

Digitale Regelkreise

Ein einfacher Einstieg mit dem
Programm $\mu LINSY$

F.GAUSCH, A.HOFER und K.SCHLACHER

Institut für Regelungstechnik
Technische Universität Graz

Vorwort

Als in den fünfziger Jahren erstmals Überlegungen angestellt wurden, ob Digitalrechner als Regler eingesetzt werden könnten und welche Vor- und Nachteile dies wohl mit sich brächte, da lag die tatsächliche Verwirklichung dieser Ideen noch in weiter Ferne. Die damals industriell verwendeten Digitalrechner waren Gerätekonfigurationen von Zimmergröße bei der Leistungsfähigkeit heutiger Kleinrechner, und man hatte die Vision, daß bei hinreichender Steigerung der Rechengeschwindigkeit *ein* solcher Rechner gleichzeitig die Aufgaben *sehr vieler* Regler wahrnehmen könnte, was allerdings eine damals geradezu utopische Betriebssicherheit zur Voraussetzung gehabt hätte.

Die Fortschritte auf dem Gebiet der *Halbleitertechnologie* in den vergangenen Jahrzehnten haben diese Situation grundlegend verändert: Der Platzbedarf und die Betriebssicherheit heutiger Rechner unterscheiden sich um Größenordnungen von den leistungsmäßig vergleichbaren frühen Vorfahren und zwar bei gleichzeitigem Preisverfall. Dabei hat dieser Trend aber sein Ende noch gar nicht erreicht.

Jedenfalls gehört heute der Einsatz kleiner Digitalrechner — *Mikrorechner* genannt — zum festen Bestand der gerätetechnischen Möglichkeiten, die bei der Lösung einer vorgelegten Steuerungs- oder Regelungsaufgabe geprüft werden müssen, wobei es durchaus der Fall sein kann, daß in nicht allzu ferner Zukunft die "digitale" Lösung den Normalfall darstellen wird.

Entschließt man sich dazu, einen Mikrorechner als Regler zu verwenden, so ist dies aber nicht bloß eine Alternative zu den herkömmlichen pneumatischen, hydraulischen und elektronischen PID-Reglern, denn diesen wird ihr Übertragungsverhalten durch technische Konstruktion (*hardware*), jenen jedoch durch Programmierung (*software*) aufgeprägt. Regelungstechnisch gesehen bedeutet dies, daß ein und derselbe Mikrorechner durch bloße Änderung seines Programmes zu einem völlig anderen Regler umfunktioniert werden kann.

Man kann getrost behaupten, daß wir derzeit weit davon entfernt sind, die Fülle der sich hiermit bietenden Möglichkeiten auch nur einigermaßen zu überblicken. Während es vor noch nicht allzu langer Zeit so war, daß die Regelungstheorie den wirtschaftlich vertretbaren Realisierungsmöglichkeiten weit voraus eilte, ist es heute eher umgekehrt: Mikrorechner im Regelkreis eröffnen praktisch unbegrenzte Möglichkeiten, die nicht zuletzt aber wegen mangelnder Einsicht nur zum geringen Teil genützt werden können.

Das vorliegende Buch ist aus der Aufsatzreihe "Regelkreise mit Mikrorechnern – Beschreibung, Entwurf und Realisierung" in der Serie "Theorie für den Anwender" der Zeitschrift "Regelungstechnik" bzw. "Automatisierungstechnik" hervorgegangen. Mit ihm wird nun die Absicht verfolgt, Methoden zum Entwurf von Regelkreisen, in denen Mikrorechner als Regler eingesetzt werden, zu vermitteln. Dabei beschränken wir uns vorzugsweise auf *Frequenzbereichsmethoden*, die in enger Anlehnung an Verfahren zur Synthese kontinuierlicher Systeme mit Hilfe von logarithmischen Frequenzkennlinien (Bode-Diagrammen) hergeleitet werden. Im Zuge dieser Abhandlungen wird das Schwergewicht eher auf Anschaulichkeit und Anwendbarkeit als auf mathematische Exaktheit und lückenlose Beweisführung gelegt.

Unumgänglich für die Darstellung von Entwurfsmethoden für digitale Regelungssysteme ist die *mathematische Beschreibung* solcher Systeme. Dazu wird aufbauend auf grundlegenden Kenntnissen aus der konventionellen Regelungstechnik — wie z.B. Laplace-Transformation, Übertragungsfunktion, Frequenzgang — ein mathematisches Rüstzeug entwickelt, das eine Charakterisierung des Übertragungsverhaltens digitaler Systeme sowohl im Frequenzbereich als auch im Zeitbereich erlaubt.

Ausgehend von der Beschreibung von Abtastsystemen durch Differenzgleichungen wird zunächst die z -Transformation als nützliches Hilfsmittel für die weitere Behandlung von Abtastsystemen eingeführt. Damit kann einem Übertragungssystem eine z -Übertragungsfunktion zugeordnet werden; diese Beschreibung bringt große Vorteile bei der Ermittlung des Übertragungsverhaltens zusammengesetzter Systeme sowie bei der Beurteilung von Systemeigenschaften, wie z.B. der Stabilität. Darüber hinaus kann man damit in enger Anlehnung an den kontinuierlichen Fall den Begriff des Frequenzganges für ein Abtastsystem einführen. Allerdings ist es zweckmäßig, für seine grafische Darstellung in der Form logarithmischer Frequenzkennlinien die sogenannte q -Übertragungsfunktion zu verwenden, die sich über eine geeignete bilineare Transformation aus der z -Übertragungsfunktion ergibt.

Die Synthese von Abtastregelkreisen im Frequenzbereich bildet einen Schwerpunkt des Buches. Es werden dazu zwei Methoden behandelt – nämlich das klassische Frequenzkennlinien-Verfahren sowie ein leistungsfähiges Entwurfsverfahren unter Berücksichtigung von Begrenzungen für gewisse Systemgrößen. Das letztgenannte Verfahren wurde von *G. Schneider* erstmals angegeben und von ihm in zahlreichen Beiträgen weiterentwickelt.

Schließlich werden wir uns noch grundsätzlichen Überlegungen zur *programmtechnischen Realisierung* digitaler Regelalgorithmen zuwenden. Dieses

Thema ist naturgemäß eng mit dem gerätetechnischen Aufbau der digitalen Einrichtungen verbunden, sodaß wir uns in diesem Abschnitt mit der maschinenunabhängigen Realisierung des eigentlichen Regelalgorithmus in einer höheren Programmiersprache begnügen.

Nach Ansicht der Autoren kann bei einer zeitgemäßen Beschäftigung mit Aufgabenstellungen aus der Regelungstechnik nicht auf die modernen rechen-technischen Hilfsmittel verzichtet werden. Aus diesem Grund ist dem Buch das Programm $\mu LINSY$ auf einer PC-Diskette beigelegt. Es ist als leicht einsetzbares Werkzeug gedacht, das dem Anwender die oft mühevollen Rechenarbeit wie z.B. die Ermittlung von z - oder q -Übertragungsfunktionen abnimmt, und ihn auch bei grafischen Darstellungen unterstützt. Die Benützung des Programmes $\mu LINSY$ wird im Anhang dieses Buches ausführlich behandelt.

Der Dank der Autoren gilt besonders Herrn Professor Dr. *G. Schneider* und Herrn Professor Dr. *N. Dourdoumas* für ihr Interesse, ihre Kritik und Diskussionsbereitschaft. Für die Mithilfe bei der Erstellung der Druckvorlagen bedanken wir uns bei Frau *V. Apoloner* und Frau *R. Steingasser*. Dem Verlag und den Herausgebern danken wir für die gute Zusammenarbeit.

Graz, im Februar 1991

F. Gausch
A. Hofer
K. Schlacher

Inhaltsverzeichnis

1	Analoger Regelkreis — Digitaler Regelkreis	1
1.1	Grundsätzliches über den Aufbau	1
1.2	Idealisierungen	8
2	Abtastsysteme und Differenzgleichungen	13
2.1	Beispiel	13
2.2	Grundsätzliches über Differenzgleichungen	19
2.3	Numerische Lösung von Differenzgleichungen	24
3	Die z-Transformation	29
3.1	Wozu z-Transformation?	29
3.2	Eine Herleitung der z-Transformation	30
3.3	Beispiel zur z-Transformation	36
3.4	Eigenschaften der z-Transformation	38
3.5	Berechnung der z-Übertragungsfunktion	44
4	Stabilität linearer zeitinvarianter Abtastsysteme	49
4.1	Definition der Stabilität	49
4.2	Stabilitätskriterien	50
4.3	Das Abbauverfahren	57
4.4	Stabilität eines Abtastregelkreises	60
5	Der Frequenzgang eines Abtastsystems	65
5.1	Der Frequenzgang kontinuierlicher Systeme	66
5.2	Übertragung des Begriffes "Frequenzgang" auf Abtastsysteme	67
5.3	Frequenzkennlinien für Abtastsysteme	73
5.4	Der Frequenzgang abgetasteter kontinuierlicher Systeme . . .	77
5.5	Einige Eigenschaften der q-Übertragungsfunktion	80
6	Das Frequenzkennlinienverfahren	83
6.1	Das Syntheseproblem	83
6.2	Kenngrößen des geschlossenen Kreises	85
6.3	Kenngrößen des offenen Kreises	88
6.4	Der Zusammenhang zwischen den Kenngrößen des offenen und des geschlossenen Kreises	90
6.5	Entwurfsbeispiele	92

7	Entwurf von Abtastregelkreisen mit Beschränkungen	107
7.1	Berechnung der Betragsmaxima von Systemgrößen	108
7.2	Festlegung der Aufgabenstellung	115
7.3	Grafische Lösung mit Hilfe von BODE-Diagrammen	116
7.4	Beispiel 1	121
7.5	Erweiterung der Aufgabenstellung	126
7.6	Beispiel 2	128
8	Numerische Berechnung der z- bzw. q-Übertragungsfunktion	135
8.1	Ermittlung der z-Übertragungsfunktion	135
8.2	Bilineare Transformation	141
9	Realisierung digitaler Regler	145
9.1	Vorbemerkungen und Einschränkungen	145
9.2	Realer und idealer Regelkreis	146
9.3	Spezielle Realisierungsformen	149
9.4	Die Programme	154
A	Das Programm $\mu LINSY$	161
A.1	Einleitung und Installationshinweise	161
A.2	Ein erster Streifzug durch das Programm $\mu LINSY$	163
A.3	Objekttypen des Programms $\mu LINSY$	173
A.4	Prinzipielle Arbeitsweise von $\mu LINSY$	181
A.5	Liste der Befehle und Funktionen	188
A.6	$\mu LINSY$ Eingaben für die Entwurfsbeispiele	193
	Literatur	201
	Sachverzeichnis	203

Kapitel 1

Analoger Regelkreis — Digitaler Regelkreis

1.1 Grundsätzliches über den Aufbau

Einen typischen *einschleifigen* analogen Regelkreis zeigt Bild 1.1. Grob formuliert ist die Aufgabe eines solchen Regelkreises, die *Regelstrecke* in geeigneter Weise so zu beeinflussen, daß ihre *Regelgröße* $y(t)$ der gegebenen *Führungsgröße* $r(t)$ möglichst gut folgt, und zudem die unerwünschten Auswirkungen von *Störgrößen* auf die Regelgröße $y(t)$ möglichst gering sind. Zu solchen unerwünschten Auswirkungen sind auch jene zu zählen, die als Folge von *Parametervariationen* – d.h. Änderungen im Übertragungsverhalten der Regelstrecke – entstehen.

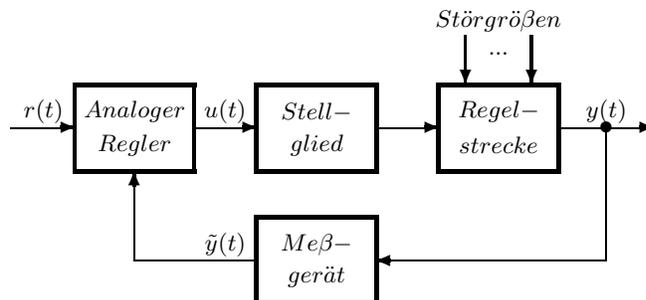


Bild 1.1: Wirkschaltbild eines typischen analogen Regelkreises.

Zur Bewältigung einer solchen regelungstechnischen Aufgabenstellung muß zunächst die Regelgröße $y(t)$ mit einem *Meßgerät im Rückführzweig* gemessen

werden; die Meßgröße $\tilde{y}(t)$ der Regelgröße $y(t)$ wird dann im *analogen Regler* mit der Führungsgröße $r(t)$ verglichen, um daraus in geeigneter Weise eine *Stellgröße* $u(t)$ zu erzeugen*.

Analoger PI-Regler:

Wir wollen an dieser Stelle einmal annehmen, daß diese Aufgabe bei gegebenem Übertragungsverhalten der Regelstrecke, des Stellgliedes und des Meßgerätes mit einem *analogen PI-Regler* zufriedenstellend gelöst werden kann. Das Übertragungsverhalten des PI-Reglers werde durch die Gleichung (1.1) beschrieben.

$$u(t) = P \cdot e(t) + V \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau. \quad (1.1)$$

In Gl.(1.1) ist $u(t)$ die Ausgangsgröße des Reglers, P der Proportionalitätsfaktor und V der Verstärkungsfaktor (die Nachstellzeit T_N dieses PI-Reglers berechnet man mit $T_N = P/V$); für $e(t)$ gelte die Beziehung:

$$e(t) = r(t) - \tilde{y}(t) \quad (1.2)$$

Digitaler PI-Regler:

Wir fragen uns nun, was wir in diesem einfachen Fall tun können, um mit einem Mikrorechner als *digitalem Regler* ein vergleichbares Übertragungsverhalten des Regelkreises zu erzielen. Als erstes müssen wir selbstverständlich in die gerätetechnische Konfiguration Analog-Digital-Wandler (A/D-Wandler) bzw. Digital/Analog-Wandler (D/A-Wandler) an geeigneter Stelle als Koppelgeräte zum Mikrorechner einbauen, wie dies Bild 1.2 zeigt. Dieser Mikrorechner übernimmt nun die Aufgabe eines digitalen Reglers, indem er einen *programmierten Regelalgorithmus* ausführt. Für die Herleitung dieses Regelalgorithmus machen wir uns zunächst einmal klar, daß der Mikrorechner nur zu diskreten Zeitpunkten das Reglerprogramm ausführen kann. Ebenso können die A/D-Wandler ihre Eingangssignale nur zu bestimmten Zeitpunkten abtasten und wandeln. Der Abstand zwischen zwei solchen Zeitpunkten sei die *konstante Abtastperiode* T . Damit können wir die Gleichung

*Die Energie- und Leistungsbereiche, in denen einerseits der Regler und andererseits die Regelstrecke arbeiten, sind im allgemeinen unterschiedlich. Dieser Unterschied wird im Vorwärtszweig durch das Stellglied ausgeglichen und im Rückwärtszweig durch das Meßgerät.

(1.2) nur mehr für diese Zeitpunkte auswerten, und wir schreiben daher*:

$$e(kT) = r(kT) - \tilde{y}(kT) \quad \text{mit } k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

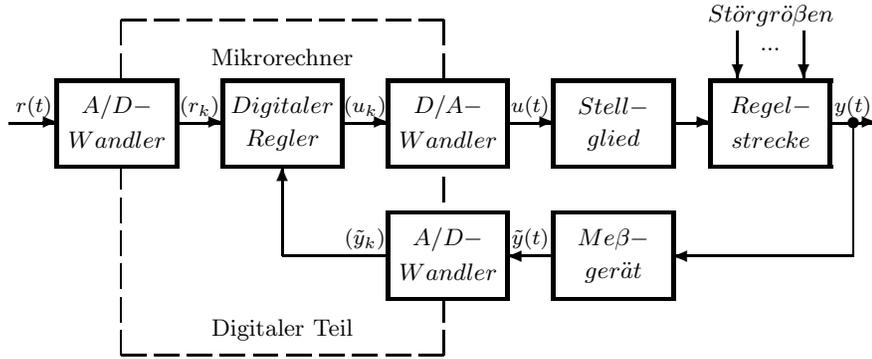


Bild 1.2: Wirkschaltbild eines typischen digitalen Regelkreises (strichliert gezeichnet ist die Trennungslinie zwischen dem digitalen und dem analogen Teil der Konfiguration).

Da wir nunmehr die Größe $e(t)$ nur für die Zeitpunkte $t = kT$ zur Verfügung haben, werden wir sinnvollerweise die Stellgröße $u(t)$ auch nur für diese Zeitpunkte berechnen; setzen wir also in Gl.(1.1) für $t = kT$, so folgt daraus:

$$u(kT) = P \cdot e(kT) + V \cdot \int_0^{kT} e(\tau) d\tau. \quad (1.4)$$

Sehen wir einmal davon ab, daß für die numerische Berechnung des Integrals in Gl.(1.4) noch eine geeignete Approximation anzusetzen wäre, so besagt diese Gleichung folgendes:

Zur Berechnung der Stellgröße u für einen beliebigen Zeitpunkt $t = kT$ müssen zunächst über die A/D-Wandler die Eingangsgrößen r und \tilde{y} für eben diesen Zeitpunkt eingelesen werden; sodann ist die Differenz (nach Gl.(1.3)) dieser beiden Meßwerte zu bilden und das Ergebnis ist mit dem Faktor P zu multiplizieren. Dazu ist aber noch ein Term zu addieren, für dessen Berechnung *alle* bisher eingelesenen Werte herangezogen werden müßten.

*In Gl.(1.1) ist an der unteren Integrationsgrenze zu erkennen, daß wir unsere Betrachtungen zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnen; daher folgt aus $t = kT$ die Zählung $k = 0, 1, 2, \dots$

Dies bedeutet einen erheblichen rechentechnischen Aufwand, der vermeidbar ist, wenn man nur das Ergebnis nach Gl.(1.4) aus dem vorangegangenen Zeitpunkt $t = (k - 1)T$

$$u((k - 1)T) = P \cdot e((k - 1)T) + V \cdot \int_0^{(k-1)T} e(\tau) d\tau \quad (1.5)$$

zur Berechnung von $u(kT)$ heranzieht.

Wir subtrahieren nun Gl.(1.5) von Gl.(1.4), wobei der Integralterm in Gl.(1.4) der Deutlichkeit halber in zwei Anteile aufgespaltet wird:

$$\left. \begin{aligned} u(kT) &= P e(kT) + V \int_0^{(k-1)T} e(\tau) d\tau + V \int_{(k-1)T}^{kT} e(\tau) d\tau \\ u((k-1)T) &= P e((k-1)T) + V \int_0^{(k-1)T} e(\tau) d\tau \end{aligned} \right\} -$$

Die jeweils zweiten Terme in den rechten Seiten der beiden Gleichungen fallen bei der Subtraktion heraus:

$$u(kT) - u((k-1)T) = P e(kT) - P e((k-1)T) + V \int_{(k-1)T}^{kT} e(\tau) d\tau \quad (1.6)$$

Wir werden nun für die numerische Berechnung des Integrals in Gl.(1.6) eine *Approximation* ansetzen: Wenn die Abtastperiode T hinreichend klein gegenüber den Zeitkonstanten des kontinuierlichen Teiles des Regelkreises ist, dürfen wir annehmen, daß $e(t)$ während einer Abtastperiode T näherungsweise konstant bleibt*; wir setzen also im Integrationsintervall $(k - 1)T \leq \tau < kT$ für $e(\tau) = e((k - 1)T)$ und erhalten damit aus Gl.(1.6) zunächst die Beziehung

$$u(kT) = u((k - 1)T) + P e(kT) - P e((k - 1)T) + VT e((k - 1)T) ,$$

*Selbstverständlich setzt diese Betrachtungsweise voraus, daß auch die Änderungsgeschwindigkeit der Führungsgröße $r(t)$ den Trägheiten des zu regelnden Systems angepaßt ist.

und daraus, wenn wir für Ausdrücke der Form $v(iT)$ vereinfacht

$$v_i := v(iT) \quad (1.7)$$

schreiben, den Regelalgorithmus:

$$u_k = u_{k-1} + P e_k + (VT - P) e_{k-1} \quad (1.8)$$

$$\text{mit } e_k = r_k - \tilde{y}_k \quad (1.9)$$

Die Gleichung (1.9) folgt unmittelbar aus Gl.(1.3) unter Verwendung der Schreibweise (1.7).

