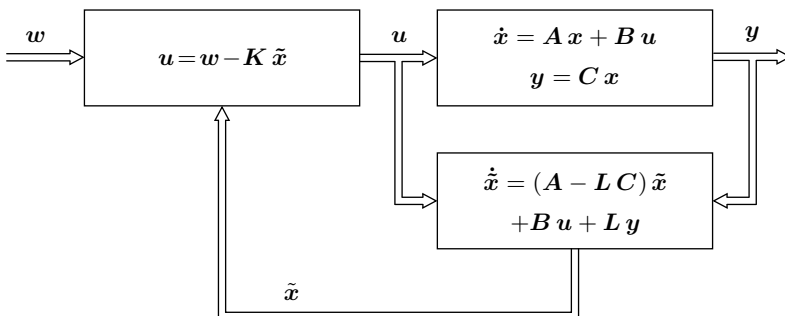


Bild 6.1: Linearer Zustandsregelkreis mit Beobachter.

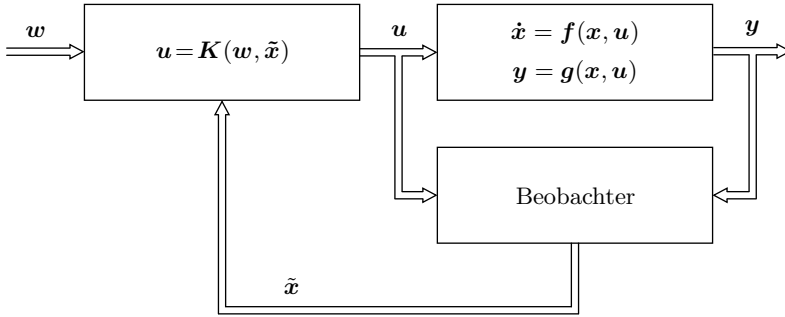


Bild 6.2: Nichtlinearer Zustandsregelkreis mit Beobachter.

schwer nachweisbar. Und im Allgemeinen gilt das Separationstheorem nicht. Die prinzipielle Struktur eines solchen Regelkreises mit Beobachter zeigt Bild 6.2.

Welcher Natur der nichtlineare Beobachter im speziellen Fall ist, hängt vom Charakter der Regelstrecke ab. Die nachfolgenden Kapitel beschreiben einige der gängigen Typen. Ergänzende Literatur bieten [17, 20, 42, 43, 70, 93]. Bevor aber ein Beobachter entworfen werden kann, muss sichergestellt werden, dass das nichtlineare System auch wirklich beobachtbar ist [20, 59, 70, 195]. (In der Praxis wird dieser Schritt auch schon mal vernachlässigt.) Zu diesem Zweck muss der Begriff der *Beobachtbarkeit* zuerst einmal definiert werden. Dabei muss zwischen globaler und lokaler Beobachtbarkeit unterschieden werden.

Definition 15 (Globale Beobachtbarkeit). *Ein System*

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) & \text{mit } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\end{aligned}$$

sei für $\mathbf{x} \in D_{\mathbf{x}} \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{u} \in C_{\mathbf{u}} \subseteq C^{n-1}$ definiert und es sei $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^r$. Sind dann alle Anfangsvektoren $\mathbf{x}_0 \in D_{\mathbf{x}}$ aus der Kenntnis von $\mathbf{u}(t)$ und $\mathbf{y}(t)$ in einem Zeitintervall $[t_0, t_1 < \infty]$ für alle $\mathbf{u} \in C_{\mathbf{u}}$ eindeutig bestimmbar, so heißt das System *global beobachtbar*.

Dabei ist C^{n-1} der Raum der $(n-1)$ -mal stetig differenzierbaren Vektorfunktionen, hier der Funktion $\mathbf{u}(t)$. Ähnlich, aber schwächer in der Anforderung an das System, definieren wir den Begriff der *lokalen Beobachtbarkeit*.

Definition 16 (Lokale Beobachtbarkeit). *Ein System*

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) & \text{mit } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\end{aligned}$$

sei für $\mathbf{x} \in D_{\mathbf{x}} \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{u} \in C_{\mathbf{u}} \subseteq C^{n-1}$ definiert und es sei $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^r$. Sind dann alle Anfangsvektoren $\mathbf{x}_0 \in D_{\mathbf{x}}$ in einer Umgebung

$$U = \{\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_p\| < \rho\}$$

eines Punktes $\mathbf{x}_p \in D_{\mathbf{x}}$ aus der Kenntnis von $\mathbf{u}(t)$ und $\mathbf{y}(t)$ in einem Zeitintervall $[t_0, t_1 < \infty]$ für alle $\mathbf{u} \in C_{\mathbf{u}}$ eindeutig bestimmbar, so heißt das System lokal beobachtbar, wenn dies für alle $\mathbf{x}_p \in D_{\mathbf{x}}$ möglich ist.

In vielen Fällen sind lokal beobachtbare Systeme auch global beobachtbar. Bei linearen Systemen ist dies immer so. Als ein Beispiel, das lokal beobachtbar ist, aber nicht global, betrachten wir das nichtlineare autonome System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \\ y &= x^2. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Der Definitionsbereich von x ist $D_x = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Offensichtlich kann man aus der Kenntnis von $y(t)$ nicht eindeutig den Anfangswert x_0 bestimmen, denn die Ausgangsgleichung $y = x^2$ besitzt die zwei Lösungen

$$x_1 = -\sqrt{y} \quad \text{und} \quad x_2 = \sqrt{y}.$$

Daher ist das System (6.1) nicht global beobachtbar. Es ist aber lokal beobachtbar. Denn für alle Werte x aus einer geeignet gewählten Umgebung $U = \{x_0 \in \mathbb{R} \mid |x_0 - x_p| < \rho\}$ eines jeden Punktes $x_p \in D_x$ ist aus $y = x^2$ eindeutig der Wert x , also x_0 , bestimmbar. D. h., es gilt

$$x_0 = -\sqrt{y(t_0)} \quad \text{für} \quad x_p < 0, \quad \rho < |x_p|,$$

und

$$x_0 = \sqrt{y(t_0)} \quad \text{für} \quad x_p > 0, \quad \rho < |x_p|.$$

Bei nichtlinearen Systemen ist gemäß den obigen Definitionen zwischen globaler und lokaler Beobachtbarkeit zu unterscheiden. Lineare Systeme dagegen sind, wie gesagt, wenn sie lokal beobachtbar sind, auch immer global beobachtbar und natürlich umgekehrt. Bei nichtlinearen Systemen kann es des Weiteren vorkommen, dass ihre Beobachtbarkeit vom Eingangsvektor $\mathbf{u}$ abhängt. Die Beobachtbarkeit eines linearen Systems ist dagegen immer völlig unabhängig vom Eingangsvektor $\mathbf{u}$.

6.1.2 Beobachtbarkeit autonomer Systeme

Wir betrachten zunächst einmal autonome Systeme

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), \\ y &= g(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

d. h. zeitinvariante und von keinem Eingangsvektor $\mathbf{u}$ abhängige Systeme. Um ein Beobachtbarkeitskriterium für sie zu entwickeln, nutzen wir die Lie-Derivierte

$$L_{\mathbf{f}}g(\mathbf{x}) = \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

und die mehrfache Lie-Derivierte

$$L_{\mathbf{f}}^k g(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}} L_{\mathbf{f}}^{k-1} g(\mathbf{x}) = \frac{\partial L_{\mathbf{f}}^{k-1} g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

zur Bestimmung von

$$\begin{aligned} y &= L_{\mathbf{f}}^0 g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \\ \dot{y} &= L_{\mathbf{f}}^1 g(\mathbf{x}) = \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}), \\ &\vdots \\ y^{(n-1)} &= L_{\mathbf{f}}^{n-1} g(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}} L_{\mathbf{f}}^{n-2} g(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Man fasst nun die obigen Lie-Derivierten in einem Vektor

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_{\mathbf{f}}^0 g(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_{\mathbf{f}}^{n-1} g(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

zusammen. Mit dem Vektor

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

gilt

$$\mathbf{z} = \mathbf{q}(\mathbf{x}).$$

Existiert die Umkehrfunktion $\mathbf{q}^{-1}(\mathbf{z}) = \mathbf{x}$, so kann $\mathbf{x}$ mit der Kenntnis von $y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}$ bestimmt werden. Aus der Kenntnis von $y(t)$ in einem Intervall $[t_0, t_1]$ folgt also die Kenntnis des Zustandsvektors $\mathbf{x}(t_0)$. Somit gilt:

Satz 25 (Globale Beobachtbarkeit autonomer Systeme). *Ein auf $D_{\mathbf{x}} \subseteq \mathbb{R}^n$ definiertes System*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), \\ y &= g(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

ist global beobachtbar, wenn die Abbildung

$$\mathbf{z} = \mathbf{q}(\mathbf{x})$$

für alle $\mathbf{x} \in D_{\mathbf{x}}$ eindeutig nach $\mathbf{x}$ auflösbar ist.

Bei vielen nichtlinearen Systemen ist die Umkehrfunktion $\mathbf{q}^{-1}$ nicht oder nur sehr aufwendig zu ermitteln. Wir wollen daher nun ein einfacher handhabbares Kriterium für die lokale Beobachtbarkeit herleiten. Zu diesem Zweck entwickeln wir $\mathbf{q}$ um einen Punkt $\mathbf{x}_p$ herum in eine Taylor-Reihe

$$\mathbf{z} = \mathbf{q}(\mathbf{x}_p) + \left. \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) + \text{Restglied}.$$

Unter Vernachlässigung des Restgliedes erhält man die Gleichung

$$\mathbf{z} - \mathbf{q}(\mathbf{x}_p) = \left. \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p).$$

Aus dieser Gleichung ist direkt ersichtlich, dass aufgrund der Kenntnis von $\mathbf{z} - \mathbf{q}(\mathbf{x}_p)$ der Zustand $\mathbf{x}$ rekonstruierbar, d.h. beobachtbar ist, wenn die Jacobi-Matrix

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}_p) = \left. \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p} = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial L_f^0 g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ \vdots \\ \frac{\partial L_f^{n-1} g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \end{array} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p}$$

den Rang n besitzt. Denn nur dann kann das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{z} - \mathbf{q}(\mathbf{x}_p) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}_p)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)$$

eindeutig nach $\mathbf{x}$ aufgelöst werden. Wir können in diesem Fall in einer Umgebung

$$U = \{\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_p\| < \rho\}$$

feststellen, ob das betrachtete System beobachtbar ist. So erhalten wir auch einen Satz über die lokale Beobachtbarkeit.

Satz 26 (Lokale Beobachtbarkeit autonomer Systeme). *Ein auf $D_{\mathbf{x}} \subseteq \mathbb{R}^n$ definiertes System*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), \\ y &= g(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

ist lokal beobachtbar, wenn für alle $\mathbf{x} \in D_{\mathbf{x}}$ die Bedingung

$$\text{rang} \left(\frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) = \text{rang} \left(\left[\begin{array}{c} \frac{\partial L_f^0 g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ \vdots \\ \frac{\partial L_f^{n-1} g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \end{array} \right] \right) = n$$

erfüllt ist.

Die Matrix

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$$

wird auch als Beobachtbarkeitsmatrix bezeichnet. Die Anwendung des Kriteriums kann durchaus kompliziert sein, da die Matrix $\mathbf{Q}$ von $\mathbf{x}$ abhängt. Allerdings ist die Rangbestimmung von $\mathbf{Q}$ in der Regel einfacher durchzuführen als die Bestimmung der Umkehrfunktion $\mathbf{q}^{-1}$ in Satz 25.

Satz 26 lässt sich auch direkt aus der Transformationsgleichung $\mathbf{z} = \mathbf{q}(\mathbf{x})$ herleiten. Gemäß dem Hauptsatz über implizite Funktionen existiert die inverse Funktion $\mathbf{q}^{-1}$ in einem Punkt $\mathbf{x}$, wenn die Jacobi-Matrix $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ dort den Rang n besitzt.

Um Satz 26 zu illustrieren, betrachten wir den Fall linearer Systeme

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x}, \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}.\end{aligned}$$

Wir erhalten mit $g(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ die Beziehung

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_f^0 g(\mathbf{x}) \\ L_f^1 g(\mathbf{x}) \\ L_f^2 g(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} g(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{x} \end{bmatrix}$$

und somit die Jacobi-Matrix

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

Besitzt die Matrix in Gl. (6.2) den Rang n , so ist das lineare System beobachtbar. Diese Forderung ist im linearen Fall nicht nur hinreichend, sondern es lässt sich zeigen [123], dass sie auch notwendig ist. Sie bildet das bekannte Beobachtbarkeitskriterium für lineare Systeme, das offensichtlich ein Sonderfall des obigen Kriteriums für die Beobachtbarkeit nichtlinearer Systeme ist.

6.1.3 Beispiel Synchrongenerator

Wir betrachten das Modell eines Synchrongenerators [135], wie es Bild 6.3 zeigt. Der Polradwinkel x_1 ist sowohl Zustands- als auch Ausgangsgröße. Weitere Zustandsgrößen sind die Frequenzabweichung x_2 des Polrades gegenüber

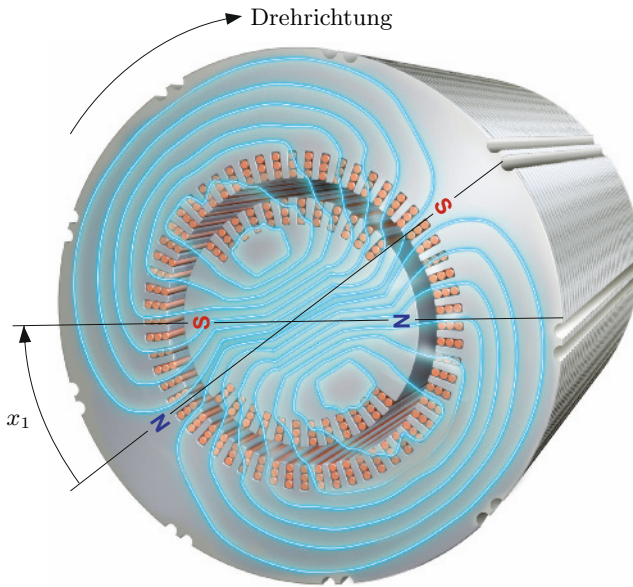


Bild 6.3: Synchrongenerator mit blau dargestelltem Magnetfeld und Polradwinkel x_1 .

dem Netz und die Flussverkeftung x_3 des magnetischen Feldes. Die Flussverkeftung x_3 ist nicht oder nur sehr aufwendig messbar. Man ist daher daran interessiert, sie mittels eines Beobachters zu schätzen. Voraussetzung hierfür ist die Beobachtbarkeit des Systems, die wir im Weiteren analysieren.

Für das Zustandsraummodell gilt

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= b_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 \sin x_1 - \frac{b_2}{2} \sin 2x_1, \\ \dot{x}_3 &= -c_1 x_3 + c_2 \cos x_1 + c_3, \\ y &= x_1.\end{aligned}$$

Dabei sind a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , c_1 , c_2 und c_3 konstante Größen. Wir ermitteln

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \dot{x}_1 = x_2, \\ \ddot{y} &= \dot{x}_2 = b_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 \sin x_1 - \frac{b_2}{2} \sin 2x_1\end{aligned}$$

und erhalten so

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ b_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 \sin x_1 - \frac{b_2}{2} \sin 2x_1 \end{bmatrix} = \mathbf{q}(\mathbf{x}).$$

Für den hier interessierenden Definitionsbereich

$$D_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \in (0, \pi), x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

ist die Synchronmaschine gemäß Satz 25 global beobachtbar. Denn die Abbildung $\mathbf{z} = \mathbf{q}(\mathbf{x})$ kann durch

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \frac{b_1 - a_1 z_2 - 0.5 b_2 \sin 2z_1 - z_3}{a_2 \sin z_1} \end{bmatrix}$$

immer für $\mathbf{x} \in D_{\mathbf{x}}$ eindeutig nach $\mathbf{x}$ aufgelöst werden.

6.1.4 Beobachtbarkeit allgemeiner nichtlinearer Systeme

Wir wollen nun nichtlineare Systeme

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \\ y &= g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{aligned}$$

mit einem Eingangsvektor $\mathbf{u}$ betrachten. Auch hier berechnen wir, wie im Fall autonomer Systeme, die $n - 1$ zeitlichen Ableitungen

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} = h_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}), \\ \ddot{y} &= \frac{\partial h_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \frac{\partial h_1}{\partial \mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} + \frac{\partial h_1}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \ddot{\mathbf{u}} = h_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}), \\ \dddot{y} &= \frac{\partial h_2}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \frac{\partial h_2}{\partial \mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} + \frac{\partial h_2}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \ddot{\mathbf{u}} + \frac{\partial h_2}{\partial \ddot{\mathbf{u}}} \dddot{\mathbf{u}} = h_3(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}, \dddot{\mathbf{u}}), \\ &\vdots \\ y^{(n-1)} &= \frac{\partial h_{n-2}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial h_{n-2}}{\partial \mathbf{u}^{(i-1)}} \mathbf{u}^{(i)} = h_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(n-1)}). \end{aligned}$$

Ähnlich wie im Fall der Beobachtbarkeit autonomer Systeme, definieren wir

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ h_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) \\ h_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}) \\ \vdots \\ h_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(n-1)}) \end{bmatrix} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(n-1)}).$$

Auch in diesem Fall ist die eindeutige Auflösbarkeit der Abbildung $\mathbf{z} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(n-1)})$ nach $\mathbf{x}$ ausschlaggebend für die Beobachtbarkeit des Systems. Es gilt folgendes hinreichendes Kriterium.

Satz 27 (Globale Beobachtbarkeit nichtlinearer Systeme). *Ein auf $D_{\mathbf{x}} \subseteq \mathbb{R}^n$ und $C_{\mathbf{u}} \subseteq C^{n-1}$ definiertes System*

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \\ y &= g(\mathbf{x}, \mathbf{u})\end{aligned}$$

ist global beobachtbar, wenn die Abbildung

$$\mathbf{z} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(n-1)})$$

für alle $\mathbf{x} \in D_{\mathbf{x}}$ und $\mathbf{u} \in C_{\mathbf{u}}$ eindeutig nach $\mathbf{x}$ auflösbar ist.

Auch hier ist die praktische Anwendung des Satzes schwierig. Denn nur in einfachen Fällen lässt sich die Umkehrfunktion

$$\mathbf{x} = \mathbf{q}^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(n-1)})$$

bestimmen.

Einfacher als die Überprüfung der globalen Beobachtbarkeit kann wieder die Überprüfung der lokalen Beobachtbarkeit ausfallen. Analog zum Fall autonomer Systeme lässt sich hierzu folgender hinreichender Satz herleiten:

Satz 28 (Lokale Beobachtbarkeit nichtlinearer Systeme). *Ein auf $D_{\mathbf{x}} \subseteq \mathbb{R}^n$ und $C_{\mathbf{u}} \subseteq C^{n-1}$ definiertes System*

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \\ y &= g(\mathbf{x}, \mathbf{u})\end{aligned}$$

ist lokal beobachtbar, wenn für alle $\mathbf{x} \in D_{\mathbf{x}}$ und $\mathbf{u} \in C_{\mathbf{u}}$ die Bedingung

$$\text{rang} \left(\frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(n-1)})}{\partial \mathbf{x}} \right) = \text{rang} \begin{bmatrix} \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial h_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial h_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}})}{\partial \mathbf{x}} \\ \vdots \\ \frac{\partial h_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(n-1)})}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} = n$$

erfüllt ist.

Satz 28 kann anders als Satz 27 zumindest punktuell auf einfache Weise angewendet werden, indem man den Rang bzw. die Determinante der Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(n-1)}) = \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(n-1)})}{\partial \mathbf{x}}$$

an vorgegebenen Stützstellen $(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(n-1)})$ berechnet.

6.1.5 Nichtlineare Beobachtbarkeitsnormalform

Wir wollen ein global beobachtbares System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \\ y &= g(\mathbf{x}, \mathbf{u})\end{aligned}\tag{6.3}$$

betrachten. Nehmen wir an, dass es uns gelungen ist, die Abbildung

$$\mathbf{z} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(n-1)})\tag{6.4}$$

und ihre Inverse

$$\mathbf{x} = \mathbf{q}^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(n-1)})\tag{6.5}$$

zu ermitteln. Dann ist es möglich, die Systemdarstellung (6.3) mittels der Abbildung (6.5) bzw. (6.4) und mit

$$h_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(n)}) = \frac{\partial h_{n-1}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_{n-1}}{\partial \mathbf{u}^{(i-1)}} \mathbf{u}^{(i)}$$

in die Darstellung

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \\ y^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \\ h_n(\mathbf{q}^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(n-1)}), \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(n)}) \end{bmatrix}, \\ y &= z_1\end{aligned}$$

zu überführen. Wir kürzen noch

$$\varphi(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(n)}) = h_n(\mathbf{q}^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(n-1)}), \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(n)})$$

ab und erhalten

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= \begin{bmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ \varphi(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(n)}) \end{bmatrix}, \\ y &= z_1.\end{aligned}\tag{6.6}$$

Die zur Darstellung (6.3) alternative Systemdarstellung (6.6) wird als *nichtlineare Beobachtbarkeitsnormalform* bezeichnet. Bild 6.4 zeigt das zugehörige Strukturbild. Liegt ein System in dieser Form vor, so kann man

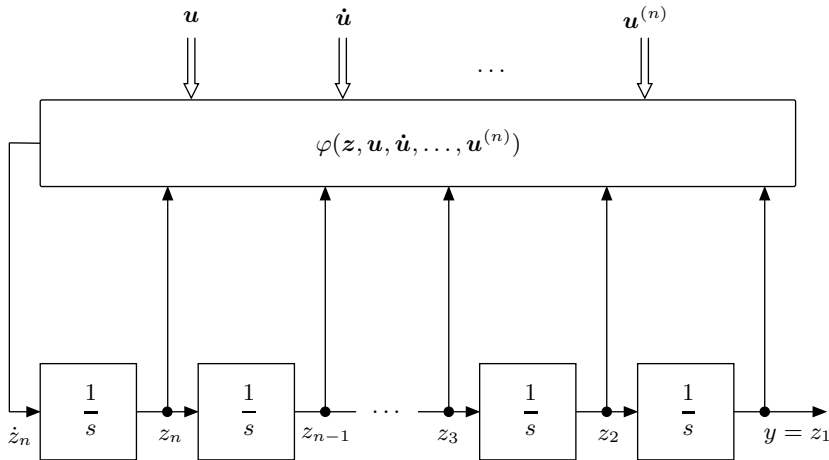


Bild 6.4: System in Beobachtbarkeitsnormalform.

direkt aus den Systemgleichungen auf die Beobachtbarkeit schließen. Denn über die Integriererkette in Gl. (6.6) wirken alle Zustände z_i auf den Ausgangswert $y = z_1$ und aus dem Ausgangswert y und seinen Ableitungen $y^{(i)}$ können alle Zustandswerte z_i ermittelt werden. Ein System, das in nichtlinearer Beobachtungsnormalform vorliegt, ist folglich immer global beobachtbar. Des Weiteren kann jedes global beobachtbare System in die Beobachtungsnormalform transformiert werden.

6.1.6 Beobachtbarkeit eingangslinärer Systeme

Wir betrachten nun eingangslinäre Systeme

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})u, \\ y &= c(\mathbf{x}).\end{aligned}\tag{6.7}$$

Wie im allgemeineren Fall $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$, $y = g(\mathbf{x}, u)$ des Abschnittes 6.1.4, bestimmen wir

$$\begin{aligned}y &= c(\mathbf{x}), \\ \dot{y} &= L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{b}}c(\mathbf{x})u, \\ \ddot{y} &= L_{\mathbf{a}}^2c(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{b}}L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x})u + L_{\mathbf{a}}L_{\mathbf{b}}c(\mathbf{x})u + L_{\mathbf{b}}^2c(\mathbf{x})u^2 + L_{\mathbf{b}}c(\mathbf{x})\dot{u}, \\ &\vdots \\ y^{(n-1)} &= L_{\mathbf{a}}^{n-1}c(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{b}}L_{\mathbf{a}}^{n-2}c(\mathbf{x})u + \dots + L_{\mathbf{b}}^{n-1}c(\mathbf{x})u^{n-1} + L_{\mathbf{b}}c(\mathbf{x})u^{(n-2)}.\end{aligned}$$

So erhalten wir die Transformationsgleichung

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{b}}c(\mathbf{x})u \\ \vdots \\ L_{\mathbf{a}}^{n-1}c(\mathbf{x}) + \dots + L_{\mathbf{b}}c(\mathbf{x})u^{(n-2)} \end{bmatrix} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-2)}).$$

Wir sahen schon in Kapitel 4.2, dass die Terme $L_{\mathbf{b}}L_{\mathbf{a}}^{k-1}c(\mathbf{x})$ identisch null sind für alle $k < \delta$. Dabei ist δ die Differenzordnung des Systems (6.7).

Wir können die Beobachtbarkeit des Systems (6.7) anhand der Eindeutigkeit der Abbildung $\mathbf{q}$ bzw. ihrer Jacobi-Matrix untersuchen. Dazu lassen sich die Sätze 27 und 28 verwenden.

Wir erhalten für die Jacobi-Matrix

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial L_{\mathbf{b}}c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}u \\ \vdots \\ \frac{\partial L_{\mathbf{a}}^{n-1}c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial L_{\mathbf{b}}L_{\mathbf{a}}^{n-2}c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}u + \dots + \frac{\partial L_{\mathbf{b}}c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}u^{(n-2)} \end{bmatrix}.$$

Die Erfüllbarkeit der Rangbedingung $\text{rang}(\partial \mathbf{q} / \partial \mathbf{x}) = n$ des Satzes 28 ist auch hier von u abhängig. Offensichtlich kann es Eingangssignale u geben, so dass die Rangbedingung nicht erfüllt ist und das System nicht beobachtbar ist. Allerdings kann mittels Satz 28 keine Aussage über die Beobachtbarkeit getroffen werden, wenn die Rangbedingung nicht erfüllt ist. Denn Satz 28 ist nur hinreichend.

Wir betrachten das einfache Beispiel

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + x_2 u, \\ \dot{x}_2 &= -x_1, \\ y &= x_1. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Es gilt

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial L_{\mathbf{b}}c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u - 1 \end{bmatrix}.$$

Für $u \neq 1$ ist $\text{rang}(\partial \mathbf{q} / \partial \mathbf{x}) = 2$ und das System lokal beobachtbar. Ist $u = 1$, so hat $\partial \mathbf{q} / \partial \mathbf{x}$ nur den Rang eins. In der Tat ist das System (6.8) nicht beobachtbar für $u = 1$, denn dann gilt

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 0, \\ \dot{x}_2 &= -x_1, \\ y &= x_1\end{aligned}$$

und für dieses System kann man aus der Kenntnis von y und u den Wert von x_2 nicht bestimmen. Mittels des notwendigen und hinreichenden Beobachtbarkeitskriteriums für lineare Systeme lässt sich dies auch zeigen, denn die Beobachtbarkeitsmatrix aus Gl. (6.2) für obiges System,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

besitzt nur den Rang eins.

Für eingangslineare Systeme (6.7), die den relativen Grad n aufweisen und durch einen Diffeomorphismus $\mathbf{z} = \mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{t}(\mathbf{x})$ in die Form

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ L_{\mathbf{a}}^n c(\mathbf{t}^{-1}(\mathbf{z})) + L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{a}}^{n-1} c(\mathbf{t}^{-1}(\mathbf{z})) u \end{bmatrix}$$

gebracht werden können, ist die Frage nach ihrer Beobachtbarkeit leicht zu beantworten. Denn sie liegen in nichtlinearer Beobachtbarkeitsnormalform vor und sind daher immer global beobachtbar.

6.2 Luenberger-Beobachter für nichtlineare Regelkreise

Die Beobachtertheorie von D. G. Luenberger wurde für lineare Systeme entwickelt. Für den Fall eines Regelkreises mit linearer Regelstrecke

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}$$

und nichtlinearem Regler

$$\mathbf{u} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{w}),$$

also einem nichtlinearen Regelkreis mit der Systembeschreibung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{w}),$$

kann ebenfalls ein Luenberger-Beobachter zum Einsatz kommen [122]. Wie im linearen Fall, besteht er aus einem Streckenmodell und einem Rückkopplungssystem, das wie ein Regler wirkt:

$$\underbrace{\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u}}_{\text{Modell}} + \underbrace{\mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})}_{\text{Rückkopplungssystem}}$$

Die Aufgabe des Rückkopplungssystems $\mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}})$ ist es, den Schätzfehler

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}},$$

d. h. die Differenz von Streckenzustand $\mathbf{x}$ und Beobachterzustand $\tilde{\mathbf{x}}$, asymptotisch abklingen zu lassen. Bild 6.5 zeigt die Struktur des Regelungssystems mit Beobachter und nichtlinearem Regelgesetz $\mathbf{u} = \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{w})$.

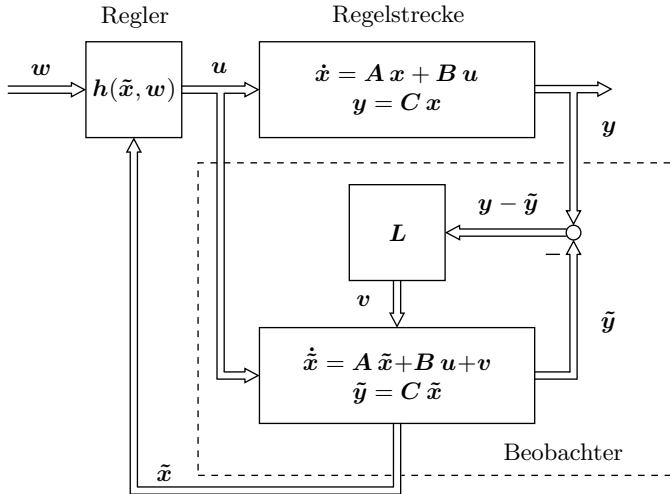


Bild 6.5: Struktur des Systems mit linearer Regelstrecke, nichtlinearem Regler und linearem Beobachter.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit ist es im Falle eines konstanten Führungsgrößenvektors $\mathbf{w}$ möglich, das Regelungssystem so zu transformieren, dass $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ gilt. Man kann dann von einem Regler

$$\mathbf{u} = \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}})$$

ausgehen, was im Folgenden auch geschieht.

Zusammengefasst gilt folgender Satz von D. G. Luenberger.

Satz 29 (Luenberger-Beobachter für nichtlineare Regelkreise). *Gegeben sei das Regelungssystem*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, & \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

mit der global (lokal) asymptotisch stabilen Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$. Die Vektorfunktion $\mathbf{h}$ erfülle die Lipschitz-Bedingung

$$\|\mathbf{h}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{h}(\mathbf{x}_2)\| \leq k \cdot \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$$

für alle $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ (für alle $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ aus einer Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$) und ein $k > 0$. Fügt man dann einen asymptotisch stabilen, linearen Beobachter in das Regelungssystem ein, d. h., hat das Gesamtsystem die Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, & \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}), \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}),\end{aligned}$$

so besitzt dieses System ebenfalls eine global (lokal) asymptotisch stabile Ruhelage in $[\mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{x}}^T] = \mathbf{0}^T$.

Funktionen, die die Lipschitz-Bedingung erfüllen, heißen lipschitzstetig. Differenzierbare Funktionen sind genau dann lipschitzstetig, wenn ihre Ableitungen beschränkt sind. Typische Anwendungsfälle für Satz 29 sind die Regelungen aus Kapitel 3, d. h. strukturvariable Regelungen oder Sättigungsregler.

6.3 Beobachterentwurf mittels Linearisierung

6.3.1 Funktionsweise und Entwurf

Wir bleiben auch in diesem Kapitel gedanklich beim Luenberger-Beobachter und wollen von seiner Grundidee bei der Entwicklung eines Beobachters für nichtlineare Systeme profitieren.

Betrachtet man ein lineares System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}$$

mit Beobachter

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}),$$

so liegt der Gedanke nahe, dieses Schema auf nichtlineare Systeme

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x})\end{aligned}$$

zu übertragen. Der Beobachter hat dann die Form

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}})).$$

Für den Beobachterfehler

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$$

gilt

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{e}, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) - \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}})).$$

Man erhält also eine nichtlineare Differenzialgleichung für den Beobachterfehler. Ersetzt man noch

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{e})$$

in ihr, so ergibt sich

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{e}, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) - \mathbf{L}(\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{e}) - \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}})). \quad (6.9)$$

Damit der Beobachterfehler $\mathbf{e}$ asymptotisch abklingt, steht man vor der Entwurfsaufgabe, die obige nichtlineare Systemgleichung (6.9) mittels $\mathbf{L}$ so auszulegen, dass in $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ eine asymptotisch stabile Ruhelage vorliegt.

Die einfachste Vorgehensweise für den Entwurf der Beobachtermatrix $\mathbf{L}$ führt über die Linearisierung der Gleichung (6.9). Mittels einer Taylor-Entwicklung linearisiert man um einen festen Punkt $\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{p}}$ und erhält

$$\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{p}} + \Delta\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{e}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{p}}, \mathbf{u}) + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}=\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{p}}}}_{\mathbf{A}} \cdot (\Delta\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{e}) + \dots,$$

wobei wir $\mathbf{u}$ als Systemparameter auffassen. Des Weiteren gilt

$$\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{p}} + \Delta\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{p}}, \mathbf{u}) + \mathbf{A} \cdot \Delta\tilde{\mathbf{x}} + \dots$$

Für die Ausgangsvektorfunktion $\mathbf{g}$ erhält man ganz ähnlich

$$\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{p}} + \Delta\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{e}) = \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{p}}) + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}=\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{p}}}}_{\mathbf{C}} \cdot (\Delta\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{e}) + \dots,$$

sowie

$$\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{p}} + \Delta\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{p}}) + \mathbf{C} \cdot \Delta\tilde{\mathbf{x}} + \dots$$

Setzt man obige Taylor-Entwicklungen – abgebrochen nach der ersten Ableitung – in die Beobachtermatrixgleichung (6.9) ein, so ergibt sich

$$\dot{\mathbf{e}} \approx (\mathbf{A} - \mathbf{LC}) \cdot \mathbf{e}, \quad (6.10)$$

d. h. die Schätzgleichung des linearen Beobachters. Dabei ist zu berücksichtigen, dass Gl. (6.10) aufgrund der Vernachlässigung höherer Ableitungen in den Taylor-Reihen nur eine Näherung darstellt.

Legt man die Matrix $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$ des Beobachters stabil aus, so wird auch der Beobachterfehler $\mathbf{e}$ für $t \rightarrow \infty$ gegen null streben. Die Situation ähnelt

also der linearer Systeme mit linearen Beobachtern. Allerdings gilt diese Stabilitätsaussage aufgrund obiger Näherung nur in einer mehr oder weniger großen Umgebung des Linearisierungspunktes $\tilde{\mathbf{x}}_p$.

Will man zu besseren, weitreichenderen Ergebnissen kommen, so kann man die oben beschriebene Linearisierung in Abhängigkeit von $\tilde{\mathbf{x}}$ und $\mathbf{u}$ vornehmen, d. h., die Systemmatrix

$$\mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u})}{\partial \tilde{\mathbf{x}}}$$

und die Ausgangsmatrix

$$\mathbf{C}(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{\partial \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial \tilde{\mathbf{x}}}$$

sind nicht mehr konstant, sondern vom Arbeitspunkt abhängig.

Des Weiteren wählt man nun die Beobachtermatrix $\mathbf{L}$ als Funktion von $\tilde{\mathbf{x}}$ und $\mathbf{u}$ zu $\mathbf{L}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u})$. So ergibt sich anstelle der linearen Schätzfehlergleichung

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{LC}) \cdot \mathbf{e}$$

des Beobachters eine von $\tilde{\mathbf{x}}$ und $\mathbf{u}$ abhängige nichtlineare Gleichung

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) - \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u})\mathbf{C}(\tilde{\mathbf{x}})) \cdot \mathbf{e},$$

die ein Kontinuum von Arbeitspunkten berücksichtigt und entsprechend effektiver sein kann.

Ziel ist es nun, die Systemmatrix

$$\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) - \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u})\mathbf{C}(\tilde{\mathbf{x}})$$

der Schätzfehlergleichung durch geeignete Wahl von $\mathbf{L}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u})$ konstant auszu-legen. Dies geschieht so, dass alle Eigenwerte von $\mathbf{F}$ negative Realteile aufweisen. In diesem Fall gilt

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{F}\mathbf{e}$$

und der Schätzfehler $\mathbf{e}$ klingt asymptotisch ab.

Der einfachste Weg, eine konstante Matrix $\mathbf{F}$ zu erhalten, ist $\mathbf{L}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u})$ für eine vorgegebene Matrix $\mathbf{F}$ aus $\mathbf{L}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = (\mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) - \mathbf{F})\mathbf{C}^{-1}(\tilde{\mathbf{x}})$ zu berechnen. Dies ist allerdings nur für eine invertierbare Matrix $\mathbf{C}(\tilde{\mathbf{x}})$ möglich. Voraussetzung für die Invertierbarkeit von $\mathbf{C}$ ist, dass

$$\mathbf{C}(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{\partial \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial \tilde{\mathbf{x}}}$$

eine quadratische Matrix ist. Dies wiederum setzt voraus, dass $\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}})$ eine n -dimensionale Funktion ist, es also genauso viele Ausgangsvariablen wie Zustände gibt. Dieser Fall ist in der Praxis eher selten anzutreffen und daher in der Regel nicht von Bedeutung.

Daher geht man einen anderen Weg: Man berechnet das charakteristische Polynom von $\mathbf{F}$,

$$\begin{aligned}
P(s) &= \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u})) \\
&= \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u})\mathbf{C}(\tilde{\mathbf{x}})) \\
&= \prod_{i=1}^n (s + \lambda_i),
\end{aligned}$$

und fordert, dass die Realteile aller Eigenwerte λ_i negativ sind. Hierbei ist zu beachten, dass die Eigenwerte λ_i bzw. die Koeffizienten von P sowohl von $\tilde{\mathbf{x}}$ als auch von $\mathbf{u}$ unabhängig sind. Um sicherzustellen, dass alle $\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0$ sind, muss man die Beobachtermatrix $\mathbf{L}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u})$ entsprechend auslegen.

Für die Berechnung der Beobachtermatrix $\mathbf{L}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u})$ betrachtet man das charakteristische Polynom

$$P(s) = s^n + a_{n-1}(\mathbf{L}, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u})s^{n-1} + \dots + a_0(\mathbf{L}, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u})$$

und fordert, dass es einem Wunschnopolynom

$$\hat{P}(s) = s^n + \hat{a}_{n-1}s^{n-1} + \dots + \hat{a}_0$$

entspricht. Hierbei soll $\hat{P}$ natürlich nur Nullstellen mit negativem Realteil aufweisen. Durch Koeffizientenvergleich erhält man ein nichtlineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
a_{n-1}(\mathbf{L}, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) &= \hat{a}_{n-1}, \\
a_{n-2}(\mathbf{L}, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) &= \hat{a}_{n-2}, \\
&\vdots \\
a_0(\mathbf{L}, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) &= \hat{a}_0
\end{aligned}$$

mit n Gleichungen und $n \cdot r$ Unbekannten, den Elementen der $n \times r$ -Matrix $\mathbf{L}$. Dabei ist, wir erinnern uns, n die Systemordnung und r die Dimension des Ausgangsgrößenvektors $\mathbf{y}$.

Die Lösung des obigen Gleichungssystems stellt sicher, dass die Eigenwerte von $\mathbf{F}$ konstant sind und den Nullstellen des Wunschnopolynoms $\hat{P}(s)$ entsprechen. Diese Tatsache garantiert allerdings nicht die Einhaltung der ursprünglichen Forderung, dass die Systemmatrix

$$\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) - \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u})\mathbf{C}(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (6.11)$$

der linearisierten Beobachtermatrix konstant ist, d. h. unabhängig von $\tilde{\mathbf{x}}$ und $\mathbf{u}$.

Die Konstanz von $\mathbf{F}$ muss vielmehr durch Einsetzen des berechneten $\mathbf{L}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u})$ in Gleichung (6.11) überprüft werden. Sollte sich dabei herausstellen, dass $\mathbf{F}$ nicht unabhängig von $\tilde{\mathbf{x}}$ und $\mathbf{u}$ ist, so kann der Beobachter

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}}))$$

trotzdem verwendet werden, wenn die Elemente von $\mathbf{F}$ nicht sehr stark variieren. Eine Absicherung der Funktionsweise durch Simulation ist in diesem Fall unumgänglich.

6.3.2 Regelkreis mit Beobachter

Fügt man den oben entwickelten Beobachter in einen nichtlinearen Regelkreis ein, so ergibt sich eine ähnliche Struktur wie im Fall des Luenberger-Beobachters im linearen Regelkreis. Bild 6.6 zeigt sie. Allerdings ist $\mathbf{L}$ im nichtlinearen Fall nicht konstant, sondern eine Funktion von $\tilde{\mathbf{x}}$ und $\mathbf{u}$.

Die zugehörigen Gleichungen des Regelkreises mit Beobachter lauten:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{u} &= \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{w}), \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Regelstrecke} \\ \text{Regler} \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}})). \end{aligned} \right\} \quad \text{Beobachter}$$

Alternativ zu dieser Darstellung können die Gleichungen des Gesamtsystems auch mittels des Schätzfehlers

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$$

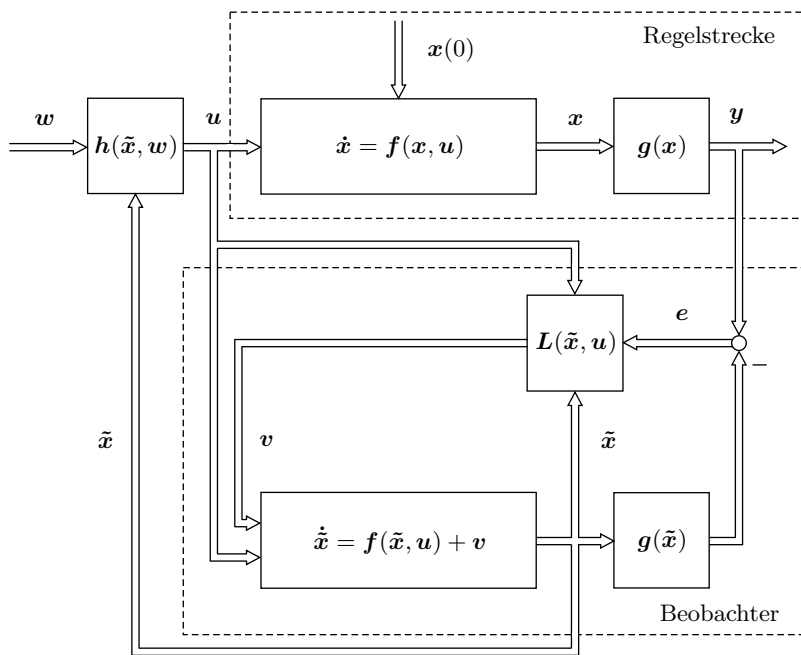


Bild 6.6: Struktur der Regelstrecke mit Beobachter und Regler $\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{w})$.

dargestellt werden. Es gilt

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{u} &= \mathbf{h}(\mathbf{x} - \mathbf{e}, \mathbf{w}), \\ \dot{\mathbf{e}} &= \mathbf{F}(\mathbf{x} - \mathbf{e}, \mathbf{u})\mathbf{e}.\end{aligned}$$

Allerdings eignet sich diese Darstellung nicht für eine Realisierung, da der Beobachterfehler $\mathbf{e}$ aufgrund der Unkenntnis von $\mathbf{x}$ nicht gebildet werden kann.

Die zuletzt gezeigten Gleichungen des Systems lassen aber eine Plausibilitätsbetrachtung bezüglich der Stabilität zu. Da $\mathbf{F}$ näherungsweise konstant ist und Eigenwerte mit negativem Realteil besitzt, gilt

$$\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{für} \quad t \rightarrow \infty.$$

Dann wird für das Regelgesetz für große Werte t ebenfalls

$$\mathbf{u} = \mathbf{h}(\mathbf{x} - \mathbf{e}, \mathbf{w}) \approx \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{w})$$

gelten. Ist der Regelkreis ohne Beobachter stabil, so ist es plausibel (aber nicht bewiesen), dass auch der Regelkreis mit Beobachter stabil ist.

6.3.3 Beispiel Bioreaktor

Als Beispiel wird ein Bioreaktor [68] betrachtet. Bioreaktoren werden zur Herstellung von Vitaminen und Medikamenten eingesetzt. Dazu wird in einem ersten Schritt eine Zellkultur gezüchtet, die in weiteren Schritten für die Herstellung des eigentlich gewünschten Stoffes benutzt wird. Hier wird die Wachstumsphase der Zellkultur modelliert.

Der Reaktor hat ein konstantes Volumen. Über eine Pumpe wird Glucose als Substrat in den Bioreaktor gegeben. Die angesetzte Zellkultur vermehrt sich unter Verbrauch des Substrates und vergrößert so ihre Biomasse. Ein Rührer sorgt für eine gleichmäßige Durchmischung. Das Gemisch wird schließlich aus dem Reaktor für weitere Prozessschritte entnommen. Bild 6.7 illustriert den Prozess.

Die Biomassekonzentration x_1 der Zellkultur, gemessen in g l^{-1} , steigt proportional zu ihrem Bestand mit

$$\dot{x}_1 = \mu(x_2) \cdot x_1.$$

Es liegt also ein klassisches Wachstumsgesetz vor. Die Wachstumskonstante μ hängt von der Konzentration x_2 des Wachstumssubstrats, d. h. der Glucose, gemäß der folgenden Wachstumskinetik

$$\mu(x_2) = \frac{\mu_0 \cdot x_2}{k_1 + x_2 + k_2 x_2^2}$$

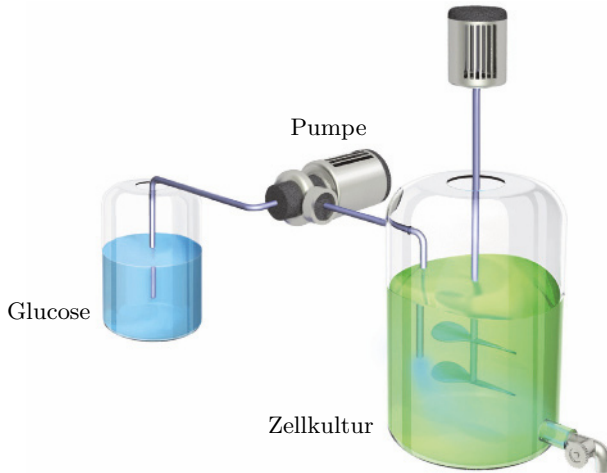


Bild 6.7: Bioreaktor.

mit der Wachstumsrate $\mu_0 = 1 \text{ h}^{-1}$ und den beiden Affinitätskonstanten $k_1 = 0.03 \text{ g l}^{-1}$, $k_2 = 0.5 \text{ l g}^{-1}$ ab. Die Konzentration x_2 wird in g l^{-1} gemessen.

Der auf das Gesamtvolumen bezogene Substratzufluss u , gemessen in h^{-1} , verdünnt die Biomasse um den Wert

$$-x_1 \cdot u.$$

Damit ergibt sich für die zeitliche Änderung der Biomassekonzentration

$$\dot{x}_1 = \mu(x_2) \cdot x_1 - x_1 \cdot u.$$

Die Substratmasse wird im Reaktor von der Biomasse verbraucht und nimmt daher proportional zur Zellkulturmenge x_1 ab. Der Substratzufluss erhöht die Substratkonzentration x_2 im Reaktor proportional zum Zufluss u und der Differenz der Konzentration K der Glucose im Zulauf und der Konzentration x_2 im Reaktor. Also gilt

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{\alpha} \mu(x_2) \cdot x_1 + (K - x_2) \cdot u$$

mit dem Ausbeutekoeffizient $\alpha = 0.5$ und der Zulaufkonzentration der Glucose $K = 10 \text{ g l}^{-1}$.

Zusammengefasst ergibt sich als Zustandsraummodell

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot u = \begin{bmatrix} \mu(x_2) \cdot x_1 \\ -\frac{1}{\alpha} \mu(x_2) \cdot x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_1 \\ K - x_2 \end{bmatrix} u, \\ y &= g(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Im Folgenden soll nun ein Beobachter mittels Linearisierung und zustandsabhängiger Beobachtermatrix $\mathbf{L}(\tilde{\mathbf{x}}, u)$ entworfen werden. Für den Beobachterentwurf sind zuerst einmal für die Linearisierung des Systems die Jacobi-Matrizen

$$\mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}}, u) = \frac{\partial \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, u)}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \quad \text{und} \quad \mathbf{C}(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{\partial \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial \tilde{\mathbf{x}}}$$

zu bilden. Man erhält

$$\mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}}, u) = \begin{bmatrix} \mu(\tilde{x}_2) - u & \mu'(\tilde{x}_2)\tilde{x}_1 \\ -\frac{1}{\alpha}\mu(\tilde{x}_2) & -\frac{1}{\alpha}\mu'(\tilde{x}_2)\tilde{x}_1 - u \end{bmatrix}$$

und

$$\mathbf{C}(\tilde{\mathbf{x}}) = [1 \ 0].$$

Im nächsten Entwurfsschritt berechnet man das charakteristische Polynom der Beobachtermatrix

$$P(s) = \det(s\mathbf{I} - \underbrace{(\mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}}, u) - \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{x}}, u)\mathbf{C}(\tilde{\mathbf{x}}))}_{\text{Beobachtermatrix } \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}, u)}).$$

Hierbei ist

$$\mathbf{L}(\tilde{\mathbf{x}}, u) = \begin{bmatrix} l_1(\tilde{\mathbf{x}}, u) \\ l_2(\tilde{\mathbf{x}}, u) \end{bmatrix}.$$

Wir verwenden der Übersichtlichkeit halber im Weiteren die folgenden Abkürzungen:

$$\begin{aligned} l_1 &= l_1(\tilde{\mathbf{x}}, u), \\ l_2 &= l_2(\tilde{\mathbf{x}}, u), \\ \mu &= \mu(\tilde{x}_2), \\ \mu' &= \mu'(\tilde{x}_2) = \frac{d\mu(\tilde{x}_2)}{d\tilde{x}_2}. \end{aligned}$$

Man erhält so für das charakteristische Polynom von $\mathbf{F}$

$$P(s) = s^2 + \left(l_1 - \mu + \frac{\mu'}{\alpha}\tilde{x}_1 + 2u \right) s + \mu'\tilde{x}_1 \left(l_2 + \frac{l_1 + u}{\alpha} \right) + l_1 u - \mu u + u^2.$$

Der Koeffizientenvergleich mit dem Wunschpolynom

$$\hat{P}(s) = s^2 + \hat{a}_1 s + \hat{a}_0$$

liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\hat{a}_1 &= l_1 - \mu + \frac{\mu'}{\alpha} \tilde{x}_1 + 2u, \\ \hat{a}_0 &= \mu' \tilde{x}_1 \left(l_2 + \frac{l_1 + u}{\alpha} \right) + l_1 u - \mu u + u^2.\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}l_1 &= \hat{a}_1 + \mu - \frac{\mu'}{\alpha} \tilde{x}_1 - 2u, \\ l_2 &= \frac{\hat{a}_0 - \hat{a}_1 u + u^2}{\mu' \tilde{x}_1} - \frac{\hat{a}_1 + \mu - \alpha^{-1} \mu' \tilde{x}_1 - 2u}{\alpha}.\end{aligned}$$

In der Tat ergibt sich nach Einsetzen von $\mathbf{L}(\tilde{\mathbf{x}}, u)$ in die Gl. (6.11) für die Matrix $\mathbf{F}$ der Schätzfehlergleichung

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}, u) \mathbf{e}$$

die von $\tilde{\mathbf{x}}$ und u abhängige Matrix

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}, u) &= \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}}, u) - \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{x}}, u) \mathbf{C}(\tilde{\mathbf{x}}) \\ &= \begin{bmatrix} -\hat{a}_1 + \frac{\mu'}{\alpha} \tilde{x}_1 + u & \mu' \tilde{x}_1 \\ -\frac{\hat{a}_0 - \hat{a}_1 u + u^2}{\mu' \tilde{x}_1} + \frac{\hat{a}_1 - \alpha^{-1} \mu' \tilde{x}_1 - 2u}{\alpha} & -\frac{\mu'}{\alpha} \tilde{x}_1 - u \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Man beachte, dass zwar $\mathbf{F}$ von $\tilde{\mathbf{x}}$ und u abhängt, aber das charakteristische Polynom

$$P(s) = \hat{P}(s) = s^2 + \hat{a}_1 s + \hat{a}_0$$

der Matrix $\mathbf{F}$ nicht abhängig von $\tilde{\mathbf{x}}$ und u ist.

Wir legen den Beobachter mittels $\hat{a}_0 = 100$ und $\hat{a}_1 = 20$ so aus, dass die Eigenwerte von $\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}, u)$ bzw. die Nullstellen des charakteristischen Polynoms P bei $s_{1/2} = -10$ liegen.

Die Diagramme in Bild 6.8 zeigen den Verlauf der Biomasse- und Substratkonzentration im Bioreaktor für den Anfangszustand

$$\mathbf{x}(0) = [4.0 \ 0.02]^T \text{ g l}^{-1}.$$

Zum Vergleich sind die Systemzustände des Beobachters angegeben, ausgehend von

$$\tilde{\mathbf{x}}(0) = [3.0 \ 0.05]^T \text{ g l}^{-1}.$$

Die Systemzustände nähern sich bei einer Eingangsgröße $u = 0.5$ den Endwerten $x_1 = 4.94 \text{ g l}^{-1}$ und $x_2 = 0.03 \text{ g l}^{-1}$ an. Die Fehler zwischen den realen Systemzuständen des Reaktors und den beobachteten werden schnell und recht unspektakulär eliminiert.

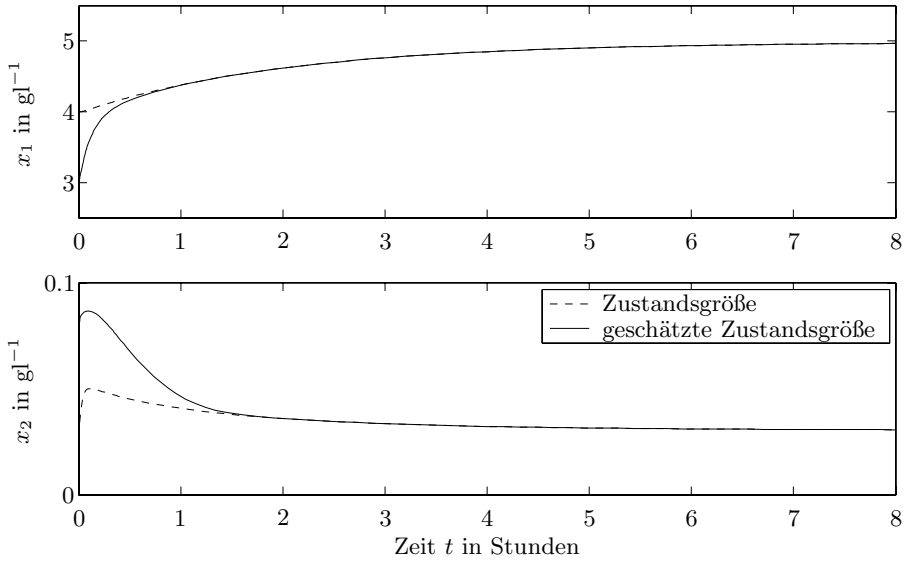


Bild 6.8: Verlauf der tatsächlichen und der geschätzten Biomassekonzentrationen x_1 und Substratkonzentrationen x_2 .

6.4 Das erweiterte Kalman-Filter

6.4.1 Kalman-Filter für lineare Systeme

Das erweiterte Kalman-Filter, abgekürzt EKF, ist der in der Praxis am häufigsten verwendete Beobachertyp für nichtlineare Systeme. Es basiert auf einer linearisierten Darstellung der nichtlinearen Systemdynamik. Um seine Funktionsweise zu verstehen, wird zuerst kurz die Funktionsweise des Kalman-Filters für lineare Systeme wiederholt [53].

Das zu beobachtende System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \boldsymbol{\mu}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \boldsymbol{\rho}\end{aligned}$$

wird durch zwei mittelwertfreie, normalverteilte, weiße Rauschprozesse $\boldsymbol{\mu}$ und $\boldsymbol{\rho}$, die unkorreliert sind, gestört. Für ihre beiden Kovarianzmatrizen $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{S}$ gilt

$$\begin{aligned}\text{cov}\{\boldsymbol{\mu}(t_1), \boldsymbol{\mu}(t_2)\} &= \mathbf{Q} \cdot \delta(t_1 - t_2), \\ \text{cov}\{\boldsymbol{\rho}(t_1), \boldsymbol{\rho}(t_2)\} &= \mathbf{S} \cdot \delta(t_1 - t_2).\end{aligned}$$

Das Kalman-Filter

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}\mathbf{y}$$

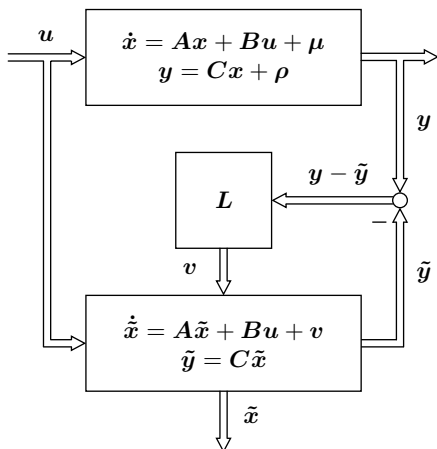


Bild 6.9: Struktur eines Kalman-Filters.

mit der Filtermatrix $\mathbf{L}$ bestimmt mit $\tilde{\mathbf{x}}$ eine Schätzung des Zustandsgrößenvektors $\mathbf{x}$. Bild 6.9 zeigt das zu beobachtende System und die Struktur des Kalman-Filters, die vollständig der Struktur des Luenberger-Beobachters aus Bild 6.1 entspricht.

In der Tat sind, wie wir aus der linearen Systemtheorie wissen [53, 182], Kalman-Filter und Luenberger-Beobachter identisch in ihren Gleichungen. Sie unterscheiden sich lediglich in der Bestimmung der Matrix $\mathbf{L}$. Und zwar wählt man beim Luenberger-Beobachter die Eigenwerte geeignet und legt dadurch die Matrix $\mathbf{L}$ fest. Die Kalman-Matrix $\mathbf{L}$ ist dagegen so ausgelegt, dass der Einfluss der Rauschgrößen $\boldsymbol{\mu}$ und $\boldsymbol{\rho}$ auf den Schätzfehler $\mathbf{e}$ minimal ist. Dies geschieht, indem man aus dem Schätzfehler

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$$

und den Erwartungswerten

$$\mathrm{E} \{e_i^2\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e_i^2(t) dt$$

das Gütemaß

$$J = \sum_{i=1}^n \mathrm{E} \{e_i^2\}$$

bildet und dieses in Abhängigkeit von $\mathbf{L}$ minimiert.

Die Lösung hat die Form

$$\mathbf{L} = \mathbf{P} \mathbf{C}^T \mathbf{S}^{-1}, \quad (6.12)$$

wobei sich $\mathbf{P}$ aus der Riccati-Gleichung

$$\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T - \mathbf{P}\mathbf{C}^T\mathbf{S}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P} = -\mathbf{Q} \quad (6.13)$$

ergibt. Die Matrizen $\mathbf{S}$ und $\mathbf{Q}$ sind im Allgemeinen unbekannt und werden oft als Einheitsmatrizen angenommen. Erst nachträgliches, iteratives Ausprobieren bzw. Optimieren mit anderen Matrizen $\mathbf{S}$ und $\mathbf{Q}$ führt dann zu einem befriedigenden Entwurfsergebnis.

6.4.2 Das EKF für nichtlineare Systeme

Im Fall eines nichtlinearen Systems

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\mu}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\rho} \end{aligned}$$

kann formal die Schätzgleichung des Kalman-Filters auf die nichtlineare Situation übertragen werden und man erhält die Beobachtergleichung

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}})).$$

Dieser Analogieschritt wurde bereits im vorherigen Kapitel im Fall des Beobachterentwurfes mittels Linearisierung durchgeführt. Nachteilig ist dabei die Wahl einer konstanten Matrix $\mathbf{L}$, da der Beobachter dann nur um einen Arbeitspunkt herum gut funktionieren wird. Diese Situation liegt auch hier vor. Man wählt die Beobachtermatrix $\mathbf{L}$ daher zeitabhängig, um sie je nach Verlauf der Trajektorien $\mathbf{x}(t)$ bzw. $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ an die Nichtlinearität des Systems anzupassen. So nimmt die Beobachtergleichung die Form

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + \mathbf{L}(t)(\mathbf{y} - \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}})) \quad (6.14)$$

an. Diesen Beobachter bezeichnet man als *erweitertes Kalman-Filter*.