Somit haben wir mit den Beziehungen (1.8) und (1.9) eine Vorschrift gefunden, wonach aus den zu den Zeitpunkten $t = kT$ eingelesenen Werten der Führungsgröße $r(t)$ und der Meßgröße $\tilde{y}(t)$ die Stellgröße u für den Zeitpunkt $t = kT$ zu berechnen ist. Der so berechnete Stellgrößenwert ist dem D/A-Wandler zu übertragen, der im allgemeinen nach der Wandlung das analoge Signal solange konstant hält, bis ein neuer Wert empfangen wird; das heißt, die Stellgröße $u(t)$ ist eine Treppenfunktion mit der Stufenbreite T .

Im Bild 1.2 sind die im digitalen Teil des Regelkreises auftretenden zeitdiskreten Werte der Führungsgröße, der Meßgröße und der Stellgröße in geklammerten Symbolen geschrieben. In diesem Zusammenhang vereinbaren wir nun nachträglich, daß wir die Gesamtheit der Werte einer *zeitdiskreten Folge* abkürzend mit

$$(f_k) := (f_0, f_1, f_2, f_3, \dots) \quad (1.10)$$

bezeichnen werden.

Digitale Realisierung des PI-Reglers:

Die Gleichung (1.8) ist der *Algorithmus eines diskreten PI-Reglers*, den wir nun in ein vom Rechner ausführbares Programm umsetzen müssen. Dies kann auf verschiedenen Stufen der Programmierung erfolgen. Zum Beispiel ist in [3] die Programmierung eines Regelalgorithmus in einer Assembler-Sprache ausführlich dargestellt. Wir werden hier eine höhere Programmiersprache – nämlich FORTRAN – verwenden, weil an dieser Stelle auf maschinenabhängige Details nicht eingegangen werden soll. Vielmehr wollen wir mit dem Programm nach Bild 1.3 hervorheben, daß die Programmierung

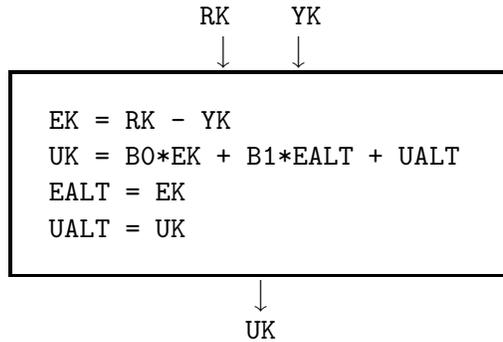


Bild 1.3: Eine Möglichkeit, den diskreten PI-Regler nach den Gln. (1.8) und (1.9) in eine höhere Programmiersprache umzusetzen.

eines diskreten PI-Reglers nach den Gleichungen (1.8) und (1.9) in einer höheren Programmiersprache mühelos durchzuführen ist.

Im Programm nach Bild 1.3 haben die verwendeten Variablen die folgende Bedeutung gemäß den Gln. (1.8) und (1.9):

- RK ... r_k ,
- YK ... \tilde{y}_k ,
- EK ... e_k ,
- UK ... u_k ,
- B0 ... P ,
- B1 ... $VT - P$,
- EALT ... e_{k-1} ,
- UALT ... u_{k-1} .

Das 4-Zeilen-Programm ist sehr leicht zu interpretieren: Die erste Programmzeile ist eine Anweisung, die der Auswertung der Gleichung (1.9) entspricht, während mit der zweiten Zeile die Gleichung (1.8) ausgewertet wird. Mit dieser Anweisung wird also die Stellgröße für den k -ten Abtastschritt berechnet. Dazu brauchen wir nach Gl.(1.8) aber auch noch die Werte von e und u vom vorhergehenden – den $(k - 1)$ -ten – Abtastschritt; diese beiden Werte haben wir uns aber mit den Variablen EALT bzw. UALT

genauso "aufgehoben", wie wir dies mit den Anweisungen in der dritten und vierten Programmzeile für den nächsten Abtastschritt vorbereiten.

Selbstverständlich ist mit dem Programm nach Bild 1.3 der digitale Regler noch nicht einsatzfähig. Dazu müßten wir zumindest noch Anweisungen hinzufügen, die einerseits das Einlesen der Meßwerte von den A/D-Wandlern und das Ausschreiben der berechneten Stellgrößenwerte an den D/A-Wandler ausführen und andererseits dafür Sorge tragen, daß sich dieser Ablauf vom Einlesen über die Berechnung bis zum Ausschreiben periodisch mit der Abtastperiode T wiederholt.

Die programmtechnische Umsetzung solcher Anweisungen kann man aber nicht für einen allgemeinen Fall niederschreiben, da sie in einem hohen Maße maschinenabhängig, d.h. abhängig von der gerade vorliegenden gerätetechnischen Realisierung einschließlich des Rechner-Betriebssystems, sind. Wenn jedoch ein Programm für eine Rechnerkonfiguration einmal geschrieben ist, kann ein und derselbe Mikrorechner durch bloße Änderung *eines* Programmteiles – jenes Teiles, in dem die Stellgröße berechnet wird und dem Bild 1.3 entspricht – zu einem *völlig* anderen Regler umfunktioniert werden. So gesehen schafft man mit dem Einsatz eines Mikrorechners als digitaler Regler nicht *nur eine alternative Realisierung* herkömmlicher z.B. PID-Regler, sondern diese sind aus der Sicht des Übertragungsverhaltens des digitalen Reglers nur mehr *eine* von vielen Möglichkeiten. Der Vielfalt der Regler, die man so mit ein und demselben Mikrorechner realisieren kann, sind aus der *Sicht der Programmierung* keine Grenzen gesetzt: Sie reicht von den linearen Regelalgorithmen über die nichtlinearen bis hin zu Algorithmen, die in analytisch geschlossener Form gar nicht mehr angebar sind. Das zentrale Problem bei der Realisierung analoger Regler, daß nämlich für eine mehr oder weniger bedeutsame Änderung des Übertragungsverhaltens die technische Konstruktion des Reglers geändert werden muß, ist beim Einsatz eines Mikrorechners als digitaler Regler irrelevant; denn diesem wird das Übertragungsverhalten durch *software* aufgeprägt, jenen jedoch durch *hardware*.

In diesem Zusammenhang stellt man sich wohl die Frage, *welches* Programm man für einen konkreten Anwendungsfall nun schreiben soll, bzw. wie findet man zuerst den Regelalgorithmus, der dann so leicht realisierbar ist? Nun ist der Weg, der oben bei der Herleitung des diskreten PI-Algorithmus gegangen wurde, im allgemeinen keinesfalls zielführend. Läßt er doch einzig und allein nur *erwarten*, daß das Übertragungsverhalten des *digital realisierten* Regelkreises genügend genau mit dem Übertragungsverhalten des

analog entworfenen Regelkreises übereinstimmt; daß dies nur bei hinreichend kleiner Abtastperiode erreichbar ist, wurde dort schon angedeutet.

Was wir daher benötigen, sind Verfahren, mit denen man *direkt* diskrete Regelalgorithmen finden kann, die dem digitalen Regelkreis ein gewünschtes Übertragungsverhalten verleihen. Unumgänglich für die Darstellung von Entwurfsmethoden für digitale Regelungssysteme ist die *mathematische Beschreibung* solcher Systeme.

1.2 Idealisierungen

Um eine möglichst einfache, geschlossene Beschreibungsform für zeitdiskrete Übertragungssysteme – oder kurz Abtastsysteme – abzuleiten, wollen wir zunächst *vereinfachende Voraussetzungen* formulieren, die auf einer *ideal gedachten* Arbeitsweise der digitalen Datenerfassung und -verarbeitung fußen. Im vorigen Abschnitt haben wir diese Voraussetzungen stillschweigend als gegeben angenommen.

Idealer A/D-Wandler:

Für einen idealen A/D-Wandler wollen wir eine *verschwindend kleine* Wandlungszeit und eine *unendlich feine* Quantisierung bei der Wandlung jedes analogen Signales voraussetzen. Ein solches Übertragungsglied nennen wir *Abtaster* und verwenden dafür das Symbol nach Bild 1.4.

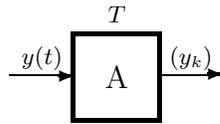


Bild 1.4: Symbol für einen Abtaster (idealer A/D-Wandler), T konstante Abtastperiode.

Ein Abtaster erzeugt also aus einer *zeitkontinuierlichen Funktion* $y(t)$ durch äquidistante Abtastung mit der Abtastperiode T eine *zeitdiskrete Folge* (y_k) nach Bild 1.5, sodaß gilt:

$$y_k = y(kT) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.11)$$

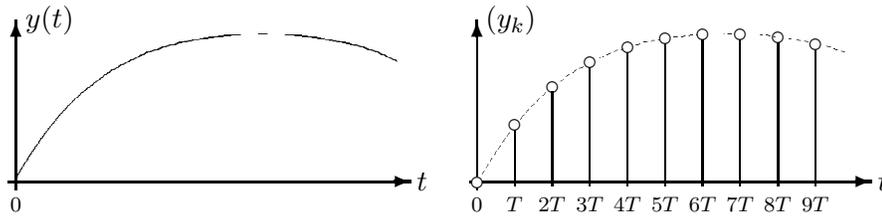


Bild 1.5: Erzeugung einer zeitdiskreten Folge von Werten (y_k) durch Abtastung einer zeitkontinuierlichen Funktion $y(t)$.

Idealer D/A-Wandler:

Auch in diesem Fall wollen wir voraussetzen, daß die Wandlung *verzugszeitfrei* ist, und daß das analoge Signal zu den Wandlungszeitpunkten *jeden* beliebigen Wert annehmen kann. Legen wir zudem fest, daß das analoge Signal zwischen den Abtastzeitpunkten konstant bleibt, sodaß also*

$$u(t) = \hat{u}(t) = u_k \quad \text{für} \quad kT \leq t < (k+1)T \quad (1.12)$$

gilt, so nennen wir ein solches Übertragungsglied *Halteglied*** und verwenden dazu das Symbol nach Bild 1.6.

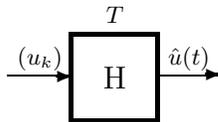


Bild 1.6: Symbol für ein Halteglied nullter Ordnung (idealer D/A-Wandler).

Ein Halteglied erzeugt also aus einer *zeitdiskreten Folge* (u_k) eine *zeitkontinuierliche Treppenfunktion* $\hat{u}(t)$ mit der Stufenbreite T (Bild 1.7).

*Das Symbol $\hat{}$ in Gl.(1.12) soll kennzeichnen, daß es sich bei einer zeitkontinuierlichen Funktion um eine Treppenfunktion handelt.

**Wenn der zeitliche Verlauf des analogen Signales zwischen den Wandlungszeitpunkten durch ein Polynom *k-ter Ordnung* beschrieben wird, so nennen wir das erzeugende Übertragungsglied ein Halteglied *k-ter Ordnung* (siehe z.B. [22]). Wenn wir im Kontext schlicht von Haltegliedern sprechen, so meinen wir solche nullter Ordnung.

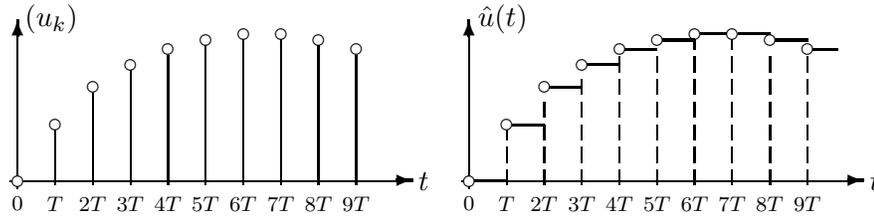


Bild 1.7: Erzeugung einer zeitkontinuierlichen Treppenfunktion $\hat{u}(t)$ aus einer zeitdiskreten Folge (u_k) .

Idealer Rechner:

Für einen idealen Rechner wollen wir eine *verschwindend kleine* Rechenzeit für die Ausführung des programmierten Regelalgorithmus und eine *unendlich feine* Auflösung bei der Berechnung der Stellgrößenwerte voraussetzen.

Die zweite Voraussetzung erlöst uns von der Beschreibung der schwer faßbaren Rundungsfehler, die bei der digitalen Arithmetik mehr oder weniger in Erscheinung treten. Die erste Voraussetzung zusammen mit Voraussetzungen für ideale Wandler erlaubt es uns, das Ausschreiben der berechneten Stellgrößenwerte *zeitgleich* zum Abtasten der Eingangsgrößen zu betrachten.

Auf die in diesem Abschnitt angeführten Voraussetzungen bauen wir nunmehr die mathematische Beschreibung von Abtastsystemen, wobei wir vom Abtastregelkreis nach Bild 1.8 ausgehen.

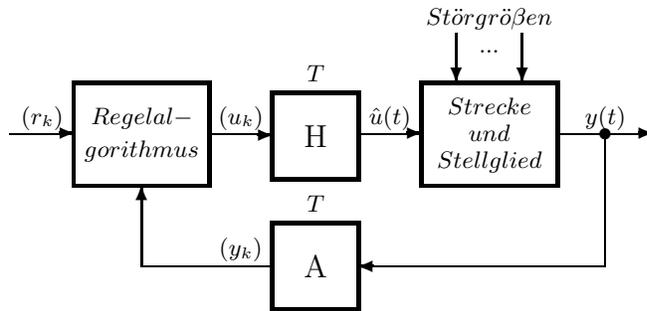


Bild 1.8: Eine typische Konfiguration eines Abtastregelkreises (abgeleitet aus dem digitalen Regelkreis nach Bild 1.2).

Hierin haben wir gegenüber Bild 1.2 zusätzlich die Regelstrecke und das Stellglied zu einem Übertragungssystem zusammengefaßt und die Dynamik des Meßgerätes vernachlässigt. Letzteres dürfen wir in den meisten Fällen, weil im allgemeinen die Regelstrecke in einem höheren Leistungsbereich arbeitet als die Regeleinrichtung und die Dynamik des Meßgerätes im Vergleich zur Dynamik der Regelstrecke in solchen Fällen eine untergeordnete Rolle spielt.

Kapitel 2

Abtastsysteme und Differenzgleichungen

Eine wesentliche Voraussetzung für den Einsatz leistungsfähiger Methoden zum Entwurf von Regelkreisen besteht in der geeigneten Beschreibung des Übertragungsverhaltens der einzelnen Systemkomponenten bzw. des Gesamtsystems. Dabei wird man stets bemüht sein, solche mathematische Modelle zu finden, die mit möglichst geringem Aufwand die wesentlichen Übertragungseigenschaften der gerade vorliegenden physikalischen Systeme hinreichend genau wiedergeben. Ausgehend von den Idealisierungen, die im vorangegangenen Kapitel für den Abtastregelkreis vom Bild 1.8 getroffen wurden, wollen wir uns nun der Frage zuwenden, wie man am zweckmäßigsten Systeme beschreibt, in denen die uns interessierenden Größen teils Funktionen der Zeit teils zeitdiskrete Folgen sind.

2.1 Beispiel

Für die Hintereinanderschaltung eines Haltegliedes (idealer D/A-Wandler) und eines kontinuierlichen Systems, das durch eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten bzw. durch die entsprechende Übertragungsfunktion $G(s)$ charakterisiert werde, soll der Zusammenhang zwischen einer Eingangsfolge (u_k) und der zugehörigen Ausgangsgröße $y(t)$ untersucht werden. Die Abtastperiode dieses Systems, dessen Struktur im Bild 2.1 dargestellt ist, wählen wir zu

$$T = 0,5s ;$$

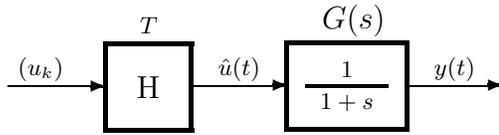


Bild 2.1: Hintereinanderschaltung eines Haltegliedes und eines Verzögerungsgliedes 1. Ordnung.

ferner nehmen wir an, daß die spezielle Eingangsfolge

$$(u_k) = (1, 2, 0, 0, 0, \dots) \quad (2.1)$$

auf das Halteglied einwirkt, wodurch das nachgeschaltete Verzögerungsglied 1. Ordnung mit einer entsprechenden Treppenfunktion $\hat{u}(t)$ angeregt wird. Allgemein kann die Antwort des kontinuierlichen Teilsystems auf die Treppenfunktion $\hat{u}(t)$ mit Hilfe des Faltungsintegrals [14] dargestellt werden

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau) \hat{u}(\tau) d\tau, \quad (2.2)$$

wobei wir voraussetzen, daß sich zum Zeitpunkt $t = 0$ das System in seinem Ruhezustand befunden hat (d.h. insbesondere $y(0) = 0$). In Gl.(2.2) bedeutet $g(t)$ die Gewichtsfunktion oder Impulsantwort des kontinuierlichen Übertragungssystems; sie kann mittels der inversen Laplace-Transformation aus der Übertragungsfunktion $G(s)$ gebildet werden

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}, \quad (2.3)$$

was in unserem einfachen Beispiel auf

$$g(t) = e^{-t} \quad (2.4)$$

führt.

Für die Berechnung von $y(t)$ werden wir uns nun zwei wesentliche Eigenschaften des mathematischen Modells für den kontinuierlichen Teil zunutze machen – nämlich die *Linearität** einerseits und die *Zeitinvarianz*** andererseits. Die Treppenfunktion $\hat{u}(t)$, die durch das Halteglied gebildet wird, kann

*Ein mathematisches Modell wird *linear* genannt, wenn es dem sogenannten *Überlagerungsprinzip* genügt, d.h., daß man die Antwort des Modells auf eine Summe von Eingangsgrößen durch die Summe der Antworten auf die einzelnen Eingangsgrößen bestimmen kann.

**Ein mathematisches Modell wird *zeitinvariant* genannt, wenn es folgende Eigenschaft

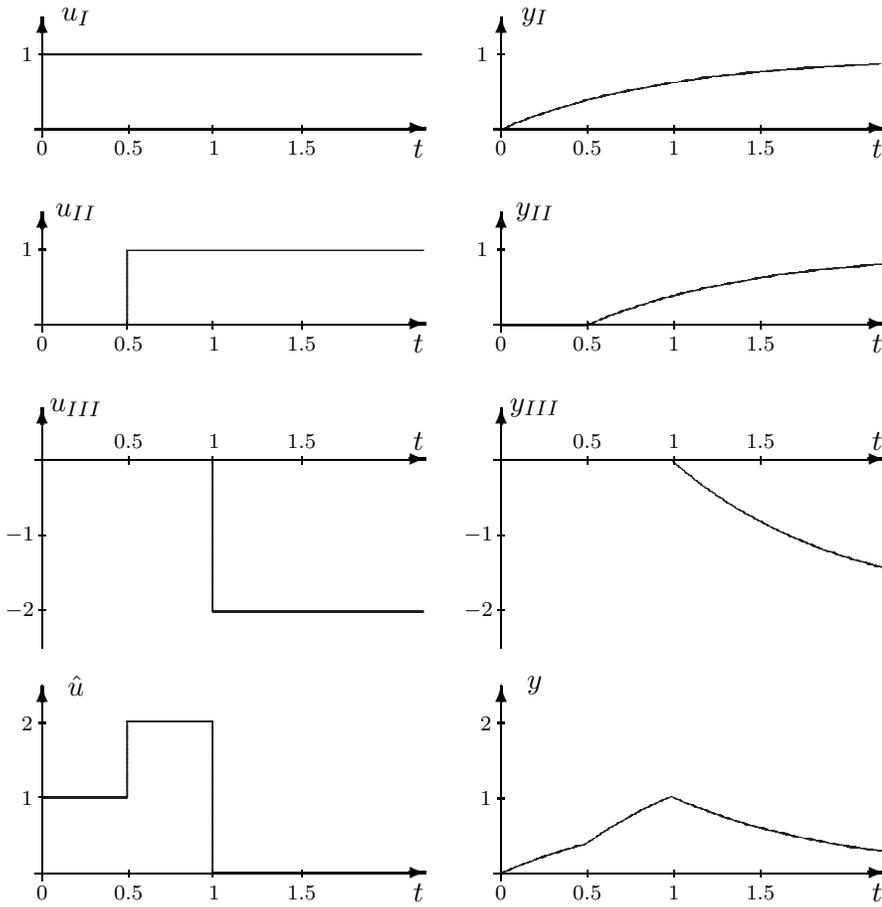


Bild 2.2: Ermittlung der Antwort $y(t)$ durch Überlagerung.

man sich als eine Überlagerung zeitlich versetzter Sprungfunktionen, wie sie auf der linken Seite des Bildes 2.2 dargestellt sind, vorstellen. Aufgrund der Linearität kann die Antwort $y(t)$ durch die Summe der Antworten auf die einzelnen Sprungfunktionen gewonnen werden. Aus den Gln. (2.2) und (2.4) erhält man als Lösung $y(t)$ für den Fall, daß eine Sprungfunktion der

besitzt: Seine Antwort auf die um ein Zeitintervall Δt verschobene Eingangsgröße ist die um das gleiche Zeitintervall Δt verschobene Antwort auf die ursprüngliche Eingangsgröße. Mathematische Modelle in der Form linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten sind jedenfalls zeitinvariant.