Der Entwurf von $\mathbf{L}(t)$ erfolgt mittels der bekannten Entwurfsgleichung (6.12) des klassischen Kalman-Filters

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{C}^T(t)\mathbf{S}^{-1},$$

wobei sich die Matrix $\mathbf{P}(t)$ aus der nun zeitabhängigen Riccati-Gleichung (6.13)

$$\mathbf{A}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}^T(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{C}^T(t)\mathbf{S}^{-1}\mathbf{C}(t)\mathbf{P}(t) = -\mathbf{Q}$$

errechnet. Dabei ergeben sich die Matrizen $\mathbf{A}(t)$ und $\mathbf{C}(t)$ als Linearisierungen, d. h. Taylor-Entwicklungen, die nach dem ersten Glied abgebrochen werden, aus

$$\mathbf{A}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}(t)} \quad \text{und} \quad \mathbf{C}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}(t)}$$

an der jeweils aktuellen und bekannten Stützstelle $\tilde{\mathbf{x}}(t)$.

Praktisch löst man die obige algebraische Riccati-Gleichung wie im linearen Fall über die Riccati-Differenzialgleichung

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}^T(t) + \mathbf{Q} - \mathbf{P}(t)\mathbf{C}^T(t)\mathbf{S}^{-1}\mathbf{C}(t)\mathbf{P}(t). \quad (6.15)$$

Als Anfangswert für die gesuchte Matrix $\mathbf{P}(t)$ wird dabei die Kovarianzmatrix

$$\mathbf{P}(0) = \text{cov}\{\mathbf{x}_0 - \tilde{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0 - \tilde{\mathbf{x}}_0\} = \mathbf{E}\{(\mathbf{x}_0 - \tilde{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \tilde{\mathbf{x}}_0)^T\}$$

des anfänglichen Schätzfehlers

$$\mathbf{e}_0 = \mathbf{x}_0 - \tilde{\mathbf{x}}_0, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{x}}_0 = \tilde{\mathbf{x}}(0)$$

verwendet.

Zu beachten ist, dass die Riccati-Differenzialgleichung (6.15) nicht offline gelöst wird, um den stationären Wert von $\mathbf{P}$ zu bestimmen. Dies ist offline deshalb nicht möglich, weil sich $\mathbf{A}(t)$ fortlaufend ändert. Man löst die Schätzgleichung (6.14) und die Riccati-Differenzialgleichung (6.15) also simultan, wobei man fortwährend die Jacobi-Matrizen $\mathbf{A}(t)$ und $\mathbf{C}(t)$ zu bestimmen hat. Stabilität und Qualität der Schätzung sind beim erweiterten Kalman-Filter nicht gesichert, sondern müssen simulatorisch überprüft werden. Letzteres hat den Nachteil, dass man keine allgemeingültige Aussage erhält, sondern Stabilität und Schätzgüte nur für die jeweils durchgeführten speziellen Simulationen gelten.

Beim Entwurf des Kalman-Filters, d. h. der Wahl von $\mathbf{S}$ und $\mathbf{Q}$, ist Ausprobieren nötig und Erfahrung erforderlich. Zusammengefasst erhält man für das System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\mu}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\rho} \end{aligned}$$

die Gleichungen des erweiterten Kalman-Filters bzw. des Beobachters

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}})), \\ \mathbf{A} &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}(t)}, \\ \mathbf{C} &= \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}(t)}, \\ \dot{\mathbf{P}} &= \mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} - \mathbf{P}\mathbf{C}^T\mathbf{S}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P}, \\ \mathbf{L} &= \mathbf{P}\mathbf{C}^T\mathbf{S}^{-1}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Die Struktur des erweiterten Kalman-Filters und die gegenseitigen Abhängigkeiten der einzelnen Gleichungen zeigt Bild 6.10.

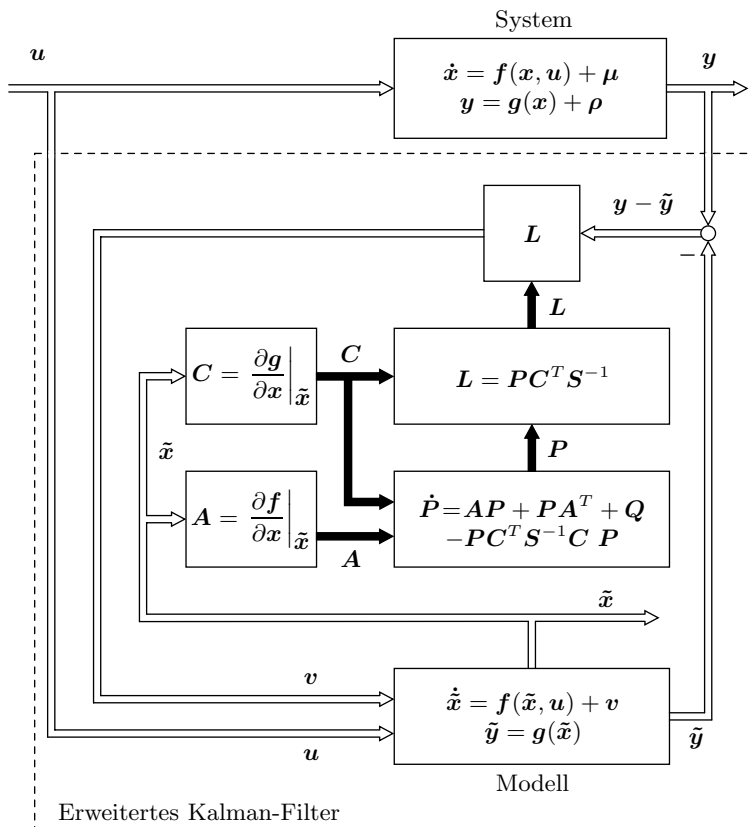


Bild 6.10: Erweitertes Kalman-Filter.

Die praktische Umsetzung des erweiterten Kalman-Filters erfordert, wenn man von sehr einfachen Fällen absieht, eine numerische Lösung der Riccati-Differenzialgleichung mittels eines Integrationsverfahrens – z. B. mittels des Runge-Kutta-Verfahrens. Im Prinzip gilt dies auch für die Schätzgleichung. Die numerische Lösung der Riccati-Differenzialgleichung kann dabei Probleme bereiten.

6.4.3 Beispiel Flugzeugtriebwerk

Wir betrachten ein Strahltriebwerk, wie es z. B. in Verkehrsflugzeugen eingesetzt wird. Bei dem in Bild 6.11 gezeigten Mantelstromtriebwerk, auch Turbofan genannt, existieren ein innerer und ein äußerer Luftstrom. Der innere Luftstrom, auch Kernstrom genannt, wird durch einen Kompressor verdichtet, dann mit Kerosin vermischt und dieses Gemisch hinter dem Kompressor gezündet. Die so entstandenen Verbrennungsgase treiben eine Gasturbine an.

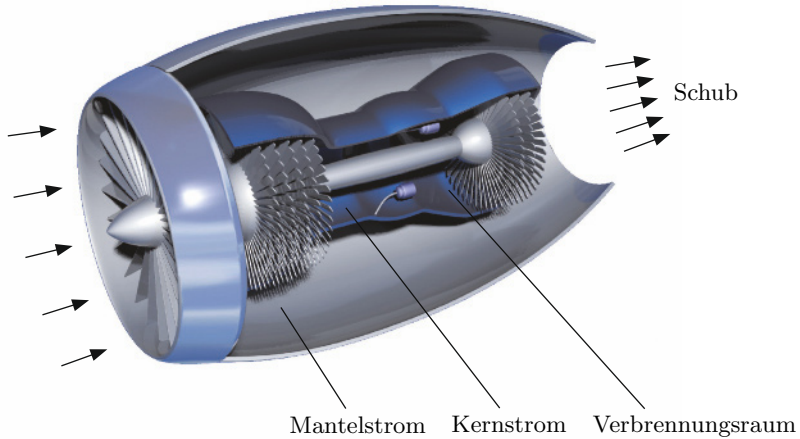


Bild 6.11: Flugzeugtriebwerk.

Diese wiederum dreht den Kompressor und den vor ihm liegenden Fan. Der Fan saugt neben der Luft des inneren Stroms auch die des äußeren an, der mantelförmig um den Kompressor und die Turbine herumgeleitet wird. Dieser äußere Luftstrom, der Mantelstrom, verstärkt den Schub, der durch den Kernstrom erzeugt wird.

Im Kompressor kann es aufgrund eines Strömungsabrisses oder durch Schubschwankungen zu instabilen Strömungsverhältnissen kommen. Dann sind im schlimmsten Fall Beschädigungen des Triebwerks, z. B. aufgrund eines Flammenaustrittes oder aufgrund einer Richtungsumkehr des Massenstroms, möglich. Dies sucht man z. B. durch eine Regelung zu vermeiden.

Beschrieben werden die Verhältnisse im Kompressor durch die Moore-Greitzer-Gleichungen [105, 126]

$$\begin{aligned}
 \dot{\Phi} &= -\Psi + \Psi_{\text{co}} + 1 + \frac{3}{2}\Phi - \frac{1}{2}\Phi^3 - 3\Phi R, \\
 \dot{\Psi} &= \frac{1}{\beta^2}(\Phi - \gamma\sqrt{\Psi} + 1), \\
 \dot{R} &= \sigma R(1 - \Phi^2 - R).
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

Hierbei ist Φ der Massenfluss durch den Kompressor, Ψ der Druckanstieg, $R \geq 0$ ist ein Maß für den Strömungsabriss und β , σ sowie Ψ_{co} sind Konstanten. Als Stellgröße u wirkt die Variable γ . Sie repräsentiert z. B. Zapfluft, die dem Kernstrom oder dem Mantelstrom entnommen und dem Verdichter so zugeführt wird, dass kein Strömungsabriss oder eine Richtungsumkehr des Massenstroms entsteht.

Ziel ist es, mittels einer Regelung das Triebwerk, d. h. seinen Kompressor, in der Ruhelage

$$R_R = 0, \Phi_R = 1 \text{ und } \Psi_R = \Psi_{co} + 2 \quad (6.18)$$

bei $\gamma = 2/\sqrt{\Psi_{co} + 2}$ zu stabilisieren. Dies geschieht z. B. mit einem nichtlinearen Zustandsregler. Allerdings benötigt man für einen solchen Regler alle drei Zustandsgrößen Φ , Ψ und R . Der Druckanstieg Ψ ist messbar. Die Größen Φ und R hingegen sind es nicht. Sie müssen mittels eines Beobachters geschätzt werden.

Bevor wir ein erweitertes Kalman-Filter als Beobachter entwerfen, transformieren wir das System (6.17) noch so, dass die Ruhelage (6.18) im Ursprung liegt. Zu diesem Zweck führen wir die neuen Zustandsvariablen

$$\begin{aligned} x_1 &= \Phi - 1, \\ x_2 &= \Psi - \Psi_{co} - 2, \\ x_3 &= R \end{aligned}$$

ein und erhalten mit $u = \gamma$ die transformierten Systemgleichungen

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = \begin{bmatrix} -x_2 - \frac{3}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_1^3 - 3x_1x_3 - 3x_3 \\ \frac{1}{\beta^2} \left(x_1 - u\sqrt{x_2 + \Psi_{co} + 2} + 2 \right) \\ -\sigma x_3^2 - \sigma x_3(2x_1 + x_1^2) \end{bmatrix}. \quad (6.19)$$

Die Messgröße ist, wie erwähnt, $y = x_2$. In der Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ beträgt $u_R = 2/\sqrt{\Psi_{co} + 2}$.

Wir linearisieren das System (6.19) um den geschätzten Zustand $\tilde{\mathbf{x}}$ herum und erhalten

$$\mathbf{A}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} -3\tilde{x}_1 - \frac{3}{2}\tilde{x}_1^2 - 3\tilde{x}_3 & -1 & -3\tilde{x}_1 - 3 \\ \beta^{-2} & \frac{-\beta^{-2}u}{2\sqrt{(\tilde{x}_2 + \Psi_{co} + 2)}} & 0 \\ -2\sigma\tilde{x}_3(1 + \tilde{x}_1) & 0 & -2\sigma\tilde{x}_3 - \sigma(2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_1^2) \end{bmatrix}$$

und mit

$$y = g(\mathbf{x}) = x_2$$

ergibt sich

$$\mathbf{C}(t) = \left. \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}} = [0 \ 1 \ 0].$$

Die linearisierte Systemmatrix $\mathbf{A}(t)$, der linearisierte Ausgangsvektor $\mathbf{C}(t)$ und die nichtlineare Systemdynamik $\mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$ sind nun einzusetzen in die Gleichungen (6.16) des erweiterten Kalman-Filters. Man erhält

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, u) + \mathbf{L}(y - \tilde{x}_2), \\ \dot{\mathbf{P}} &= \mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} - \mathbf{P}\mathbf{C}^T\mathbf{S}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P}, \\ \mathbf{L} &= \mathbf{P}\mathbf{C}^T\mathbf{S}^{-1}. \end{aligned}$$

Zu beachten ist, dass $\mathbf{C}$ hier eine 1×3 - Matrix, also ein Zeilenvektor, ist und $\mathbf{L}$ eine 3×1 - Matrix, also ein Spaltenvektor.

Für die Kovarianzmatrizen $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{S}$, wobei hier $\mathbf{S}$ skalar ist, wählt man

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.45 & 1.15 & 0.88 \\ 1.15 & 8.65 & 1.77 \\ 0.88 & 1.77 & 3.04 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = 0.12.$$

Die Systemparameter sind $\Psi_{\text{co}} = 0.72$, $\sigma = 4$ und $\beta = 0.71$. Bild 6.12 zeigt den Verlauf der originalen Zustandsgrößen Φ , Ψ und R für den Anfangsvektor der Strecke

$$[\Phi(0) \ \Psi(0) \ R(0)] = [1.5 \ 1.2 \ 0.5]$$

und für den Anfangszustand des Kalman-Filters

$$[\tilde{\Phi}(0) \ \tilde{\Psi}(0) \ \tilde{R}(0)] = [0.5 \ 0.2 \ 0]$$

bei jeweils konstanter Stellgröße $u = u_R = 2/\sqrt{2.72}$. Die Matrix $\mathbf{P}(t)$ ist zum Zeitpunkt $t = 0$ die Einheitsmatrix.

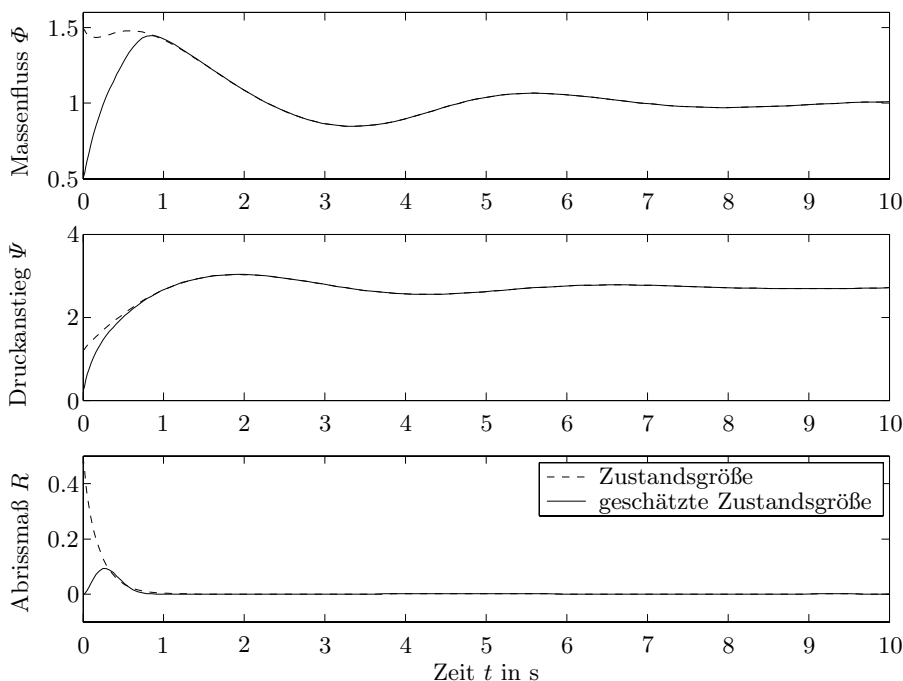


Bild 6.12: Verläufe des realen und des geschätzten Massenflusses Φ , Druckanstiegs Ψ und Abrissmaßes R der Strömung.

6.5 High-gain-Beobachter

6.5.1 Einführung und Funktionsweise

Um die Funktionsweise eines High-gain-Beobachters zu erläutern, nehmen wir vorerst an, dass das nichtlineare SISO-System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \\ y &= g(\mathbf{x})\end{aligned}$$

in der nichtlinearen Beobachtbarkeitsnormalform,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \\ \varphi(\mathbf{z}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}) \end{bmatrix}, \\ y &= z_1,\end{aligned}\tag{6.20}$$

vorliegt oder in diese Form mittels

$$\mathbf{z} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)})$$

transformiert wurde. In Gl. (6.20) beschreibt die Funktion φ die Nichtlinearitäten des Systems.

Die Systembeschreibung (6.20) wird oft auch in der Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b}\varphi(\mathbf{z}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}), \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{z}\end{aligned}\tag{6.21}$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]\tag{6.22}$$

dargestellt. Die zur Matrix und den Vektoren (6.22) zugehörige lineare Systembeschreibung

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b}\hat{u}, \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{z}\end{aligned}$$

wird als *Brunovsky-Normalform* bezeichnet.

Ähnlich wie beim Luenberger-Beobachter für lineare Systeme, setzt man den High-gain-Beobachter für obiges System mit dem Schätzvektor $\tilde{z}$ zu

$$\dot{\tilde{z}} = \mathbf{A}\tilde{z} + \mathbf{b}\varphi(\tilde{z}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}) + \ell(\varepsilon)(y - \mathbf{c}^T \tilde{z}) \quad (6.23)$$

bzw. mit $\tilde{y} = \mathbf{c}^T \tilde{z}$ zu

$$\dot{\tilde{z}} = \mathbf{A}\tilde{z} + \mathbf{b}\varphi(\tilde{z}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}) + \ell(\varepsilon)(y - \tilde{y}) \quad (6.24)$$

an. Hierbei ist

$$\ell(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon^{-n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} = \mathbf{D}^{-1}(\varepsilon) \cdot \mathbf{l}$$

der Beobachtervektor, der über den Parameter $\varepsilon > 0$ eingestellt wird, und $\mathbf{D}^{-1}(\varepsilon)$ eine Diagonalmatrix, die die Werte ε^{-i} als Elemente d_{ii} besitzt. Im Unterschied zu $\ell(\varepsilon)$ bezeichnen wir mit $\mathbf{l} = [l_1 \ l_2 \ \dots \ l_n]^T$ einen konstanten Vektor. Den High-gain-Beobachter für das System (6.21) zeigt Bild 6.13.

Mittels des Beobachterfehlers

$$\mathbf{e} = \mathbf{z} - \tilde{\mathbf{z}},$$

der Systembeschreibung (6.21) sowie des Beobachters (6.23) ergibt sich die Fehlergleichung des Beobachters zu

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= (\mathbf{A} - \ell(\varepsilon)\mathbf{c}^T) \mathbf{e} + \mathbf{b}(\varphi(\mathbf{z}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}) - \varphi(\tilde{\mathbf{z}}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)})) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{D}^{-1}(\varepsilon)\mathbf{l}\mathbf{c}^T) \mathbf{e} + \mathbf{b}(\varphi(\mathbf{z}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}) - \varphi(\tilde{\mathbf{z}}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)})). \end{aligned} \quad (6.25)$$

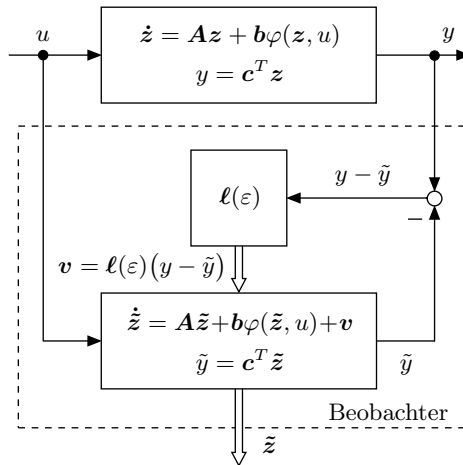


Bild 6.13: Struktur des High-gain-Beobachters.

Nimmt man zunächst an, dass

$$\varphi(\tilde{\mathbf{z}}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}) = \varphi(\mathbf{z}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)})$$

ist, so ist die Fehlerdynamik linear mit $\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{D}^{-1}(\varepsilon)\mathbf{l}\mathbf{c}^T) \mathbf{e}$ und durch die Eigenwerte der Systemmatrix des Beobachters,

$$\tilde{\mathbf{F}}(\varepsilon) = \mathbf{A} - \mathbf{D}^{-1}(\varepsilon)\mathbf{l}\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} -l_1\varepsilon^{-1} & 1 & \dots & 0 \\ -l_2\varepsilon^{-2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -l_{n-1}\varepsilon^{-(n-1)} & 0 & \dots & 1 \\ -l_n\varepsilon^{-n} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

vorgebar. Das charakteristische Polynom von $\tilde{\mathbf{F}}$ ist

$$\begin{aligned} P(s) &= s^n + \frac{l_1}{\varepsilon} s^{n-1} + \frac{l_2}{\varepsilon^2} s^{n-2} + \dots + \frac{l_{n-1}}{\varepsilon^{(n-1)}} s + \frac{l_n}{\varepsilon^n} \\ &= \left(s + \frac{\lambda_1}{\varepsilon}\right) \left(s + \frac{\lambda_2}{\varepsilon}\right) \dots \left(s + \frac{\lambda_n}{\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte

$$\tilde{\lambda}_i = \frac{\lambda_i}{\varepsilon}$$

von $\tilde{\mathbf{F}}(\varepsilon)$ verschieben sich also mit ε auf Strahlen, die vom Ursprung der komplexen Ebene ausgehen. Dabei werden die Eigenwerte $\tilde{\lambda}_i$ mit kleiner werdendem ε immer kleiner, d. h., sie wandern immer weiter nach links in der komplexen Ebene. Es gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Re} \{\tilde{\lambda}_i\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re} \{\lambda_i\}}{\varepsilon} = -\infty,$$

vorausgesetzt es werden alle Eigenwerte λ_i mit $\operatorname{Re} \{\lambda_i\} < 0$ gewählt. Bild 6.14 illustriert diese Abhängigkeit der Eigenwerte $\tilde{\lambda}_i$ von ε .

Für den betrachteten Fall $\varphi(\tilde{\mathbf{z}}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}) = \varphi(\mathbf{z}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)})$ konvergiert der Beobachterfehler $\mathbf{e}$ also aufgrund der linearen Fehlerdynamik gegen null. Die Konvergenz ist dabei umso schneller, je kleiner der Parameter ε gewählt wird.

Im Weiteren soll nun der Fall

$$\varphi(\tilde{\mathbf{z}}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}) \neq \varphi(\mathbf{z}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)})$$

betrachtet werden. Dabei transformiert man den Schätzfehler $\mathbf{e}$ mittels

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{e}_1 \\ \varepsilon^{-1} \hat{e}_2 \\ \vdots \\ \varepsilon^{-(n-1)} \hat{e}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon^{-(n-1)} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{e}} = \varepsilon \cdot \mathbf{D}^{-1}(\varepsilon) \cdot \hat{\mathbf{e}}.$$

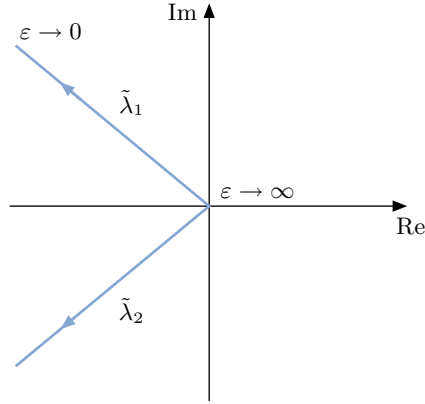


Bild 6.14: Verlauf der Eigenwerte.

Für die Fehlergleichung (6.25) des Beobachters gilt nach dieser Transformation

$$\begin{aligned} \varepsilon \mathbf{D}^{-1}(\varepsilon) \dot{\hat{\mathbf{e}}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{D}^{-1}(\varepsilon) \mathbf{l} \mathbf{c}^T) \cdot \varepsilon \mathbf{D}^{-1}(\varepsilon) \hat{\mathbf{e}} \\ &\quad + \mathbf{b} \left(\varphi(\mathbf{z}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}) - \varphi(\tilde{\mathbf{z}}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}) \right). \end{aligned}$$

Hieraus folgt nach Multiplikation mit $\mathbf{D}(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{\hat{\mathbf{e}}} &= (\varepsilon \mathbf{D}(\varepsilon) \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1}(\varepsilon) - \mathbf{l} \mathbf{c}^T \cdot \varepsilon \mathbf{D}^{-1}(\varepsilon)) \hat{\mathbf{e}} \\ &\quad + \mathbf{D}(\varepsilon) \mathbf{b} \left(\varphi(\mathbf{z}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}) - \varphi(\tilde{\mathbf{z}}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}) \right). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Da nun

$$\varepsilon \mathbf{D}(\varepsilon) \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1}(\varepsilon) = \varepsilon \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varepsilon^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varepsilon^{-n} \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

und

$$\mathbf{l} \mathbf{c}^T \cdot \varepsilon \mathbf{D}^{-1}(\varepsilon) = \varepsilon \begin{bmatrix} l_1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varepsilon^{-n} \end{bmatrix} = \mathbf{l} \mathbf{c}^T$$

und $\mathbf{D}(\varepsilon) \mathbf{b} = \varepsilon^n \mathbf{b}$ gilt, erhalten wir für Gl. (6.26) die transformierte Schätzfehlergleichung zu

$$\varepsilon \dot{\hat{\mathbf{e}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{l} \mathbf{c}^T) \hat{\mathbf{e}} + \varepsilon^n \mathbf{b} \left(\varphi(\mathbf{z}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}) - \varphi(\tilde{\mathbf{z}}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}) \right). \quad (6.27)$$

Man skaliert des Weiteren die Zeit t gemäß

$$\tau = \varepsilon^{-1} \cdot t$$

zur neuen Zeit τ um. So erhält man

$$\dot{\hat{e}} = \frac{d\hat{e}}{dt} = \frac{d\hat{e}}{\varepsilon d\tau}$$

und für Gl. (6.27)

$$\dot{\hat{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)\hat{e} + \varepsilon^n \mathbf{b} \left(\varphi(\mathbf{z}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}) - \varphi(\tilde{\mathbf{z}}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}) \right).$$

Aus dieser Gleichung erkennt man direkt, dass der nichtlineare Term

$$\varepsilon^n \mathbf{b} \left(\varphi(\mathbf{z}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}) - \varphi(\tilde{\mathbf{z}}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}) \right)$$

prinzipiell umso unbedeutender wird, je kleiner ε ist.

Die lineare Fehlerdynamik des High-gain-Beobachters

$$\dot{\hat{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T) \cdot \hat{e}$$

dagegen besitzt eine konstante Matrix

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} -l_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -l_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -l_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -l_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

deren Eigenwerte λ_i über $l_1, \dots, l_n$ beliebig vorgebar sind. Wählt man also ε nur hinreichend klein, so wird der Beobachter ein stabiles Verhalten aufweisen und der Beobachterfehler $\hat{e}$ bzw.

$$\mathbf{e} = \mathbf{z} - \tilde{\mathbf{z}}$$

gegen null konvergieren. D.h., der Schätzwert $\tilde{\mathbf{z}}$ wird gegen den Systemzustand $\mathbf{z}$ konvergieren. Aus der Tatsache, dass für kleine Werte ε die Elemente des Beobachtervektors $\boldsymbol{\ell}(\varepsilon) = \mathbf{D}^{-1}(\varepsilon)\mathbf{l}$ große Werte annehmen, resultiert der Name *High-gain-Beobachter*. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass die Eigenwerte $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i/\varepsilon$ des High-gain-Beobachters mit der Systemmatrix $\tilde{\mathbf{F}}(\varepsilon)$ um den Faktor $1/\varepsilon$ größer sind, als die Eigenwerte des zeitlich transformierten Beobachters mit der Systemmatrix $\mathbf{F}$.

6.5.2 High-gain-Beobachter in allgemeiner Form

Wir haben im obigen Abschnitt den High-gain-Beobachter für ein System entworfen, das in Beobachtbarkeitsnormalform bzw. in Brunovsky-Normalform

vorlag oder in diese Form transformiert wurde. In der Praxis wird die Systembeschreibung jedoch nur selten in dieser Normalform vorliegen. Um dann einen High-gain-Beobachter entwerfen zu können, müssen wir das System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \\ y &= g(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{6.28}$$

mittels der Abbildung (6.4) (siehe Abschnitt 6.1.5), d. h. mit dem Diffeomorphismus

$$\mathbf{z} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}),\tag{6.29}$$

in die Beobachtbarkeitsnormalform (6.20) transformieren. Dies ist nicht immer einfach möglich. Nehmen wir an, es ist uns gelungen und wir haben dann für das System in Normalformdarstellung einen High-gain-Beobachter (6.23) gemäß dem vorherigen Abschnitt entworfen.

Eine Möglichkeit, den Beobachter so darzustellen, dass seine Zustände in den Originalkoordinaten $\mathbf{x}$ des Systems (6.28) vorliegen, besteht darin, ihn geeignet zu transformieren. Zu diesem Zweck müssen wir die Transformationsgleichung (6.29) in die Beobachtergleichung (6.24), d. h. in

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{z}} + \mathbf{b}\varphi(\tilde{\mathbf{z}}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}) + \ell(\varepsilon)(y - \tilde{y})\tag{6.30}$$

einsetzen. Wir bestimmen mit $\mathbf{z} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)})$ bzw. $\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{q}(\tilde{\mathbf{x}}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)})$ die Ableitung

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = \frac{d\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{x}}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)})}{dt} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial u^{(i)}} u^{(i+1)},\tag{6.31}$$

wobei $\tilde{\mathbf{x}}$ der Schätzvektor zu $\mathbf{x}$ ist. Gl. (6.31) eingesetzt in Gl. (6.30) ergibt

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial u^{(i)}} u^{(i+1)} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{z}} + \mathbf{b}\varphi(\tilde{\mathbf{z}}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}) + \ell(\varepsilon)(y - \tilde{y}),\tag{6.32}$$

woraus

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \right)^{-1} \left(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{z}} + \mathbf{b}\varphi(\tilde{\mathbf{z}}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial u^{(i)}} u^{(i+1)} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \right)^{-1} \ell(\varepsilon)(y - \tilde{y})\end{aligned}$$

folgt. Da die Rücktransformation $\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)})$ gerade zu

$$\left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \right)^{-1} \left(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{z}} + \mathbf{b}\varphi(\tilde{\mathbf{z}}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial u^{(i)}} u^{(i+1)} \right) = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, u)$$

führt, erhalten wir für Gl. (6.32) die allgemeine Gleichung des High-gain-Beobachters in Originalkoordinaten

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, u) + \left(\frac{\partial \mathbf{q}(\tilde{\mathbf{x}}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)})}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \right)^{-1} \ell(\varepsilon)(y - \tilde{y}). \quad (6.33)$$

Man beachte, dass $\tilde{y} = \mathbf{c}^T \tilde{\mathbf{z}} = g(\tilde{\mathbf{x}})$ gilt. Zustandstransformationen obiger Art haben wir auch schon im Abschnitt 1.1.10 kennengelernt.

Der Beobachter benötigt nicht nur die Messgröße y und die Stellgröße u , sondern auch die in $\mathbf{q}$ enthaltenen Ableitungen $\dot{u}, \dots, u^{(n-1)}$. Bild 6.15 zeigt die Struktur des Beobachters.

Die Konstruktion eines Beobachters gemäß Gl. (6.23) oder Gl. (6.33) erfordert häufig die Bestimmung der Transformation

$$\mathbf{z} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)})$$

bzw. der zugehörigen inversen Transformationsvorschrift $\mathbf{q}^{-1}$. Dies kann sich in der Praxis als durchaus komplizierte Aufgabe herausstellen.

Prinzipiell existieren zwei Möglichkeiten, den High-gain-Beobachter zu implementieren. Einerseits kann man mittels der Beobachtergleichung (6.30) und der Eingangsgröße u sowie der Ausgangsgröße y den Schätzzustand $\tilde{\mathbf{z}}$ des transformierten Systems (6.21) ermitteln. Über die inverse Transformationsvorschrift $\mathbf{q}^{-1}$ berechnet man dann den eigentlichen Schätzvektor $\tilde{\mathbf{x}}$.

Andererseits kann man mittels der allgemeinen Gleichung (6.33) des High-gain-Beobachters den Beobachter auch in Originalkoordinaten $\tilde{\mathbf{x}}$ realisieren. In jedem der Fälle liegt die Krux der Methode, wie erwähnt, im Umgang mit der Funktion $\mathbf{q}$. Denn entweder muss man die Umkehrfunktion $\mathbf{q}^{-1}$ ermitteln oder die Inverse der Jacobi-Matrix $\partial \mathbf{q} / \partial \mathbf{x}$. Beides ist oft schwierig.

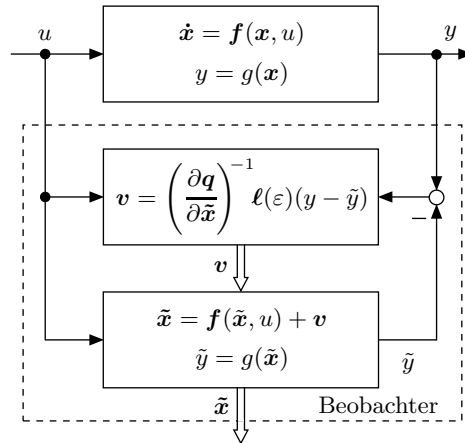


Bild 6.15: Allgemeiner High-gain-Beobachter mit der Kurzschreibweise $\mathbf{q}$ für $\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{x}}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)})$.

6.5.3 Beispiel chemischer Reaktor

Wir betrachten als Beispiel einen Rührkesselreaktor [43, 93]. Diesem Reaktor wird kontinuierlich ein Stoff A mit einer Volumenrate q_z zugeführt. Der Stoff A besitzt dabei die Eingangskonzentration c_0 und die Eingangstemperatur T_0 . Im Reaktor wird der Stoff katalytisch zerlegt, wobei Wärme frei wird. Aus diesem Grund ist der Reaktor mit einem Kühlmantel umgeben, durch den Kühlwasser mit der Temperatur T_K fließt. Im Reaktor wird über einen Mischer ständig eine homogene Durchmischung gewährleistet. Die Zerfallsprodukte verlassen den Reaktor schließlich mit der Volumenrate q_a . Im Reaktor hat das Gemisch die Temperatur T und der Stoff A ist im Gemisch mit der Konzentration c vertreten. Bild 6.16 illustriert den Prozess.

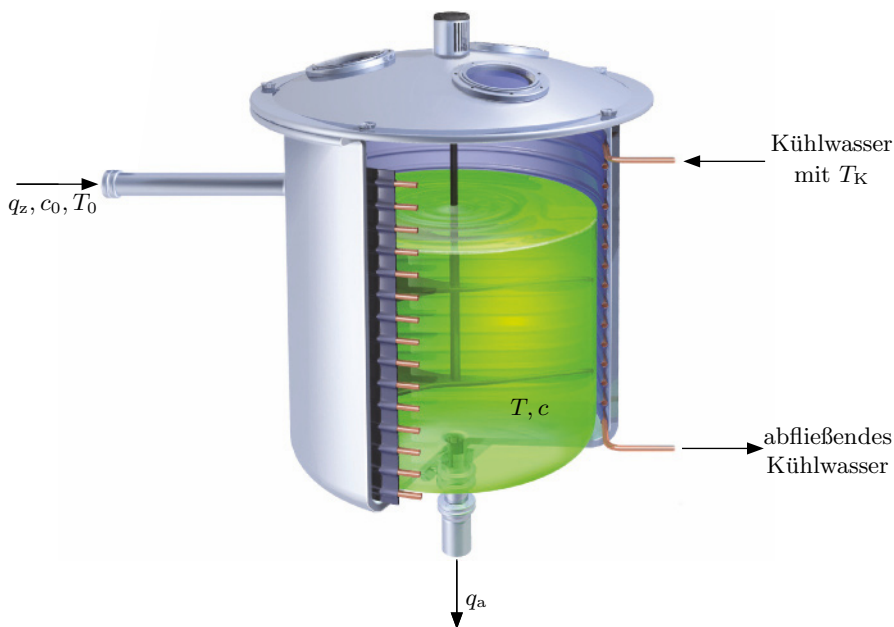


Bild 6.16: Chemischer Reaktor.

Der Reaktor kann durch ein nichtlineares System zweiter Ordnung modelliert werden. Als Zustandsvariablen definiert man die normierten Größen

$$x_1 = \frac{c_0 - c}{c_0} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{T - T_0}{T_0}.$$

Die Zustandsgröße x_1 ist im Gegensatz zur normierten Temperatur x_2 nicht messbar. Die Eingangs- bzw. Stellgröße u ist die auf T_0 bezogene Kühlmittel-

temperatur T_K , d. h.

$$u = \frac{T_K - T_0}{T_0}.$$

Die Modellgleichungen lauten

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \\ y &= x_2\end{aligned}\tag{6.34}$$

mit

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = \begin{bmatrix} -ax_1 + k(1 - x_1)e^{-\alpha/(1+x_2)} \\ -\beta x_2 + kd(1 - x_1)e^{-\alpha/(1+x_2)} + bu \end{bmatrix}$$

und den Parametern

$$\begin{aligned}c_0 &= 0.848 \text{ mol l}^{-1}, & T_0 &= 308.5 \text{ K}, \\ k &= 1.05 \cdot 10^{14} \text{ min}^{-1}, & \alpha &= 34.2583, \\ a &= 0.2674 \text{ min}^{-1}, & \beta &= 1.815 \text{ min}^{-1}, \\ d &= 0.4682, & b &= 1.5476 \text{ min}^{-1}.\end{aligned}$$

Dabei ist die Zeiteinheit zu einer Minute angenommen worden.

Wir ermitteln nun zuerst den Diffeomorphismus

$$\mathbf{z} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}),$$

der das System (6.34) in die nichtlineare Beobachtungsnormalform transformiert. Es gilt

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\beta x_2 + kd(1 - x_1)e^{-\alpha/(1+x_2)} + bu \end{bmatrix} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, u). \tag{6.35}$$

Hieraus folgt für $\mathbf{q}^{-1}$ der Zusammenhang

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{kd}(z_2 + \beta z_1 - bu)e^{\alpha/(1+z_1)} \\ z_1 \end{bmatrix} = \mathbf{q}^{-1}(\mathbf{z}, u). \tag{6.36}$$

Man beachte, dass Gl. (6.36), d. h. $\mathbf{q}^{-1}$, für alle $z_1 = x_2 \neq -1$ definiert ist. Da $T > 0$ und damit $x_2 > -1$ ist, kann das System für alle relevanten Werte von $\mathbf{x}$ bzw. $\mathbf{z}$ als global beobachtbar angesehen werden. Zur Bestimmung der nichtlinearen Beobachtungsnormalform setzt man Gl. (6.36) in Gl. (6.34) ein und erhält

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} z_2 \\ \varphi(\mathbf{z}, u, \dot{u}) \end{bmatrix}, \\ y &= z_1\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{z}, u, \dot{u}) &= \frac{\alpha \cdot z_2(z_2 + \beta \cdot z_1 - bu)}{(1 + z_1)^2} - \left(a + \beta + ke^{-\alpha/(1+z_1)}\right) z_2 \\ &\quad - k(\beta \cdot z_1 - bu - ad)e^{-\alpha/(1+z_1)} - a(\beta \cdot z_1 - bu) + b\dot{u}.\end{aligned}$$

Somit können wir nun den High-gain-Beobachter für den chemischen Reaktor direkt gemäß Gl. (6.23) zu

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = \begin{bmatrix} \tilde{z}_2 \\ \varphi(\tilde{\mathbf{z}}, u, \dot{u}) \end{bmatrix} + \boldsymbol{\ell}(\varepsilon)(y - \tilde{z}_1) \quad (6.37)$$

angeben. Transformiert man den Beobachter mittels Gl. (6.35) so, dass die Beobachterdarstellung (6.37) in Originalkoordinaten $\mathbf{x}$ vorliegt, so gilt mit Gl. (6.33)

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, u) + \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}}\right)^{-1} \boldsymbol{\ell}(\varepsilon)(y - \mathbf{c}^T \mathbf{q}(\tilde{\mathbf{x}}, u)) \\ &= \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, u) + \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\ell}(\varepsilon)(y - \tilde{x}_2)\end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}r_{11} &= -\frac{\beta(1 + \tilde{x}_2)^2 e^{\alpha/(1+\tilde{x}_2)} + kd\alpha(\tilde{x}_1 - 1)}{kd(1 + \tilde{x}_2)^2}, \\ r_{12} &= -\frac{e^{\alpha/(1+\tilde{x}_2)}}{kd}.\end{aligned}$$

Die Beobachterrückführung wird mittels $\varepsilon=0.1$, $\lambda_1=-1.69$ und $\lambda_2=-2.6$ dimensioniert. Für die Simulation wurde

$$\mathbf{x}_0^T = [0.504 \quad 0.02]$$

als Startzustand des Systems gewählt. Als Anfangsvektor für den Beobachter wurde

$$\tilde{\mathbf{x}}_0^T = [0 \quad 0.02]$$

angesetzt, da $\tilde{x}_1(0)$ nicht messbar ist und $\tilde{x}_2(0)$ aus der Temperaturmessung direkt verwendet werden kann. Die Stellgröße ist $u(t) = -0.01$.

Die Simulationsergebnisse für den High-gain-Beobachter sind in Bild 6.17 zu sehen. Die geschätzte Zustandsgröße $\tilde{x}_1$ erreicht nach ungefähr 25 s den tatsächlichen Wert der Zustandsgröße x_1 . Wie zu erwarten, ist zwischen Messwert x_2 und geschätztem Wert $\tilde{x}_2$ nahezu kein Unterschied im zeitlichen Verlauf feststellbar.

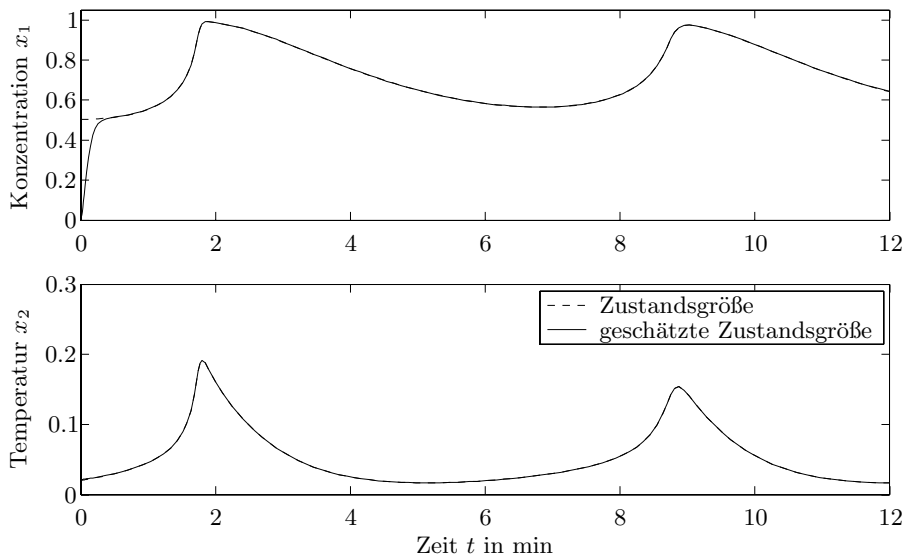


Bild 6.17: Verläufe der beobachteten und der wahren Zustände des chemischen Reaktors, d. h. der normierten Konzentration x_1 und der normierten Temperatur x_2 .

6.5.4 Der Fall eingangslinerer Systeme

Wir waren bisher für den Entwurf von High-gain-Beobachtern davon ausgegangen, dass die Regelstrecke in der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ \varphi(\mathbf{x}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}) \end{bmatrix}, \quad (6.38)$$

$$y = x_1$$

vorliegt oder in diese Form transformiert wurde. Dies wird, wie schon des Öfteren erwähnt, nur in wenigen Fällen auch so sein. Glücklicherweise lassen sich viele eingangslinerare Systeme, also Systeme der Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot u, \\ y &= c(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

in die obige Form (6.38) mittels einer Transformation

$$\mathbf{z} = \mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{t}(\mathbf{x}) \quad (6.39)$$

eindeutig umformen. Diese Umformung haben wir bereits in Kapitel 4.2 und auch in Abschnitt 6.1.6 behandelt. Aus Gründen der Verständlichkeit

und der Bequemlichkeit gestehen wir uns ein wenig Redundanz zu und wiederholen die Herleitung der Transformationsgleichung (6.39) noch einmal. Angemerkt sei noch, dass die Transformation $\mathbf{t}$ aus Kapitel 4.2 einen Sonderfall der Transformation $\mathbf{q}$ aus Abschnitt 6.1.4 bildet.

Man bestimmt die Abbildung $\mathbf{t}$ mittels der Lie-Ableitung

$$L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x}) = \frac{\partial c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{a}(\mathbf{x}),$$

wobei für die mehrfache Lie-Ableitung

$$L_{\mathbf{a}}^k c(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{a}} L_{\mathbf{a}}^{k-1} c(\mathbf{x}) = \frac{\partial L_{\mathbf{a}}^{k-1} c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{a}(\mathbf{x})$$

gilt. Nun differenziert man die Ausgangsgröße $y = c(\mathbf{x})$ mehrfach nach der Zeit t und erhält

$$\begin{aligned} y &= c(\mathbf{x}), \\ \dot{y} &= \frac{\partial c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \frac{\partial c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}(\mathbf{x}) u = L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x}) + \underbrace{L_{\mathbf{b}}c(\mathbf{x})}_{=0} u, \\ \ddot{y} &= \frac{\partial L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \frac{\partial L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}(\mathbf{x}) u = L_{\mathbf{a}}^2 c(\mathbf{x}) + \underbrace{L_{\mathbf{b}}L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x})}_{=0} u, \\ &\vdots \\ y^{(\delta-1)} &= \frac{\partial L_{\mathbf{a}}^{\delta-2} c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = L_{\mathbf{a}}^{\delta-1} c(\mathbf{x}) + \underbrace{L_{\mathbf{b}}L_{\mathbf{a}}^{\delta-2} c(\mathbf{x})}_{=0} u, \\ y^{(\delta)} &= \frac{\partial L_{\mathbf{a}}^{\delta-1} c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = L_{\mathbf{a}}^{\delta} c(\mathbf{x}) + \underbrace{L_{\mathbf{b}}L_{\mathbf{a}}^{\delta-1} c(\mathbf{x})}_{\neq 0} u. \end{aligned}$$

Man leitet y in obigem Schema so lange ab, bis erstmals der mit der Stellgröße u verbundene Term

$$L_{\mathbf{b}}L_{\mathbf{a}}^{\delta-1} c(\mathbf{x}) \neq 0$$

ist. Die obige Ableitungskette entspricht, wie erwähnt, derjenigen, die beim Reglerentwurf mittels exakter Linearisierung in Kapitel 4.2 auftritt. Der Ableitungsgrad δ , bei dem erstmals $L_{\mathbf{b}}L_{\mathbf{a}}^{\delta-1} c(\mathbf{x}) \neq 0$ ist, wird – wie schon bei der exakten Linearisierung – als *Differenzordnung* δ oder *relativer Grad* bezeichnet.

Im Weiteren werden nur Systeme betrachtet, bei denen die Differenzordnung δ gleich der Systemordnung n ist, also

$$\delta = n$$

gilt. Obige Ableitungskette hat dann die Form

$$\begin{aligned}
 y &= c(\mathbf{x}), \\
 \dot{y} &= L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x}), \\
 \ddot{y} &= L_{\mathbf{a}}^2c(\mathbf{x}), \\
 &\vdots \\
 y^{(n-1)} &= L_{\mathbf{a}}^{n-1}c(\mathbf{x}), \\
 y^{(n)} &= L_{\mathbf{a}}^nc(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{b}}L_{\mathbf{a}}^{n-1}c(\mathbf{x}) \cdot u.
 \end{aligned} \tag{6.40}$$

Man definiert nun neue Zustandsvariablen

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{a}}^2c(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_{\mathbf{a}}^{n-1}c(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \mathbf{t}(\mathbf{x}) \tag{6.41}$$

und erhält so auch gleich die gesuchte Abbildung $\mathbf{t}(\mathbf{x})$. Mit den Gleichungen (6.40) und (6.41) ergibt sich die gesuchte Systemdarstellung

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ L_{\mathbf{a}}^nc(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{b}}L_{\mathbf{a}}^{n-1}c(\mathbf{x}) \cdot u \end{bmatrix},$$

$y = z_1,$

in der noch in der letzten Zeile der Originalzustand $\mathbf{x}$ durch $\mathbf{z}$ mittels

$$\mathbf{z} = \mathbf{t}(\mathbf{x}) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x} = \mathbf{t}^{-1}(\mathbf{z})$$

zu ersetzen ist. So erhält man schließlich

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ \varphi(\mathbf{z}, u) \end{bmatrix}, \tag{6.42}$$

$y = z_1$

mit

$$\varphi(\mathbf{z}, u) = L_{\mathbf{a}}^nc(\mathbf{t}^{-1}(\mathbf{z})) + L_{\mathbf{b}}L_{\mathbf{a}}^{n-1}c(\mathbf{t}^{-1}(\mathbf{z})) \cdot u.$$

Mittels der Brunovsky-Normalform kann Gl. (6.42) in der Form

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b}\varphi(\mathbf{z}, u), \\
 y &= \mathbf{c}^T \mathbf{z}
 \end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]$$

dargestellt werden.

Der zugehörige Beobachter

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{z}} + \mathbf{b}\varphi(\tilde{\mathbf{z}}, u) + \ell(\varepsilon)(y - \mathbf{c}^T \tilde{\mathbf{z}}) \quad (6.43)$$

kann auch mittels

$$\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{t}(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (6.44)$$

so transformiert werden, dass er in den Koordinaten des Originalsystems

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot u, \\ y &= c(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (6.45)$$

vorliegt. Es gilt, wenn man Gl. (6.44) in Gl. (6.43) einsetzt, für den Schätzvektor $\tilde{\mathbf{x}}$ in Originalkoordinaten

$$\frac{d\mathbf{t}(\tilde{\mathbf{x}})}{dt} = \mathbf{A} \mathbf{t}(\tilde{\mathbf{x}}) + \mathbf{b} \varphi(\mathbf{t}(\tilde{\mathbf{x}}), u) + \ell(\varepsilon)(y - \mathbf{c}^T \mathbf{t}(\tilde{\mathbf{x}}))$$

und somit

$$\frac{\partial \mathbf{t}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A} \mathbf{t}(\tilde{\mathbf{x}}) + \mathbf{b} \varphi(\mathbf{t}(\tilde{\mathbf{x}}), u) + \ell(\varepsilon)(y - c(\tilde{\mathbf{x}})).$$

In der letzten Gleichung multipliziert man linksseitig mit der Inversen der Jacobi-Matrix $\partial \mathbf{t}(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x}$ und erhält letztendlich die Formel des High-gain-Beobachters in Originalkoordinaten zu

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{a}(\tilde{\mathbf{x}}) + \mathbf{b}(\tilde{\mathbf{x}}) \cdot u + \left(\frac{\partial \mathbf{t}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \right)^{-1} \ell(\varepsilon)(y - \tilde{y}), \quad (6.46)$$

wobei $\tilde{y} = c(\tilde{\mathbf{x}})$ gilt. Bild 6.18 zeigt die Struktur des High-gain-Beobachters für das Originalsystem (6.45). Obige Gleichung (6.46) resultiert auch unmittelbar aus der allgemeinen Gleichung (6.33) des High-gain-Beobachters.

Abschließend sei angemerkt, dass High-gain-Beobachter auch entworfen werden können, wenn die Differenzordnung δ kleiner als die Systemordnung n ist, also

$$\delta < n$$

gilt. Allerdings ist die Transformation $\mathbf{z} = \mathbf{t}(\mathbf{x})$ dann komplexer. Man beachte hierzu die Ausführungen, insbesondere auch zur Beobachtbarkeit solcher Systeme, des Kapitels 4.2.

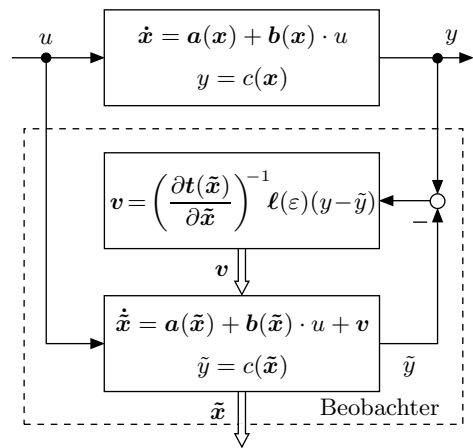


Bild 6.18: Struktur des High-gain-Beobachters für eingangslinare Systeme.

Wörterbuch

7.1 Deutsch → Englisch

AE = American English

BE = British English

A

Ablaufsteuerung sequencer;
sequence control; sequential control;
step control

Ableitung derivative

abschnittweise lineare Regelung
piecewise linear control

absolut stabil absolutely stable

Abschwächung attenuation

Abtasthalteglied sample and hold
element

Abtaster sampler

Abtastintervall sampling interval

Abtastperiode sampling period

Abtastrate sampling rate; sample
rate

Abtastregelung sampling control;
discrete control

Abtastsystem sampled-data
system; discrete system

Abtasttheorem sampling theorem
Abtastzeit sampling time;
~ interval; sample period

Abweichung offset

Ackermann-Formel Ackermann's
formula

Adaptation adaption

Adaption adaption

adaptive Regelung adaptive
control

adaptives Regelungssystem
adaptive control system

Ähnlichkeitstransformation
similarity transformation

Aiserman'sche Vermutung
Aizerman's conjecture

Allpass all-pass filter; ~ element

Amplitude magnitude^[1]; amplitude

Amplitudengang amplitude
response; magnitude plot^[1]; gain
response

Amplitudenrand amplitude
margin; gain ~

Amplitudenreserve amplitude
margin; gain ~

Amplitudenspektrum amplitude
spectrum; magnitude ~

analog analog^{AE}; analogue^{BE}

Analog-Digital-Wandler
analog-to-digital converter;
analog-digital converter; digitizer^{AE};
digitiser^{BE}

Anfahrsteuerung bzw. -regelung
start-up control

Anfangswert initial value

Anfangswertsatz initial value
theorem

Anfangszustand initial state

^[1] Nur in der Regelungstechnik

Anregelzeit rise time
Anstiegsantwort ramp response
Anstiegsfunktion ramp function
Anstiegszeit rise time
Antwortfunktion der homogenen Zustandsgleichung zero-input response
Antwortfunktion der inhomogenen Zustandsgleichung zero-state response
Antwortfunktion im Zeitbereich (auf ein vorgegebenes Eingangssignal) transient response
aperiodisch aperiodic; overdamped ($D > 1$)
aperiodische Dämpfung aperiodic damping; $\sim$ attenuation
aperiodischer Grenzfall critically damped ($D = 1$)
Arbeitsbereich operating range
Arbeitspunkt operating point
asymptotisch stabil asymptotically stable
asymptotisches Verhalten asymptotic behavior^{AE}; $\sim$ behaviour^{BE}
attraktiv attractive
Attraktivität attractivity
Ausgangsgleichung output equation
Ausgangsgröße output variable; $\sim$ quantity
Ausgangsmatrix (C) output matrix
Ausgangsrückführung output feedback
Ausgangsvektor (c) output vector
Ausgleichszeit build-up time
Ausregelzeit settling time
Automat automaton
autonom autonomous

B

Backstepping backstepping
Bandbreite bandwidth
Begleitmatrix companion matrix
Begrenzung limiting; saturation
Begrenzungsglied saturator

Beharrungszustand steady-state
beobachtbares System observable system
Beobachtbarkeit observability
Beobachtbarkeitsmatrix (M_B) observability matrix
Beobachter observer; estimator
Beobachtungsfehler observer-error
Beobachtungsfehlergleichung observer-error state equation
Beobachtungsmatrix (L) observer matrix
Beobachtungsmodell observer model
Beobachtungsnormalform observable canonical form
Beobachtungsvektor (L) observer vector
Beschreibungsfunktion describing function
Betragsoptimum amplitude optimum
Betragsregelfläche integral of absolute value of error (IAE)
Betragsregelfläche, zeitgewichtete integral of time multiplied by absolute value of error (ITAE)
Blockdiagramm block diagram
Blockschaltbild block diagram
Bode-Diagramm Bode diagram; $\sim$ plot; frequency response characteristics
Brunovsky-Normalform Brunovsky canonical form

C

chaotisches System chaotic system
charakteristische Gleichung characteristic equation
charakteristisches Polynom characteristic polynomial
Control-Ljapunov-Funktion control-Lyapunov function (CLF)
Coulomb'sche Reibung Coulomb friction

D

Dämpfung damping; attenuation
Dämpfungsfaktor damping factor
Dämpfungskoeffizient damping coefficient
Dämpfungskonstante damping constant
Dämpfungsverhältnis damping ratio
DDC-Regelung direct digital control (DDC)
Deadbeat-Regelung deadbeat control
Deadbeat-Sprungantwort deadbeat-step response
D-Element D-(derivative) element
Deskriptorsystem descriptor system
dezentrale Regelung decentralized^{AE} control; decentralised^{BE} $\sim$
Dezibel (dB) decibel
Diffeomorphismus diffeomorphism
Differentialgleichung (DGL) differential equation; difference equation
Differentialgleichung 1. Ordnung first order differential equation
Differentialgleichung 2. Ordnung second order differential equation
Differenzgleichung difference equation
Differenzierbeiwert derivative action coefficient
Differenzierelement 1. Ordnung first order derivative element; first order lead element
Differenzordnung relative degree
Digital-Analog-Wandler digital-analog^{AE} converter; digital-analogue^{BE} $\sim$; digital-to-analog^{AE} $\sim$; digital-to-analogue^{BE} $\sim$
digitale Regelung digital control
digitaler Regler digital controller
digitales Signal digital signal
dominanter Pol dominant pole
dominantes Polpaar dominant pair of poles

D-Regler derivative controller
Dreipunktglied three-step action element; relay with dead zone; dead band element
Dreipunktregler three-step switching controller; three-point controller
Dreipunktregelung three-step control
DT₁-Element derivative element with first order lag
Durchgangsfaktor (d) feedthrough factor
Durchgangsmatrix (D) feedthrough matrix
Durchgangsvektor (d) feedthrough vector
Durchtrittskreisfrequenz gain crossover angular frequency
D-Verhalten D-(derivative) action; rate action
Dynamikforderung speed-of-response specification
dynamisches System dynamical system
dynamisches Verhalten dynamic behavior^{AE}; $\sim$ behaviour^{BE}

E

E/A-Beschreibung input-output description; external description
E/A-Stabilität input-output stability
E/A-Verhalten input-output performance
Eckfrequenz corner frequency; cut-off frequency
Eckkreisfrequenz corner angular frequency
Eigenbewegung zero-input response; natural response
Eigenfrequenz natural frequency
Eigenkreisfrequenz damped natural angular frequency
Eigenwert eigenvalue
Eingang input
eingangsaffines System control-affine system; affine-in-control $\sim$

Eingangsgröße input; $\sim$ variable
eingangslineares System
 control-affine system;
 affine-in-control $\sim$
Eingangsmatrix (B) input matrix
Eingangssignal input signal
Eingangsvektor (b) input vector
eingeschwungener Zustand
 steady state
Eingrößensystem single-input,
 single-output (SISO) system
Einheitsanstiegsantwort
 unit-ramp response
Einheitsanstiegsfunktion
 unit-ramp function
Einheitsimpuls unit impulse
Einheitsimpulsantwort
 unit-impulse response
Einheitsimpulsfunktion
 unit-impulse function
Einheitskreis unit circle
Einheitsmatrix unit matrix
Einheitssprungfunktion unit-step
 function
Einheitsvektor unit vector
einschleifige Regelung single-loop
 feedback system
Einschwingzeit settling time
Einstellfaktor tuning factor
Einstellregeln tuning rules
Einzugsgebiet positively invariant
 set
Einzugsgebiet, maximales region
 of asymptotic stability (RAS);
 domain of attraction; basin
Element mit Begrenzung limiting
 nonlinearity; saturation nonlinearity
Element mit eindeutiger
Kennlinienfunktion singled-valued
 nonlinearity
Element mit Hysterese
 nonlinearity with hysteresis
Element mit Lose backlash
 nonlinearity
Element mit mehrdimensionaler
Kennlinienfunktion multivalued
 nonlinearity
Element mit Sättigung limiting
 nonlinearity; saturation nonlinearity

Element mit Totzone dead-zone
 nonlinearity
Element mit Zweipunktkenlinien
 on-off nonlinearity
Element mit Zweipunktverhalten
 two-valued nonlinearity
Empfindlichkeit sensitivity
Empfindlichkeitsfunktion
 sensitivity function
Endwertsatz final-value theorem
Entkopplung decoupling
Entwurf design
Ermittelbarkeit detectability
Erreichbarkeit reachability
erweitertes Kalman-Filter (EKF)
 extended Kalman filter (EKF)
erzwungene Bewegung zero-state
 response; forced response
exakte Linearisierung feedback
 linearization^{AE}; linearization^{AE} by
 state feedback; exact linearization^{AE};
 $\sim$ linearisation^{BE}