Höhe u_s auf das System einwirkt

$$y(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} u_s d\tau = u_s e^{-t} \int_0^t e^{\tau} d\tau = u_s (1 - e^{-t}). \quad (2.5)$$

Da wir es ja außerdem mit einem zeitinvarianten System zu tun haben, können wir für die zeitlich versetzten Sprungfunktionen im Bild (2.2) die entsprechend zeitlich verschobenen Antworten aus (2.5) angeben, sodaß man schließlich nach Überlagerung von $y_I(t)$, $y_{II}(t)$ und $y_{III}(t)$ die Antwort $y(t)$ auf die spezielle Eingangsfolge (2.1) erhält (siehe Bild 2.2 unten).

Daß es im vorliegenden Beispiel relativ einfach war, $y(t)$ wenn auch nur auf graphischem Wege zu bestimmen, lag daran, daß die Eingangsfolge (u_k) nur zwei von Null verschiedene Elemente enthielt. Man kann sich aber leicht ausmalen, welchen Aufwand man zu treiben hätte, wollte man den hier skizzierten Weg auf eine Eingangsfolge mit sehr vielen von Null verschiedenen Elementen übertragen.

Abgesehen von einigen Sonderfällen ist die Berechnung der *kontinuierlichen Zeitfunktion* am Ausgang eines Übertragungssystems mit vorgeschaltetem Halteglied als Antwort auf eine *zeitdiskrete Eingangsfolge* eine Aufgabe, die nur mit erheblichem Aufwand zu lösen ist.

Wir wollen daher nach einem Ausweg suchen und dazu die Frage klären, ob sich nicht dadurch Vereinfachungen in der mathematischen Beschreibung erreichen lassen, daß man nicht den *gesamten Zeitverlauf* der Ausgangsfunktion bestimmt, sondern nur noch deren Werte zu diskreten Zeitpunkten ermittelt. De facto bedeutet dies, daß man sich zur Konfiguration vom Bild 2.1 noch einen Abtaster (idealer A/D-Wandler) am Ausgang hinzugefügt denkt, sofern er nicht ohnehin bereits gerätetechnisch vorhanden ist, wie etwa im Regelkreis vom Bild 1.8. Dabei nehmen wir von vorne weg an, daß das Halteglied und der Abtaster synchron mit derselben Abtastperiode T arbeiten. Für die weitere Abhandlung soll nun nicht mehr die spezielle Eingangsfolge (2.1) sondern eine allgemeine Folge

$$(u_k) = (u_0, u_1, u_2, \dots) \quad (2.6)$$

betrachtet werden. Der Wert der Ausgangsgröße zum Zeitpunkt $t = kT$

kann formal wiederum durch das Faltungsintegral dargestellt werden*

$$y_k = y(kT) = \int_0^{kT} e^{-(kT-\tau)} \hat{u}(\tau) d\tau = e^{-kT} \int_0^{kT} e^{\tau} \hat{u}(\tau) d\tau . \quad (2.7)$$

Wenn man berücksichtigt, daß $\hat{u}(t)$ eine Treppenfunktion ist, so kann die Beziehung (2.7) umgeformt werden.

$$y_k = e^{-kT} \left\{ u_0 \int_0^T e^{\tau} d\tau + u_1 \int_T^{2T} e^{\tau} d\tau + \dots + u_{k-2} \int_{(k-2)T}^{(k-1)T} e^{\tau} d\tau + u_{k-1} \int_{(k-1)T}^{kT} e^{\tau} d\tau \right\} \quad (2.8)$$

Für den Wert der Ausgangsgröße zum vorangegangenen Abtastzeitpunkt gilt entsprechend

$$y_{k-1} = e^{-(k-1)T} \left\{ u_0 \int_0^T e^{\tau} d\tau + u_1 \int_T^{2T} e^{\tau} d\tau + \dots + u_{k-2} \int_{(k-2)T}^{(k-1)T} e^{\tau} d\tau \right\} . \quad (2.9)$$

Wir subtrahieren nun von Gl.(2.8) die mit dem Faktor e^{-T} multiplizierte Gl.(2.9), dabei erhalten wir

$$y_k = e^{-T} y_{k-1} + e^{-kT} u_{k-1} \int_{(k-1)T}^{kT} e^{\tau} d\tau . \quad (2.10)$$

Berechnet man noch das bestimmte Integral auf der rechten Seite von Gl. (2.10), so ergibt sich folgende Beziehung

$$y_k = e^{-T} y_{k-1} + (1 - e^{-T}) u_{k-1} , \quad (2.11)$$

bzw. unter Berücksichtigung des speziellen Wertes der Abtastperiode $T = 0,5s$

$$y_k = 0,606 y_{k-1} + 0,394 u_{k-1} . \quad (2.12)$$

*Wir bedienen uns in den nachfolgenden Ausführungen wiederum der abkürzenden Schreibweise für die Bezeichnung von Funktionswerten zu diskreten Zeitpunkten, wie sie im ersten Kapitel Gl.(1.7) bereits eingeführt wurde.

k	t	u_k	$y_k = 0,606y_{k-1} + 0,394u_{k-1}$	y_k
0	0	1		0
1	0,5	2	$y_1 = 0,606 \cdot 0 + 0,394 \cdot 1$	0,394
2	1	0	$y_2 = 0,606 \cdot 0,394 + 0,394 \cdot 2$	1,027
3	1,5	0	$y_3 = 0,606 \cdot 1,027 + 0,394 \cdot 0$	0,622
4	2	0	$y_4 = 0,606 \cdot 0,622 + 0,394 \cdot 0$	0,377
5	2,5	0	$y_5 = 0,606 \cdot 0,377 + 0,394 \cdot 0$	0,228

Tabelle 2.1: Ermittlung der Folge (y_k) nach Gl.(2.12).

Was wir mit der Gl.(2.12) gefunden haben, ist offensichtlich eine Vorschrift, wie man den Wert der Ausgangsgröße zu jedem beliebigen Abtastzeitpunkt kT – ausgehend von bereits bekannten Werten der Ausgangsgröße und der Eingangsfolge aus dem vorangegangenen Abtastzeitpunkt $t = (k - 1)T$ – bestimmen kann. Erstaunlich ist die Einfachheit dieses Zusammenhanges; man beachte nur, daß ausschließlich elementare Operationen, wie Addition und Multiplikation, zur Auswertung benötigt werden.

Als nächstes soll die Frage beantwortet werden, wie man die Ausgangsfolge (y_k) in unserem Beispiel aufgrund der speziellen Eingangsfolge (2.1) nach der eben gewonnenen Vorschrift bestimmt. Wir wollen dazu die rekursive Auswertung der Gl.(2.12) bei $k = 1$ beginnen und erkennen sofort, daß wir neben dem Eingangsfolgenwert u_0 , der uns ja vorgegeben ist, auch noch Kenntnis über den Wert y_0 besitzen müssen, damit wir y_1 ermitteln können. Der Anfangswert y_0 ist aber aufgrund der Annahme, daß das System aus seinem Ruhezustand heraus angeregt wird, ebenfalls vorgegeben mit

$$y_0 = 0 .$$

In der Tabelle 2.1 ist nun die Berechnung der Folge (y_k) für die ersten 6 Abtastschritte dargestellt.

Zusammenfassend kann man also feststellen, daß der Verzicht auf die Beschreibung des Zusammenhanges zwischen einer zeitdiskreten Eingangsfolge und einer kontinuierlichen Ausgangsfunktion eines Übertragungssystems und der Übergang zu einer Beschreibung, in der nur noch zeitdiskrete Folgen betrachtet werden, eine wesentliche Vereinfachung mit sich bringt. Der Preis, der dafür bezahlt werden muß, besteht darin, daß der Verlauf der Ausgangsfunktion *zwischen* den Abtastzeitpunkten nicht mehr unmittelbar zur Verfügung steht. Dieser Umstand kann jedoch durch eine geeignete Wahl der Abtastperiode sehr leicht entschärft werden.

2.2 Grundsätzliches über Differenzgleichungen

Eine mathematische Beschreibung des Zusammenhanges von Folgen, wie wir sie in der Gl. (2.12) oder bereits im ersten Kapitel für den diskreten PI-Regler (Gl.(1.8)) vorliegen haben, wird *Differenzgleichung** bezeichnet. Schon diese beiden Beispiele zeigen deutlich, wozu wir Differenzgleichungen im Zusammenhang mit der Behandlung von Abtastsystemen verwenden werden. Einerseits werden wir sie zur Formulierung von Regelalgorithmen, die dann in einem Mikrorechner ablaufen sollen, heranziehen, andererseits bieten sie eine einfache Möglichkeit, das Verhalten realer Systeme zu diskreten Zeitpunkten zu beschreiben.

Der zweite Punkt fordert geradezu einen Vergleich zwischen Differentialgleichungen und Differenzgleichungen heraus. Differentialgleichungen, die ja die Grundlage zur Beschreibung kontinuierlicher Systeme bilden, bereiten

*Diese Namensgebung hat historische Gründe. Ursprünglich hat man nämlich Gleichungen dieser Art in enger Anlehnung an Differentialgleichungen mit Hilfe der sogenannten *Vorwärtsdifferenz* einer Folge (f_k)

$$\Delta f_k := f_{k+1} - f_k$$

oder der *Rückwärtsdifferenz*

$$\nabla f_k := f_k - f_{k-1}$$

dargestellt. Zum Beispiel würde Gl.(2.12) unter Verwendung der Vorwärtsdifferenz lauten

$$\Delta y_k + 0.394y_k = 0.394u_k .$$

bei ihrer Lösung im allgemeinen erhebliche Probleme, ja in vielen Fällen ist es überhaupt nicht möglich, eine geschlossene Lösung anzugeben und man muß sich mit numerischen Näherungslösungen zufrieden geben. Nur für eine Untermenge der möglichen Differentialgleichungen, nämlich die Menge der linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, ist es im allgemeinen möglich, eine geschlossene Lösung anzugeben, weshalb gerade diese mit Vorliebe zur Modellbildung herangezogen wird. Wesentlich anders hingegen liegt der Sachverhalt bei den Differenzgleichungen. Ihre Lösung ist im Vergleich zur Lösung von Differentialgleichungen einfach, denn *Differenzgleichungen liefern ihre eigene Lösungsvorschrift bereits mit*. An dieser Stelle soll vermerkt werden, daß es sich bei den Differenzgleichungen, die wir im Rahmen dieses Buches betrachten werden, ausschließlich um lineare Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten handeln wird.

Als nächstes soll nun festgelegt werden, was unter dem Begriff der *Ordnung* einer Differenzgleichung verstanden werden soll. Dazu betrachte man einmal nur die *Indizes* einer Differenzgleichung und bilde alle möglichen Indexdifferenzen; die *größte vorkommende Indexdifferenz* bestimmt dann die Ordnung der Differenzgleichung. Die beiden Differenzgleichungen, die wir bisher behandelt haben, Gl.(1.8) bzw. Gl.(2.12), waren demnach von erster Ordnung. Wir haben bei dieser Definition stillschweigend vorausgesetzt, daß wir mit Differenzgleichungen nur *kausale* Systeme beschreiben, das sind solche, bei denen einfach ausgedrückt die Wirkung niemals vor der Ursache eintreten kann. Dies soll an einem kleinen Beispiel näher erläutert werden. Wir betrachten ein Übertragungssystem (Bild 2.3) mit einer Eingangsfolge (u_k) und einer Ausgangsfolge (y_k) , dessen Übertragungseigenschaften durch folgende Differenzgleichung charakterisiert werde

$$y_k = a_1 y_{k-1} + b u_{k+1} . \quad (2.13)$$

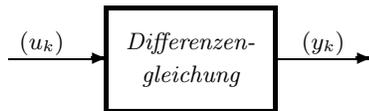


Bild 2.3: Zeitdiskretes Übertragungssystem.

Offensichtlich wird dadurch ein nichtkausales System beschrieben, denn der Wert der Ausgangsfolge zu einem beliebigen Zeitpunkt $t = kT$ hängt nach Gl. (2.13) auch von einem noch in der Zukunft liegenden Wert der Eingangsfolge ab. Wir gelangen so leicht zur Einsicht, daß bei kausalen Differenzgleichungen die bei der unabhängigen Variablen (=Eingangsfolge)

auftretenden Indizes niemals größer sein können als die Indizes bei der abhängigen Variablen (=Ausgangsfolge) und zwar für beliebige Werte von k . Im einleitenden Beispiel dieses Kapitels wurde für die Hintereinanderschaltung eines Haltegliedes eines Verzögerungsgliedes 1. Ordnung und eines Abtasters eine Differenzengleichung hergeleitet, die das Übertragungsverhalten dieser Anordnung zu den Abtastzeitpunkten wiedergibt. Dabei hat sich herausgestellt, daß analog zur Beschreibung des kontinuierlichen Teilsystems durch eine *lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten* die Beschreibung des zugehörigen Abtastsystems eine *lineare Differenzgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten* ist. Man wird sich nun fragen, ob diese Analogie auch dann erhalten bleibt, wenn es sich nicht mehr nur um ein Verzögerungsglied 1. Ordnung sondern um ein kontinuierliches System handelt, dessen Eingangs-Ausgangsverhalten durch eine lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung

$$\begin{aligned} y^{(n)} + \alpha_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + \alpha_1\dot{y} + \alpha_0y &= \\ &= \beta_0u + \beta_1\dot{u} + \dots + \beta_nu^{(n)} \end{aligned} \quad (2.14)$$

angegeben wird. Daß die Eigenschaft der Linearität tatsächlich erhalten bleibt, möge die folgende Plausibilitätsbetrachtung verdeutlichen.

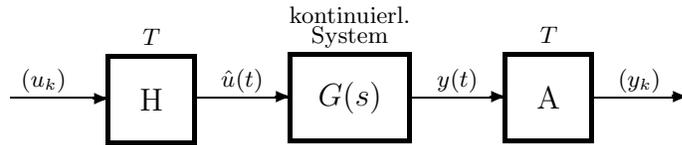


Bild 2.4: Strukturbild eines einfachen Abtastsystems.

Ausgehend von der Differentialgleichung n -ter Ordnung bestimme man die zugehörige Übertragungsfunktion $G(s)$ (s.Bild 2.4), wobei wir vereinfachend annehmen, daß der Koeffizient β_n in Gl.(2.14) Null sei, so daß der Grad des Zählerpolynoms von $G(s)$ kleiner als der Grad des Nennerpolynoms ist. Außerdem nehmen wir an, daß das Nennerpolynom nur einfache Nullstellen besitzt, was uns gestattet, eine einfache Partialbruchentwicklung (siehe Fußnote auf Seite 37) für die Übertragungsfunktion anzugeben.

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{\beta_0 + \beta_1s + \dots + \beta_{n-1}s^{n-1}}{\alpha_0 + \alpha_1s + \dots + \alpha_{n-1}s^{n-1} + s^n} = \\ &= \frac{k_1}{s + c_1} + \frac{k_2}{s + c_2} + \dots + \frac{k_n}{s + c_n} \end{aligned} \quad (2.15)$$

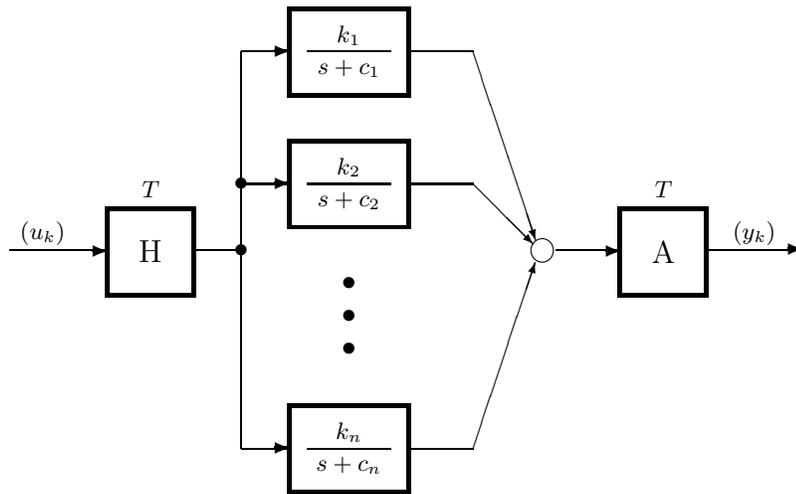


Bild 2.5: Parallelschaltung von n Verzögerungsgliedern 1. Ordnung.

Sind nun alle Nullstellen des Nenners reell, so entspricht dieser Partialbruchentwicklung im Strukturbild 2.5 die Parallelschaltung von n Verzögerungsgliedern 1. Ordnung, sofern kein c_i verschwindet. Denkt man sich jetzt einerseits das Halteglied über die Verzweigungsstelle nach rechts und andererseits den Abtaster über die Summierstelle nach links in die einzelnen Zweige der Parallelschaltung verschoben, so entsteht eine Parallelschaltung von n Abtastsystemen. Dabei ist jedes für sich eine Verallgemeinerung des Typs, der im einleitenden Beispiel abgehandelt wurde und wird gewiß durch eine lineare Differenzgleichung 1. Ordnung beschrieben.

Für die Parallelschaltung zweier Differenzgleichungen lassen sich nun folgende Relationen angeben

$$y_k = y_{1,k} + y_{2,k} \quad (2.16)$$

$$y_{1,k} + a_1 y_{1,k-1} = b_1 u_{k-1} \quad (2.17)$$

$$y_{2,k} + a_2 y_{2,k-1} = b_2 u_{k-1} . \quad (2.18)$$

Im $(k - 1)$ -ten Abtastschritt muß demnach gelten

$$y_{k-1} = y_{1,k-1} + y_{2,k-1} \quad (2.19)$$

$$y_{1,k-1} + a_1 y_{1,k-2} = b_1 u_{k-2} \quad (2.20)$$

$$y_{2,k-1} + a_2 y_{2,k-2} = b_2 u_{k-2} \quad (2.21)$$

bzw. für den Abtastschritt davor

$$y_{k-2} = y_{1,k-2} + y_{2,k-2} . \quad (2.22)$$

Eliminiert man nun aus diesen sieben Gleichungen (Gl.(2.16) bis Gl.(2.22)) die sechs Größen

$$y_{1,k} , y_{1,k-1} , y_{1,k-2} , y_{2,k} , y_{2,k-1} , y_{2,k-2}$$

so erhält man eine *lineare* Beziehung zwischen

$$y_k , y_{k-1} , y_{k-2} , u_{k-1} , u_{k-2} .$$

Wird diese Vorgangsweise auf die Parallelschaltung von n linearen Differenzgleichungen übertragen, so ist leicht einzusehen, daß man wieder eine lineare Differenzgleichung zwischen der Eingangsfolge (u_k) und der Ausgangsfolge (y_k) erhält.