F

Faltungintegral convolution
 integral
Faltungssatz convolution theorem
Faltungssumme discrete
 convolution sum
Feder-Masse-Dämpfer-System
 spring-mass-dashpot system;
 spring-mass-damping system
Festwertregelung fixed command
 control; constant-value control; fixed
 set-point control
flaches System flat system
Flachheit flatness
Flussdiagramm flow diagram
Folgefehler tracking error
Folgeregelung tracking control;
 follow-up $\sim$; follower $\sim$; variable
 command control
Fourier-Transformation Fourier
 transformation
Fourier-Transformierte Fourier
 transform
freie Bewegung free motion
Freiheitsgrad degree of freedom
Frequenzbereich frequency domain
Frequenzgang frequency response

Frequenzgang des geschlossenen Regelkreises closed-loop frequency response

Frequenzgang des offenen Regelkreises open-loop frequency response

Frequenzspektrum frequency spectrum

Führungsgröße reference variable; ~ input; ~ signal

Führungsübergangsfunktion command step response

Führungsübertragungsfunktion control transfer function

Führungsverhalten command action; ~ response; response to setpoint changes

Füllstandsregelung level control

Fundamentalmatrix fundamental matrix; state-transition matrix

Fuzzy-Regelung fuzzy control

Fuzzy-Steuerung fuzzy control

G

Gegenkopplung negative feedback
gekoppeltes System coupled system

Gershgorin-Kreise Gershgorin circles

Gesamtübertragungsfunktion overall transfer function

Geschwindigkeitsfehler velocity (ramp) error

Geschwindigkeitsregelung velocity control system; speed control

Gewichtsfunktion impulse response; weighting function

Gewichtsfunktionsmatrix impulse response matrix

gewöhnliche Differentialgleichung ordinary differential equation (ODE)

Gleichgewichtszustand equilibrium state

Gleichungsfehler equation error

gleitende Mittelwertbildung moving average

gleitender Horizont moving horizon

Gleitreibung dynamic friction; sliding friction; kinetic friction

Gleitzustand sliding mode

Gleitzustandsregler sliding mode controller

global asymptotisch stabil globally asymptotically stable

Gram'sche Beobachtbarkeitsmatrix observability Gramian

Gram'sche Steuerbarkeitsmatrix controllability Gramian

Grenzzyklus limit cycle

Grenzfrequenz corner frequency; cut-off frequency

Größe variable

Gütefunktion cost function; performance function; ~ index; ~ specification

Güteforderung siehe Gütefunktion

Gütekriterium siehe Gütefunktion

H

Haftreibung static friction; stiction; adhesion

Halteglied nullter Ordnung zero-order hold element (ZOH)

Handregelung manual control

harmonische Balance describing function analysis; ~ method;

harmonic balance

High-gain-Beobachter;

Beobachter mit hoher

Verstärkung high-gain observer

hochfrequentes Schalten

chattering; high frequent switching

homogene Differentialgleichung

1. Ordnung first order

homogeneous differential equation

homogene Differentialgleichung

2. Ordnung second order

homogeneous differential equation

Hurwitz-Kriterium Hurwitz stability criterion

Hurwitz-Matrix Hurwitz matrix

Hurwitz-Sektor Hurwitz sector

hybrides System hybrid system

Hyperstabilität hyperstability

Hysterese hysteresis

I

I-Element I-(integral) element
imaginäre Polstellen imaginary poles
Imaginärteil imaginary part
Impulsantwort impulse response
Impulsfunktion impulse function
instabil unstable
Instabilität instability
instabiles System unstable system
Integrator integrator
Integrator-Backstepping integrator backstepping
Integrierbeiwert integration constant
Integrierglied I-(integral) element
Integrierzeitkonstante integral time constant; constant of integrator
interne Dynamik internal dynamics
inverse Dynamik inverse dynamics
Inverse einer Matrix inverse matrix
inverse Laplace-Transformation inverse Laplace transformation
I-Regler I (integral)-controller
Istwert actual value
IT₁-Element I-(integral) element with first order lag
I-Verhalten I-(integral) action
I-Zustandsregelung I-(integral) control with state feedback

K

Kalman-Filter Kalman filter; linear-quadratic estimator
Kalman-Jakubovich-Lemma Kalman-Yakubovich-lemma
kanonische Form canonical form
Kaskadenregelung cascade control
Kaskadenstruktur cascade structure
Kausalität causality
Kennkreisfrequenz undamped natural angular frequency; characteristic angular frequency

Kennlinie graph; characteristic curve
Kennlinien mit mehreren Eingangsgrößen multivalued nonlinearity
Kettenstruktur series structure
Knotenpunkt node
Kompensation, dynamische dynamic compensation
Kompensator compensator
konzentrierte Parameter lumped parameters
Kopplung coupling
Korrekturglied, phasenabsenkendes lead compensator
Korrekturglied, phasenanhobendes lag compensator
Kreiskriterium circle criterion
Kreisstruktur circle structure
Kreisverstärkung closed-loop gain; gain; loop gain
kritische Dämpfung (PT₂-Element mit $D = 1$) critical damping
kritisch gedämpftes System (PT₂-Element mit $D = 1$) critically damped system

L

Lageregelung position control system
Laplace-Transformationspaar Laplace-transform pair
Laplace-Operator Laplace operator
Laplace-Transformation Laplace transformation
Laplace-Transformierte Laplace transform
Laplace-Übertragungsfunktion Laplace transfer function
Laplace-Variable Laplace operator
Leistungsverstärker power amplifier
Lie-Ableitung Lie derivativ
Lie-Derivierte Lie derivativ
linear-quadratische Regelung linear-quadratic control (LQC)
lineare Matrixungleichung linear matrix inequality (LMI)

lineares parametervariables

System linear parameter-varying system (LPV)

lineares Regelungssystem linear control system

lineares zeitinvariantes

Regelungssystem linear time-invariant (LTI) control system

Linearisierung linearization^{AE}; linearisation^{BE}

Linearität linearity

linke s-Halbebene left half s-plane (LHP)

Ljapunov-Funktion Lyapunov function

Ljapunov-Gebiet positively invariant set

Ljapunov-Stabilität Lyapunov stability; stability in the sense of Lyapunov

Ljapunov, direkte Methode von Lyapunov's direct method; ~ second method

Ljapunov, erste Methode von Lyapunov's first method

Ljapunov, indirekte Methode von Lyapunov's indirect method; ~ first method

Ljapunov, zweite Methode von Lyapunov's second method

logarithmische Matrixnorm logarithmic matrix norm

Lose backlash; ~ nonlinearity; system with play

Luenberger-Beobachter Luenberger observer

M

mathematische Modellbildung mathematical modeling^{AE}; ~ modelling^{BE}

mathematisches Modell mathematical model

Masse-Feder-System mass-spring system

Matrixexponentialfunktion matrix exponential (function)

Matrixnorm measure of a matrix

Mehrgrößenregelung

multivariable control; multiple-input, multiple-output control system

Mehrgrößensystem

multiple-input, multiple-output system; multivariable system; MIMO-System

Messeinrichtung measuring device

Messglied sensor

Messrauschen measurement noise

Messwandler measuring transducer

Methode der Beschreibungs-
funktion describing function
analysis; describing function method;
harmonic balance

Methode der kleinsten Quadrate least-squares (LS) method

minimalphasiges System minimum-phase system

Mitkopplung positive feedback

modale Regelung modal control

modellbasierte prädiktive Rege-
lung (MPR) model predictive
control (MPC)

Modellbildung model building;
modeling^{AE}; modelling^{BE}

Modellunsicherheit model
uncertainty

Modellvereinfachung model
aggregation; ~ simplification; ~
reduction

Moore-Penrose-Inverse;

Pseudoinverse Moore-Penrose
pseudoinverse

N

Nachlauffehler tracking error

Nachstellzeit reset time

Nennergrad denominator degree;
order of denominator

Nennerpolynom denominator
polynomial

Nichols-Diagramm Nichols plot

nichtlineare Differentialgleich-
ung nonlinear differential equation

nichtlinearer Beobachter

nonlinear observer

nichtlineares Element nonlinear
element

nichtlineares Regelungssystem

nonlinear feedback control system

nichtlineares System nonlinear system**nichtminimalphasiges System**

non minimum phase system

nichtsteuerbares System

uncontrollable system

Normalform, kanonische Form

normal form; canonical form

normierte Dämpfung damping ratio**Nulldynamik** zero dynamics**Nullstelle** zero; root**Nyquist-Kriterium** Nyquist (stability) criterion**Nyquist-Kurve** Nyquist (contour) plot**O****offener Regelkreis** open-loop system**Operationsverstärker** operational amplifier**optimale Regelung** optimal control**Optimierung** optimization^{AE}; optimisation^{BE}**Ortskurve der Frequenzgangfunktion** Nyquist diagram; $\sim$ plot; polar plot**P****Padé-Approximation** Padé approximation**Parallelschaltung** parallel connection^{AE}; $\sim$ connexion^{BE}**Parallelstruktur** parallel structure**Parameterempfindlichkeit** parameter sensitivity**Parameteridentifikation** parameter identification;**Parametermodell** parameter model**Parameteroptimierung** parameter optimization^{AE}; $\sim$ optimisation^{BE}**Parameterschätzverfahren** parameter estimation method**Parametervariation** variation of parameters**Partialbruchzerlegung** partial fraction expansion**Passivität** passivity**PD-Regler**

PD-(proportional-plus-derivative) -controller

PDT₁ (Lead)-Element (-Regler)

phase-lead compensator

P-Element P-(proportional) element**periodisch** periodic; underdamped ($0 < D < 1$)**Phasenebene** phase plane**Phasenebene; Methode der** phase plane analysis**Phasengang** phase plot; Bode phase plot**Phasenkorrektur** phase correction**Phasennacheilung** phase lag**Phasenportrait** phase portrait**Phasenrand** phase margin**Phasenreserve** phase margin**Phasenschnittkreisfrequenz**

phase crossover (angular) frequency

Phasenverschiebung phase shift**Phasenvoreilung** phase lead**Phasenwinkel** phase angle**PID-Regler** PID-(proportional-plus-integral-plus-derivative) controller; three-term controller**PI-Regler**

PI-(proportional-plus-integral)

-controller; two-term controller

PI-Zustandsregelung

PI-(proportional-plus-integral)

control with state feedback

pneumatischer Regler pneumatic controller**Pol/Nullstellen-Bild** pole-zero map**Pol/Nullstellen-Diagramm** pole-zero plot; $\sim$ diagram**Pol/Nullstellen-Kürzen** pole-zero cancellation**Polstelle** pole**Polüberschuss** pole excess; pole-zero excess**Polvorgabe** pole placement**Polzuweisung** pole assignment

Popov, Stabilitätskriterium von

Popov stability criterion; Popov criterion

Popov-Gerade Popov line**Popov-Ortskurve** Popov plot**positiv reell** positive real**prädiktive Regelung** predictive control**P-Regelung** P-(proportional) control**P-Regler** P-(proportional) controller**Proportionalbeiwert** proportional constant; $\sim$ gain; DC gain**Proportionalglied** P-(proportional) element**Proportionalregelung** proportional control**Prozess, stochastischer** stochastic process**prozessabhängige Ablaufsteuerung** process-dependent sequential control; process-oriented sequential control**Prozessleitsystem** process control system**Prozessregelung** process control**Pseudoinverse** Moore-Penrose pseudoinverse**PT₁-Element** first order lag element**PT₂-Element** second order lag element**PT₂-Element (mit $D < 1$; Schwingungsfall)** underdamped system**PT₂-Element (mit $D > 1$; Kriechfall)** overdamped system**P-Verhalten** P-(proportional) action**Q****quadratische Form** quadratic form**quadratische Regelfläche** integral of squared error (ISE)**R****Rang einer Matrix** rank of matrix**radial unbegrenzt** radially unbounded**Rattern** chattering**Realteil** real part**rechnergestützter Entwurf** computer-aided design**rechte s-Halbebene** right half s-plane (RHP)**Regelabweichung** control error; offset**Regelabweichung, bleibende** steady-state error; $\sim$ offset**Regelalgorithmus** control algorithm**Regelbereich** control range; operating range**Regeldifferenz** control error; error variable**Regeleinrichtung** control equipment**Regelfehler** control error**Regelfläche, zeitlinear gewichtete quadratische** integral of time multiplied by squared error (ITSE)**Regelfläche, zeitquadratisch gewichtete quadratische** integral of squared time multiplied by squared error (ISTSE)**Regelgenauigkeit im Beharrungszustand** steady-state control accuracy**Regelgeschwindigkeit** control rate**Regelgröße** controlled variable; plant output**Regelkreis** closed-loop system; feedback control system; control loop; control system**Regelstrecke** plant; controlled system; control object**Regelung** feedback control; closed-loop control; control^[2]**Regelung, modale** modal control**Regelungsgenauigkeit** control accuracy**Regelungsnormalform** controllable canonical form^[2] Wird für Regelung und Steuerung verwendet.

Regelungssystem automatic feedback control system; control system^[3]
Regelungssystem mit direkter Gegenkopplung (d. h. ohne Regler) unity-feedback control system
Regelungstechnik control system technology; control engineering
Regelungsverhalten control action; controller action
Regler controller; compensator; regulator; governor^[4]
Reglereinstellung controller setting; ~ tuning
Reglerentwurf controller design
Reglergesetz control law
Reglerverstärkung feedback gain
Reibung friction
Reibung beim Ruckgleiten stick-slip-friction
Reihenschaltung series connection^{AE}; ~ connexion^{BE}
relativer Grad relativ degree
Resonanzfrequenz resonance frequency; resonant ~
Resonanzkreisfrequenz resonant angular frequency
Resonanzüberhöhung resonant peak; resonance ~
Resonanzwert des Amplitudengangs (PT₂-Element) resonant peak magnitude; resonance ~
reziproke Übertragungsfunktion inverse transfer function
Riccati-Regler linear-quadratic control (LQC)
robuste Regelung robust control system
robuster Regler robust controller
Robustheit robustness
Rollreibung rolling friction
Ruckgleiten stick-slip
Rückführdifferenzfunktion return difference function
Rückführdifferenzmatrix return difference matrix

Rückführgröße feedback variable
Rückführung feedback
Rückführungsschleife control loop; feedback loop
Rückkopplung feedback
Rückkopplungsschaltung feedback connection^{AE}; ~ connexion^{BE}
Rückwärtsdifferenz backward difference
Ruhelage equilibrium point; ~ state
Runge-Kutta-Verfahren Runge-Kutta method

S

Sattelpunkt saddle point
Sättigung saturation
Sättigungsregler saturation control; saturated ~
Schnittfrequenz crossover frequency
Schalter switch; relay
Schwingung, gedämpfte damped oscillation
s-Ebene s-plane
Serienschaltung chain structure
Signal, rückgeführtes feedback signal
Signalflussgraph signal-flow graph
Signumfunktion signum function
Sinusantwort sine response
Sinusfunktion sine function
Skalarprodukt scalar product
Smith-Prädiktor Smith predictor
Sollwert desired value; set value; reference input; command input; setpoint
Sollwertfolgeregelung follow-up control
Spaltenvektor column vector
speicherprogrammierbare Steuerung (SPS) programmable logic controller (PLC)
Spiel backlash
Sprungantwort step response
Sprungfunktion step function

[3] Wird für Regelung und Steuerung verwendet.

[4] Nur bei speziellen Anwendungen.

stabil, global asymptotisch globally asymptotically stable
Stabilisierbarkeit stabilizability^{AE}; stabilisability^{BE}
Stabilisierung stabilization^{AE}; stabilisation^{BE}
Stabilität stability
Stabilität, absolute absolute stability
Stabilität, asymptotische asymptotic stability
Stabilität des offenen Regelkreises open-loop stability
Stabilität im Sinne von Ljapunov stability in the sense of Lyapunov; Lyapunov stability
Stabilitätsuntersuchung stability analysis
Standardregelkreis standard control loop
stationäre Lösung steady-state solution
stationäres Regeldifferenz steady-state control error
stationäres Verhalten steady-state response
statische Verstärkung DC gain; static reinforcement
statisches Verhalten static behavior^{AE}; ~ behaviour^{BE}
steife Differentialgleichung stiff differential equation
Stelleinrichtung actuator; final controlling equipment
Stellelement final controlling element
Stellglied actuator
Stellgröße control signal; actuator ~; control plant input; actuating variable; manipulated variable
Stellgrößenbeschränkung actuator saturation
steuerbares System controllable system
Steuerbarkeit controllability
Steuerbarkeitsmatrix (M_S) controllability matrix
Steuergröße control factor

Steuermatrix (B) input matrix
Steuersignal control input
Steuerung control^[5]; feedforward ~; open loop ~
Steuerungstechnik control engineering
Steuerungswirkung control action
Stick-Slip-Reibung stick-slip friction
stochastische Variable stochastic variable
stochastischer Prozess stochastic process
Störgröße disturbance input; ~ variable
Störgrößenaufschaltung disturbance rejection
Störgrößenbeobachtung disturbance observation
Störgrößenkompensation disturbance compensation
Störsignal disturbance signal
Störübertragungsfunktion disturbance transfer function
Störunterdrückung disturbance rejection; ~ attenuation
Störverhalten disturbance response
Störverhalten des Regelkreises disturbance reaction of the control loop
Störverhalten der Strecke disturbance reaction of the controlled system
Strecke mit Ausgleich controlled system with self-regulation
Strecke ohne Ausgleich controlled system without self-regulation
strenge Rückkopplungsform strict feedback form
streng positiv reell strictly positive real
Strudelpunkt focus
strukturvariable Regelung variable structure control
stückweise lineare Regelung piecewise linear control
Summationselement summation element

[5] Wird für Regelung und Steuerung verwendet.

Summationspunkt summation point
Superpositionsprinzip principle of superposition
System mit konzentrierten Parametern lumped-parameter system
System mit verteilten Parametern distributed-parameter system
System mit geschlossener Schleife closed loop system
Systemmatrix (A) system matrix

T

T_t-Element dead-time element; transport-lag element
Taylor-Reihe Taylor series
teilerfremd coprime
Testeingangssignal test input signal
Totzeit time delay; dead-time; transport lag
Totzeitelement dead-time element; transport lag element
Totzone dead-zone
Trajektorie trajectory
Trajektorienfolgeregelung trajectory tracking control; tracking control
Transitionsmatrix transition matrix
Transponierte einer Matrix transpose of a matrix
Trapeznäherung für eine Integralberechnung trapezoidal approximation of integral
trockene Reibung dry friction; Coulomb friction
Tustin-Formel Tustin's method

U

Überanpassung overfitting
Übergangsfunktion step response; unit-step response
Übergangsmatrix state transition matrix; transition matrix

Übergangsverhalten transient behavior^{AE}; $\sim$ behaviour^{BE}
Überlagerungsprinzip principle of superposition
Überschwingen overshoot
Überschwingweite overshoot; peak $\sim$; maximum $\sim$
Überschwingzeit (t_u) peak time
Übertragungsblock block; functional block
Übertragungselement transfer element
Übertragungsfunktion transfer function
Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises closed-loop transfer function
Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises open-loop transfer function
Übertragungsfunktion; inverse inverse transfer function
Übertragungsmatrix transfer matrix; transfer function $\sim$
Übertragungsverzögerung transfer lag
ungedämpfte Frequenz natural frequency
unterlagerte Regelung subsidiary control
Unterschwingen undershoot

V

Vergleicher comparator
Vergleichsmatrix comparison matrix
Verhalten im Beharrungszustand steady-state response
Verhalten; differenzierendes rate action
Verhalten; integrierendes integral action
Verstärker amplifier
Verstärkung gain; $\sim$ factor
verteilter Parameter distributed parameters
Verzögerung lag; delay
Verzögerungselement 1. Ordnung lag element

Verzugszeit delay time; equivalent dead time
Verzweigung branching
Verzweigungspunkt branch point
viskose Reibung viscous friction
viskoser Reibungskoeffizient viscous friction coefficient
Vorfilter prefilter
Vorhaltzeit rate time

W

Wasserstandsregelung water-level control
weiche strukurvariable Regelung soft variable-structure control
Wirbelpunkt center
Wirkung action
Wirkungsplan action diagram
Wurzelort (WO) root locus
Wurzelortamplitudenbedingung root-locus amplitude (magnitude) condition
Wurzelortasymptoten root-locus asymptotes
Wurzelortaustrittswinkel root-locus angle of departure
Wurzelorteintrittswinkel root-locus angle of arrival
Wurzelortkonstruktionsregeln root-locus construction rules
Wurzelortphasenbedingung root-locus phase condition
Wurzelortskurve (WOK) root-locus plot
Wurzelortskurve eines zeitdiskreten Systems discrete root locus
Wurzelortsverfahren root locus method
Wurzelortverzweigungspunkt root-locus breakaway point; root-locus break-in point
Wurzelortzweige root-locus branches

Z

Zählergrad numerator degree; order of numerator

Zählerpolynom numerator polynomial
z-Ebene z-plane
Zeilenvektor row vector
Zeitbereich time domain
zeitdiskret discrete-time
zeitgeführte Ablaufsteuerung time-dependent sequential control
zeitinvariantes System time-invariant system
Zeitkonstante time constant
zeitkontinuierlich continuous-time
zeitoptimal time-optimal
zeitoptimale Regelung time-optimal control
zeitvariantes System time-varying system
Zeitverhalten time behavior^{AE}; ~ behaviour^{BE}
Zeitverzögerung time delay; ~ lag
z-Transformation z-transformation
z-Transformationspaar z-transform pair
z-Transformierte z-transform
z-Übertragungsfunktion z-transfer function
Zufallsgröße random variable; ~ quantity
Zufallsprozess stochastic process
Zustand state
Zustandsbeobachter state observer; estimator
Zustandsbeobachtung state observation
Zustandsdifferentialgleichung state differential equation
Zustandsebene phase plane
Zustandsgleichung state equation
Zustandsgröße state variable
Zustandsraum state space
Zustandsregelung state control
Zustandsregler state controller
Zustandsrückführung state feedback
Zustandsübergangsmatrix state transition matrix
Zustandsvariable state variable
Zustandsvektor state vector
Zweipunktelement two-step action element; relay

Zweipunktelement mit**Hysterese** relay with hysteresis**Zweipunktelement mit Totzone****(Dreipunktelement)** relay with dead zone**Zweipunktregelung** bang-bangcontrol; on-off $\sim$; two-step $\sim$;two-position $\sim$; relay feedback control system**Zweipunktregler**two-step controller; two-position $\sim$; two-point $\sim$ **Zypkin-Kriterium** Tsytkin

criterion

7.2 Englisch $\rightarrow$ Deutsch*AE* = American English;*BE* = British English**A****absolute stability** absolute

Stabilität

Ackermann's formula

Ackermann-Formel

action Wirkung**action diagram** Wirkungsplan**actual value** Istwert**actuating variable** Stellgröße**actuator saturation**

Stellgrößenbeschränkung

actuator signal Stellgröße**actuator** Stelleinrichtung; Stellglied**adaptation** Adaptation, Adaption**adaptive control system**

adaptives Regelungssystem

adaptive control adaptive

Regelung

adhesion Haftreibung**affine-in-control system**

eingangsaffines System;

eingangslineares $\sim$ **Aizerman's conjecture**

Aizerman'sche Vermutung

all-pass element Allpass**all-pass filter** Allpass**amplifier** Verstärker**amplitude** Amplitude**amplitude margin**

Amplitudenrand; Amplitudenreserve

amplitude optimum

Betragsoptimum

amplitude response

Amplitudengang

amplitude spectrum

Amplitudenspektrum

analog^{AE}; analogue^{BE} analog**analog-digital^{AE} converter;****analogue-digital^{BE} $\sim$**

Analog-Digital-Wandler

analog-to-digital^{AE} converter;**analogue-to-digital^{BE} $\sim$**

Analog-Digital-Wandler

aperiodic aperiodisch**aperiodic attenuation**

aperiodische Dämpfung

aperiodic damping aperiodische

Dämpfung

asymptotic behavior^{AE}; $\sim$ **behaviour^{BE}** asymptotisches

Verhalten

asymptotic stability

asymptotische Stabilität

asymptotically stable

asymptotisch stabil

attenuation Abschwächung;

Dämpfung

attractive attraktiv**attractivity** Attraktivität**automatic feedback control**

system Regelungssystem

automaton Automat**autonomous** autonom**B****backlash** Spiel; Lose**backlash; $\sim$ nonlinearity** Lose;

Element mit Lose

backstepping Backstepping**backward difference**

Rückwärtsdifferenz

bandwidth Bandbreite**bang-bang control**

Zweipunktregelung

block Übertragungsblock
block diagram Blockdiagramm;
 Blockschaltbild
Bode diagram Bode-Diagramm
Bode phase plot Phasengang
Bode plot Bode-Diagramm
branch point Verzweigungspunkt
branching Verzweigung
Brunovsky canonical form
 Brunovsky-Normalform
build-up time Ausgleichszeit

C

canonical form kanonische Form
cascade control Kaskadenregelung
cascade structure
 Kaskadenstruktur
causality Kausalität
center Wirbelpunkt
chain structure Serienschaltung
chaotic system chaotisches System
characteristic angular frequency
 Kennkreisfrequenz
characteristic curve Kennlinie
characteristic equation
 charakteristische Gleichung
characteristic polynomial
 charakteristisches Polynom
chattering Rattern; hochfrequentes
 Schalten
circle criterion Kreiskriterium
circle structure Kreisstruktur
closed-loop control Regelung
closed-loop frequency response
 Frequenzgang des geschlossenen
 Regelkreises
closed-loop gain Kreisverstärkung
closed-loop system System mit
 geschlossener Schleife
closed-loop transfer function
 Übertragungsfunktion des
 geschlossenen Regelkreises
column vector Spaltenvektor
command action
 Führungsverhalten
command input Sollwert

command response
 Führungsverhalten
command step response
 Führungsübergangsfunktion
companion matrix Begleitmatrix
comparator Vergleichler
comparison matrix
 Vergleichsmatrix
compensator Regler; Kompensator
computer-aided design
 rechnergestützter Entwurf
constant of integrator
 Integrierzeitkonstante
constant-value control
 Festwertregelung
continuous-time control^[6] zeitkontinuierlich
 Regelung; Steuerung
control accuracy
 Regelungsgenauigkeit
control action Regelungsverhalten;
 Steuerungswirkung
control-affine system
 eingangsaffines System;
 eingangslineares System
control algorithm
 Regelalgorithmus
control engineering
 Regelungstechnik; Steuerungstechnik
control equipment
 Regeleinrichtung
control error Regelfehler,
 Regelabweichung; Regeldifferenz
control factor Steuergröße
control input Stellgröße;
 Steuersignal
control law Reglergesetz
control-Lyapunov function (CLF)
 Control-Ljapunov-Funktion
control loop Rückführungsschleife;
 Regelkreis
control object Regelstrecke
control range Regelbereich
control rate Regelgeschwindigkeit
control signal Stellgröße
control system Regelkreis;
 Regulationssystem
control system technology
 Regelungstechnik
control transfer function
 Führungsübertragungsfunktion

^[6] Wird für Regelung und Steuerung verwendet.

controllability Steuerbarkeit
controllability Gramian
 Gram'sche Steuerbarkeitsmatrix
controllability matrix
 Steuerbarkeitsmatrix ($\underline{M}_S$)
controllable canonical form
 Regelungsnormalform
controllable system steuerbares System
controlled system Regelstrecke
controlled system with self-regulation Strecke mit Ausgleich
controlled system without self-regulation Strecke ohne Ausgleich
controlled variable Regelgröße
controller Regler; Reglereinstellung
controller action
 Regelungsverhalten
controller design Reglerentwurf
controller setting
 Reglereinstellung
controller tuning Reglereinstellung
convolution integral
 Faltungintegral
convolution theorem
 Faltungssatz
coprime teilerfremd
corner angular frequency
 Eckkreisfrequenz
corner frequency Eckfrequenz, Grenzfrequenz
cost function Gütefunktional
Coulomb friction Coulomb'sche Reibung, trockene Reibung
coupled system gekoppeltes System
coupling Kopplung
critical damping kritische Dämpfung (PT_2 -Element mit $D = 1$)
critically damped ($D = 1$)
 aperiodischer Grenzfall
critically damped system kritisch gedämpftes System (PT_2 -Element mit $D = 1$)
crossover frequency
 Schnittfrequenz
cut-off frequency Grenzfrequenz

D

D-(derivative) action
 D-Verhalten
D-(derivative) element
 D-Element
DC gain statische Verstärkung; Proportionalbeiwert
damped natural angular frequency Eigenkreisfrequenz
damped oscillation gedämpfte Schwingung
damping Dämpfung
damping coefficient
 Dämpfungskoeffizient
damping constant
 Dämpfungskonstante
damping factor Dämpfungsfaktor
damping ratio
 Dämpfungsverhältnis; normierte Dämpfung
dead band element Dreipunktglied
deadbeat control
 Deadbeat-Regelung
deadbeat-step response
 Deadbeat-Sprungantwort
dead-time Totzeit
dead-time element T_t -Element; Totzeitelement
dead-zone Totzone
dead-zone nonlinearity Element mit Totzone
decentralised^{BE} control;
decentralized^{AE} $\sim$ dezentrale Regelung
decibel Dezibel (dB)
decoupling Entkopplung
degree of freedom Freiheitsgrad
delay Verzögerung
delay time Verzugszeit
denominator degree Nennergrad
denominator polynomial
 Nennerpolynom
derivative Ableitung
derivative action coefficient
 Differenzierbeiwert
derivative controller D-Regler
derivative element with first order lag DT_1 -Element

describing function (DF)

Beschreibungsfunktion

describing function analysisMethode der Beschreibungsfunktion;
harmonische Balance**describing function method**Methode der Beschreibungsfunktion;
harmonische Balance**descriptor system**

Deskriptorsystem

design Entwurf**desired value** Sollwert**detectability** Ermittelbarkeit**diffeomorphism** Diffeomorphismus**difference equation**

Differenzengleichung (DGL)

differential equation

Differentialgleichung (DGL)

digital-analog^{AE} converter;digital-analogue^{BE} ~

Digital-Analog-Wandler

digital control digitale Regelung**digital controller** digitaler Regler**digital signal** digitales Signal**digital-to-analog^{AE} converter;**digital-to-analogue^{BE} ~

Digital-Analog-Wandler

digitiser^{BE}; digitizer^{AE}

Digital-Analog-Wandler

direct digital control (DDC)

DDC-Regelung

discrete control Abtastregelung**discrete convolution sum**

Faltungssumme

discrete root locusWurzelortskurve eines zeitdiskreten
Systems**discrete system** Abtastsystem**discrete-time** zeitdiskret**distributed parameters** verteilte
Parameter**distributed-parameter system**

System mit verteilten Parametern

disturbance attenuation

Störunterdrückung

disturbance compensation

Störgrößenaufschaltung

disturbance input Störgröße**disturbance observation**

Störgrößenbeobachtung

disturbance reaction of thecontrol loop Störverhalten des
Regelkreises**disturbance reaction of the con-**trolled system Störverhalten der
Strecke**disturbance rejection**Störunterdrückung;
Störgrößenaufschaltung**disturbance response**

Störverhalten

disturbance signal Störsignal**disturbance transfer function**

Störübertragungsfunktion

disturbance variable Störgröße**domain of attraction**

größtmögliches Einzugsgebiet

dominant pair of poles

dominantes Polpaar

dominant pole dominanter Pol**dry friction** trockene Reibung**dynamic behavior^{AE}; ~**behaviour^{BE} dynamisches
Verhalten**dynamic compensation**

dynamische Kompensation

dynamic friction Gleitreibung**dynamical system** dynamisches

System

E**eigenvalue** Eigenwert**equation error** Gleichungsfehler**equilibrium point** Ruhelage**equilibrium state**

Gleichgewichtszustand; Ruhelage

equivalent dead time Verzugszeit**error variable** Regeldifferenz**estimator** Beobachter;

Zustandsbeobachter

exact linearisation^{BE}; ~linearization^{AE} exakte

Linearisierung

extended Kalman filter (EKF)

erweitertes Kalman-Filter (EKF)

external description

E/A-Beschreibung

F

feedback Rückführung;
Rückkopplung
feedback connection^{AE};
 ~ **connexion**^{BE}
 Rückkopplungsschaltung
feedback control Regelung
feedback control system
 Regelkreis
feedback gain Reglerverstärkung
feedback linearisation^{BE}; ~
linearization^{AE} exakte
 Linearisierung
feedback loop
 Rückführungsschleife
feedback signal Signal,
 rückgeführtes
feedback variable Rückführgröße
feedforward control Steuerung
feedthrough factor
 Durchgangsfaktor (*d*)
feedthrough matrix
 Durchgangsmatrix (*D*)
feedthrough vector
 Durchgangsvektor (*d*)
final controlling element
 Stellelement
final controlling equipment
 Stelleinrichtung
final-value theorem Endwertsatz
first order derivative element
 Differenziererelement 1. Ordnung
first order differential equation
 Differentialgleichung 1. Ordnung
first order homogeneous differential equation homogene
 Differentialgleichung 1. Ordnung
first order lag element
 PT₁-Element
first order lead element
 Differenziererelement 1. Ordnung
fixed command control
 Festwertregelung
fixed set-point control
 Festwertregelung
flat system flaches System
flatness Flachheit

flow diagram Flussdiagramm
focus Strudelpunkt
follower control; follow-up ~
 Folgeregeling
follow-up control
 Sollwertfolgeregeling
forced response erzwungene
 Bewegung
Fourier transform
 Fourier-Transformierte
Fourier transformation
 Fourier-Transformation
free motion freie Bewegung
frequency domain Frequenzbereich
frequency response Frequenzgang
frequency response characteristics Bode-Diagramm
frequency spectrum
 Frequenzspektrum
friction Reibung
functional block
 Übertragungsblock
fundamental matrix
 Fundamentalmatrix
fuzzy control Fuzzy-Regelung;
 Fuzzy-Steuerung

G

gain Kreisverstärkung; Verstärkung
gain crossover angular frequency
 Durchtrittskreisfrequenz
gain factor Verstärkung
gain margin Amplitudenrand;
 Amplitudenreserve
gain response Amplitudengang
Gershgorin circles
 Gershgorin-Kreise
globally asymptotically stable
 global asymptotisch stabil
governor^[7] Regler
graph Kennlinie

^[7] Nur bei speziellen Anwendungen.