Für die *Ordnung* n gilt eine Übereinstimmung im allgemeinen auch, doch lassen sich Sonderfälle angeben, bei denen die Ordnung der Differenzgleichung niedriger ist als die Ordnung der zugrundeliegenden Differentialgleichung [7]. Zusammenfassend stellen wir fest: Wird der kontinuierliche Teil im Bild 2.4 durch die Differentialgleichung (2.14) charakterisiert, so kann das entsprechende Abtastsystem durch die folgende Differenzgleichung beschrieben werden

$$\begin{aligned} y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \dots + a_n y_{k-n} = \\ = b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \dots + b_n u_{k-n} . \end{aligned} \quad (2.23)$$

2.3 Numerische Lösung von Differenzgleichungen

Die Auswertung von Differenzgleichungen stellt eine Aufgabe dar, die geradezu den Einsatz eines Digitalrechners herausfordert. Es soll daher im folgenden Abschnitt ein Programm präsentiert werden, mit dessen Hilfe lineare Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten gelöst werden können. Auch in diesem Beispiel bedienen wir uns wiederum der Programmiersprache FORTRAN. Bei der Programmerstellung wurden keinerlei Anstrengungen unternommen, eine besonders rechenzeit- oder speicherplatzsparende Realisierung zu finden, vielmehr wurde Wert darauf gelegt, daß die einzelnen Anweisungen leicht nachvollziehbar und interpretierbar sind.

FORTRAN - Programm zur Lösung einer Differenzgleichung:

Korrespondenzen zur Differenzgleichung (2.23)

N $\hat{=}$ n (Ordnung)
K $\hat{=}$ k (laufender Index)
KEND $\hat{=}$ Index des letzten Abtastzeitpunktes der Berechnung

Y(0)	$\hat{=}$	y_k	U(0)	$\hat{=}$	u_k
Y(1)	$\hat{=}$	y_{k-1}	U(1)	$\hat{=}$	u_{k-1}
\vdots			\vdots		
Y(N)	$\hat{=}$	y_{k-n}	U(N)	$\hat{=}$	u_{k-n}
			B(0)	$\hat{=}$	b_0
A(1)	$\hat{=}$	a_1	B(1)	$\hat{=}$	b_1
\vdots			\vdots		
A(N)	$\hat{=}$	a_n	B(N)	$\hat{=}$	b_n

Bei der Erstellung des folgenden Programmes (Bild 2.6) wurde davon ausgegangen, daß die Ordnung n den Wert 50 nicht überschreitet und daß aus dem Ruhezustand heraus gestartet wird, andernfalls müßte der Initialisierungsteil bzw. der Vereinbarungsteil entsprechend abgeändert werden. Die Ermittlung der Eingangsfolge (u_k) wird mit Hilfe der FUNCTION UK (K) durchgeführt. (Es wurde an dieser Stelle bereits der Programm-Code zur Erzeugung einer speziellen Eingangsfolge für das Zahlenbeispiel am Ende des Kapitels angegeben.)

```

PROGRAM DIFFZ
C=====
      INTEGER I,K,KEND,N
      REAL A(0:50),B(0:50),U(0:50),Y(0:50),SUMME,UK
C-----
      READ (5,*) N
      READ (5,*) (A(I),I=1,N)
      READ (5,*) (B(I),I=0,N)
      READ (5,*) KEND
C-----
      DO 5 I=0,N
          U(I) = 0.0
          Y(I) = 0.0
5      CONTINUE
      K = 0
C-----
10     CONTINUE
          U(0) = UK(K)
          SUMME = 0.0
          DO 20 I=1,N
              SUMME = SUMME - A(I)*Y(I)
20     CONTINUE
          DO 30 I=0,N
              SUMME = SUMME + B(I)*U(I)
30     CONTINUE
          Y(0) = SUMME
          WRITE (6,*) K,U(0),Y(0)
C-----
          DO 40 I=N,1,-1
              Y(I) = Y(I-1)
              U(I) = U(I-1)
40     CONTINUE
C-----
          K = K + 1
          IF (K.LE.KEND) GOTO 10
          STOP
          END
C
C=====
C
      REAL FUNCTION UK (K)
C
      UK = 2.0*SIGN( 1.0 , COS(0.3927*K) )
      RETURN
      END

```

Bild 2.6: FORTRAN - Programm zur Lösung von Differenzgleichungen.

Abschließend wollen wir noch die Lösung einer Differenzgleichung mit Hilfe dieses Programmes am Beispiel der Gl.(2.12) demonstrieren. Als Eingangsfolge (u_k) wählen wir

$$u_k = 2\text{sgn}(\cos(0,3927k)) \quad (2.24)$$

und berechnen die zugehörige Ausgangsfolge (y_k) bis zum Index $k = 40$.

Die dazu erforderlichen Eingabedaten lauten:

1		n
-0.606		a_1
0, 0.394		b_0, b_1
40		<i>KEND</i>

k	u_k	y_k
0	2.00000	.000000
1	2.00000	.788000
2	2.00000	1.26553
3	2.00000	1.55491
4	-2.00000	1.73028
5	-2.00000	.260547
6	-2.00000	-.630109
7	-2.00000	-1.16985
8	-2.00000	-1.49693
9	-2.00000	-1.69514
10	-2.00000	-1.81525
11	-2.00000	-1.88804
12	2.00000	-1.93215
13	2.00000	-.382886
14	2.00000	.555971
15	2.00000	1.12492
16	2.00000	1.46970
17	2.00000	1.67864
18	2.00000	1.80525
19	2.00000	1.88198

Tabelle 2.2. Zahlenwerte der Eingangs- und der Ausgangsfolge.

Im Bild 2.7 sind nun die Verläufe der Eingangsfolge (u_k) und der Ausgangsfolge (y_k) dargestellt. Für Vergleichszwecke wurde noch die Tabelle 2.2 mit den entsprechenden Zahlenwerten der ersten 20 Abtastschritte hinzugefügt.

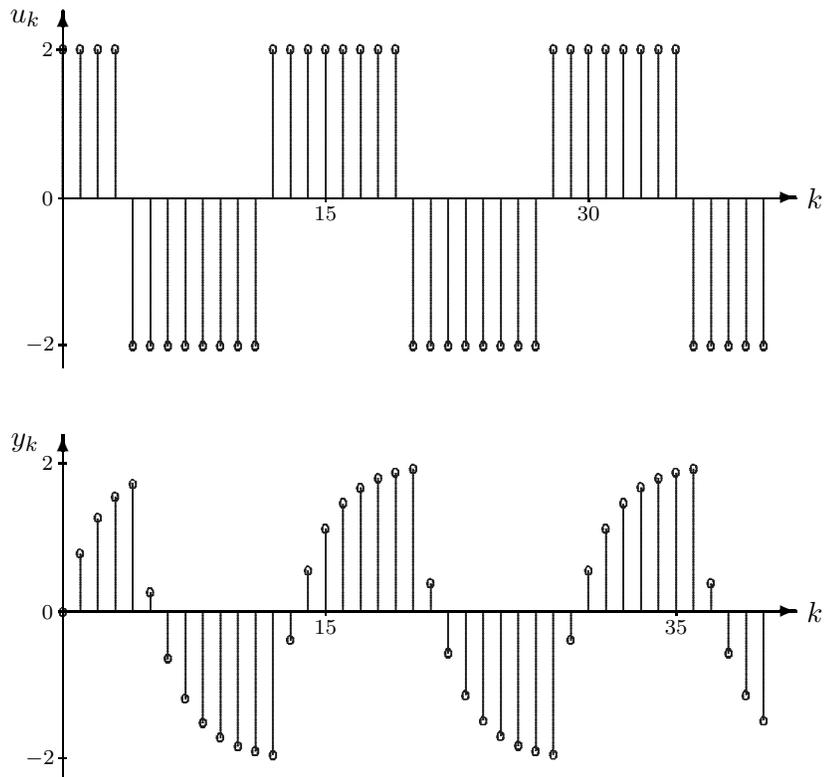


Bild 2.7: Zeitlicher Verlauf der Eingangs- und der Ausgangsgröße.

Kapitel 3

Die z -Transformation

Zur Beschreibung linearer zeitinvarianter kontinuierlicher Systeme steht das mächtige Hilfsmittel der Laplace-Transformation zur Verfügung. Beim Übergang von kontinuierlichen Systemen zu Abtastsystemen gehen lineare zeitinvariante Differentialgleichungen in lineare zeitinvariante Differenzgleichungen über. Damit kommt aber den Differenzgleichungen bei Abtastsystemen die Bedeutung der Differentialgleichungen bei zeitkontinuierlichen Systemen zu. In diesem Kapitel wird die z -Transformation vorgestellt, eine Methode zur Ermittlung der geschlossenen Lösung linearer zeitinvarianter Differenzgleichungen, die ähnlich der Laplace-Transformation handzuhaben ist. Obwohl Differenzgleichungen auch einfach auf iterative Weise zu lösen sind, gestattet die iterative Weise doch im wesentlichen nur den Schluß von den vorhergehenden Werten auf die unmittelbar nachfolgenden. Beim Entwurf von Abtastsystemen ist es jedoch wünschenswert, die Lösung in ihrer Gesamtheit beurteilen zu können.

3.1 Wozu z -Transformation?

Hier sei ein kleiner Rückblick auf die Laplace-Transformation gestattet. Drei Eigenschaften sind es vornehmlich, die sie zur Beschreibung dynamischer Systeme so attraktiv machen. Die erste Eigenschaft ist die Rückführung des Faltungsintegrals im Zeitbereich auf die Multiplikation zweier Funktionen

im Bildbereich. Dem Integral*

$$g(t) = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau$$

entspricht die Operation

$$g(s) = f_1(s) f_2(s) .$$

Die zweite Eigenschaft besteht in der engen Beziehung zwischen einer Differentialgleichung

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \frac{d^i}{dt^i} y(t) = \sum_{i=0}^n \beta_i \frac{d^i}{dt^i} u(t)$$

und der zugehörigen Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^n \beta_i s^i}{\sum_{i=0}^n \alpha_i s^i} .$$

Die dritte Eigenschaft ist die Möglichkeit, mit Hilfe von Übertragungsfunktionen die Zusammenschaltung "einfacher" Systeme zu "komplexen" Systemen auf elementare, algebraische Operationen zurückzuführen.

Es ist nun wünschenswert, ähnliche Möglichkeiten für Abtastsysteme bereitzustellen. Der Leser sei hier an den Abschnitt 2.2 erinnert, wo die Parallelschaltung zweier Systeme angedeutet wird, die durch Differenzgleichungen erster Ordnung beschrieben werden. Vergleicht man den dortigen Rechenaufwand mit dem entsprechenden im zeitkontinuierlichen Fall, wo lediglich zwei Übertragungsfunktionen zu addieren sind, wird deutlich, welche Bedeutung einer adäquaten Beschreibung zukommt.

3.2 Eine Herleitung der z -Transformation

Bild 3.1 zeigt die typische Struktur eines Abtastsystems mit einer Eingangsgröße (u_k) und einer Ausgangsgröße (y_k).

*Mit $g(t)$ und $g(s)$ sind selbstverständlich verschiedene Funktionen gemeint. Dies gilt auch analog für $f_1(t)$, $f_1(s)$ und $f_2(t)$, $f_2(s)$. (Siehe hierzu Abschnitt 3.4)

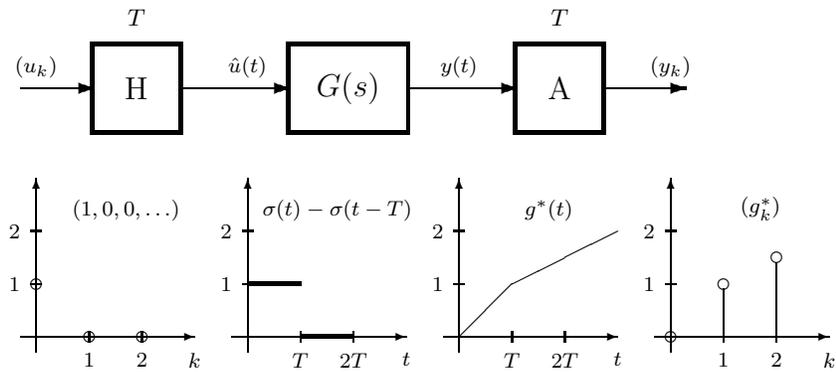


Bild 3.1: Abtastsystem und Gewichtsfolge.

Das lineare zeitinvariante und zeitkontinuierliche Teilsystem mit der Übertragungsfunktion $G(s)$ befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhe. Wir wählen nun die spezielle Eingangsfolge

$$(u_k) = (1, 0, 0, 0, \dots) .$$

Das Halteglied erzeugt aus dieser Folge die Zeitfunktion

$$\hat{u}(t) = \sigma(t) - \sigma(t - T) ,$$

wobei $\sigma(t)$ die Einheitssprungfunktion

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

bezeichnet.* Die *Sprungantwort* des zeitkontinuierlichen Systems, also die Antwort auf die Eingangsfunktion $\sigma(t)$, bezeichnen wir mit $h(t)$. Die Antwort auf die spezielle Funktion $\hat{u}(t)$ wird hiermit

$$y(t) = h(t) - h(t - T) =: g^*(t) ,$$

die wir im folgenden mit $g^*(t)$ abkürzen.

Aufgrund der Linearität ist die Antwort des zeitkontinuierlichen Systems auf die Eingangsfolge

$$(u_k) = (u_0, 0, 0, \dots)$$

durch

$$y(t) = g^*(t) u_0$$

*Im folgenden setzen wir von jeder Funktion $f(t)$ voraus, daß $f(t) = 0$ für $t < 0$ gilt.

gegeben, und wegen der Zeitinvarianz ist die Antwort auf die Eingangsfolge

$$(u_k) = (0, 1, 0, 0, \dots)$$

einfach

$$y(t) = g^*(t - T) .$$

Zur Berechnung der Antwort auf die Folge

$$(u_k) = (u_0, u_1, u_2, \dots)$$

kombinieren wir beide Eigenschaften und erhalten so

$$y(t) = g^*(t) u_0 + g^*(t - T) u_1 + g^*(t - 2T) u_2 + \dots . \quad (3.1)$$

Beschränken wir uns in Gl.(3.1) auf die Abtastzeitpunkte $t = kT$, $k = 0, 1, 2, \dots$, so erhält man wegen $g^*(t) = 0$ für $t < 0$

$$\begin{aligned} y(kT) = y_k &= g^*(kT)u_0 + g^*(kT - T)u_1 + \dots + g^*(kT - kT)u_k = \\ &= g^*(kT)u_0 + g^*((k - 1)T)u_1 + \dots + g^*(0)u_k = \\ &= g_k^*u_0 + g_{k-1}^*u_1 + \dots + g_0^*u_k \end{aligned}$$

oder

$$y_k = \sum_{j=0}^k g_{k-j}^* u_j \quad (3.2)$$

mit

$$g_k^* = g^*(kT) \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Gl.(3.2) nennen wir analog zum Faltungsintegral *Faltungssumme*. Die Bedeutung der Folgen (u_k) und (y_k) ist offensichtlich, neu ist jedoch die Folge (g_k^*) . Nach unseren Überlegungen erhält man sie, indem man an den Eingang des kontinuierlichen Systems einen Impuls der Höhe Eins und der Länge T anlegt und die zugehörige Antwort $g^*(t)$ abtastet. In Anlehnung an die Gewichtsfunktion nennen wir diese Folge *Gewichtsfolge*.

Berechnen wir die Werte von y_k für $k = 0, 1, 2, \dots$, so ergibt sich folgendes Rechenschema:

$$\begin{aligned} y_0 &= g_0^* u_0 \\ y_1 &= g_1^* u_0 + g_0^* u_1 \\ y_2 &= g_2^* u_0 + g_1^* u_1 + g_0^* u_2 \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \end{aligned} \quad (3.3)$$

Die Art der Indexrechnung fällt hier besonders auf. Zur Berechnung des k -ten Elementes der Ausgangsfolge (y_k) ist die Summe über alle Produkte $g_i^* u_j$ zu bilden, wobei für die Indizes $i + j = k$ gilt. Genau diese Art der Indexrechnung findet man aber auch bei der Multiplikation zweier Potenzreihen. Bei der Berechnung der Produktreihe

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots) = \\ = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots$$

tritt bei jedem Koeffizienten genau diese Operation auf. Wir nutzen diese Eigenschaften aus, um die Berechnung der Faltungssumme analog zum zeitkontinuierlichen Fall mit Hilfe des Produktes zweier "neuer" Funktionen zu vereinfachen. Hierzu multiplizieren wir die erste Gleichung des Schemas (3.3) mit 1 (oder x^0), die zweite Gleichung mit x , die dritte Gleichung mit x^2 , und so fort, und bilden ihre Summe:

$$\begin{array}{rcl} y_0 & = & g_0^* u_0 \quad | \cdot 1 \\ y_1 & = & g_1^* u_0 + g_0^* u_1 \quad | \cdot x \\ y_2 & = & g_2^* u_0 + g_1^* u_1 + g_0^* u_2 \quad | \cdot x^2 \\ \hline (y_0 + y_1x + & & \\ + y_2x^2 + \dots) & = & g_0^* u_0 + (g_1^* u_0 + g_0^* u_1)x + \\ & & + (g_2^* u_0 + g_1^* u_1 + g_0^* u_2)x^2 + \dots \\ & = & (g_0^* + g_1^* x + g_2^* x^2 + \dots) \cdot \\ & & \cdot (u_0 + u_1x + u_2x^2 + \dots) . \end{array}$$

Ordnen wir jetzt den Folgen (y_k) , (g_k^*) und (u_k) die Potenzreihen $\sum_{i=0}^{\infty} y_i x^i$, $\sum_{i=0}^{\infty} g_i^* x^i$ bzw. $\sum_{i=0}^{\infty} u_i x^i$ zu, so können wir die Faltungssumme als Produkt zweier Potenzreihen darstellen. Diese Eigenschaft ist genau das Analogon zum Faltungssatz der Laplace-Transformation. Aus historischen Gründen werden nicht Potenzreihen mit positiven, sondern solche mit negativen Potenzen verwendet. D.h. wir werden im folgenden die Variable x durch die neue Variable z^{-1} ersetzen. Damit treffen wir folgende eindeutige Zuordnung:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} y_i z^{-i} &= y(z) \longleftrightarrow (y_k) , \\ \sum_{i=0}^{\infty} g_i^* z^{-i} &= g^*(z) \longleftrightarrow (g_k^*) , \\ \sum_{i=0}^{\infty} u_i z^{-i} &= u(z) \longleftrightarrow (u_k) . \end{aligned}$$

Mit $y(z)$, $g^*(z)$, bzw. $u(z)$ kürzen wir die entsprechenden Potenzreihen ab (selbstverständlich sind mit $y(z)$ und y_k , etc. verschiedene Funktionen gemeint) und erhalten die gewünschte Entsprechung für die Faltungssumme

$$(y_k) = \left(\sum_{j=0}^k g_{k-j}^* u_j \right) \longleftrightarrow y(z) = g^*(z)u(z). \quad (3.4)$$

Wir gelangen so zur *Definition der z -Transformierten* einer Folge (f_k)

$$f(z) = \mathcal{Z}\{(f_k)\} = \sum_{i=0}^{\infty} f_i z^{-i}, \quad (3.5)$$

d.h., wir ordnen einer Folge (f_k) durch die Zuordnungsvorschrift \mathcal{Z} in eindeutiger Weise die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} f_i z^{-i}$ zu. Diese Zuordnung nennen wir *z -Transformation*, die Funktion $f(z)$ nennen wir *z -Transformierte* der Folge (f_k) , und als Definitionsbereich für die Variable z wählen wir die Menge der komplexen Zahlen*.

Noch scheint durch diese Vorgangsweise nicht viel gewonnen, denn der Rechenaufwand ist der gleiche, ob man nun mit Folgen oder Potenzreihen rechnet. Gelingt es jedoch, die Potenzreihen $g^*(z)$ und $u(z)$ in Gl.(3.4) durch "einfache" Ausdrücke zu ersetzen, so muß man nur eine Multiplikation ausführen und anschließend das Produkt als Reihe darstellen. Hierbei kann nun die Rechenersparnis enorm sein.

Um Gl.(3.2) zu lösen, benötigen wir nun drei Schritte. Im ersten Schritt transformieren wir die Folgen (g_k^*) und (u_k) in den z -Bereich:

$$g^*(z) = \mathcal{Z}\{(g_k^*)\}, \quad u(z) = \mathcal{Z}\{(u_k)\}.$$

Im zweiten Schritt führen wir die Multiplikation aus:

$$y(z) = g^*(z)u(z).$$

Im dritten Schritt entwickeln wir $y(z)$ in eine Reihe und lesen an den Koeffizienten dieser Reihe die Werte y_k der Folge (y_k) ab. Für das Rückübersetzen

*Durch diese Definition ist noch nicht die Existenz einer Funktion $f(z)$ gesichert, da nicht für jede Folge die angegebene Potenzreihe konvergiert. Genügt jedoch die Folge (f_k) der Bedingung

$$|f_k| \leq Aa^k, \quad A, a > 0$$

so ist die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} f_i z^{-i}$ in einem Gebiet $|z| > a$ der komplexen Ebene gesichert, und $f(z)$ ist eine analytische Funktion.

einer Funktion $f(z)$ aus dem z -Bereich in den Folgenbereich, also für die zu \mathcal{Z} inverse Abbildung, schreiben wir

$$(y_k) = \mathcal{Z}^{-1}\{y(z)\} .$$

Mit Hilfe der Beziehung (3.4) können wir aber auch sofort den Begriff der Übertragungsfunktion auf Abtastsysteme übertragen. Analog zum kontinuierlichen Fall verstehen wir unter der z -Übertragungsfunktion eines linearen zeitinvarianten Abtastsystems mit einer Eingangsgröße (u_k) und einer Ausgangsgröße (y_k) die (von der speziellen Wahl der Eingangsgröße unabhängige) Funktion

$$G^*(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{\mathcal{Z}\{(y_k)\}}{\mathcal{Z}\{(u_k)\}} , \quad (3.6)$$

also den Quotienten aus der z -Transformierten der Ausgangsfolge zur z -Transformierten der Eingangsfolge, wobei das System aus der Ruhelage angeregt wird. Mit der angegebenen Bezeichnungsweise übernehmen wir eine Konvention, wie wir sie von der Laplace-Transformation kennen. Mit kleinen Buchstaben bezeichnen wir Funktionen von z , die Folgen entsprechen, mit großen Buchstaben bezeichnen wir Übertragungsfunktionen. Wegen dieser Vereinbarung lautet die Beziehung nach Gl.(3.4) nun

$$y(z) = G^*(z)u(z) \quad \text{und} \quad G^*(z) = \mathcal{Z}\{(g_k^*)\} .$$

Wir wollen die bisherigen Ergebnisse zusammenfassen: Im kontinuierlichen Fall beschreibt das Faltungintegral (siehe Gl.2.2) das Übertragungsverhalten, an seine Stelle tritt bei Abtastsystemen die Faltungssumme (3.2); an die Stelle der Gewichtsfunktion eines kontinuierlichen Systems (2.3) tritt die Gewichtsfolge, statt mit der Laplace-Transformation rechnen wir mit der z -Transformation, und mit Übertragungsfunktionen können wir operieren wie bisher. Damit sind aber unsere Anforderungen an eine Beschreibungsweise für Abtastsysteme prinzipiell erfüllt, und wir können darangehen, die z -Transformation weiter auszubauen. Ehe wir dies tun, soll ein kleines Beispiel den bisherigen Gedankengang verdeutlichen.

3.3 Beispiel zur z -Transformation

Wir betrachten nochmals das Beispiel 2.1 aus dem vorigen Kapitel. Die Übertragungsfunktion des kontinuierlichen Systems lautet

$$G(s) = \frac{1}{1+s},$$

die Abtastperiode bezeichnen wir ganz allgemein mit T . Wir wollen die Übertragungsfunktion $G^*(z)$ und mit deren Hilfe die Antwort des Abtastsystems auf die spezielle Eingangsfolge

$$(u_k) = (1, 1, 1, \dots)$$

berechnen. Dabei werden wir ausschließlich die bisher entwickelten Hilfsmittel verwenden. D.h. insbesondere, daß die z -Übertragungsfunktion durch z -Transformation der Gewichtsfolge zu bestimmen ist. Sobald uns die Methoden der Abschnitte 3.4 und 3.5 zur Verfügung stehen, kann die Berechnung noch wesentlich vereinfacht werden.

Zur Berechnung der z -Übertragungsfunktion $G^*(z)$ benötigen wir die Gewichtsfolge $g(t)$, die Sprungantwort $h(t)$ und die Gewichtsfolge (g_k^*) :

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^t g(\tau) d\tau = \int_0^t e^{-\tau} d\tau = (1 - e^{-t})\sigma(t) \\ g^*(t) &= h(t) - h(t - T) \\ &= (1 - e^{-t})\sigma(t) - (1 - e^{-(t-T)})\sigma(t - T) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} g^*(0) &= 0 & &= 0 \\ g^*(T) &= (1 - e^{-T}) & &= e^{-T}(e^T - 1), \\ g^*(2T) &= (1 - e^{-2T}) - (1 - e^{-T}) & &= e^{-2T}(e^T - 1), \\ g^*(3T) &= (1 - e^{-3T}) - (1 - e^{-2T}) & &= e^{-3T}(e^T - 1) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} g_0^* &= 0 \\ g_k^* &= e^{-kT}(e^T - 1), \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Bilden wir zur Folge (g_k^*) die z -Transformierte, erhalten wir die Übertragungsfunktion*.

$$G^*(z) = \mathcal{Z}\{(g_k^*)\} = \sum_{i=0}^{\infty} g_i^* z^{-i}$$

$$\begin{aligned}
&= (e^T - 1)(e^{-T}z^{-1} + e^{-2T}z^{-2} + \dots) \\
&= (e^T - 1)(1 + (e^Tz)^{-1} + (e^Tz)^{-2} + \dots - 1) \\
&= (e^T - 1) \left(\frac{1}{1 - (e^Tz)^{-1}} - 1 \right) \\
&= (e^T - 1) \left(\frac{z}{z - e^{-T}} - 1 \right) = \frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}}.
\end{aligned}$$

Zur Berechnung der Antwort auf die spezielle Eingangsfolge $(u_k) = (1, 1, \dots)$ ist jetzt nur erforderlich, diese in den z -Bereich zu transformieren, und sie mit der Übertragungsfunktion $G^*(z)$ zu multiplizieren*

$$\begin{aligned}
u(z) &= \mathcal{Z}\{(1, 1, \dots)\} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^i = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z - 1}, \\
y(z) &= G^*(z)u(z) = \frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}} \frac{z}{z - 1}.
\end{aligned}$$

Nun müssen wir $y(z)$ wieder als Reihe mit negativen Potenzen darstellen. Hierzu bedienen wir uns eines kleinen Tricks. Wir zerlegen zuerst den Ausdruck für $y(z)$ mit Hilfe der *Partialbruchentwicklung* ** in "einfache" Ausdrücke und versuchen, diese "einfachen" Ausdrücke mit Hilfe der Formel für die geometrische Reihe wieder als Reihen darzustellen (siehe Fußnote auf Seite 37). Es folgt:

$$y(z) = (1 - e^{-T}) \frac{1}{z - e^{-T}} \frac{z}{z - 1}$$

*Die Umformung basiert auf der Summenformel der *geometrischen Reihe*

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1 - x} \quad \text{für } |x| < 1.$$

** $r(x)$ sei eine rationale Funktion. Es gelte

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} p(x), q(x) \text{ Polynome in } x \\ \text{grad}(p(x)) \leq \text{grad}(q(x)) = n \end{array}.$$

Die Wurzeln x_i von $q(x)$ seien einfach und reell. Dann hat $r(x)$ eine Darstellung der Form (Partialbruchentwicklung)

$$r(x) = c_0 + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{x - x_i} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} c_0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{q(x)} \\ c_i = \frac{p(x_i)}{q'(x_i)} = \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{p(x)}{q(x)}(x - x_i) \end{array}.$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - e^{-T}) \left(\frac{-e^{-T}}{1 - e^{-T}} \frac{1}{z - e^{-T}} + \frac{1}{1 - e^{-T}} \frac{1}{z - 1} \right) \\
&= \frac{1}{z - 1} - \frac{e^{-T}}{z - e^{-T}} \\
&= \frac{1}{z} \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} \right) - \frac{e^{-T}}{z} \left(\frac{1}{1 - (e^T z)^{-1}} \right) \\
&= \frac{1}{z} (1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots) - \frac{e^{-T}}{z} (1 + e^{-T} z^{-1} + e^{-2T} z^{-2} + \dots) \\
&= (1 - e^{-T}) z^{-1} + (1 - e^{-2T}) z^{-2} + (1 - e^{-3T}) z^{-3} + \dots
\end{aligned}$$

Jetzt können wir sofort die Lösung im Folgenbereich angeben, denn wegen Definition (3.5) erhält man:

$$\begin{aligned}
y_0 &= 0 \\
y_k &= 1 - e^{-kT}, \quad k = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Dieses Beispiel zeigt, wie die z -Transformation im Prinzip zu verwenden ist. Unschwer ist auch der ungeheure Vorteil gegenüber einer iterativen Lösung, wie sie im vorigen Kapitel vorgestellt wurde, zu erkennen. Man kann z.B.

- den Wert der Lösung zu jedem Abtastpunkt angeben, ohne alle Vorgänger zu berechnen,
- die Art der Lösung für $k \rightarrow \infty$ abschätzen,
- oder den Einfluß von Parametern, hier der Abtastzeit T , beurteilen.

Vieles davon ist sogar möglich, ohne die Lösung $y(z)$ in den Folgenbereich zu übersetzen. Dennoch ist die bisherige Vorgangsweise für das praktische Rechnen zu schwerfällig. Um die Handhabung der z -Transformation zu vereinfachen, sind im nächsten Abschnitt die wichtigsten Eigenschaften und Korrespondenzen angegeben.

3.4 Eigenschaften der z -Transformation

Ehe wir uns den Eigenschaften der z -Transformation zuwenden, ist es leider unvermeidbar, einige Bemerkungen zur Bezeichnungsweise zu machen. Die Laplace-Transformierte einer Zeitfunktion $f(t)$ bezeichnen wir mit

$$f(s) = \mathcal{L}\{f(t)\},$$

wobei selbstverständlich mit $f(s)$ und $f(t)$ verschiedene Funktionen gemeint sind. Dies gilt analog auch bei den folgenden Transformationen. Für die inverse Laplace-Transformation schreiben wir

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} .$$

Die z -Transformierte einer Folge (f_k) bezeichnen wir mit

$$f(z) = \mathcal{Z}\{(f_k)\} ,$$

und für die inverse z -Transformation schreiben wir

$$(f_k) = \mathcal{Z}^{-1}\{f(z)\} .$$

Bild 3.2 zeigt den Zusammenhang der einzelnen Transformationen. Selbstverständlich können wir zu einer Zeitfunktion $f(t)$ eine Folge (f_k) bilden und zu dieser Folge die z -Transformierte $f(z)$ angeben. Umgekehrt können wir zu einer Funktion $f(z)$ eindeutig eine Folge (f_k) finden, aber eine Umkehrung des Abtastprozesses, also die eindeutige Bildung einer Zeitfunktion aus einer Folge, ist natürlich nicht möglich. Es gibt ja beliebig viele Zeitfunktionen, die nach dem Abtasten zu ein und derselben Folge führen. Es ist also ein Übergang vom Zeitbereich in den s -Bereich und zurück möglich, ebenso können wir vom Folgenbereich in den z -Bereich und zurück gehen, und außerdem können wir vom Zeitbereich in den Folgenbereich übergehen.

Suchen wir zu einer Funktion $f(s)$ die entsprechende z -Transformierte $f(z)$, so bilden wir zuerst mit der inversen Laplace-Transformation die zugehörige Zeitfunktion $f(t)$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} ,$$

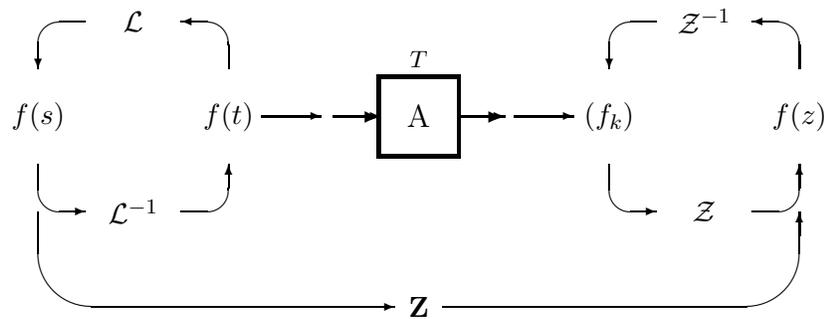


Bild 3.2: Transformationen.

tasten die Funktion $f(t)$ ab und erhalten die zugehörige Folge (f_k) mit*

$$f_k = f(kT)$$

und suchen zu dieser Folge (f_k) die z -Transformierte $f(z)$

$$f(z) = \mathcal{Z}\{(f_k)\} .$$

Da der Übergang von $f(s)$ zu $f(z)$ oft benötigt wird, schreiben wir hierfür einfach

$$f(z) = \mathbf{Z}\{f(s)\} \quad (3.7)$$

(siehe auch Bild 3.2). Man beachte die unterschiedliche Schreibweise von "Z" in Gl.(3.5) und Gl.(3.7).

Tabelle 3.1 zeigt die wichtigsten Eigenschaften der z -Transformation, wobei wir von $f(t)$ voraussetzen, daß gilt

$$f(t) = 0 \quad \text{falls} \quad t < 0 .$$

Die zugehörigen Rechenregeln der Laplace-Transformation sind ebenfalls angeführt.

Eigenschaft I drückt die Linearität der einzelnen Transformationen und des Abtastprozesses aus. Für die z -Transformation folgt die Linearität unmittelbar aus der Definition (3.5).

Eigenschaft II – auch Verschiebungssatz genannt – gibt an, wie die z -Transformierte $f(z)$ einer um n Schritte nach rechts verschobenen Folge (f_k) mit Hilfe der z -Transformierten der unverschobenen Folge ausgedrückt werden kann. Bild 3.3 zeigt, wie eine Folge um einen Schritt nach rechts verschoben wird. Für (f_k) gilt

$$(f_k) = (f_0, f_1, f_2, \dots) ,$$

es folgt für (f_{k-1})

$$(f_{k-1}) = (0, f_0, f_1, \dots) .$$

Wegen

$$\mathcal{Z}\{(f_k)\} = \sum_{i=0}^{\infty} f_i z^{-i}$$

*Die Zuordnung $(f_k) = f(kT)$ ist nur für rechtsseitig stetige Funktionen gültig. Ist eine Funktion nicht rechtsseitig stetig, gilt die Zuordnung $f_k = f(kT + 0)$, d.h., wir nehmen den rechtsseitigen Grenzwert.

	$f(s)$	$f(t)$	(f_k)	$f(z)$
I	$c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)$	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$	$(c_1 f_{1,k} + c_2 f_{2,k})$	$c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z)$
II	$e^{-nTs} f(s)$	$f(t - nT)$	(f_{k-n})	$z^{-n} f(z)$
III			$(\sum_{j=0}^k f_{1,k-j} f_{2,k})$	$f_1(z) f_2(z)$
IV	$\lim_{s \rightarrow \infty} s f(s)$	$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} f(t)$	f_0	$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$
V	$\lim_{s \rightarrow 0} s f(s)$	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k$	$\lim_{z \rightarrow 1} ((z - 1) f(z))$

Tabelle 3.1 Rechenregeln zur z -Transformation

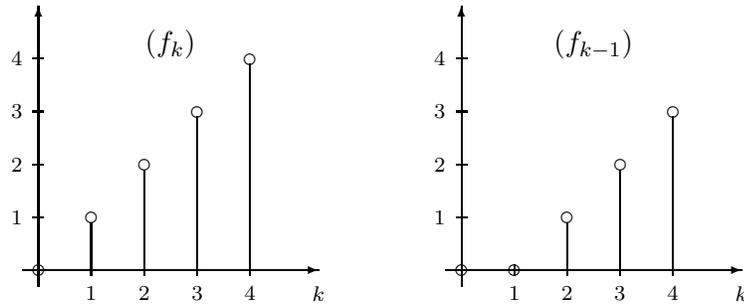


Bild 3.3: Zum Verschiebungssatz.

und

$$\mathcal{Z}\{(f_{k-1})\} = \sum_{i=0}^{\infty} f_i z^{-(i+1)} = \frac{1}{z} \sum_{i=0}^{\infty} f_i z^{-i} ,$$

gilt also

$$\mathcal{Z}\{(f_{k-1})\} = \frac{1}{z} \mathcal{Z}\{(f_k)\} = z^{-1} f(z) .$$

Wiederholen wir diese Betrachtung n mal, so finden wir die rechte Seite von Eigenschaft II. Betrachten wir Bild 3.4, so sehen wir, daß wir auf zwei Wegen zum selben Ergebnis gelangen. Beim ersten tasten wir $f(t)$ zuerst ab

$$f(t) \longrightarrow (f_k)$$

und verschieben (f_k)

$$(f_k) \longrightarrow (f_{k-1}) .$$

Beim zweiten verschieben wir zuerst $f(t)$ um eine Abtastperiode

$$f(t) \longrightarrow f(t - T)$$

und tasten dann $f(t - T)$ ab

$$f(t - T) \longrightarrow (f_{k-1}) .$$

Wir dürfen also diese beiden Operationen vertauschen, und es gilt

$$\mathbf{Z}\{e^{-Ts} f(s)\} = z^{-1} \mathbf{Z}\{f(s)\} = z^{-1} f(z) ,$$

bzw.

$$\mathcal{Z}\{f(kT - T)\} = z^{-1} \mathcal{Z}\{(f(kT))\} .$$

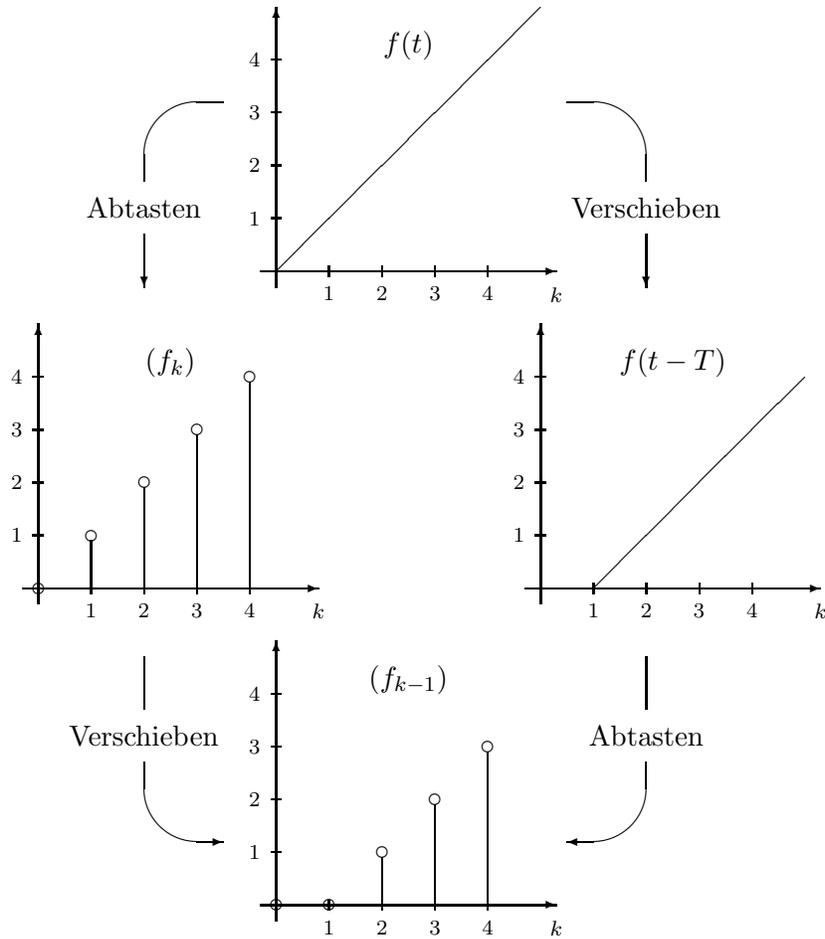


Bild 3.4: Vertauschen von Abtasten und Verschieben.