H

harmonic balance harmonische Balance
high frequent switching hochfrequentes Schalten
high-gain observer Beobachter mit hoher Verstärkung; High-gain-Beobachter
Hurwitz matrix Hurwitz-Matrix
Hurwitz sector Hurwitz-Sektor
Hurwitz stability criterion Hurwitz-Kriterium
hybrid system hybrides System
hyperstability Hyperstabilität
hysteresis Hysterese

I

I-(integral) action I-Verhalten
I-(integral) controller I-Regler
I-(integral) control with state feedback I-Zustandsregelung
I-(integral) element I-Element
I-(integral) element with first order lag IT_1 -Element
imaginary part Imaginärteil
imaginary poles imaginäre Polstellen
impulse function Impulsfunktion
impulse response Gewichtsfunktion; Impulsantwort
impulse response matrix Gewichtsfunktionsmatrix
initial state Anfangszustand
initial value Anfangswert
initial value theorem Anfangswertsatz
input Eingang; Eingangsgröße
input matrix Eingangsmatrix (B); Steuermatrix (B)
input signal Eingangssignal
input variable Eingangsgröße
input vector Eingangsvektor (b)
input-output description E/A-Beschreibung
input-output performance E/A-Verhalten

input-output stability

E/A-Stabilität

instability Instabilität**integral action** integrierendes Verhalten**integral controller** I-Regler**integral of absolute value of error (IAE)** Betragsregelfläche**integral of squared error (ISE)** quadratische Regelfläche**integral of squared time multiplied by squared error (ISTSE)** zeitquadratisch gewichtete quadratische Regelfläche**integral of time multiplied by absolute value of error (ITAE)** zeitgewichtete Betragsregelfläche**integral of time multiplied by squared error (ITSE)** zeitlinear gewichtete quadratische Regelfläche**integral time constant** Integrierzeitkonstante**integration constant** Integrierbeiwert**integrator** Integrator**integrator backstepping** Integrator-Backstepping**internal dynamics** interne Dynamik**inverse dynamics** inverse Dynamik**inverse Laplace transformation** inverse Laplace-Transformation**inverse matrix** Inverse einer Matrix**inverse transfer function** inverse Übertragungsfunktion; reziproke Übertragungsfunktion**K****Kalman filter** Kalman-Filter**Kalman-Yakubovich-lemma** Kalman-Jakubovich-Lemma**kinetic friction** Gleitreibung

L**lag** Verzögerung**lag compensator**

phasenanhebendes Korrekturglied

lag element Verzögerungselement

1. Ordnung

Laplace operator

Laplace-Operator; Laplace-Variable

Laplace transfer function

Laplace-Übertragungsfunktion

Laplace transform

Laplace-Transformierte

Laplace transformation

Laplace-Transformation

Laplace-transform pair

Laplace-Transformationspaar

lead compensator

phasenabsenkendes Korrekturglied

least-squares (LS) method

Methode der kleinsten Quadrate

left half s-plane (LHP) linke

s-Halbebene

level control Füllstandsregelung**Lie derivativ** Lie-Derivierte;

Lie-Ableitung

limit cycle Grenzyklus**limiting nonlinearity** Element

mit Begrenzung

limiting Begrenzung**linear control system** lineares

Regelungssystem

linear matrix inequality (LMI)

lineare Matrixungleichung

linear parameter-varying system

(LPV) lineares parametervariables

System

linear-quadratic control (LQC)

linear-quadratische Regelung;

Riccati-Regler

linear-quadratic estimator

Kalmanfilter

linear time-invariant (LTI)

control system lineares

zeitinvariantes Regelungssystem

linearisation^{BE}; linearization^{AE}

Linearisierung

linearisation^{BE} by state feedback;**linearization^{AE}** $\sim$ exakte

Linearisierung

linearity Linearität**logarithmic matrix norm**

logarithmische Matrixnorm

loop gain Kreisverstärkung**Luenberger observer**

Luenberger-Beobachter

lumped parameters konzentrierte

Parameter

lumped-parameter system

System mit konzentrierten

Parametern

Lyapunov function Ljapunov

Funktion

Lyapunov stability

Ljapunov-Stabilität; Stabilität im

Sinne von Ljapunov

Lyapunov's, direct method of

direkte Methode von Ljapunov

Lyapunov's, first method of

erste Methode von Ljapunov

Lyapunov's indirect method

indirekte Methode von Ljapunov

Lyapunov's, second method of

zweite Methode von Ljapunov

M**manipulated variable** Stellgröße**magnitude** Amplitude**magnitude plot** Amplitudengang**magnitude spectrum**

Amplitudenspektrum

manual control Handregelung**mass-spring system**

Masse-Feder-System

mathematical model

mathematisches Modell

mathematical modeling^{AE}; $\sim$ **modelling^{BE}** mathematische

Modellbildung

matrix exponential (function)

Matrixexponentialfunktion

maximum overshoot

Überschwingweite

measurement noise Messrauschen**measuring device** Messeinrichtung**measuring transducer**

Messwandler

MIMO-System Mehrgrößensystem

minimum-phase system
 minimalphasiges System
modal control modale Regelung
model aggregation
 Modellvereinfachung
model building Modellbildung
model predictive control (MPC)
 modellbasierte prädiktive Regelung
model reduction
 Modellvereinfachung
model simplification
 Modellvereinfachung
model uncertainty
 Modellunsicherheit
modeling^{AE}; modelling^{BE}
 Modellbildung
Moore-Penrose pseudoinverse
 Pseudoinverse;
 Moore-Penrose-Inverse
moving average gleitende
 Mittelwertbildung
moving horizon gleitender
 Horizont
**multiple-input, multiple-output
 system** Mehrgrößensystem
**multiple-input multiple-output
 control system**
 Mehrgrößenregelung
multivalued nonlinearity
 Kennlinien mit mehreren
 Eingangsgrößen; Element mit
 mehrdimensionaler
 Kennlinienfunktion
multivariable control
 Mehrgrößenregelung
multivariable system
 Mehrgrößensystem

N

natural frequency ungedämpfte
 Frequenz; Eigenfrequenz
natural response Eigenbewegung
negative feedback Gegenkopplung
Nichols plot Nichols-Diagramm
node Knotenpunkt
nonlinear differential equation
 nichtlineare Differentialgleichung

nonlinear element nichtlineares
 Element
**nonlinear feedback control
 system** nichtlineares
 Regelungssystem
nonlinear observer nichtlinearer
 Beobachter
nonlinear system nichtlineares
 System
nonlinearity with hysteresis
 Element mit Hysterese
non minimum phase system
 nichtminimalphasiges System
normal form Normalform;
 kanonische Form
numerator degree Zählergrad
numerator polynomial
 Zählerpolynom
Nyquist (contour) plot
 Nyquist-Kurve
Nyquist diagram Ortskurve der
 Frequenzgangfunktion
Nyquist plot Ortskurve der
 Frequenzgangfunktion
Nyquist (stability) criterion
 Nyquist-Kriterium

O

observability Beobachtbarkeit
observability Gramian
 Gram'sche Beobachtbarkeitsmatrix
observability matrix
 Beobachtbarkeitsmatrix (M_B)
observable canonical form
 Beobachtungsnormalform
observable system beobachtbares
 System
observer Beobachter
observer-error Beobachtungsfehler
observer-error state equation
 Beobachtungsfehlergleichung
observer matrix
 Beobachtungsmatrix (L)
observer model
 Beobachtungsmodell
observer vector
 Beobachtungsvektor (L)
offset Abweichung; Regelabweichung

on-off control Zweipunktregelung
on-off nonlinearity Element mit Zweipunktkennlinie
open loop control Steuerung
open-loop frequency response Frequenzgang des offenen Regelkreises
open-loop stability Stabilität des offenen Regelkreises
open-loop system offener Regelkreis
open-loop transfer function Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises
operating point Arbeitspunkt
operating range Regelbereich; Arbeitsbereich
operational amplifier Operationsverstärker
optimal control optimale Regelung
optimisation^{BE}; optimization^{AE} Optimierung
order of denominator Nennergrad
order of numerator Zählergrad
ordinary differential equation (ODE) gewöhnliche Differentialgleichung
output equation Ausgangsgleichung
output feedback Ausgangsrückführung
output matrix Ausgangsmatrix (C)
output quantity Ausgangsgröße
output variable Ausgangsgröße
output vector Ausgangsvektor(c)
overall transfer function Gesamtübertragungsfunktion
overdamped ($D > 1$) aperiodisch
overdamped system PT₂-Element (mit $D > 1$; Kriechfall)
overfitting Überanpassung
overshoot Überschwingen, Überschwingweite

P

P-(proportional) action
 P-Verhalten

P-(proportional) control
 P-Regelung
P-(proportional) controller
 P-Regler
P-(proportional) element
 P-Element; Proportionalglied
PD-(proportional-plus-derivative) -controller PD-Regler
PI-(proportional-plus-integral) control with state feedback
 PI-Zustandsregelung
PI-(proportional-plus-integral) -controller PI-Regler
PID-(proportional-plus-integral-plus-derivative) controller
 PID-Regler
Padé approximation
 Padé-Approximation
parallel connection^{AE}; ~ connexion^{BE} Parallelschaltung
parallel structure Parallelstruktur
parameter estimation method
 Parameterschätzverfahren
parameter identification
 Parameteridentifikation
parameter model
 Parametermodell
parameter optimisation^{BE}; ~ optimization^{AE}
 Parameteroptimierung
parameter sensitivity
 Parameterempfindlichkeit
parametric estimation
 Parameteridentifikation
partial fraction expansion
 Partialbruchzerlegung
passivity Passivität
peak overshoot Überschwingweite
peak time Überschwingzeit ($t_{\ddot{u}}$)
performance function
 Gütekriterium
performance index
 Gütefunktional
performance specification
 Güteforderung
periodic periodisch
phase angle Phasenwinkel
phase correction Phasenkorrektur
phase crossover (angular) frequency Phasenschnittkreisfrequenz

phase lag Phasennacheilung
phase lead Phasenvoreilung
phase margin Phasenrand;
 Phasenreserve
phase plane Phasenebene;
 Zustandsebene
phase plane analysis Methode der
 Phasenebene
phase plot Phasengang
phase portrait Phasenportrait
phase shift Phasenverschiebung
phase-lead compensator PDT_1
 (Lead)-Element (-Regler)
piecewise linear control
 abschnittsweise lineare Regelung;
 stückweise lineare Regelung
plant Regelstrecke
plant input Stellgröße
plant output Regelgröße
pneumatic controller
 pneumatischer Regler
polar plot Ortskurve der
 Frequenzgangfunktion
pole Polstelle
pole assignment Polzuweisung
pole excess Polüberschuss
pole placement Polvorgabe
pole-zero cancellation
 Pol/Nullstellen-Kürzung
pole-zero diagram
 Pol/Nullstellen-Diagramm
pole-zero excess Polüberschuss
pole-zero map
 Pol/Nullstellen-Bild
pole-zero plot
 Pol/Nullstellen-Diagramm
Popov line Popov-Gerade
Popov plot Popov-Ortskurve
**Popov stability criterion; Popov
 criterion** Stabilitätskriterium von
 Popov
position control system
 Lageregelung
positiv feedback Mitkopplung
positive real positiv reell
positively invariant set
 Einzugsgebiet; Ljapunov-Gebiet
power amplifier
 Leistungsverstärker

predictive control prädiktive
 Regelung
prefilter Vorfilter
principle of superposition
 Überlagerungsprinzip;
 Superpositionsprinzip
process control Prozessregelung
process control system
 Prozessleitsystem
**process-dependent sequential
 control** prozessabhängige
 Ablaufsteuerung
process-oriented sequential control
 prozessabhängige Ablaufsteuerung
**programmable logic controller
 (PLC)** speicherprogrammierbare
 Steuerung (SPS)
proportional constant
 Proportionalbeiwert
proportional control
 Proportionalregelung
proportional gain
 Proportionalbeiwert

Q

quadratic form quadratische Form

R

radially unbounded radial
 unbegrenzt
ramp function Anstiegsfunktion
ramp response Anstiegsantwort
random quantity Zufallsgröße
random variable Zufallsgröße
rank of matrix Rang einer Matrix
rate action D-Verhalten;
 differenzierendes Verhalten
rate time Vorhaltzeit
reachability Erreichbarkeit
real part Realteil
reference input Führungsgröße;
 Sollwert
reference signal Führungsgröße
reference variable Führungsgröße
**region of asymptotic stability
 (RAS)** maximales Einzugsgebiet
regulator Regler
relativ degree Differenzordnung,
 relativer Grad

relay Zweipunktelement; Schalter
relay feedback control system
 Zweipunktregelung
relay with dead zone
 Zweipunktelement mit Totzone
 (Dreipunktelement); Dreipunktglied
relay with hysteresis
 Zweipunktelement mit Hysterese
reset time Nachstellzeit
resonance frequency
 Resonanzfrequenz
resonance peak
 Resonanzüberhöhung
resonance peak magnitude
 Resonanzwert des Amplitudengangs
 (PT_2 -Element)
resonant angular frequency
 Resonanzkreisfrequenz
resonant frequency
 Resonanzfrequenz
resonant peak
 Resonanzüberhöhung
resonant peak magnitude
 Resonanzwert des Amplitudengangs
 (PT_2 -Element)
response to setpoint changes
 Führungsverhalten
return difference function
 Rückführdifferenzfunktion
return difference matrix
 Rückführdifferenzmatrix
right half s-plane (RHP) rechte
 s-Halbebene
rise time Anregelzeit; Anstiegszeit
robust control system robuste
 Regelung
robust controller robuster Regler
robustness Robustheit
rolling friction Rollreibung
root Nullstelle
root locus Wurzelort (WO)
root-locus amplitude (magnitude) condition
 Wurzelortamplitudenbedingung
root-locus angle of arrival
 Wurzelorteintrittswinkel
root-locus angle of departure
 Wurzelortaustrittswinkel
root-locus asymptotes
 Wurzelortasymptoten

root-locus branches
 Wurzelortzweige
root-locus break-in point
 Wurzelortverzweigungspunkt
root-locus breakaway point
 Wurzelortverzweigungspunkt
root-locus construction rules
 Wurzelortkonstruktionsregeln
root-locus method
 Wurzelortsverfahren
root-locus phase condition
 Wurzelortphasenbedingung
root-locus plot Wurzelortskurve
 (WOK)
row vector Zeilenvektor
Runge-Kutta method
 Runge-Kutta-Verfahren

S

s-plane s-Ebene
saddle point Sattelpunkt
sample and hold element
 Abtasthalteglied
sample period Abtastzeit
sample rate Abtastrate
sampled-data system
 Abtastsystem
sampler Abtaster
sampling control Abtastregelung
sampling interval Abtastintervall;
 Abtastzeit
sampling period Abtastperiode
sampling rate Abtastrate
sampling theorem Abtasttheorem
sampling time Abtastzeit
saturated control Sättigungsregler
saturation Begrenzung; Sättigung
saturation control
 Sättigungsregler
saturation nonlinearity Element
 mit Begrenzung, Element mit
 Sättigung
saturator Begrenzungsglied
scalar product Skalarprodukt
second order differential equation Differentialgleichung 2.
 Ordnung
second order homogeneous differential equation homogene
 Differentialgleichung 2. Ordnung

second order lag elementPT₂-Element**sensitivity** Empfindlichkeit**sensitivity function**

Empfindlichkeitsfunktion

sensor Messglied**sequence control** Ablaufsteuerung**sequencer** Ablaufsteuerung**sequential control**

Ablaufsteuerung

series connection^{AE};~ **connexion**^{BE} Reihenschaltung**series structure** Kettenstruktur**setpoint** Sollwert**settling time** Einschwingzeit;

Ausregelzeit

set value Sollwert**signal-flow graph** Signalfussgraph**signum function** Signumfunktion**similarity transformation**

Ähnlichkeitstransformation

sine function Sinusfunktion**sine response** Sinusantwort**single-input single-output (SISO)**

system Eingrößensystem

single-loop feedback system

einschleifige Regelung

singled-valued nonlinearity

Element mit eindeutiger

Kennlinienfunktion

sliding friction Gleitreibung**sliding mode** Gleitzustand**sliding mode controller**

Gleitzustandsregler

Smith predictor Smith-Prädiktor**soft variable-structure control**

weiche strukurvariable Regelung

speed control

Geschwindigkeitsregelung

speed-of-response specification

Dynamikforderung

spring-mass-damping system

Feder-Masse-Dämpfer-System

spring-mass-dashpot system

Feder-Masse-Dämpfer-System

stabilisability^{BE}; **stabilizability**^{AE}

Stabilisierbarkeit

stabilisation^{BE}; **stabilization**^{AE}

Stabilisierung

stability Stabilität**stability analysis**

Stabilitätsuntersuchung

stability in the sense of**Lyapunov** Ljapunov-Stabilität;

Stabilität im Sinne von Ljapunov

standard control loop

Standardregelkreis

start-up control Anfahrsteuerung;

Anfahrregelung

state Zustand**state control** Zustandsreglung**state controller** Zustandsregler**state differential equation**

Zustandsdifferentialgleichung

state equation Zustandsgleichung**state feedback**

Zustandsrückführung

state observation

Zustandsbeobachtung

state observer Zustandsbeobachter**state space** Zustandsraum**state-transition matrix**

Übergangsmatrix;

Zustandsübergangsmatrix;

Fundamentalmatrix

state variable Zustandsgröße;

Zustandsvariable

state vector Zustandsvektor**static behavior**^{AE}; ~ **behaviour**^{BE}

statisches Verhalten

static friction Haftreibung**static reinforcement** statische

Verstärkung

steady state eingeschwungener

Zustand

steady-state control accuracy

Regelgenauigkeit im

Beharrungszustand

steady-state control error

stationäres Regeldifferenz

steady-state error

Regelabweichung, bleibende

steady-state offset bleibende

Regelabweichung

steady-state response Verhalten

im Beharrungszustand; stationäres

Verhalten

steady-state solution stationäre

Lösung

step control Ablaufsteuerung
step function Sprungfunktion
step response Übergangsfunktion;
 Sprungantwort
stick-slip Ruckgleiten
stick-slip friction
 Stick-slip-Reibung; Reibung beim
 Ruckgleiten
stiction Haftreibung
stiff differential equation steife
 Differentialgleichung
stochastic process Zufallsprozess;
 stochastischer Prozess
stochastic variable stochastische
 Variable
straight-way matrix
 Durchgangsmatrix
strict feedback form strenge
 Rückkopplungsform
strictly positive real streng
 positiv reell
subsidiary control unterlagerte
 Regelung
summation element
 Summationselement,
 Summationspunkt
switch Schalter
system matrix Systemmatrix (A)
system with play Lose

T

Taylor series Taylor-Reihe
test input signal
 Testeingangssignal
three-point controller
 Dreipunktregler
three-step action element
 Dreipunktglied
three-step control
 Dreipunktregelung
three-step switching controller
 Dreipunktregler
three-term controller PID-Regler
time behavior^{AE}; ~ behaviour^{BE}
 Zeitverhalten
time constant Zeitkonstante
time delay Totzeit; Zeitverzögerung

**time-dependent sequential
 control** zeitgeführte
 Ablaufsteuerung
time domain Zeitbereich
time lag Zeitverzögerung
time-invariant system
 zeitinvariantes System
time-optimal zeitoptimal
time-optimal control
 zeitoptimale Regelung
time-varying system
 zeitvariantes System
tracking control Folgeregung;
 Trajektorienfolgeregung
tracking error Folgefehler;
 Nachlauffehler
trajectory Trajektorie
trajectory tracking control
 Trajektorienfolgeregung
transfer element
 Übertragungselement
transfer function
 Übertragungsfunktion
transfer function matrix
 Übertragungsmatrix
transfer lag
 Übertragungsverzögerung
transfer matrix
 Übertragungsmatrix
**transient behavior^{AE}; ~
 behaviour^{BE}** Übergangsverhalten
transient response
 Antwortfunktion im Zeitbereich (auf
 ein vorgegebenes Eingangssignal)
transition matrix
 Übergangsmatrix; Transitionsmatrix
transport lag Totzeit
transport lag element
 Totzeitelement
transpose of a matrix
 Transponierte einer Matrix
**trapezoidal approximation of
 integral** Trapeznäherung für eine
 Integralberechnung
Tsypkin criterion
 Zypkin-Kriterium
tuning factor Einstellfaktor
tuning rules Einstellregeln
Tustin's method Tustin-Formel
two-point controller
 Zweipunktregler

two-position control

Zweipunktregelung

two-position controller

Zweipunktregler

two-step action element

Zweipunktelement

two-step control

Zweipunktregelung

two-step controller

Zweipunktregler

two-term controller PI-Regler**two-valued nonlinearity**

Element mit Zweipunktverhalten

U**uncontrollable system**

nichtsteuerbares System

undamped natural angular frequency Kennkreisfrequenz**underdamped** ($0 \leq D < 1$)

periodisch

underdamped systemPT₂-Element (mit $D < 1$;

Schwingungsfall)

undershoot Unterschwingen**unit circle** Einheitskreis**unit impulse** Einheitsimpuls**unit matrix** Einheitsmatrix**unit-impulse function**

Einheitsimpulsfunktion

unit-impulse response

Einheitsimpulsantwort

unit-ramp function

Einheitsanstiegsfunktion

unit-ramp response

Einheitsanstiegsantwort

unit vector Einheitsvektor**unit-step function**

Einheitssprungfunktion

unit-step response

Übergangsfunktion

unity-feedback control system

Regelungssystem mit direkter

Gegenkopplung (d. h. ohne Regler)

unstable instabil**unstable system** instabiles System**V****variable** Größe**variable command control**

Folgeregelung

variable structure control

strukturvariable Regelung

variation of parameters

Parametervariation

velocity control system

Geschwindigkeitsregelung

velocity (ramp) error

Geschwindigkeitsfehler

viscous friction coefficient

viskoser Reibungskoeffizient

viscous friction viskose Reibung**W****water-level control**

Wasserstandsregelung

weighting function

Gewichtsfunktion

Z**z-plane** z-Ebene**z-transfer function**

z-Übertragungsfunktion

z-transform z-Transformierte**z-transform pair**

z-Transformationspaar

z-transformation z-Transformation**zero** Nullstelle**zero dynamics** Nulldynamik**zero-input response**

Antwortfunktion der homogenen

Zustandsgleichung; Eigenbewegung

zero-order hold element (ZOH)

Halteglied nullter Ordnung

zero-state response

Antwortfunktion der inhomogenen

Zustandsgleichung; erzwungene

Bewegung

A

Daten des Kranreglers

Teilregler $u = -\mathbf{k}_i^T \mathbf{x}$ der in Abschnitt 3.3.3 beschriebenen Kranregelung:

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_1^T &= [1.9245 \quad 16.8960 \quad -67.7493 \quad -120.7999 \quad 0.3651], \\ \mathbf{k}_2^T &= [5.3581 \quad 39.3339 \quad 287.3235 \quad -181.1081 \quad 0.8983], \\ \mathbf{k}_3^T &= [7.4166 \quad 51.0577 \quad 325.7613 \quad -306.2776 \quad 1.1650], \\ \mathbf{k}_4^T &= [11.7940 \quad 72.2878 \quad 138.0207 \quad -535.5579 \quad 1.6982], \\ \mathbf{k}_5^T &= [17.3572 \quad 94.5922 \quad -118.3572 \quad -678.5956 \quad 2.2315], \\ \mathbf{k}_6^T &= [23.9695 \quad 117.0157 \quad -417.4605 \quad -708.2384 \quad 2.7648], \\ \mathbf{k}_7^T &= [31.4013 \quad 138.7914 \quad -730.7397 \quad -602.6913 \quad 3.2980], \\ \mathbf{k}_8^T &= [49.8302 \quad 188.8935 \quad -1005.7853 \quad -405.2965 \quad 4.2313], \\ \mathbf{k}_9^T &= [72.0268 \quad 241.9377 \quad -1118.9194 \quad 54.1054 \quad 5.1645], \\ \mathbf{k}_{10}^T &= [97.0202 \quad 297.4944 \quad -954.7146 \quad 787.7226 \quad 6.0977].\end{aligned}$$