Entsprechend findet man

$$\mathbf{Z}\{e^{-nTs} f(s)\} = z^{-n} f(z) ,$$

also die linke Seite von Eigenschaft II.

Eigenschaft III – den Faltungssatz – haben wir bereits ausführlich behandelt. Man beachte hier, daß die Faltung nicht mit dem Abtastprozeß vertauschbar ist, es gilt also im allgemeinen

$$\mathbf{Z}\{f_1(s)f_2(s)\} \neq \mathbf{Z}\{f_1(s)\}\mathbf{Z}\{f_2(s)\} .$$

Zu den Eigenschaften IV und V, den Grenzwertsätzen, ist anzumerken, daß sie nur dann die richtigen Grenzwerte liefern, wenn diese im Zeitbereich bzw.

im Folgenbereich existieren. Man muß sich vor ihrer Anwendung daher von der Existenz der Grenzwerte überzeugen.

	$f(s)$	$f(t)$	(f_k)	$f(z)$
I	$\frac{1}{s}$	$\sigma(t)$	(1)	$\frac{z}{z-1}$
II	$\frac{1}{s^2}$	$t\sigma(t)$	(kT)	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
III	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2}\sigma(t)$	$\left(\frac{(kT)^2}{2}\right)$	$\frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$
IV	$\frac{1}{s-\alpha}$	$e^{\alpha t}\sigma(t)$	$(e^{\alpha kT})$	$\frac{z}{z-e^{\alpha T}}$
V	$\frac{1}{(s-\alpha)^2}$	$te^{\alpha t}\sigma(t)$	$(kTe^{\alpha kT})$	$\frac{T e^{\alpha T} z}{(z-e^{\alpha T})^2}$
VI	$\frac{1}{(s-\alpha)^3}$	$\frac{t^2}{2}e^{\alpha t}\sigma(t)$	$\left(\frac{(kT)^2}{2}e^{\alpha kT}\right)$	$\frac{T^2 e^{\alpha T} z(z+e^{\alpha T})}{2(z-e^{\alpha T})^3}$

Table 3.2: Korrespondenzen zur z -Transformation

Die zum praktischen Rechnen benötigten Korrespondenzen sind in der Tabelle 3.2 angeführt. Wir sind hiermit imstande, die im Bild 3.2 angeführten Transformationen für einige, häufig vorkommende Funktionen durchzuführen. Sollte eine Funktion nicht in der Tabelle 3.2 angeführt sein, hilft meist folgender Gedankengang weiter, dem die Linearität der Transformationen zugrunde liegt: Eine "komplizierte" Funktion wird mit Hilfe der Partialbruchentwicklung in eine Summe "einfacher" Funktionen zerlegt, diese werden einzeln mit Hilfe der Tabelle in den gewünschten Bereich transformiert und dort wieder aufsummiert.

3.5 Berechnung der z -Übertragungsfunktion

Wie wir bereits im Abschnitt 3.2 gesehen haben, ist die Berechnung der z -Übertragungsfunktion besonders einfach, wenn wir die Gewichtsfolge kennen. Die Gewichtsfolge (g_k^*) ist ja die Antwort des Abtastsystems auf die

spezielle Eingangsfolge $(u_k) = (1, 0, 0, \dots)$. Nun folgt für dieses $u(z)$

$$u(z) = \mathcal{Z}\{(1, 0, 0, \dots)\} = 1 ,$$

und damit für die z -Übertragungsfunktion $G^*(z)$

$$G^*(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{\mathcal{Z}\{(g_k^*)\}}{\mathcal{Z}\{(1, 0, 0, \dots)\}} = \mathcal{Z}\{(g_k^*)\} . \quad (3.8)$$

Die z -Übertragungsfunktion $G^*(z)$ stimmt also mit der z -Transformierten der Gewichtsfolge (g_k^*) überein.

Wird das Abtastsystem durch eine Differenzgleichung der Form

$$y_k + a_{n-1}y_{k-1} + \dots + a_0y_{k-n} = b_nu_k + b_{n-1}u_{k-1} + \dots + b_0u_{k-n} \quad (3.9)$$

beschrieben, so läßt sich unter der Voraussetzung, daß sowohl die Eingangsfolge als auch die Ausgangsfolge für $k < 0$ verschwinden, die zugehörige z -Übertragungsfunktion $G^*(z)$ leicht mit

$$\begin{aligned} y(z) + a_{n-1}z^{-1}y(z) + \dots + a_0z^{-n}y(z) &= \\ &= b_nu(z) + b_{n-1}z^{-1}u(z) + \dots + b_0z^{-n}u(z) \end{aligned}$$

und

$$G^*(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_0 + b_1z + b_2z^2 + \dots + b_nz^n}{a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + z^n} \quad (3.10)$$

angeben. Sicherlich ist der Leser inzwischen mit der z -Transformation vertraut geworden, dennoch sollte er sich vergewissern, daß zur Herleitung von Gl.(3.10) nur die Eigenschaften I und II aus der Tabelle 3.1 nötig sind.

Zur Differenzgleichung (3.9) können wir also sofort die Übertragungsfunktion (3.10) angeben, umgekehrt können wir auch zur Übertragungsfunktion (3.10) sofort eine passende Differenzgleichung, nämlich (3.9), finden. Dies ist insbesondere dann wichtig, wenn wir zu einer Übertragungsfunktion eine rechnergestützte Realisierung suchen.

Allerdings kann man nicht zu jeder Übertragungsfunktion eine Realisierung finden. Hierzu betrachte man eine rationale Übertragungsfunktion, deren Zählergrad größer als deren Nennergrad ist. Man überzeugt sich leicht, daß die zugehörige Differenzgleichung nicht kausal, also nicht realisierbar ist (siehe Gl. 2.13). Damit also zu einer rationalen Übertragungsfunktion $G^*(z)$ eine realisierbare Differenzgleichung gehört, muß gelten:

$$\text{Zählergrad}(G^*(z)) \leq \text{Nennergrad}(G^*(z)) .$$

Häufig liegt eine Konfiguration nach Bild 3.1 vor. Obwohl wir bereits wissen, wie prinzipiell die Übertragungsfunktion zu berechnen ist (siehe Abschnitt 3.2), können wir den Rechengang vereinfachen, wenn wir einzelne Schritte bereits im s -Bereich ausführen. Wir wählen wieder die spezielle Eingangsgröße $(u_k) = (1, 0, \dots)$, also $u(z) = 1$. Dann lautet die Antwort $\hat{u}(s)$ des Haltegliedes

$$\hat{u}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-Ts} .$$

Die Ausgangsgröße $g^*(s)$ des kontinuierlichen Systems wird

$$g^*(s) = G(s) \frac{1}{s} (1 - e^{-Ts}) ,$$

und für die z -Übertragungsfunktion $G^*(z)$ folgt wegen Eigenschaft I und II aus Tabelle 3.1

$$\begin{aligned} G^*(z) &= \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{\mathbf{Z} \left\{ G(s) \frac{1}{s} (1 - e^{-Ts}) \right\}}{1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{z} \right) \mathbf{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \\ G^*(z) &= \frac{z-1}{z} \mathbf{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} . \end{aligned} \quad (3.11)$$

Mit den jetzt zur Verfügung stehenden Mitteln läßt sich das Beispiel aus Abschnitt 3.3 sehr einfach lösen. Als erstes wollen wir wieder die z -Übertragungsfunktion von

$$G(s) = \frac{1}{1+s}$$

berechnen. Aufgrund von Gl.(3.11) gilt

$$G^*(z) = \frac{z-1}{z} \mathbf{Z} \left\{ \frac{1}{s(s+1)} \right\} .$$

Mit der Partialbruchzerlegung folgt

$$G^*(z) = \frac{z-1}{z} \mathbf{Z} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)} \right\} .$$

Wir erhalten mit Hilfe der Korrespondenzen I und IV von Tabelle 3.2

$$G^*(z) = \frac{z-1}{z} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} \right)$$

bzw.

$$G^*(z) = \frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}} .$$

Ebenso einfach berechnen wir die Antwort des Systems auf die Eingangsfolge $(u_k) = (1, 1, 1, \dots)$. Es gilt

$$y(z) = G^*(z)u(z)$$

und mit Korrespondenz I von Tabelle 3.2 folgt

$$y(z) = \frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}} \frac{z}{z - 1} .$$

Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung erhalten wir

$$y(z) = \frac{1}{z - 1} - \frac{e^{-T}}{z - e^{-T}} = \frac{1}{z} \left(\frac{z}{z - 1} - e^{-T} \frac{z}{z - e^{-T}} \right) .$$

Wegen der Korrespondenzen I und IV von Tabelle 3.2 und mit den Eigenschaften I und II von Tabelle 3.1 ergibt sich

$$(y_k) = (0, 1, 1, 1, \dots) - e^{-T} (0, 1, e^{-T}, e^{-2T}, \dots)$$

oder

$$y_0 = 0 \quad \text{und} \quad y_k = 1 - e^{-kT} \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \dots .$$

Noch einfacher kann dieses Beispiel mit $\mu LINSY$ gelöst werden. Mit der Befehlssequenz

```
T = 0.1
G = 1/<1, 1>
Gz = @z(G, T)
stpg Gz
```

werden nicht nur alle erforderlichen Berechnungen durchgeführt, sondern das Ergebnis wird auch graphisch dargestellt.

Wir verfügen nunmehr über ein Hilfsmittel zur Beschreibung von Abtastsystemen, das in seiner Leistungsfähigkeit der Laplace-Transformation ebenbürtig ist. So können wir wie gewohnt mit Übertragungsfunktionen rechnen, auf einfache Weise Differenzgleichungen lösen und zu Übertragungsfunktionen Algorithmen angeben, die einfach zu programmieren sind (Bild 2.6). Weitere Eigenschaften der z -Transformation findet der interessierte Leser z.B. in [1,5,6,7,12,22].

Kapitel 4

Stabilität linearer zeitinvarianter Abtastsysteme

Aus der Erfahrung wissen wir, daß Übertragungssysteme — insbesondere Regelkreise — unter gewissen Umständen instabil werden können. Vielfach erkennen wir diese Situation daran, daß sich ein gewünschter Betriebszustand einer Anlage nicht halten läßt, weil gewisse Systemgrößen die Tendenz zeigen, sich entweder unablässig von ihren Sollwerten zu entfernen, oder fortwährend um sie zu pendeln. Ein brauchbares Regelungssystem darf diese unangenehmen Eigenschaften nicht besitzen.

In diesem Kapitel werden wir die Eigenschaft der Stabilität für lineare zeitinvariante Abtastsysteme genauer fassen und im Anschluß daran Methoden angeben, die geeignet sind, die Frage nach der Stabilität zu beantworten.

Es gibt verschiedene Festlegungen des Stabilitätsbegriffes. Unsere Untersuchungen bauen wir auf eine Definition, die für lineare zeitinvariante Abtastsysteme, beschrieben durch eine *Übertragungsfunktion*, zweckmäßig ist.

4.1 Definition der Stabilität

Wir betrachten ein lineares zeitinvariantes Übertragungssystem nach Bild 4.1 mit einer Eingangsfolge (u_k) und einer Ausgangsfolge (y_k) . Das Übertragungsverhalten werde beschrieben durch die z -Übertragungsfunktion $G^*(z)$.

Wenn dieses Übertragungssystem ausgehend von seinem Ruhezustand auf

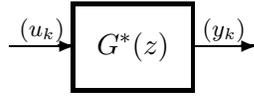


Bild 4.1: Zur Definition der Stabilität.

jede beschränkte Eingangsfolge (u_k) , das heißt

$$|u_k| < \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

mit einer beschränkten Ausgangsfolge (y_k) , also mit

$$|y_k| < \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

antwortet, so sagen wir, das Übertragungssystem ist *BIBO-stabil*^{*}. Antwortet hingegen das Übertragungssystem auch nur auf *eine* beschränkte Eingangsfolge mit einer Ausgangsfolge, die über alle Grenzen wächst, so nennen wir das Übertragungssystem *instabil*.

4.2 Stabilitätskriterien

Die obige *Definition* besagt, was wir fortan unter Stabilität zu verstehen haben. Um jedoch in einem konkreten Fall feststellen zu können, ob ein Übertragungssystem die Eigenschaft der Stabilität besitzt, benötigen wir ein geeignetes *Kriterium*. In diesem Abschnitt wollen wir daher ein solches Kriterium herleiten.

Wir wissen, daß die Übertragungseigenschaften durch eine Übertragungsfunktion $G^*(z)$ beschrieben werden und fragen uns daher, unter *welchen Bedingungen* für ein solches Übertragungssystem aus der Eigenschaft (4.1) die Eigenschaft (4.2) folgt.

Jedenfalls kann man ganz allgemein die Ausgangsfolge (y_k) als Antwort des Systems auf die Eingangsfolge (u_k) mit Hilfe der Faltungssumme

$$y_k = \sum_{j=0}^k g_{k-j}^* u_j \quad (4.3)$$

^{*}„BIBO“ ist ein Kurzwort, gebildet aus den Anfangsbuchstaben von „Bounded Input - Bounded Output“. Wenn wir in der Folge einfach von Stabilität sprechen, meinen wir BIBO-Stabilität.

darstellen. In Gl.(4.3) ist (g_k^*) die Gewichtsfolge, deren z -Transformierte mit der Übertragungsfunktion $G^*(z)$ identisch ist:

$$G^*(z) = \mathcal{Z}\{(g_k^*)\}. \quad (4.4)$$

In der Stabilitätsdefinition werden nur Aussagen über die Beträge der Werte der Ein- und Ausgangsfolgen gemacht; führen wir deswegen in Gl.(4.3) diese Beträge ein, so erhält man:

$$|y_k| = \left| \sum_{j=0}^k g_{k-j}^* u_j \right| \leq \sum_{j=0}^k |g_{k-j}^*| |u_j|. \quad (4.5)$$

Sind nun die Werte u_j dem Betrage nach höchstens gleich einer festen positiven Zahl M , handelt es sich also ausschließlich um beschränkte Eingangsfolgen, so folgt aus der Ungleichung (4.5) unmittelbar

$$|y_k| \leq M \sum_{j=0}^k |g_{k-j}^*|$$

und weiter mit der Abkürzung $k - j = i$

$$|y_k| \leq M \sum_{i=0}^k |g_i^*|. \quad (4.6)$$

Man kann nun stets eine Folge (u_i) finden, für die in Ungleichung (4.5) und damit auch in (4.6) das Gleichheitszeichen gilt. Fordern wir mit der Bedingung (4.2), daß $|y_k| < \infty$ für *jedes* k gilt, so folgt daraus, daß die Summe in der Beziehung (4.6) für jedes k beschränkt sein muß – damit auch für $k \rightarrow \infty$. Diese Überlegungen fassen wir in einem *Stabilitätskriterium* zusammen:

Das durch $y(z) = G^*(z)u(z)$ beschriebene Abtastsystem nach Bild 4.1 ist dann BIBO-stabil, wenn die Summe über die Absolutbeträge der einzelnen Werte der Gewichtsfolge (g_k^*) endlich ist, das heißt, wenn

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g_k^*| < \infty \quad (4.7)$$

gilt*.

*Die Formulierung "...ist dann BIBO-stabil, wenn ..." bedeutet, daß aus der

Mit dem Kriterium (4.7) läßt sich jetzt die Eigenschaft eines linearen zeitinvarianten Abtastsystems, auf jede beschränkte Eingangsfolge mit einer beschränkten Ausgangsfolge zu antworten, anhand einer für das System charakteristischen Größe, nämlich der Gewichtsfolge, ablesen.

Beispiel 1:

Mit Hilfe des Stabilitätskriteriums (4.7) soll nun untersucht werden, unter welchen Bedingungen ein Abtastsystem nach Bild 4.1 mit der Übertragungsfunktion

$$G^*(z) = \frac{1}{z - a} \quad (4.8)$$

stabil ist. Wir erwarten, daß die Eigenschaft der Stabilität eng an den Parameter a – den Pol der Übertragungsfunktion – gebunden ist; und zwar derart, daß es *einen Wertebereich* dieses Parameters gibt, für den das Übertragungssystem stabil ist, und einen *anderen Wertebereich*, für den Instabilität vorliegt. Die folgenden Betrachtungen sind darauf gerichtet, diese Wertebereiche zu spezifizieren. Dazu berechnen wir die Gewichtsfolge (g_k^*) des Abtastsystems (4.8) in geschlossener Form, indem wir Gl.(4.8) zunächst umformen:

$$G^*(z) = z^{-1} \frac{z}{z - a} = z^{-1} f(z). \quad (4.9)$$

Bei der inversen z -Transformation der Gl.(4.9) gehen wir in zwei Schritten vor. Zuerst ermitteln wir mit Hilfe der Korrespondenz IV aus der Tabelle 3.2 die zu $f(z)$ gehörende Folge (f_k) :

$$(f_k) = \mathcal{Z}^{-1}\{f(z)\} = (a^k).$$

Dann wenden wir auf die Folge (f_k) gemäß Gl.(4.9) den Verschiebungssatz (Eigenschaft II aus der Tabelle 3.1) an und erhalten so die Gewichtsfolge (g_k^*) :

$$(g_k^*) = (f_{k-1}).$$

Berücksichtigen wir noch, daß bei dieser Verschiebeoperation der Folgenwert mit negativem Index $f_{-1} = 0$ gesetzt wird (vgl. Bild 3.3), so finden wir schließlich für die Gewichtsfolgenwerte g_k^*

$$g_k^* = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ a^{k-1}, & k > 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

Erfüllung der Ungl. (4.7) die BIBO-Stabilität folgt — das Stabilitätskriterium ist somit *hinreichend*. Man kann auch die *Notwendigkeit* des Kriteriums — aus der BIBO-Stabilität folgt die Ungl. (4.7) — zeigen; jedoch ist dieser Beweis umfangreich, sodaß wir auf [7] verweisen.

Das Stabilitätskriterium (4.7) führt nunmehr auf die Beantwortung der Frage, für welche Werte von a die folgende Summe existiert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g_k^*| = \sum_{k=1}^{\infty} |a^{k-1}| = \sum_{k=0}^{\infty} |a|^k. \quad (4.11)$$

Der rechte Term in Gl.(4.11) ist aber die Summe einer geometrischen Reihe, die genau dann existiert, wenn gilt:

$$|a| < 1. \quad (4.12)$$

Somit stellen wir zusammenfassend fest, daß das Abtastsystem (4.8) genau dann stabil ist, wenn der Parameter a – der Pol der Übertragungsfunktion $G^*(z)$ – im Intervall $-1 < a < 1$ liegt.

Die Gewichtsfolge des Abtastsystems (4.8) wird durch Gl.(4.10) beschrieben. Wie man daran leicht erkennen kann, gibt es – nunmehr von Stabilitätsfragen abgesehen – sechs charakteristische Verläufe, je nach der Lage des Poles a . Diese sechs Fälle sind im Bild 4.2 beispielhaft zusammengestellt, wobei die Lage eines Poles mit \times gekennzeichnet ist.

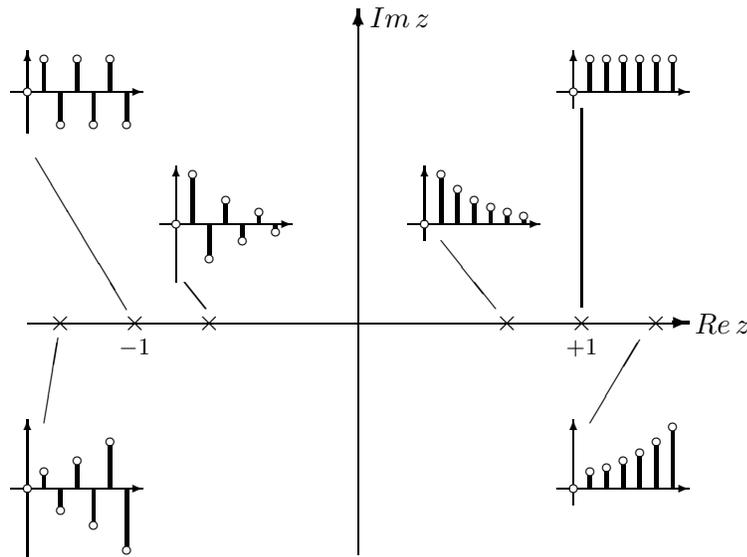


Bild 4.2: Charakteristische Verläufe der Gewichtsfolge zum Abtastsystem (4.8).

Im Anschluß daran drängt sich wohl die Frage auf, wie denn diejenigen charakteristischen Verläufe der Gewichtsfolge aussehen, die zu einem konjugiert komplexen Polpaar einer Übertragungsfunktion gehören.

Beispiel 2:

Diese Frage soll nun anhand einer Übertragungsfunktion untersucht werden, deren Pole bei $z = \alpha + j\beta$ und $z = \alpha - j\beta$ liegen mögen (Bild 4.3).

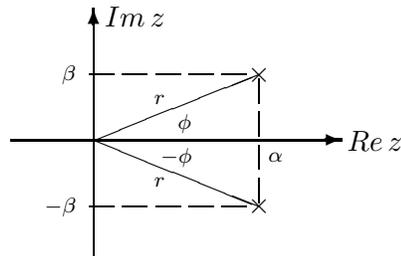


Bild 4.3: Konjugiert komplexes Polpaar in der z-Ebene.

Der Einfachheit halber gehen wir dabei gleich von einer Partialbruchentwicklung für die Übertragungsfunktion $G^*(z)$ aus:

$$G^*(z) = \frac{1}{z - (\alpha + j\beta)} + \frac{1}{z - (\alpha - j\beta)}. \quad (4.13)$$

Faßt man das Übertragungssystem (4.13) als eine Parallelschaltung zweier Übertragungssysteme vom Typ (4.8) auf, so erhält man mit Gl.(4.10) für die Gewichtsfolge:

$$g_k^* = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ (\alpha + j\beta)^{k-1} + (\alpha - j\beta)^{k-1}, & k > 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

Schreibt man in Übereinstimmung mit dem Bild 4.3 für

$$\begin{aligned} \alpha + j\beta &= r e^{j\phi}, \\ \alpha - j\beta &= r e^{-j\phi}, \end{aligned}$$

so läßt sich Gl.(4.14) in einen Ausdruck der Form

$$g_k^* = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ 2r^{k-1} \cos((k-1)\phi), & k > 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

überführen, und man findet damit eine leicht zu interpretierende Darstellung der Gewichtsfolge zum Abtastsystem (4.13):

Sie ist gemäß Gl.(4.15) eine oszillierende Folge, die mit wachsendem k

- abklingt, wenn $|r| < 1$ ist,
- aufklingt, wenn $|r| > 1$ ist und
- unverändert schwingt, wenn $|r| = 1$ gilt.

Im Bild 4.4 ist für jeden dieser drei Fälle ein konjugiert komplexes Polpaar und dazu ein typischer Verlauf der Gewichtsfolge angegeben.

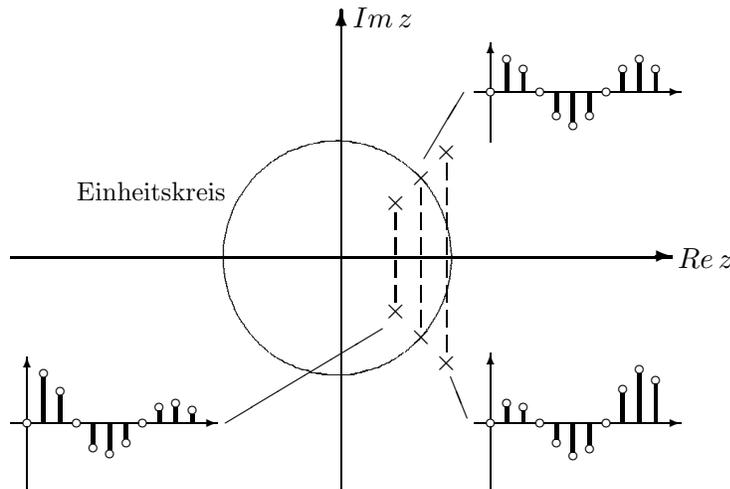


Bild 4.4: Charakteristische Verläufe der Gewichtsfolge zum Abtastsystem (4.13).

An der Gewichtsfolge (4.15) erkennt man, daß die Bedeutung der Begriffe Dämpfung und Kreisfrequenz einer kontinuierlichen Eigenschwingung (deren Laplace-Transformierte in der s -Ebene das Polpaar $s = \delta \pm j\omega$ besitzt) im diskreten Fall den Größen r bzw. ϕ zukommt.

Um die Frage nach der Stabilität des Abtastsystems (4.13) zu klären, muß überprüft werden, unter welchen Bedingungen für die Gewichtsfolge (4.15)

das Kriterium (4.7) erfüllbar ist. Ganz analog* zu den Überlegungen, die wir hierzu im Beispiel 1 angestellt haben, zeigt sich nun, daß das Abtastsystem (4.13) genau dann stabil ist, wenn das konjugiert komplexe Polpaar $z = \alpha \pm j\beta$ von $G^*(z)$ im Inneren des Einheitskreises** liegt.

Die Beispiele 1 und 2 haben gezeigt, daß die dort betrachteten Übertragungssysteme genau dann stabil sind, wenn die Pole der Übertragungsfunktionen betragsmäßig kleiner als Eins sind. Ohne Beweis sei angeführt, daß diese Aussage für alle rationalen z -Übertragungsfunktionen (Gl.(3.10)) gültig ist. Wir erhalten demnach ein zweites *Stabilitätskriterium*:

Das Abtastsystem nach Bild 4.1 mit der Übertragungsfunktion

$$G^*(z) = \frac{Z(z)}{N(z)}, \quad \text{grad}(Z(z)) \leq \text{grad}(N(z)) \quad (4.16)$$

ist genau dann stabil, wenn alle Pole von $G^*(z)$ im Inneren des Einheitskreises liegen.

Dieses Kriterium erlaubt die Beurteilung der Stabilität eines linearen zeitinvarianten Abtastsystems anhand seiner Beschreibung im *Bildbereich*, während sich das erstgenannte Stabilitätskriterium (4.7) auf den *Zeitbereich* bezieht.

Um mit dem Stabilitätskriterium (4.16) zu überprüfen, ob ein Abtastsystem stabil ist, müssen wir nur feststellen, ob *alle* Pole der z -Übertragungsfunktion betragsmäßig kleiner als Eins sind. Schließen wir den Fall aus, daß im Zählerpolynom $Z(z)$ und im Nennerpolynom $N(z)$ gewisse Nullstellen gleich sind, so sind die Pole der Übertragungsfunktion $G^*(z)$ identisch mit den Nullstellen des Nennerpolynoms $N(z)$ und die Stabilitätsuntersuchung reduziert sich auf die Beantwortung der Frage, ob sämtliche Nullstellen eines Polynoms im Inneren des Einheitskreises liegen – ist dies der Fall, so bezeichnen wir ein solches Polynom als *Einheitskreispolynom* (kurz EKP).

*Man gehe aus von Gl.(4.14) und nütze die Tatsache, daß die geometrische Reihe und ihre Konvergenzeigenschaften im Komplexen sinngemäß definiert sind (siehe dazu etwa [4]).

**Der Kreis mit dem Radius Eins und dem Mittelpunkt im Ursprung der z -Ebene wird *Einheitskreis* genannt.

Diese Frage kann mit den sogenannten Abbauverfahren beantwortet werden, ohne explizit die Nullstellen eines Polynoms berechnen zu müssen.

4.3 Das Abbauverfahren

Das Abbauverfahren gestattet es uns, über elementare Rechenoperationen mit den Koeffizienten eines gegebenen Polynoms festzustellen, ob es sich dabei um ein Einheitskreispolynom handelt. Es gilt nämlich der folgende Satz*:

Ein Polynom n -ten Grades

$$P_n(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n \quad (4.17)$$

ist genau dann ein Einheitskreispolynom, wenn

$$\left| \frac{a_0}{a_n} \right| < 1 \quad (4.18)$$

gilt und das abgebaute Polynom $P_{n-1}(z)$ vom Grade $(n-1)$

$$P_{n-1}(z) = \frac{1}{z} \left\{ P_n(z) - \frac{a_0}{a_n} z^n P_n \left(\frac{1}{z} \right) \right\} \quad (4.19)$$

ebenfalls ein Einheitskreispolynom ist.

Die Frage, ob das abgebaute Polynom (4.19) ein Einheitskreispolynom ist, läßt sich aber wieder mit Hilfe dieses Satzes beantworten, wenn man ihm anstelle des Polynoms (4.17) nunmehr das Polynom (4.19) zugrunde legt. Diese rekursive Anwendung dieses Satzes führt man solange durch, bis das abgebaute Polynom (4.19) nur mehr vom Grade 1 ist; denn dann reicht zur Beantwortung der Frage, ob es ein Einheitskreispolynom ist, allein die Bedingung (4.18), und die Rekursion kann abgebrochen werden.

Der rekursive Charakter des Abbauverfahrens legt den Einsatz eines Digitalrechners nahe. Es soll daher im folgenden Abschnitt ein Programm präsentiert werden, mit dessen Hilfe man ausgehend von den Zahlenwerten der Koeffizienten eines Polynoms die Frage beantworten kann, ob es sich dabei um ein Einheitskreispolynom handelt.

*siehe hierzu [7].

FORTRAN Programm für das Abbauverfahren:

Das abgebaute Polynom (4.19) kann auch in der Form

$$\begin{aligned} P_{n-1}(z) &= \left(a_1 - \frac{a_0}{a_n} a_{n-1} \right) + \dots + \left(a_{n-1} - \frac{a_0}{a_n} a_1 \right) z^{n-2} + \\ &\quad + \left(a_n - \frac{a_0}{a_n} a_0 \right) z^{n-1} = \\ &= c_0 + c_1 z + \dots + c_{n-2} z^{n-2} + c_{n-1} z^{n-1} \end{aligned} \quad (4.20)$$

geschrieben werden. Diese Berechnungsvorschrift für die Koeffizienten des abgebauten Polynoms liegt dem Programm nach Bild 4.5 zugrunde.

Dabei gelten folgende Korrespondenzen:

- NO Ordnung des gegebenen Polynoms.
- N Ordnung n des Polynoms (4.17); wird in jeder Stufe des Abbauverfahrens um 1 erniedrigt.
- A(I) Koeffizienten des Polynoms (4.17) nach aufsteigenden Potenzen, $i = 0, 1, 2, \dots, n$.
- Z Quotient (4.18).
- C(I) Koeffizienten des abgebauten Polynoms (4.20), $i = 0, 1, 2, \dots, (n - 1)$.

```

      PROGRAM ABBAU
C
C =====
C   Initialisierung
      INTEGER I,NO,K
      REAL A(0:50),C(0:50),Z
C -----
C   Eingabe
      READ(5,*) NO
      READ(5,*) (A(I),I=0,NO)
C -----
C   Rekursiver Abbau der Polynome
      N=NO
      DO 30 I=1,NO
          IF (ABS(A(0)).GE.ABS(A(N))) GOTO 40
          Z=A(0)/A(N)
          DO 10 K=0,N-1
              C(K)=A(1+K)-Z*A(N-1-K)
10          CONTINUE
          DO 20 K=0,N-1
              A(K)=C(K)
20          CONTINUE
          N=N-1
30          CONTINUE
C -----
C   Mitteilung des Ergebnisses
      WRITE(6,1000)
1000  FORMAT('EKP')
      STOP
C
40    WRITE(6,2000)
2000  FORMAT('KEIN EKP')
C
C -----
      STOP
      END
C
C =====

```

Bild 4.5. FORTRAN Programm für das Abbauverfahren.

Beispiel 3:

Am Beispiel des Polynoms 4. Grades

$$P_4(z) = 48z^4 + 28z^3 - 8z^2 - 7z - 1 \quad (4.21)$$

schreiben wir in der Folge die Quotienten (4.18) und die abgebauten Polynome (4.19) bzw. (4.20) für jede Stufe des Abbauprozesses nieder:

$$\begin{aligned} P_4(z) &= -1 - 7z - 8z^2 + 28z^3 + 48z^4, \\ \left| \frac{a_0}{a_4} \right| &= \frac{1}{48} = 0,02 < 1, \\ P_3(z) &= -6,42 - 8,17z + 27,85z^2 + 47,97z^3, \\ \left| \frac{a_0}{a_3} \right| &= \frac{6,42}{47,97} = 0,13 < 1, \\ P_2(z) &= -4,44 + 26,76z + 47,12z^2, \\ \left| \frac{a_0}{a_2} \right| &= \frac{4,44}{47,12} = 0,09 < 1, \\ P_1(z) &= 29,28 + 46,70z, \\ \left| \frac{a_0}{a_1} \right| &= \frac{29,28}{46,70} = 0,63 < 1. \end{aligned}$$

Da der Abbauprozess wegen einer Verletzung der Bedingung (4.18) nicht abgebrochen werden mußte, liegen alle 4 Nullstellen des Polynoms (4.21) im Inneren des Einheitskreises der z -Ebene. Wäre dieses Polynom das Nennerpolynom einer z -Übertragungsfunktion, so wäre das zugehörige Abtastsystem stabil.

4.4 Stabilität eines Abtastregelkreises

Mit den bisher zusammengestellten Hilfsmitteln sind wir in der Lage, einen linearen und zeitinvarianten Abtastregelkreis zu beschreiben und anschließend zu untersuchen, ob bzw. unter welchen Bedingungen der Regelkreis stabil ist. Dies wollen wir an einem Beispiel nachvollziehen, das allerdings der Deutlichkeit halber recht einfach gehalten wird. Zu untersuchen sei das Führungsverhalten eines Abtastregelkreises nach Bild 4.6, wobei wir annehmen, daß für die kontinuierliche Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion $G(s)$

$$G(s) = \frac{y(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{1}{1+s} \quad (4.22)$$

ein diskreter Proportionalregler

$$u_k = V(r_k - y_k) = V e_k \quad (4.23)$$

mit dem Verstärkungsfaktor V und der Abtastperiode T eingesetzt werde. Die Regelabweichung zum Zeitpunkt $t = kT$ bezeichnen wir dabei mit $e_k = r_k - y_k$.

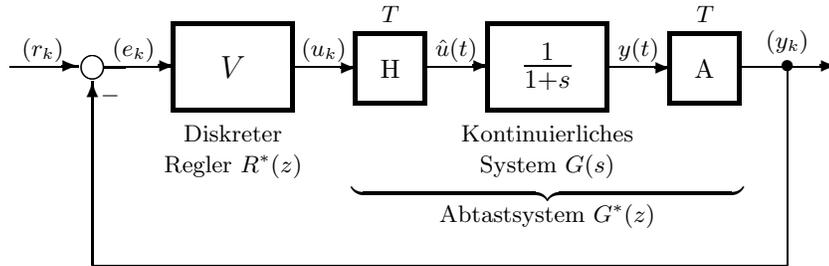


Bild 4.6: Zu untersuchender Abtastregelkreis.

Für die Hintereinanderschaltung *Halteglied, kontinuierliches Verzögerungsglied 1. Ordnung und Abtaster* wurde bereits im Abschnitt 3.3 die zugehörige z -Übertragungsfunktion $G^*(z)$

$$G^*(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}} \quad (4.24)$$

abgeleitet. Die z -Übertragungsfunktion $R^*(z)$ des Reglers findet man über die z -Transformation der Gl.(4.23)

$$R^*(z) = \frac{u(z)}{e(z)} = V. \quad (4.25)$$

Gemäß den Bezeichnungsvereinbarungen im Abschnitt 3.4 bedeuten $y(z)$, $u(z)$, $e(z)$, $r(z)$ nacheinander die z -Transformierten der Folge der Regelgröße (y_k), der Stellgrößenfolge (u_k), der Folge der Regelabweichung (e_k) und der Folge der Führungsgröße (r_k).

Für die nun anschließende Stabilitätsuntersuchung benötigen wir die z -Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises; sie sei mit

$$T^*(z) = \frac{y(z)}{r(z)} \quad (4.26)$$

bezeichnet. Offensichtlich gelten nach Bild 4.6 im Bildbereich die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} y(z) &= G^*(z)u(z) \\ u(z) &= R^*(z)e(z) \\ e(z) &= r(z) - y(z). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Eliminiert man in den Gln.(4.27) die Größen $u(z)$ und $e(z)$, so erhält man nach Gl.(4.26) zunächst für die Übertragungsfunktion $T^*(z)$

$$T^*(z) = \frac{R^*(z)G^*(z)}{1 + R^*(z)G^*(z)} \quad (4.28)$$

und schließlich mit den Übertragungsfunktionen (4.24) und (4.25):

$$T^*(z) = \frac{V(1 - e^{-T})}{z - \{e^{-T} - V(1 - e^{-T})\}}. \quad (4.29)$$

Mit dem Stabilitätskriterium (4.16) folgt nun unmittelbar, daß die Übertragungsfunktion (4.29) genau dann ein stabiles Übertragungssystem beschreibt, wenn gilt:

$$\left| e^{-T} - V(1 - e^{-T}) \right| < 1. \quad (4.30)$$

Eine Umformung der Ungleichung (4.30) ergibt nunmehr, daß der Abtastregelkreis nach Bild 4.6 genau dann stabil ist, wenn der Verstärkungsfaktor V zwischen den Grenzen

$$-1 < V < \frac{1 + e^{-T}}{1 - e^{-T}} \quad (4.31)$$

liegt (in diesem Zusammenhang wurden sinnvollerweise nur positive Werte der Abtastperiode T betrachtet). Das Bild 4.7 zeigt, wie der dieserart zulässige Verstärkungsfaktor V mit größer werdender Abtastperiode T abnimmt.

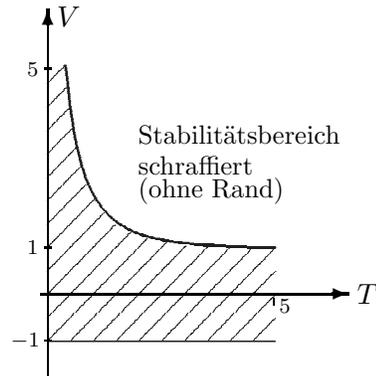


Bild 4.7: Verstärkungsfaktor V in Abhängigkeit von der Abtastperiode T , für den der Abtastregelkreis nach Bild 4.6 stabil ist (Ungl. (4.31)).

Bedenkt man, daß im Falle eines kontinuierlichen Proportionalreglers der Regelkreis für alle $V > -1$ stabil wäre, so erkennt man an diesem Beispiel die *destabilisierende* Wirkung, die dem Abtastprozeß zukommt.

Kapitel 5

Der Frequenzgang eines Abtastsystems

Unter den zahlreichen Möglichkeiten, das Übertragungsverhalten linearer zeitinvarianter Systeme zu beschreiben, nimmt der Frequenzgang eine Sonderstellung ein und zwar aus mehreren Gründen:

- Der Frequenzgang bietet eine Art der Systembeschreibung, die in vielen Fällen auch *experimentell* gewonnen werden kann.
- Aus dem Frequenzgang kann die Antwort eines Übertragungssystems (nach Abklingen der Einschwingvorgänge) für die große Klasse der harmonischen Eingangsfunktionen *unmittelbar* abgelesen werden.
- Mit Hilfe des Frequenzgangs können auch *Stabilitätsfragen* im geschlossenen Regelkreis sehr einfach beantwortet werden; man denke in diesem Zusammenhang an das Nyquist-Kriterium.
- Basierend auf der graphischen Darstellung des Frequenzgangs in der Form von Bode-Diagrammen gibt es einige sehr einfache doch nicht minder leistungsfähige *Regelkreisentwurfsverfahren*.
- Mit den Algorithmen der *Fast Fourier Transformation* (FFT) ist es heute durch die fortschreitende Leistungsfähigkeit der Computer möglich, sehr rasch aus dem Frequenzgang Antworten eines Systems im Zeitbereich, wie z.B. die Impulsantwort oder die Sprungantwort, zu berechnen. Aber auch die entsprechende Umkehrung, d.h. die Möglichkeit der numerischen Bestimmung des Frequenzgangs mittels FFT-

Algorithmen, legt die Verwendung des Frequenzgangs zur Charakterisierung von Übertragungssystemen nahe.