Matrizen $\mathbf{R}_i$ der Ljapunov-Gebiete $G_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \mid \mathbf{x}^T \mathbf{R}_i \mathbf{x} \leq c_i\}$ mit $c_i = 1$:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_1 &= \begin{bmatrix} 4.1107 \cdot 10^{-4} & 3.3656 \cdot 10^{-3} & -4.0166 \cdot 10^{-3} & -2.4248 \cdot 10^{-2} & 6.6442 \cdot 10^{-5} \\ 3.3656 \cdot 10^{-3} & 3.1180 \cdot 10^{-2} & -2.8011 \cdot 10^{-2} & -2.3607 \cdot 10^{-1} & 6.2148 \cdot 10^{-4} \\ -4.0166 \cdot 10^{-3} & -2.8011 \cdot 10^{-2} & 4.1307 \cdot 10^0 & 1.7240 \cdot 10^{-1} & -2.7836 \cdot 10^{-3} \\ -2.4248 \cdot 10^{-2} & -2.3607 \cdot 10^{-1} & 1.7240 \cdot 10^{-1} & 5.4049 \cdot 10^0 & -2.9691 \cdot 10^{-3} \\ 6.6442 \cdot 10^{-5} & 6.2148 \cdot 10^{-4} & -2.7836 \cdot 10^{-3} & -2.9691 \cdot 10^{-3} & 1.4478 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{R}_2 &= \begin{bmatrix} 3.7979 \cdot 10^{-3} & 2.6079 \cdot 10^{-2} & 1.8755 \cdot 10^{-1} & -2.2657 \cdot 10^{-1} & 5.6711 \cdot 10^{-4} \\ 2.6079 \cdot 10^{-2} & 1.8712 \cdot 10^{-1} & 1.2913 & -1.6330 & 4.0165 \cdot 10^{-3} \\ 1.8755 \cdot 10^{-1} & 1.2913 & 2.8190 \cdot 10^1 & -1.1024 \cdot 10^1 & 1.9722 \cdot 10^{-2} \\ -2.2657 \cdot 10^{-1} & -1.6330 & -1.1024 \cdot 10^1 & 3.0710 \cdot 10^1 & -2.7863 \cdot 10^{-2} \\ 5.6711 \cdot 10^{-4} & 4.0165 \cdot 10^{-3} & 1.9722 \cdot 10^{-2} & -2.7863 \cdot 10^{-2} & 9.5314 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_3 &= \begin{bmatrix} 7.0254 \cdot 10^{-3} & 4.5741 \cdot 10^{-2} & 3.1248 \cdot 10^{-1} & -4.1397 \cdot 10^{-1} & 1.0098 \cdot 10^{-3} \\ 4.5741 \cdot 10^{-2} & 3.0763 \cdot 10^{-1} & 2.0342 & -2.7809 & 6.7269 \cdot 10^{-3} \\ 3.1248 \cdot 10^{-1} & 2.0342 & 3.3884 \cdot 10^1 & -1.8433 \cdot 10^1 & 3.6004 \cdot 10^{-2} \\ -4.1397 \cdot 10^{-1} & -2.7809 & -1.8433 \cdot 10^1 & 4.2920 \cdot 10^1 & -5.3480 \cdot 10^{-2} \\ 1.0098 \cdot 10^{-3} & 6.7269 \cdot 10^{-3} & 3.6004 \cdot 10^{-2} & -5.3480 \cdot 10^{-2} & 1.5701 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{R}_4 &= \begin{bmatrix} 1.8355 \cdot 10^{-2} & 1.0811 \cdot 10^{-1} & 4.7125 \cdot 10^{-1} & -9.4012 \cdot 10^{-1} & 2.4504 \cdot 10^{-3} \\ 1.0811 \cdot 10^{-1} & 6.5416 \cdot 10^{-1} & 2.8488 & -5.5883 & 1.4831 \cdot 10^{-2} \\ 4.7125 \cdot 10^{-1} & 2.8488 & 3.8658 \cdot 10^1 & -2.5478 \cdot 10^1 & 5.1777 \cdot 10^{-2} \\ -9.4012 \cdot 10^{-1} & -5.5883 & -2.5478 \cdot 10^1 & 7.2404 \cdot 10^1 & -1.1723 \cdot 10^{-1} \\ 2.4504 \cdot 10^{-3} & 1.4831 \cdot 10^{-2} & 5.1777 \cdot 10^{-2} & -1.1723 \cdot 10^{-1} & 3.5057 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{R}_5 &= \begin{bmatrix} 5.2217 \cdot 10^{-2} & 2.7366 \cdot 10^{-1} & 4.0373 \cdot 10^{-1} & -2.3095 & 6.2049 \cdot 10^{-3} \\ 2.7366 \cdot 10^{-1} & 1.4687 & 2.4757 & -1.2133 \cdot 10^1 & 3.3474 \cdot 10^{-2} \\ 4.0373 \cdot 10^{-1} & 2.4757 & 4.2570 \cdot 10^1 & -2.1409 \cdot 10^1 & 3.7964 \cdot 10^{-2} \\ -2.3095 & -1.2133 \cdot 10^1 & -2.1409 \cdot 10^1 & 1.3541 \cdot 10^2 & -2.6235 \cdot 10^{-1} \\ 6.2049 \cdot 10^{-3} & 3.3474 \cdot 10^{-2} & 3.7964 \cdot 10^{-2} & -2.6235 \cdot 10^{-1} & 7.8876 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{R}_6 &= \begin{bmatrix} 1.1949 \cdot 10^{-1} & 5.6923 \cdot 10^{-1} & -5.1097 \cdot 10^{-1} & -4.2345 & 1.3063 \cdot 10^{-2} \\ 5.6923 \cdot 10^{-1} & 2.7826 & -1.6116 & -2.0252 \cdot 10^1 & 6.4387 \cdot 10^{-2} \\ -5.1097 \cdot 10^{-1} & -1.6116 & 6.7149 \cdot 10^1 & 9.3161 & -6.8998 \cdot 10^{-2} \\ -4.2345 & -2.0252 \cdot 10^1 & 9.3161 & 2.0442 \cdot 10^2 & -4.4193 \cdot 10^{-1} \\ 1.3063 \cdot 10^{-2} & 6.4387 \cdot 10^{-2} & -6.8998 \cdot 10^{-2} & -4.4193 \cdot 10^{-1} & 1.5430 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{R}_7 &= \begin{bmatrix} 2.3786 \cdot 10^{-1} & 1.0378 & -2.8921 & -5.9433 & 2.4280 \cdot 10^{-2} \\ 1.0378 & 4.6715 & -1.1067 \cdot 10^1 & -2.6154 \cdot 10^1 & 1.1058 \cdot 10^{-1} \\ -2.8921 & -1.1067 \cdot 10^1 & 1.5204 \cdot 10^2 & 5.1281 \cdot 10^1 & -3.2462 \cdot 10^{-1} \\ -5.9433 & -2.6154 \cdot 10^1 & 5.1281 \cdot 10^1 & 2.5478 \cdot 10^2 & -5.6212 \cdot 10^{-1} \\ 2.4280 \cdot 10^{-2} & 1.1058 \cdot 10^{-1} & -3.2462 \cdot 10^{-1} & -5.6212 \cdot 10^{-1} & 2.7258 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{R}_8 &= \begin{bmatrix} 5.8841 \cdot 10^{-1} & 2.2140 & -8.4857 & -7.0109 & 4.9746 \cdot 10^{-2} \\ 2.2140 & 8.6981 & -2.9546 \cdot 10^1 & -2.7779 \cdot 10^1 & 1.9994 \cdot 10^{-1} \\ -8.4857 & -2.9546 \cdot 10^1 & 3.2425 \cdot 10^2 & 6.6341 \cdot 10^1 & -7.8731 \cdot 10^{-1} \\ -7.0109 & -2.7779 \cdot 10^1 & 6.6341 \cdot 10^1 & 3.0685 \cdot 10^2 & -5.3622 \cdot 10^{-1} \\ 4.9746 \cdot 10^{-2} & 1.9994 \cdot 10^{-1} & -7.8731 \cdot 10^{-1} & -5.3622 \cdot 10^{-1} & 4.8279 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{R}_9 &= \begin{bmatrix} 1.0563 & 3.5328 & -1.3691 \cdot 10^1 & -2.9545 & 7.6710 \cdot 10^{-2} \\ 3.5328 & 1.2558 \cdot 10^1 & -4.2423 \cdot 10^1 & -1.2953 \cdot 10^1 & 2.8163 \cdot 10^{-1} \\ -1.3691 \cdot 10^1 & -4.2423 \cdot 10^1 & 5.5357 \cdot 10^2 & -1.1448 \cdot 10^1 & -1.1622 \\ -2.9545 & -1.2953 \cdot 10^1 & -1.1448 \cdot 10^1 & 4.6012 \cdot 10^2 & -9.4034 \cdot 10^{-2} \\ 7.6710 \cdot 10^{-2} & 2.8163 \cdot 10^{-1} & -1.1622 & -9.4034 \cdot 10^{-2} & 6.7514 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{R}_{10} &= \begin{bmatrix} 1.6062 & 4.8038 & -1.3282 \cdot 10^1 & 6.2810 & 9.7536 \cdot 10^{-2} \\ 4.8038 & 1.5756 \cdot 10^1 & -3.3740 \cdot 10^1 & 1.2281 \cdot 10^1 & 3.3568 \cdot 10^{-1} \\ -1.3282 \cdot 10^1 & -3.3740 \cdot 10^1 & 9.2668 \cdot 10^2 & -1.0862 \cdot 10^2 & -1.1734 \\ 6.2810 & 1.2281 \cdot 10^1 & -1.0862 \cdot 10^2 & 1.0134 \cdot 10^3 & 6.5813 \cdot 10^{-1} \\ 9.7536 \cdot 10^{-2} & 3.3568 \cdot 10^{-1} & -1.1734 & 6.5813 \cdot 10^{-1} & 7.9645 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

B

Mathematische Zeichen und Funktionen

$\mathbb{R}$	: Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^n$	: der n -dimensionale reelle Zahlenraum
C^k	: Raum der k -mal stetig differenzierbaren (vektoriellen) Funktionen
$T_1 \Leftrightarrow T_2$	: T_1 ist äquivalent zu T_2 .
$a \approx b$	: a ist näherungsweise gleich b .
$a \ll b$	: a ist viel kleiner als b .
$a \gg b$	: a ist viel größer als b .
$x \rightarrow a$	: x strebt gegen a .
j	: imaginäre Einheit $j = \sqrt{-1}$
$\operatorname{Re}\{a + jb\} = a$	: Realteil einer komplexen Zahl
$\operatorname{Im}\{a + jb\} = b$	: Imaginärteil einer komplexen Zahl
$[a, b]$	: geschlossenes Intervall
$[a, b)$ und $(a, b]$	: halboffene Intervalle
(a, b)	: offenes Intervall
$ x $	: Betrag einer Zahl x
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$	: Vektoren sind durch fette Kleinbuchstaben dargestellt.
$\mathbf{a}^T$	: transponierter Vektor zu $\mathbf{a}$
$\dim \mathbf{x}$	: Dimension, d. h. Anzahl der Elemente x_i des Vektors $\mathbf{x}$
$\ \mathbf{x}\ $	: euklidische Norm des Vektors $\mathbf{x}$, entspricht $\ \mathbf{x}\ = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$
$ \mathbf{x} $	: Betrag des Vektors $\mathbf{x}$, identisch mit $\ \mathbf{x}\ $
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	: Kreuzprodukt der Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$	: Matrizen sind durch fette Großbuchstaben dargestellt.
$\mathbf{I}$	: Einheitsmatrix
$\mathbf{A}^{-1}$	: inverse Matrix von $\mathbf{A}$

$\mathbf{A}^T$	: transponierte Matrix zu $\mathbf{A}$
$\text{rang}(\mathbf{A})$	: Rang der Matrix $\mathbf{A}$, Anzahl der linear unabhängigen Spalten von $\mathbf{A}$
$\det(\mathbf{A})$	: Determinante der Matrix $\mathbf{A}$
$\{a, b, c, \dots\}$	: Menge mit den Elementen $a, b, c, \dots$
$a \in M$	: a ist Element der Menge M .
$a \notin M$	: a ist kein Element von M .
$M_1 = M_2$	: Menge M_1 ist identisch mit Menge M_2 .
$M_1 \subset M_2$	: M_1 ist eine echte Teilmenge von M_2 , d. h., es gilt $M_1 \neq M_2$.
$M_1 \subseteq M_2$	: M_1 ist eine Teilmenge von M_2 , $M_1 = M_2$ ist möglich.
$M_1 \setminus M_2$	: M_1 ohne die Menge M_2 , Differenzmenge
$\inf\{M\}$	: Infimum einer Menge M
$\min\{M\}$	: Minimum einer Menge M
$\max\{M\}$	: Maximum einer Menge M
$U(\mathbf{x})$	: Umgebung eines Punktes $\mathbf{x}$. Wenn unmissverständlich ist, welcher Punkt $\mathbf{x}$ gemeint ist, so kann auch nur die Bezeichnung U verwendet werden.
$f^{-1}(z)$	: Umkehrfunktion von $z = f(\mathbf{x})$, also $\mathbf{x} = f^{-1}(z)$
$\min f(x)$	: das Minimum der Funktion f
$\min_i x_i$	: das Minimum der Werte x_i
$\arg \min_i x_i$	: der Index i (Argument), der das minimale x_i kennzeichnet
$\text{sat}(u) = \begin{cases} u_{\max}, & u > u_{\max} \\ u, & u_{\min} \leq u \leq u_{\max} \\ u_{\min}, & u < u_{\min} \end{cases}$	: Sättigungsfunktion
$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$	: Signumfunktion, Vorzeichenfunktion
$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$	: Laplace-Transformierte von $x(t)$
$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$	: Laplace-Rücktransformierte von $X(s)$
$G(s)$	: Laplace-Übertragungsfunktion
$G(z)$	: z-Übertragungsfunktion

$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$: Ableitung der Funktion f nach der Variablen x

$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=a}$ oder $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_a$: Ableitung von f an der Stelle $x = a$

$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$: Ableitung von x nach der Zeit t

$\ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}$: zwei- bzw. dreimalige Ableitung von x nach der Zeit t

$x^{(i)}$: i -te Ableitung von x nach der Zeit t

$\frac{df(\mathbf{x})}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}$: totale, d. h. vollständige Ableitung aller Größen nach t

$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$: partielle Ableitung einer Funktion f mit mehreren Argumenten x_j , d. h. Ableitung nach einem dieser Argumente x_i

$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right]$: Ableitung einer Funktion f nach einem Vektor $\mathbf{x}$

$\text{grad } f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$: Gradient, d. h. Richtungsableitung, einer Funktion f (Der Gradient gibt eine Richtung im Raum an und ist deshalb hier ein Spaltenvektor.)

$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$: Ableitung einer Vektorfunktion $\mathbf{f}$ nach einem Vektor $\mathbf{x}$. Das Ergebnis ist die Jacobi-Matrix.

$L_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x}) = \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$: Lie-Derivierte von h bezüglich $\mathbf{f}$

$L_{\mathbf{f}}^i h(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}} L_{\mathbf{f}}^{i-1} h(\mathbf{x})$: i -te Lie-Derivierte von h bezüglich $\mathbf{f}$

$E\{x(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$: Erwartungswert, d.h. zeitlicher Mittelwert, eines Signals $x(t)$

$\text{cov}\{\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)\}$: Kovarianzmatrix zweier Zeitverläufe $\mathbf{x}_1(t)$ und $\mathbf{x}_2(t)$

Literaturverzeichnis

1. Abel, D., Eppe, U. und Spohr, G.-U. (Hrsg.) (2008): Integration von Advanced Control in der Prozessindustrie. Wiley-VCH.
2. Adamy, J. (1997): Adaptation of Cross-Direction Basis-Weight Control in Paper Machines Using Fuzzy Decision Logic. *International Journal of Approximate Reasoning* 16(1):25–42.
3. Adamy, J. und Flemming, A. (2004): Soft variable-structure controls: a survey. *Automatica* 40(11):1821–1844.
4. Alberto, L. F. C. und Bretas, N. G. (1998): Damping Estimation for Multi-Swing Transient Stability Analysis: the OMIB case. *Proceedings of the IEEE International Conference on Power System Technology (POWERCON'98)* (2):1383–1387, Peking.
5. Allgöwer, F. und Zheng, A. (Hrsg.) (2000): Nonlinear Model Predictive Control, Birkhäuser.
6. Andrievskii, B. R. und Fradkov, A. L. (2003): Control of Chaos: Methods and Applications I. *Methods. Automation and Remote Control* 64(5):673–713.
7. Andrievskii, B. R. und Fradkov, A. L. (2003): Control of Chaos: Methods and Applications II. *Applications. Automation and Remote Control* 65(4):505–533.
8. Apkarian, P. und Adams, R. J. (1998): Advanced Gain-Scheduling Techniques for Uncertain Systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 6(1):21–32.
9. Apollo Program Office - MAO (1969): Apollo 11 [AS-506] Mission. NASA, Mission Operation Report No. M-932-69-11.
10. Athans, M. und Falb, P. L. (1966): Optimal Control, McGraw-Hill.
11. Auernig, J. W. und Troger, H. (1987): Time optimal control of overhead cranes with hoisting of the load. *Automatica* 23(4):437–447.
12. Bacciotti, A. und Rosier, L. (2005): Liapunov Functions and Stability in Control Theory, Springer.
13. Barbashin, E. A. und Krasovskii, N. N. (1952): Über die Stabilität von Bewegungen im Großen (in Russisch). *Doklady Akad. Nauk. SSSR* 86:453–456.
14. Bashein, G. (1971): A Simplex Algorithm for On-Line Computation of Time Optimal Controls. *IEEE Transactions on Automatic Control* 16(5):479–482.
15. Ben-Asher, J., Burns, J. A. und Cliff, E. M. (1992): Time-optimal slewing of flexible spacecraft. *Journal of Guidance, Control and Dynamics* 15(2):360–367.
16. Bertsekas, D. P. (1999): Nonlinear Programming, Athena Scientific.

17. Besançon, G. (Hrsg.) (2007): *Nonlinear Observers and Applications*, Springer.
18. Bhatia, N. P. und Szegő, G. P. (2002): *Stability Theory of Dynamical Systems*, Springer.
19. Biewer, B. (1997): *Fuzzy-Methoden: Praxisrelevante Rechenmodelle und Fuzzy-Programmiersprachen*, Springer.
20. Birk, J. (1992): *Rechnergestützte Analyse und Lösung nichtlinearer Beobachtungsaufgaben*. VDI Fortschritt-Berichte, Reihe 8, Nr. 294, VDI-Verlag.
21. Blümel, R. und Reinhardt, W. P. (2005): *Chaos in Atomic Physics*, Cambridge University Press.
22. Böcker, J., Hartmann, I. und Zwanzig, Ch. (1986): *Nichtlineare und adaptive Regelungssysteme*, Springer.
23. Boltjanski, W. G. (1972): *Mathematische Methoden der optimalen Steuerung*, Carl Hanser Verlag.
24. Borovic, B., Hong, C., Liu, A. Q., Xie, L. und Lewis, F. L. (2004): *Control of a MEMS Optical Switch*. 43rd IEEE Conference on Decision and Control (3):3039–3044, Atlantis.
25. Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. und Balakrishnan, V. (1994): *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM.
26. Brown, C. J. und Ma, J. T. (1968): *Time-Optimal Control of a Moving-Coil Linear Actuator*. IBM Journal of Research and Development 12(5):372–379.
27. Buhl, M., Joos, P. und Lohmann, B. (2008): *Sättigende weiche strukturvariable Regelung*. Automatisierungstechnik 56(6):316–323.
28. Camacho, E. F., Berenguel, M. und Rubio, F. R. (1994): *Application of a gain scheduling generalized predictive controller to a solar power plant*. Control Engineering Practice 2(2):227–238.
29. Camacho, E. F. und Bordons, C. (2007): *Model Predictive Control*, Springer.
30. Consolini, L. und Piazzzi, A. (2006): *Generalized Bang-Bang Control for Feed-forward Constrained Regulation*. 45th IEEE Conference on Decision and Control: 893–898, San Diego.
31. Cragon, S. D. (1991): *Time-Optimal Control Application for an Exoatmospheric Interceptor*. Proceedings of the IEEE Telesystems Conference (1):31–36.
32. Creveling, H. F., De Paz, J. F., Baladi, J. Y. und Schoenhals, R. J. (1975): *Stability characteristics of a single-phase free convection loop*. Journal of Fluid Mechanics 67(1):65–84.
33. DeCarlo, R. A., Zak, S. H. und Matthews, G. P. (1988): *Variable Structure Control of Nonlinear Multivariable Systems: A Tutorial*. Proceedings of the IEEE 76(3):212–232.
34. Devaney, R. L. (2003): *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Westview Press Inc.
35. Dewey, A. G. und Jury, E. I. (1965): *A Note on Aizerman's Conjecture*. IEEE Transactions on Automatic Control 10(4):482–483.
36. Diehl, M., Findeisen, R., Schwarzkopf, S., Uslu, I., Allgöwer, F., Bock, H. G., Gilles, E. D. und Schlöder, J. P. (2002): *An efficient algorithm for nonlinear model predictive control of large-scale systems - Part I: Description of the method*. Automatisierungstechnik 50(12):557–567.
37. Döring, D. (2003): *Ein Beitrag zur Synthese von Gain-Schedulingreglern unter Nutzung normierter Gaußscher Radial-Basisfunktionen*, Dissertation, Universität Magdeburg.
38. Dorf, R. C. und Bishop, R. H. (2007): *Modern Control Systems*, Prentice Hall.

39. Draženović, B. (1969): The invariance conditions in variable structure systems. *Automatica* 5(3):287–295.
40. Driankov, D., Hellendoorn, H. und Reinfrank, M. (1996): An Introduction to Fuzzy Control, Springer.
41. Edwards, C. und Postlethwaite, I. (1998): Anti-windup and bumpless-transfer schemes. *Automatica* 34(2):199–210.
42. Engel, R. (2002): Zustandsbeobachter für Nichtlineare Systeme, Shaker.
43. Engell, S. (Hrsg.) (1995): Entwurf nichtlinearer Regelungen, R. Oldenbourg.
44. Engeln-Müllges, G. und Reutter, F. (1996): Numerik-Algorithmen, VDI-Verlag.
45. Fadden, E. J. und Gilbert, E. G. (1964): Computational Aspects of the Time-Optimal Control Problem. In Balakrishnan, A.V. und Neustadt, L.W. (Hrsg.) (1964): Computing Methods in Optimization Problems: 167–192, Academic Press.
46. Farinwata, S. S., Filev, D. P. und Langari, R. (2000): Fuzzy Control: Synthesis and Analysis, Wiley & Sons.
47. Filippov, A. F. (1988): Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides, Kluwer Academic Publishers.
48. Fitts, R. (1966): Two Counterexamples to Aizerman's Conjecture. *IEEE Transactions on Automatic Control* 11(3):553–556.
49. Föllinger, O. (1993): Lineare Abtastsysteme, R. Oldenbourg.
50. Föllinger, O. (1993): Nichtlineare Regelungen II, R. Oldenbourg.
51. Föllinger, O. (1994): Optimale Regelung und Steuerung, R. Oldenbourg.
52. Föllinger, O. (1998): Nichtlineare Regelungen I, R. Oldenbourg.
53. Föllinger, O. (2008): Regelungstechnik, Hüthig.
54. Franke, D. (1982): Ausschöpfung von Stellgrößenbeschränkungen mittels weicher strukturvariabler Regelung. *Regelungstechnik* 30(10):348–355.
55. Franklin, G. F., Powell, J. D., Emami-Naeini, A. (2002): Feedback Control of Dynamic Systems, Prentice-Hall.
56. Frik, M. (1966): Zeitoptimale Steuerung des Einstellvorganges bei Kreiselkompassen. *Archive of Applied Mechanics* 35(4):262–268.
57. Galor, O. (2007): Discrete Dynamical Systems, Springer.
58. Gao, W. und Hung, J. C. (1993): Variable Structure Control of Nonlinear Systems: A New Approach. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 40(1):45–55.
59. Gauthier, J. P. und Bornard, G. (1981): Observability for any $u(t)$ of a Class of Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 26(4):922–926.
60. Gelb, A. und Vander Velde, W. E. (1968): Multiple-Input Describing Functions and Nonlinear System Design, McGraw-Hill.
61. Germann, S. (1997): Modellbildung und modellgestützte Regelung der Fahrzeuglängsdynamik. VDI Fortschritt-Berichte, Reihe 12, Nr. 309, VDI-Verlag.
62. Ghandhari, M., Andersson, G., Pavella, M. und Ernst, D. (2001): A control strategy for controllable series capacitor in electric power systems. *Automatica* 37(10):1575–1583.
63. Grigorieff, R. D. (1977): Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen 2: Mehrschrittverfahren, Teubner.
64. Gruyitch, L., Richard, J.-P., Borne, P. und Gentina, J.-C. (2004): Stability Domains, Chapman & Hall.

65. Gutman, P.-O. und Hagander, P. (1985): A New Design of Constrained Controllers for Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 30(1):22–33.
66. Hahn, W. (1967): *Stability of Motion*, Springer.
67. Hairer, E. und Wanner, G. (2004): *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Springer.
68. Hangos, K. M., Bokor, J. und Szederkényi, G. (2004): *Analysis and Control of Nonlinear Process Systems*, Springer.
69. Harris, J. (2005): *Fuzzy Logic Applications in Engineering Science*, Springer.
70. Hedrick, J. K. und Misawa, E. A. (1989): Nonlinear Observers – A State-of-the-Art Survey. *Transactions of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 111(3):344–352.
71. Hippe, P. (2006): *Windup in Control*, Springer.
72. Hocking, L. M. (1991): *Optimal Control*, Oxford University Press.
73. Holzmann, H., Germann, S., Halfmann, C. und Isermann, R. (1998): Intelligent fuzzy distance and cruise control for passenger cars. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems* 6(3):315–327.
74. Hooke, R. und Jeeves, T. A. (1961): „Direct Search“ Solution of Numerical and Statistical Problems. *Journal of the Association of Computing Machinery (JACM)* 8(2):212–229.
75. Horn, M und Dourdoumas, N. (2006): *Regelungstechnik*, Pearson.
76. Hu, T. und Lin, Z. (2001): *Control Systems with Actuator Saturation: Analysis and Design*, Birkhäuser.
77. Hu, T. und Lin, Z. (2002): On Improving the Performance with Bounded Continuous Feedback Laws. *IEEE Transactions on Automatic Control* 47(9):1570–1575.
78. Huang, S., Tan, K. K. und Lee, T. H. (2001): *Applied Predictive Control*, Springer.
79. Hughes, P. C. (2004): *Spacecraft Attitude Dynamics*, Wiley & Sons.
80. Hung, J. Y., Gao, W. und Hung, J. C. (1993): Variable Structure Control: A Survey. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 40(1):2–22.
81. Isermann, R. (1988): *Digitale Regelsysteme*, Band 1, Springer.
82. Isermann, R. (1991): *Digitale Regelsysteme*, Band 2, Springer.
83. Isidori, A. (1995): *Nonlinear Control Systems*, Springer.
84. Jin, Y. (2003): *Advanced Fuzzy Systems Design and Applications*, Physica-Verlag.
85. Johansen, T. A., Hunt, K. J. und Petersen, I. (2000): Gain-scheduled control of a solar power plant. *Control Engineering Practice* 8(9):1011–1022.
86. Joshi, S. M. (1989): Out of Control. *IEEE Control Systems Magazine* 9(5):50.
87. Kahlert, J. (1995): *Fuzzy Control für Ingenieure: Analyse, Synthese und Optimierung von Fuzzy-Regelungssystemen*, Vieweg.
88. Kane, T. R., Likins, P. W. und Levinson, D. A. (1983): *Spacecraft Dynamics*, McGraw Hill.
89. Kapila, V. und Grigoriadis, K. M. (2002): *Actuator Saturation Control*, CRC.
90. Kapoor, N. und Daoutidis, P. (2000): Stabilization of nonlinear processes with input constraints. *Computers and Chemical Engineering* 24:9–21.
91. Kaps, P. und Rentrop, P. (1979): Generalized Runge-Kutta methods of order four with stepsize control for stiff ordinary differential equations. *Numerische Mathematik* 33(1):55–68.

92. Karnopp, D. (2001): Motorbetriebenes Servolenksystem, Deutsche Patentschrift DE 4031316C2.
93. Keller, H. (1986): Entwurf nichtlinearer Beobachter mittels Normalformen. VDI Fortschritt-Berichte, Reihe 8, Nr. 124, VDI-Verlag.
94. Khalil, H. K. (2002): Nonlinear Systems, Prentice-Hall.
95. Kiel, L. D. und Elliott, W. E. (Hrsg.) (1997): Chaos Theory in the Social Sciences: Foundations and Applications, University of Michigan Press.
96. Kiendl, H. und Schneider, G. (1972): Synthese nichtlinearer Regler für die Regelstrecke $const/s^2$ aufgrund ineinandergeschachtelter abgeschlossener Gebiete beschränkter Stellgröße. Regelungstechnik und Prozeß-Datenverarbeitung 20(7):289–296.
97. Kiendl, H. (1972): Suboptimale Regler mit abschnittsweise linearer Struktur, Springer.
98. Kirk, D. E. (2004): Optimal Control Theory: An Introduction, Dover Publications.
99. Kothare, M. V., Campo, P. J., Morari, M. und Nett, C. N. (1994): A unified framework for the study of anti-windup designs. Automatica 30(12):1869–1883.
100. Kouvaritakis, B. und Cannon, M. (Hrsg.) (2001): Nonlinear predictive control: theory and practice, Institution of Engineering and Technology.
101. Krämer, W. (2006): Grenzyklen in einem Servolenksystem. Arbeitsberichte der FH Ingolstadt, Nr. 12.
102. Krämer, W. (2007): Vermeidung von Grenzyklen in einem Servolenksystem. In: Mechatronik 2007 - Innovative Produktentwicklung: Maschinenbau, Elektrotechnik, Informationstechnik, VDI-Berichte (2007), Nr. 171, S. 811–818, VDI-Verlag.
103. Krasovskii, N. N. (1952): Sätze zur Stabilität dynamischer Systeme auf der Basis eines Systems mit zwei Gleichungen (in Russisch). Prikladnaia matematika i mekhanika 16(5):547–554.
104. Krause, U. und Nesemann, T. (1999): Differenzengleichungen und diskrete dynamische Systeme, Teubner.
105. Krstić, M., Fontaine, D., Kokotović, P. V. und Paduano, J. D. (1998): Useful Nonlinearities and Global Stabilization of Bifurcations in a Model of Jet Engine Surge and Stall. IEEE Transactions on Automatic Control 43(12):1739–1745.
106. Krstić, M., Kanellakopoulos, I. und Kokotović, P. V. (1995): Nonlinear and Adaptive Control Design, Wiley & Sons.
107. Krstić, M. und Smyshlyaev, A. (2008): Boundary Control of PDEs: A Course on Backstepping Designs, SIAM.
108. Kundur, P. (1994): Power System Stability and Control, McGraw-Hill.
109. Larsen, M. und Kokotović, P. V. (2001): A brief look at the Tsytkin criterion: from analysis to design. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing 15(2):121–128.
110. Lee, Y., Jang, S.-I., Chung, K., Lee, D., Kim, W. und Lee, C.-W. (1994): A Fuzzy-Control Processor for Automatic Focusing. IEEE Transactions on Consumer Electronics 40(2):138–144.
111. Leith, D. J. und Leithead, W. E. (1998): Gain-scheduled controller design: an analytic framework directly incorporating non-equilibrium plant dynamics. International Journal of Control 70(2):249–269.

112. Leith, D. J. und Leithead, W. E. (2000): Survey of gain-scheduling analysis and design. *International Journal of Control* 73(11):1001–1025.
113. Lens, H. und Adamy, J. (2009): Schnelle Regelung von linearen Systemen mit Stellgrößenbeschränkungen, *Automatisierungstechnik* 57(2):70–79.
114. Leonhard, W. (1976): Zeitoptimale Scherenregelung. *Archiv für Elektrotechnik* 58(1):61–67.
115. Li, T.-Y. und Yorke, J. A. (1975): Period Three Implies Chaos. *The American Mathematical Monthly* 82(10):985–992.
116. Liao, X. und Yu, P. (2008): *Absolute Stability of Nonlinear Control Systems*, Springer.
117. Liapounoff, A. M. (1907), Problème générale de la stabilité du mouvement. Übersetzung der Originalarbeit [118] durch É. Davaux. *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse* 9:203–474.
118. Ljapunov, A. M. (1892), Общая задача объ устойчивости движения (Eine allgemeine Aufgabe zur Stabilität einer Bewegung). Dissertation, Universität Charkow.
119. Lyapunov, A. M. (1992), The general problem of the stability of motion. Übersetzung der französischen Version [117] durch A. T. Fuller. *International Journal of Control* 55(3):531–534.
120. Llamas, A., De La Ree Lopez, J., Mili, L., Phadke, A. G. und Thorp, J. S. (1995): Clarifications of the BCU Method for Transient Stability Analysis. *IEEE Transactions on Power Systems* 10(1):210–219.
121. Ludyk, G. (1995): *Theoretische Regelungstechnik 2*, Springer.
122. Luenberger, D. G. (1966): Observers for Multivariable Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 11(2):190–197.
123. Lunze, J. (2008): *Regelungstechnik 1*, Springer.
124. Lunze, J. (2008): *Regelungstechnik 2*, Springer.
125. Maciejowski, J. M. (2002): *Predictive Control with Constraints*, Pearson.
126. Maggiore, M. und Passino, K. M. (2003): A Separation Principle for Non-UCO Systems: The Jet Engine Stall and Surge Example. *IEEE Transactions on Automatic Control* 48(7):1264–1269.
127. Mancilla Aguilar, J. L., García, R. A. und D'Attellis, C. E. (1996): Exact linearization of nonlinear systems: trajectory tracking with bounded controls and state constraints. *International Journal of Control* 65(3):455–467.
128. Margono, B. S. (2004): Optimierung von Bewegungsabläufen mit schwingungsfreien Endpositionen zur Verkürzung der Arbeitszyklen von Container-Schnellumschlaganlagen, Dissertation, Universität Duisburg-Essen.
129. Maurer, G. F. (1995): A Fuzzy Logic Controller for an ABS Braking System. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 3(4):381–388.
130. Mazenc, F., de Queiroz, M. S., Malisoff, M. und Gao, F. (2006): Further Results on Active Magnetic Bearing Control with Input Saturation. *IEEE Transaction on Control Systems Technology* 14(5):914–919.
131. Meditch, J. S. (1964): On the Problem of Optimal Thrust Programming For a Lunar Soft Landing. *IEEE Transactions on Automatic Control* 9(4):477–484.
132. Michels, K., Klawonn, F., Kruse, R. und Nürnberger, A. (2002): *Fuzzy-Regelung: Grundlagen, Entwurf, Analyse*, Springer.
133. Miri, A. M. (2000): *Ausgleichsvorgänge in Elektroenergiesystemen*, Springer.
134. Müller, A., Marsili-Libelli, S., Aivasidis, A., Lloyd, T., Kroner, S. und Wandrey, C. (1997): Fuzzy control of disturbances in a wastewater treatment process. *Water Research* 31(12):3157–3167.

135. Mukhopadhyay, B.K. und Malik, O.P. (1972): Optimal control of synchronous-machine excitation by quasilinearisation techniques. IEE Proceedings - Electric Power Applications 119(1):91–98.
136. Newell, R.B. und Lee, P.L. (1989): Applied Process Control: A Case Study, Prentice Hall.
137. Nijmeijer, H. und van der Schaft, A. (1996): Nonlinear Dynamical Control Systems, Springer.
138. Opitz, H.-P. (1984): Entwurf robuster, strukturvariabler Regelungssysteme mit der Hyperstabilitätstheorie, VDI Fortschritt-Berichte, Reihe 8, Nr. 75.
139. Orloff, R.W. und Harland, D.M. (2006): Apollo, Springer.
140. van Overloop, P.-J., Weijs, S. und Dijkstra, S. (2008): Multiple model predictive control on a drainage canal system. Control Engineering Practice 16(5):531–540.
141. Owusu, K. O., Lewis, F. L., Borovic, B. und Liu, A. Q. (2006): Nonlinear Control of a MEMS Optical Switch. Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control, San Diego, 597–602.
142. Pappas, G. J., Lygeros, J. und Godbole, D.N. (1995): Stabilization and Tracking of Feedback Linearizable Systems under Input Constraints. IEEE Conference on Decision and Control, New Orleans, 596–601.
143. Park, M.-H. und Won, C.-Y. (1991): Time Optimal Control for Induction Motor Servo System. IEEE Transactions on Power Electronics 6(3):514–524.
144. Parks, P. C. und Hahn, V. (1981): Stabilitätstheorie, Springer.
145. Perruquetti, W. und Barbot, J. P. (Hrsg.) (2002): Sliding Mode Control in Engineering, Marcel Dekker Inc.
146. Pliss, V. A. (1958): Bestimmte Probleme in der Theorie der Stabilität dynamischer Systeme im Großen (in Russisch), Leningrad University Press. (Englische Übersetzung: Pliss, V. A. (1965): Certain problems in the theory of stability of motion in the whole, National Aeronautics and Space Administration.)
147. Pólya, G. (1979): Vom Lösen mathematischer Aufgaben, Bd.1, Birkhäuser.
148. Pólya, G. (1983): Vom Lösen mathematischer Aufgaben, Bd.2, Birkhäuser.
149. Popov, V. M. (1959): Criterii de stabilitate pentru sistemele neliniare de reglare automata, bazate pe utilizarea transformatei Laplace. Studii si Cercetari de Energetica 9(1):119–135.
150. Popov, V. M. (1959): Criterii suficiente de stabilitate asimptotica in mare pentru sistemele automate neliniare cu mai multe organe de executie. Studii si Cercetari de Energetica 9(4):647–680.
151. Popov, V. M. (1960): Noi criterii grafice pentru stabilitatea starii stationare a sistemelor automati neliniare. Studii si Cercetari de Energetica 10(3).
152. Popov, V. M. (1961): Absolute Stability of Nonlinear Systems of Automatic Control. Automation and Remote Control 22(8):857–875.
153. Popov, V. M. (1963): The Solution of a New Stability Problem for Controlled Systems. Automation and Remote Control 24(1):1–23.
154. Popov, V. M. (1973): Hyperstability of Control Systems, Springer.
155. Quin, S. J. und Badgwell, T. A. (2003): A survey of industrial model predictive control technology. Control Engineering Practice 11(7):733–764.
156. Rawlings, J. B. (2000): Tutorial Overview of Model Predictive Control. IEEE Control Systems Magazine 20(3):38–52.
157. Rouche, N., Habets, P. und Laloy, M. (1977): Stability Theory by Liapunov's Direct Method, Springer.

158. Rubio, F. R., Camacho, E. F. und Berenguel, M. (2006): Control de Campos de Colectores Solares. *Revista iberoamericana de automática e informática industrial* 3(4):26–45.
159. Rugh, W. J. und Shamma, J. S. (2000): Research on gain scheduling. *Automatica* 36(10):1401–1425.
160. Sabanovic, A., Fridman, L. M. und Spurgeon, S. K. (Hrsg.) (2004): *Variable Structure Systems: From Principles to Implementation*, The Institution of Engineering and Technology (IET).
161. Sastry, S. (1999): *Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control*, Springer.
162. Schulz von Thun, F. (2008): *Miteinander reden 1: Störungen und Klärungen*, Rowohlt.
163. Schwarz, H. (1991): *Nichtlineare Regelungssysteme*, R. Oldenbourg.
164. Schwefel, H.-P. (1977): *Numerische Optimierung von Computer-Modellen mittels der Evolutionsstrategie*, Birkhäuser.
165. Sokaert, P. O. M., Mayne, D. Q. und Rawlings, J. B. (1999): Suboptimal Model Predictive Control (Feasibility Implies Stability). *IEEE Transactions on Automatic Control* 44(3):648–654.
166. Scott, M. (1986): Time/fuel optimal control of constrained linear discrete systems. *Automatica* 22(6):711–715.
167. Sepulchre, R., Janković, M. und Kokotović, P. V. (1996): *Constructive Nonlinear Control*, Springer.
168. Shampine, L. F. und Gordon, M. K. (1984): *Computer-Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen: das Anfangswertproblem*, Vieweg.
169. Singer, J., Wang, Y.-Z. und Bau, H. H. (1991): Controlling a Chaotic System. *Physical Review Letters* 66(9):1123–1125.
170. Sira-Ramirez, H. (1989): Nonlinear Variable Structure Systems in Sliding Mode: The General Case. *IEEE Transactions on Automatic Control* 34(11):1186–1188.
171. Sontag, E. D. (1998): *Mathematical Control Theory*, Springer.
172. Stelzner, P. (1987): *Spatförmige Ljapunov-Funktionen und ihre Anwendungen in der Regelungstechnik*, Dissertation, Universität Dortmund.
173. Stoer, J. und Burlisch, R. (2005): *Numerische Mathematik 2*, Springer.
174. Strogatz, S. H. (2001): *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Westview Press Inc.
175. Strubecker, K. (1984): *Einführung in die höhere Mathematik. Band IV*, R. Oldenbourg.
176. Sun, Y. und Peng, J. (2002): A New Lyapunov Function for Transient Stability Analysis of Power Systems with Emergency Control. *Proceedings of the - IEEE International Conference on Power System Technology (PowerCon 2002)* 3:1540–1544, Kunming.
177. Takagi, H. (1992): Application of neural networks and fuzzy logic to consumer products. *Proceedings of the IEEE International Conference on Industrial Electronics, Control, Instrumentation, and Automation* 3:1629–1633, San Diego.
178. Tan, S.-C., Lai, Y. M., Cheung, M. K. H. und Tse, C. K. (2005): On the Practical Design of a Sliding Mode Voltage Controlled Buck Converter. *IEEE Transactions on Power Electronics* 20(2):425–437.
179. Terano, T., Asai, K. und Sugeno, M. (1994): *Applied Fuzzy Systems*, Academic Press.

180. Thompson, J. M. T. und Bishop, S. R. (Hrsg.) (1994): *Nonlinearity and Chaos in Engineering Dynamics*, Wiley & Sons.
181. Tolle, H. (1975): *Optimization Methods*, Springer.
182. Tolle, H. (1985): *Mehrgrößen-Regelkreissynthese*, Band II: Entwurf im Zustandsraum, R. Oldenbourg.
183. Tracht, R. (1990): Ein Verfahren zur Berechnung von optimalen Steuerfolgen für lineare Abtastsysteme mit konvexen Beschränkungen. *Automatisierungstechnik* 38(4):143–148.
184. Tsiotras, P. und Wilson, B. C. (2003): Zero- and Low- Bias Control Designs for Active Magnetic Bearings. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 11(6):889–904.
185. Tsytkin, Ya. S. (1964): A criterion for absolute stability of automatic pulse systems with monotonic characteristics of the nonlinear element. *Soviet Physics-Doklady* 9(4):262–266.
186. Tsytkin, Ya. S. (1964): Frequency Criteria for the Absolute Stability of Nonlinear Sampled-Data Systems. *Automation and Remote Control* 25(3):261–267.
187. Turner, M. C. und Bates, D. G. (Hrsg.) (2007): *Mathematical Methods for Robust and Nonlinear Control*, Springer.
188. Tyagunov, A. A. (2004): *High-Performance Model Predictive Control for Process Industry*, Dissertation, Technische Universität Eindhoven.
189. Utkin, V. I. (1992): *Sliding Modes in Control and Optimization*, Springer.
190. Verbruggen, H. B. und Babuška, R. (Hrsg.) (1999): *Fuzzy Logic Control: Advances in Applications*, World Scientific.
191. Vidyasagar, M. (2002): *Nonlinear Systems Analysis*, Society for Industrial & Applied Mathematics.
192. Wang, J. und Rugh, W. (1987): Feedback Linearization Families for Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 32(10):935–940.
193. Wang, Y., Singer, J. und Bau, H. H. (1992): Controlling chaos in a thermal convection loop. *Journal of Fluid Mechanics* 237:479–498.
194. Weerasooriya, S., Low, T. S. und Huang, Y. H. (1994): Adaptive Time Optimal Control of a Disk Drive Actuator. *IEEE Transactions on Magnetics* 30(6):4224–4226.
195. Wey, T. (2002): *Nichtlineare Regelungssysteme: Ein differentialalgebraischer Ansatz*, Teubner.
196. Wredenhagen, G. F. und Bélanger, P. R. (1994): Piecewise-linear LQ control for systems with input constraints. *Automatica* 30(3):403–416.
197. Yankulova, D. und Adamy, J. (2008): LMI-Entwurf schneller Regler mit impliziten Ljapunov-Funktionen. *Automatisierungstechnik* 56(12):636–643.
198. Youbin, P., Vrancic, D. und Hanus, R. (1996): Anti-Windup, Bumpless, and Conditioned Transfer Techniques for PID Controllers. *IEEE Control Systems Magazine* 16(4):48–57.
199. Zadeh, L. A. (1965): Fuzzy Sets. *Information and Control* 8(3):338–353.
200. Zeitz, M. (1977): Nichtlineare Beobachter für chemische Reaktoren, VDI Fortschritt-Berichte, Reihe 8, Nr. 27, VDI-Verlag.
201. Zhang, H. und Liu, D. (2006): *Fuzzy Modeling and Fuzzy Control*, Birkhäuser.
202. Zhao, Z.-Y., Tomizuka, M. und Isaka, S. (1993): Fuzzy Gain Scheduling of PID Controllers. *IEEE Transactions on System, Man & Cybernetics* 23(5):1392–1398.

- 203. Zhou, J. und Wen, C. (2008): Adaptive Backstepping Control of Uncertain Systems: Nonsmooth Nonlinearities, Interactions of Time-Variations, Springer.
- 204. Zypkin, Ja. S. (1963): Die absolute Stabilität nichtlinearer Impulsregelsysteme. Regelungstechnik 11(4):145–148, sowie S. 224.

Sachverzeichnis

- ABS-Bremssystem, 278
- Abscheider, 246
- abschnittweise linearer Regler, 147
- Abstandsregelung, 280
- Ackermann-Formel
 - nichtlineare, 183
- Adams-Bashforth
 - Verfahren von, 36, 37
- Adams-Moulton
 - Verfahren von, 37
- Aggregation, **271**, 277, 281
- Aisermans Vermutung, 71
- Akkumulation, **273**, 277, 281
- algebraische Summe, 271
- algebraisches Produkt, 271
- Antiwindup, 115
 - allgemeines, 127
 - für PID-Regler, 117
- Apollo-Mission, 195
- Attraktionsgebiet, 105
- Attraktivität, 12
 - globale, 13
 - lokale, 12
- Ausgangsvektor, 2, 25, 85, 231
- Autofokussteuerung, 278
- Automobil, *siehe* Kraftfahrzeug
- autonomes System, 203, 289, 294
- Autopilot, 4, 161

- Backstepping, **212**, 225
 - einfaches, 215
- Barbashin und Krasovskii
 - Stabilitätssatz von, 99
- Barrierefunktion, 248
- Begrenzungsglied, 45, 46, 54, 57, 115,
123, 147, 155, 178, 204
- Beispiel
 - Abstandsregelung, 280
 - Bioreaktor, 306
 - chemischer Reaktor, 325
 - Containerkran, 151
 - DC-DC-Wandler, 256
 - Doppelpendel, 19
 - Eindampfanlage, 246
 - Entwässerungssystem, 237
 - Flugzeugtriebwerk, 314
 - Fluidsystem, 222
 - Gleichstrommotor, 118
 - Helikopter, 161
 - Kraftwerk, 206
 - Magnetlager, 184
 - Mondlandefähre, 195
 - Mutualismus, 108
 - optischer Schalter, 262
 - Satellit, 6
 - Schiffsregelung, 72
 - Servolenkssystem, 60
 - Solarkraftwerk, 173
 - Synchrongenerator, 292
 - U-Boot, 139
- Beobachtbarkeit, **287**
 - allgemeiner nichtlinearer Systeme,
294
 - autonomer Systeme, 290, 294
 - eingangslinearer Systeme, 297
 - globale, 288, 295

- linearer Systeme, 292
- lokale, 288, 295
- Beobachtbarkeitsmatrix, 292, 295
- Beobachtbarkeitsnormalform, 318, 322
- nichtlineare, 296, 299, 326
- Beobachter, 121
 - Entwurf mittels Linearisierung, **301**, 308, 312
 - für eingangslineare Systeme, 193, 328
 - linearer, 287
 - mit High-gain, **318**, 327
 - reduzierter, 124
 - von Luenberger, **299**, 301, 305, 311, 319
- Beobachterfehler, 301, 311, 320
- Beschleunigungsregelkreis, 281
- Beschreibungsfunktion, 48
- Bimetall, 4, 51, 129
- Bioreaktor, 306
- Braunkohlekraftwerk, 206
- Brunovsky-Normalform, 318, 322, 330
- Byrnes-Isidori-Normalform, 190
- Chaos, **19**, 26, 222
- charakteristisches Polynom, 39, 122, 126, 255, 264, 303, 308, 320
- chemische Prozessindustrie, 165, 227
- COA-Defuzzifizierung, **276**, 282
- Containerkran, 151
- Control-Ljapunov-Funktion, **200**, 210, 212, 215
- COS-Defuzzifizierung, **277**, 281
- Dämpfung, 128, 263
- DC-DC-Wandler, 256
- Defuzzifizierung, **267**, 277, 281
- Delfland, 238
- deterministisch, 19
- Diffeomorphismus, **22**, 181, 188, 299, 326
- Differenzengleichung, 25, 27, 39
- Differenzordnung, **181**, 187, 188, 261, 298, 299, 329, 331
- Doppelpendel, 19
- Dreipunktglied, 46, 53, 266
 - mit Hysterese, 56
- Dual-mode-MPR, 245
- Dual-mode-Regler, 244
- Eigenwertplatzierung, 148
- Eindampfanlage, 246
- eingangsaffines System, *siehe* eingangslineares System
- eingangslineares System, **179**, 203, 212, 299, 328
- Eingangsvektor, 2, 25
- Eingrößensystem, *siehe* SISO-System
- Einschrittverfahren, 33
- Einzugsgebiet, **14**, **105**, 159
 - kreisförmiges, 111
 - maximales, 105
- Elektromagnet, 184
- Energieabschätzung, 82
- Energieversorgungsnetz, 206
- Entwässerungssystem, 237
- Euler'sche Kreiselgleichungen, 7
- Euler-Cauchy
 - implizites Verfahren von, 42
 - verbessertes Verfahren von, 30
 - Verfahren von, **27**, 32, 33, 248
- Everglades, 237
- exakte Linearisierung, **179**, 187, 212, 261, 329
- externe Dynamik, 191
- Faltung, 85
- Fehlerordnung, 30
- Feldbaum
 - Satz von, 128, **130**
- Filippov
 - Methode von, 254
- Flächenschwerpunkt, 276
- Flugregelung, 161, 165, 172
- Flugzeugtriebwerk, 314
- Fluidsystem, 222
- Fourier-Reihe, 47
- freies System, 12, 13, 211
- Fuzzifizierung, **267**, 269, 277
- Fuzzy-Control, **266**, 278
- Fuzzy-Logik, 267
- Fuzzy-Menge, 268
- Fuzzy-Regler, 277, 280, 282
- Fuzzy-System, 277
- Gain-scheduling-Regler, **165**, 175
- Gao und Hung
 - Ansatz von, **253**, 264
- Gasturbine, 314
- Gauß-Funktion, 169, 176, 269

- Gear
 - Verfahren von, 42
- gewichteter Mittelwert, 169, 177
- Gleichstrommotor, 118
- Gleichstromsteller, 256
- gleitender Horizont, 229
- Gleitzustand, **17**, 145, 202, 204, 251, 259, 265
- Gleitzustandsregler, 19, **249**, 257, 262
- Grenzstabilität, **65**, 66, 71, 73
- Grenzzyklus, **15**, 26, **45**, 57, 243
 - eines Servolenksystems, 63
 - instabil, 16, **57**
 - semistabil, 16, **57**
 - stabil, 16, **57**
- Gütefunktion, *siehe* Gütemaß
- Gütemaß, 147, 228, 233, 241
- Gütemaß, 248
- Halbschrittverfahren, 31
- harmonische Balance, **45**, 95
- harmonischer Oszillator, 10, 13, 16
- Helikopter, 161
- Heun
 - Verfahren von, **31**, 33
- High-gain-Beobachter, **318**, 327
 - für eingangslineare Systeme, 328
- hochfrequentes Schalten, 250, 257
- Hooke und Jeeves
 - Optimierungsverfahren von, 248
- Hu und Lin
 - Stabilitätssatz von, 159
- Hurwitz-Sektor, 65, 71, 72
- hyperstabil, 83
- Hyperstabilität, **81**, 95
 - asymptotische, 84, 87
 - globale, 85
 - von MIMO-Systemen, 89
 - von SISO-Systemen, 86
- Hysterese, 4, 51, 56, 129
- Implikation, **272**, 277, 281
- implizite Funktion, 292
 - Hauptsatz über, 189
- implizite Gleichung, 5
- Inferenz, 267, **270**, 274
- Infimum, 200
- instabil, 10
- Instabilitätssatz, 112
- Integrationsverfahren, **27**, 314
 - Stabilität von, 38
- Integrationszeit, 29
- Integrator-Backstepping, *siehe* Backstepping
- interne Dynamik, **188**, 191, 197
- Interpolationsfunktion, 33
- Iterationsgleichung, 25
- Jacobi-Matrix, 22, 189, 291, 292, 298, 308, 313, 324, 331
- Kalman-Filter
 - erweitertes, **310**, 316
 - lineares, 310
- Kalman-Jakubovich-Gleichung, 90
- Kanalsystem, 237
- Karnaugh-Diagramm, 274
- Kennlinie
 - Begrenzungsglied, 46, 54, 62, 115, 123, 147
 - Dreipunktglied, 53
 - Dreipunktglied mit Hysterese, 56
 - Hysterese, 51, 56, 129
 - Lose, 52, 55
 - Polygonzug, 57
 - Potenz, 54
 - Totzone, 54, 117
 - trockene Reibung, 55
 - Vorlast, 53
 - Wurzel, 55
 - Zweipunktglied, 53
- Kläranlage, 278
- Kompressor, 314
- Kondensator, 246
- Konklusion, 271
- Kontrollbeobachter, 121
- Konvergenzordnung, 30
- Koordinatentransformation, **21**, 181, 188, 214, 224, 292, 297, 318, 323, 324, 326, 329, 331
- Kovarianzmatrix, 310, 313, 317
- Kraftfahrzeug, 60, 280
- Kraftwerk, 173, 206
- Kran, 151
- Kreiskriterium, 76
- Lagrange'sche Multiplikatormethode, 148

- Laplace-Übertragungsfunktion, 45
- Lenkrad, 61
- Lenksystem, 60
- Lichtwellenleiter, 262
- Lie-Derivierte, 179, 187, 261, 290, 329
- linear-quadratischer Regler, 147
- lineare Matrixungleichung, 161
- Linearisierungsfamilie
 - parametrierte, **167**, 175
- linguistische Variable, **267**, 278
- linguistischer Wert, **267**, 278, 281
- Lipschitz-Bedingung, 301
- lipschitzstetig, 301
- Ljapunov
 - Funktion, **98**, 110, 200, 212, 219, 221, 242
 - Funktion, quadratische, 101
 - Gebiet, **106**, 112, 148, 153, 244
 - Gebiet, ellipsoides, 156
 - Gebiete, geschachtelt, 149
 - Gleichung, **102**, 148
 - Gleichung, diskrete, 103
 - direkte Methode von, 95
 - erste Methode von, 104
 - indirekte Methode von, 104
 - Methode der ersten Näherung, 104
 - Stabilitätssatz von, 97
 - zweite Methode von, 97
- Logik
 - Boole'sche, 266
 - klassische, 267
- Lorenz-Gleichungen, 224
- Lose, 52, 55
- Lotka-Volterra-Gleichungen, 108
- Luenberger-Beobachter, **299**, 301, 305, 311, 319
 - für nichtlineare Regelkreise, 300
- Magnetlager, 184
- max-Operator, 271, 281
- Maximum-Prinzip, 129
- mechatronisches System, 165
- Mehrgrößensystem, *siehe* MIMO-System
- Mehrschrittverfahren, 36
- mikro-elektro-mechanisches System (MEMS), 262
- MIMO-System, 3, 82, 89, 161, 262
- min-Operator, 271
- modellbasierte prädiktive Regelung, **227**
 - lineare (LMPR), 230
 - mit Beschränkungen, 234
 - mit Dual-Mode, 245
 - nichtlineare (NMPR), 240
 - Stabilität, 241, 245, 248
- Mondlandefähre, 195
- Moore-Greitzer-Gleichungen, 315
- Mutualismus, 108
- NASA, 195
- Nyquist-Kriterium, 59, 78
- Oder-Verknüpfung
 - Boole'sche, 270
 - in der Fuzzy-Logik, 270, 271
- optischer Schalter, 262
- P-Regler, 73, 93, 116, 144, 171
- Papiermaschine, 278
- Parameteroptimierung, 154, 241
- partielle Differenzialgleichung, 190
- PD-Regler, 61, 116
- PI-Regler, 120, 177
 - mit Antiwindup, 120
- PID-Regler, 167
 - mit Antiwindup, 116
- Polarkoordinaten, 111
- Polradwinkel, 207, 292
- Polygonzug, 57, 274, 276
- Pontrjagin
 - Maximum-Prinzip von, 129
- Popov
 - Gerade, 68
 - Kriterium, **65**, 73, 76, 78, 80, 95, 128
 - Ortskurve, 69, 78
 - Sektor, 70
 - Ungleichung, 66
- Popov'sche Integralungleichung, 86
- positiv invariante Menge, 106
- positiv reell, 87, 93
- Potenzkennlinie, 54
- Prädiktionshorizont, **228**, 238, 248
- Prädiktor-Korrektor-Verfahren, 32, **37**
- Prämisse, 270
- Prandtl-Zahl, 224
- Pulsweitenmodulation (PWM), 256
- QP-Verfahren, 236

- quadratische Form, 101, 236
- quadratische Programmierung, 236
- quadratisches Optimierungsproblem, 236
- radial unbeschränkt, **98**, 107
- Räuber-Beute-Beziehung, 108
- Raffinerie, 227
- Rattern, *siehe* hochfrequentes Schalten
- Rauschprozess, 310
- Rayleigh-Zahl, 224
- Regelbasis
 - in Matrixform, 273
 - in Tabellenform, 273
- Regelungsnormalform
 - lineare, 180, 254, 255
 - nichtlineare, 179, 261
- Rekursionsgleichung, 28
- relativer Grad, *siehe* Differenzordnung
- Riccati-Differenzialgleichung, 313
- Riccati-Gleichung, 312
- Robustheit, 19, 249, 252, 255, 265
- Routh-Kriterium, 65
- Rücktransformation, 25, 323
- Rührkesselreaktor, 325
- Ruhelage
 - asymptotisch stabile, **14**, 102, 104, 159, 215, 216, 224, 300, 302
 - eines linearen Systems, 8
 - eines nichtlinearen Systems, 4
 - global asymptotisch stabile, **14**, 64, 85, 98, 200, 201, 203, 300
- Rundungsfehler, 30
- Runge-Kutta-Verfahren, **33**, 241, 314
- Sättigungskennlinie, *siehe* Begrenzungs-glied
- Sättigungsregler, **155**, 162, 301
- Satellit, 6
- Schätzfehler, *siehe* Beobachterfehler
- Schachtelungsbedingung, 150
- Schaltfläche, 252, 254
- Schaltfunktion, 252
- Schaltgerade, 18, 144, 250, 258, 264
- Schaltintervall, 130, 132
- Schaltlinie, 135
- Schedulingvektor, 168
- Schiff, 72, 115, 151
- Schiffsregelung, 72
- Schmitt-Trigger, 51
- schrittoptimale Steuerfolge, 142
- Schrittweite, 28
- Schrittweitenadaptation, -steuerung, **34**
- Scokaert, Mayne und Rawlings
 - Algorithmus von, 244
- Sektor absoluter Stabilität, **65**, 77, 79
- Separationstheorem, 122, 287
- Separatrix, **105**, 108
- Servuantrieb, 118
- Servolenksystem, 60
- Simpson
 - Verfahren von, **31**, 33
- Simulationsfehler, 39
- Singleton, 276, 281
- SISO-System, 3, 86, 129, 179, 318
- Sliding-mode-Regler, *siehe* Gleitzu-standsregler
- Solarkraftwerk, 173
- Sontags Regelgesetz, 203
- Spule, 81, 258
- Stabilität, **9**
 - absolute, **64**, 87
 - asymptotische, **14**, 97, 99, 102, 104, 159, 215, 216
 - der internen Dynamik, 193
 - global asymptotische, **14**, 201, 203, 219
 - globale, 85, 98
 - im Sinne von Ljapunov, **13**, 84, **97**
 - linearer Systeme, 10
 - modellbasierter prädiktiver Regelun-gen, 241, 245
 - von Fuzzy-Regelkreisen, 280
 - von Grenzzyklen, 60
 - von Integrationsverfahren, 38
 - von Regelungen mit Antiwindup, 128
 - von Sättigungsreglern, 159
 - zeitdiskreter Systeme, 26, 103
- Stabilitätssatz
 - von Barbashin und Krasovskii, 99
 - von Hu und Lin, 159
 - von Ljapunov, **97**, **104**, 243
 - von Luenberger, 300
 - von Popov, 66
 - von Zypkin, 78
- Standardregelkreis
 - mit Antiwindup, 124
 - nichtlinearer, 45

- nichtlinearer diskreter, 78
- nichtlinearer zeitvarianter, 76
- steifes System, 41
- Stellgrößenbeschränkung, 115, 117, 120, 121, 147, 152, 155, 188, 194, 235, 238, 247
- Stellhorizont, **228**, 238, 244, 248
- streng positiv reell, 87
- strenge Rückkopplungsform, 212, 225
- strukturumschaltende Regelung, 143
- strukturvariable Regelung, 301
 - mit Gleitzustand, **249**
 - ohne Gleitzustand, 143, **147**
 - weiche, 146
- Synchrongenerator, 207, 292
- System
 - autonomes, 203, 289, 294
 - eingangsaffines, 179
 - eingangslineares, 179, 203, 212, 328
 - freies, 12, 13, 211
 - ökologisches, 108
 - steifes, 41
 - zeitdiskretes, **25**, 78, 103, 142, 227, 230, 238, 241
- Taylor-Reihe, 104, 291, 302
- Temperaturregelung, 3, 129, 175, 266
- Tempomat, 284
- Tiefenregelung, 139
- Totzone, 45, 54, 57, 117
- Transformation, *siehe* Koordinaten-transformation
- trockene Reibung, 55
- Turbofan, 314
- U-Bahn, 278
- U-Boot, 139
- Umkehrfunktion, 22, 181, 189, 290, 324
- Und-Verknüpfung
 - Boole'sche, 270
 - in der Fuzzy-Logik, 270, 271
- Unempfindlichkeitszone, *siehe* Totzone
- Van-der-Pol-Differenzialgleichung, 15
- Verdampfer, 246
- Verfahrensfehler, 30
- virtuelle Stellgröße, 213
- virtueller Regler, 217, 225
- Vorfilter, 121, 124, 183, 191, 198
- Vorlast, 53
- Wachstumskinetik, 306
- Waschmaschinensteuerung, 278
- weiche strukturvariable Regelung, 146
- Windup, **115**
- Wurzelkennlinie, 55
- Wurzelortskurvenverfahren, 65
- Zahnrad, 52
- Zapfluft, 315
- zeitdiskretes System, **25**, 78, 103, 142, 227, 230, 238, 241
- zeitoptimale
 - Ausregelgeschwindigkeit, 151
 - Regelung, **128**, 145
 - Regelung eines U-Bootes, 139
 - Steuerfolge, 130
 - Steuerung, 154, 163
 - Vorsteuerung, 142
- Zellkultur, 306
- Zuckerfabrik, 246
- Zugehörigkeitsfunktion, **268**, 279, 281
- Zugehörigkeitsgrad, 269
- Zustandsgrößenbeschränkung, 235, 238, 247
- Zustandsregler, 121, 122, 124, 287
 - der exakten Linearisierung, 191
 - linearer, 150, 156, 167
 - mit Sättigung, 159
 - nichtlinearer, 316
- Zustandsvektor, 2, 25
- Zweipunktglied, 46, 49, 53, 266
- Zweipunktregler, 17, 49, 128, 266
- Zypkin
 - Kriterium, 78
 - Ortskurve, 80
 - Ungleichung, 80
 - allgemeines Kriterium, 80
 - einfaches Kriterium, 79