Während der Begriff des Frequenzgangs im Fall *kontinuierlicher* Übertragungssysteme sehr geläufig ist, wird seine Anwendung auf *Abtastsysteme* bedingt durch einige gedankliche Schwierigkeiten eher selten vorgenommen. Mit diesem Kapitel wird unter anderem deshalb beabsichtigt, die Beschreibung von Abtastsystemen im Frequenzbereich in leicht verständlicher Form dem Leser näher zu bringen.

5.1 Der Frequenzgang kontinuierlicher Systeme

Bevor wir uns der Behandlung von Abtastsystemen zuwenden, sollen noch einmal die wesentlichen Zusammenhänge im kontinuierlichen Fall festgehalten werden. Wir betrachten dazu ein lineares zeitinvariantes Übertragungssystem mit der Eingangsgröße $u(t)$ und der Ausgangsgröße $y(t)$, wie es im Bild 5.1 dargestellt ist.

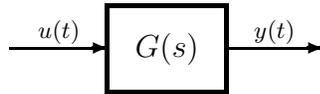


Bild 5.1: Kontinuierliches Übertragungssystem.

Die Übertragungsfunktion $G(s)$ beschreibe das Übertragungsverhalten dieses Systems, von dem wir ferner voraussetzen wollen, daß es die Eigenschaft der BIBO-Stabilität* besitze. Wir denken uns nun am Eingang eine harmonische Zeitfunktion mit der Kreisfrequenz ω angeschaltet, d.h.

$$u(t) = e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t . \quad (5.1)$$

*Ein kontinuierliches lineares zeitinvariantes Übertragungssystem mit einer Eingangsgröße und einer Ausgangsgröße wird BIBO-stabil bezeichnet, wenn es ausgehend von seinem Ruhezustand auf jede beschränkte Eingangsfunktion mit einer beschränkten Ausgangsfunktion antwortet. Das Übertragungssystem von Bild 5.1 ist genau dann BIBO-stabil, wenn in der Übertragungsfunktion $G(s)$ der Grad des Zählerpolynoms den Grad des Nennerpolynoms nicht übersteigt und $G(s)$ nur Pole in der linken offenen s-Halbebene besitzt.

Aufgrund der Linearität des Übertragungssystems und der Tatsache, daß die Übertragungsfunktion nur reelle Koeffizienten besitzt, ist es möglich, durch die Verwendung der komplexen Eingangsfunktion die Antwort auf die beiden reellen Eingangsfunktionen $\cos \omega t$ und $\sin \omega t$ *gleichzeitig* zu betrachten. Weiterhin können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit die Amplitude der Eingangsfunktion auf Eins normieren. Nach dem Abklingen der Einschwingvorgänge wird am Ausgang des Systems auch eine harmonische Zeitfunktion mit der *gleichen Frequenz* ω auftreten. Bezogen auf die Eingangsfunktion wird die Ausgangsgröße im allgemeinen eine veränderte Amplitude Y und eine Phasenverschiebung ϕ aufweisen, d.h. für hinreichend große t wird die Ausgangsfunktion

$$y(t) = Y e^{j(\omega t + \phi)} \quad (5.2)$$

lauten. Dabei gelten die folgenden Relationen für die Amplitude Y und die Phasenverschiebung ϕ :

$$Y = |G(j\omega)|, \quad \phi = \text{arc}G(j\omega). \quad (5.3)$$

In Gl.(5.2) eingesetzt, erhält man damit

$$y(t) = |G(j\omega)| e^{j(\omega t + \text{arc}G(j\omega))}. \quad (5.4)$$

In diesem Sinne bezeichnet man $G(j\omega)$ als Frequenzgang des Übertragungssystems. Variiert man die Frequenz ω in einem für das gerade vorliegende System interessierenden Intervall, so erhält man für jedes ω eine komplexe Zahl, die in ihrer Gesamtheit in der komplexen Zahlenebene aufgetragen die *Frequenzgangsortskurve* ergeben.

5.2 Übertragung des Begriffes "Frequenzgang" auf Abtastsysteme

Die nachfolgenden Überlegungen werden zunächst an einem konkreten Beispiel angestellt. Es wird dazu ein lineares zeitinvariantes Abtastsystem betrachtet, dessen z -Übertragungsfunktion durch

$$G^*(z) = \frac{1}{z - 0,5} \quad (5.5)$$

gegeben ist. In enger Anlehnung an die Ausführungen, die oben für das kontinuierliche Übertragungssystem angegeben wurden, wollen wir auch jetzt

die Antwort des Abtastsystems auf eine spezielle Eingangsfolge (u_k) untersuchen. Zu diesem Zweck wird das Abtastsystem (5.5) ausgehend von seinem Ruhezustand mit Eingangsfolge

$$(u_k) = (e^{j\omega kT}) \quad (5.6)$$

angeregt. Diese Eingangsfolge kann man sich durch Abtastung der harmonischen Zeitfunktion (5.1) erzeugt denken, wobei T die zugehörige Abtastperiode bedeutet. Wir werden im weiteren Folgen dieser Art auch als "harmonische" Folgen bezeichnen.

Mit Hilfe der z -Transformation können wir nun ganz einfach die Antwort des Abtastsystems auf diese spezielle Eingangsfolge angeben. Wir müssen dazu lediglich die z -Transformierte der Eingangsfolge bestimmen, diese mit der z -Übertragungsfunktion des Abtastsystems multiplizieren und anschließend die so gewonnene z -Transformierte der Ausgangsfolge in den Folgenbereich rücktransformieren.

Aus der Korrespondenztabelle 3.2 erhalten wir

$$u(z) = \mathcal{Z}\{(e^{j\omega kT})\} = \frac{z}{z - e^{j\omega T}} \quad (5.7)$$

und daraus für die Ausgangsfolge

$$y(z) = G^*(z)u(z) = \frac{1}{z - 0,5} \cdot \frac{z}{z - e^{j\omega T}}. \quad (5.8)$$

Damit wir für die Rücktransformation von $y(z)$ in den Folgenbereich ebenfalls die Korrespondenztabelle 3.2 unmittelbar anwenden können, entwickeln wir $y(z)$ in Partialbrüche der Form

$$\frac{z}{(z - 0,5)(z - e^{j\omega T})} = \frac{az}{z - 0,5} + \frac{bz}{z - e^{j\omega T}}. \quad (5.9)$$

Wir können Gl.(5.9) sofort durch z dividieren und dann die Koeffizienten a und b auf folgende Art bestimmen:

$$a = \frac{z - 0,5}{(z - 0,5)(z - e^{j\omega T})} \Big|_{z=0,5} = \frac{1}{0,5 - e^{j\omega T}}, \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{z - e^{j\omega T}}{(z - 0,5)(z - e^{j\omega T})} \Big|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{1}{e^{j\omega T} - 0,5} = \\ &= G^*(e^{j\omega T}). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Für die Antwort (y_k) erhalten wir daraus

$$y_k = \frac{1}{0,5 - e^{j\omega T}} 0,5^k + G^*(e^{j\omega T}) e^{j\omega k T} . \quad (5.12)$$

Der erste Summand in Gl.(5.12) wird für hinreichend große Werte von k vernachlässigbar klein, sodaß die Ausgangsfolge im eingeschwungenen Zustand allein durch den zweiten Summanden in Gl.(5.12) bestimmt wird. Bringt man die komplexe Zahl $G^*(e^{j\omega T})$ noch auf Polarkoordinatenform, so erhält man für (y_k) im eingeschwungenen Zustand

$$\begin{aligned} y_k &= |G^*(e^{j\omega T})| e^{j \operatorname{arc} G^*(e^{j\omega T})} e^{j\omega k T} = \\ &= |G^*(e^{j\omega T})| e^{j(\omega k T + \operatorname{arc} G^*(e^{j\omega T}))} . \end{aligned} \quad (5.13)$$

Offensichtlich wird durch diese Relation wiederum eine harmonische Folge beschrieben, wobei die formale Ähnlichkeit zur Gl.(5.4) sofort ins Auge sticht. Allerdings kann man nun die beiden Ausdrücke von $G^*(e^{j\omega T})$ in der Beziehung (5.13) nicht mehr direkt als Amplitude bzw. Phasenverschiebung interpretieren, wie dies im kontinuierlichen Fall möglich war, da diese Begriffe im Zusammenhang mit zeitdiskreten Folgen vorläufig keinen Sinn ergeben.

Ein Ausweg aus dieser Situation kann jedoch dadurch gefunden werden, daß man gedanklich sowohl der Eingangsfolge (5.6) als auch der Ausgangsfolge (5.13) eine entsprechende kontinuierliche, harmonische Zeitfunktion zuordnet. Wir bezeichnen diese Zeitfunktionen als *Trägerfunktionen* oder *Trägerschwingungen*, und wir können sie aus den Folgen formal dadurch gewinnen, indem wir in den Gln. (5.6) und (5.13) kT durch t ersetzen.

Folge: $e^{j\omega k T}$ $ G^*(e^{j\omega T}) e^{j(\omega k T + \operatorname{arc} G^*(e^{j\omega T}))}$	Trägerschwingung: $e^{j\omega t}$ $ G^*(e^{j\omega T}) e^{j(\omega t + \operatorname{arc} G^*(e^{j\omega T}))}$
---	--

Damit diese Zuordnung zwischen Folge und Trägerfunktion eindeutig ist, müssen aber gewisse Bedingungen eingehalten werden, welche die Frequenz ω und die Abtastperiode T betreffen. Im folgenden Bild 5.2 sind zwei Beispiele angegeben, wo die Zuordnung nicht mehr eindeutig möglich ist.

Im ersten Beispiel gilt offensichtlich

$$\operatorname{Im}\{e^{j\omega_1 k T}\} = \operatorname{Im}\{e^{j\omega_2 k T}\} \quad \text{mit} \quad \omega_2 = \frac{1}{3}\omega_1 ,$$

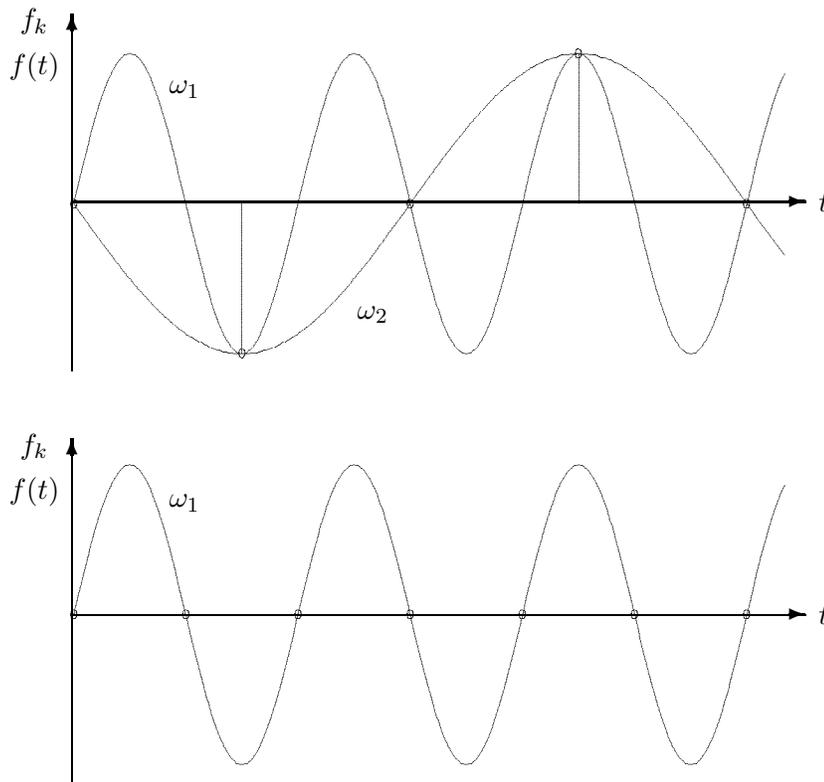


Bild 5.2: Beispiele für eine mehrdeutige Zuordnung zwischen Folge und Trägerfunktion.

während im zweiten Fall aus den Werten der Folgen nicht mehr unterschieden werden kann, ob die Kreisfrequenz der entsprechenden Zeitfunktion verschwindet oder gleich ω_1 ist. Aufgrund dieser Beispiele ist folgende Bedingung für eine eindeutige Zuordnung zwischen einer harmonischen Trägerfunktion und einer Folge plausibel:

Die Abtastperiode muß kleiner als die halbe Periode der Trägerschwingung sein.

Man muß also, um mit dem Gedankengebilde der Trägerschwingung sinnvoll weiteroperieren zu können, die Kreisfrequenz ω der Eingangsfolge (5.6) auf das Intervall

$$0 \leq \omega < \frac{\pi}{T} = \frac{\omega_a}{2} \quad (5.14)$$

beschränken. Dann aber kann man mit Hilfe der Trägerschwingungen wieder

die vom kontinuierlichen Fall her gewohnte Deutung der Beziehung (5.13) vornehmen:

$|G^*(e^{j\omega T})|$ bestimmt also das Amplitudenverhältnis zwischen der *Trägerschwingung der Ausgangsfolge* und der *Trägerschwingung der Eingangsfolge*, und durch $\text{arc}G^*(e^{j\omega T})$ wird die Phasenverschiebung zwischen den beiden Trägerfunktionen festgelegt. Man bezeichnet daher die komplexe Größe $G^*(e^{j\omega T})$ als *Frequenzgang des Abtastsystems*.

Das Bild 5.3 soll die eben dargelegten Zusammenhänge nochmals verdeutlichen. Es wird dazu angenommen, daß auf das Abtastsystem (5.5) eine harmonische Eingangsfolge mit einer Frequenz

$$\omega = 5$$

einwirkt. Außerdem legen wir den Wert der Abtastperiode mit

$$T = 0,1s$$

fest. Man erhält damit für den Frequenzgang an der Stelle $\omega T = 0,5$

$$G^*(e^{j\omega T}) = G^*(e^{j0,5}) = \frac{1}{e^{j0,5} - 0,5} = 1,64e^{-j0,9} . \quad (5.15)$$

Was wir eben für ein Abtastsystem erster Ordnung hergeleitet haben, läßt sich unmittelbar auch auf Systeme höherer Ordnung übertragen. Es ist dabei stets möglich, für die z -Transformierte der Ausgangsfolge eine Partialbruchentwicklung in der Form

$$y(z) = G^*(e^{j\omega T}) \frac{z}{z - e^{j\omega T}} + \text{Rest} \quad (5.16)$$

anzugeben, wobei der Rest alle Partialbrüche enthält, die durch die Pole der z -Übertragungsfunktion hervorgerufen werden. Unter der Voraussetzung, daß das Abtastsystem die Eigenschaft der BIBO-Stabilität besitzt, daß also sämtliche Polstellen seiner z -Übertragungsfunktion $G^*(z)$ im Inneren des Einheitskreises der komplexen Ebene gelegen sind, liefert der Rest in Gl.(5.16) in den Folgebereich rücktransformiert nur Anteile, die mit wachsenden Werten von k gegen Null streben. Das Übertragungsverhalten eines linearen, zeitinvarianten und stabilen Abtastsystems für harmonische

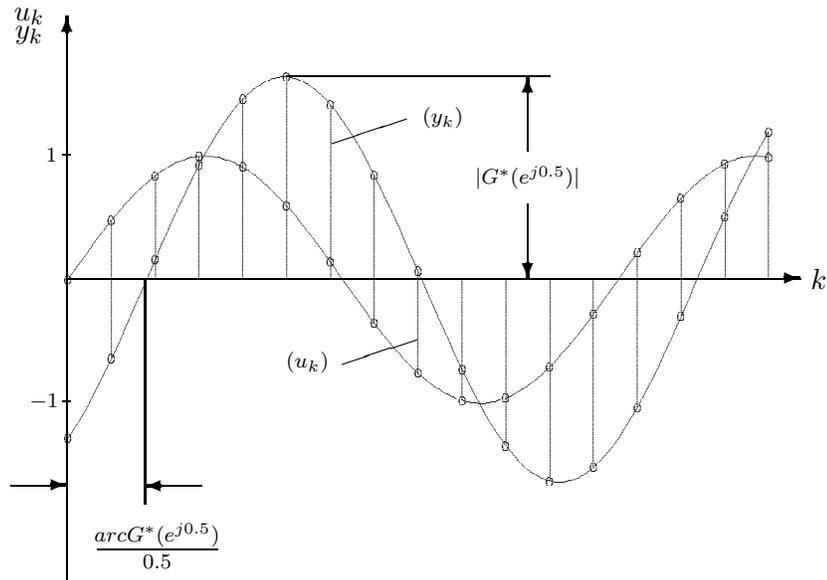


Bild 5.3: Zur Interpretation des Frequenzgangs von Abtastsystemen.

Eingangssfolgen wird daher im eingeschwungenen Zustand durch die komplexe Größe $G^*(e^{j\omega T})$, den Frequenzgang des Abtastsystems bestimmt*

$$y_k = G^*(e^{j\omega T})e^{j\omega kT} . \quad (5.17)$$

Die Kreisfrequenz ω der Eingangsfolge muß in diesem Zusammenhang aus den oben erläuterten Gründen kleiner als die halbe Abtastkreisfrequenz sein.

Natürlich ist es nun auch bei Abtastsystemen möglich, eine graphische Darstellung des Frequenzgangs in der Form einer Ortskurve in der komplexen Ebene anzugeben. Das Bild 5.4 enthält zum Beispiel die entsprechende Ortskurve für das Abtastsystem (5.5), wobei wiederum die Abtastperiode $T = 0,1$ s den Betrachtungen zugrunde gelegt wurde.

Im Hinblick auf später noch zu behandelnde Entwurfsverfahren für Abtastregelkreise wäre es allerdings äußerst wünschenswert, wenn man daneben noch eine weitere Form der graphischen Frequenzgangdarstellung, nämlich

Wir werden im weiteren auch häufig die komplexen Größen $G^(e^{j\omega T})$ bzw. $G(j\omega)$ von *instabilen* Übertragungssystemen benutzen, doch das sind dann reine Rechengrößen, die jedoch nicht unmittelbar eine physikalische Deutung im oben skizzierten Sinn zulassen.

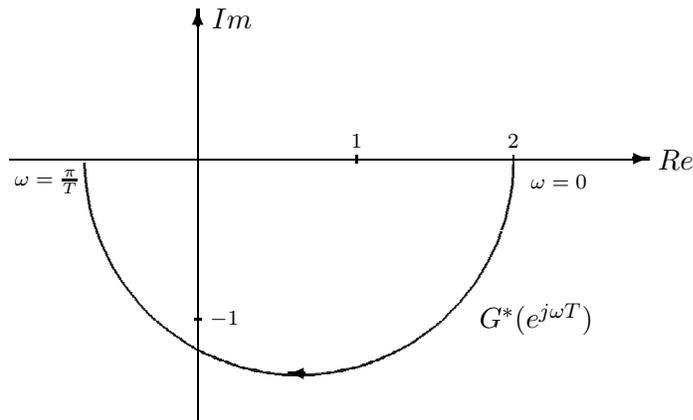


Bild 5.4: Ortskurve $G^*(e^{j\omega T})$ für das Abtastsystem (5.5).

die von den kontinuierlichen Systemen her bereits bekannten logarithmischen Frequenzkennlinien (BODE-Diagramme) bei Abtastsystemen zur Verfügung hätte. Die Erfüllung dieses Wunsches wird aber vorerst durch den Umstand vereitelt, daß der *Frequenzgang eines Abtastsystems keine rationale Funktion der Variablen $j\omega$* ist. Im Gegensatz zu den kontinuierlichen Systemen, wo man den Frequenzgang einfach dadurch erhält, daß man in der (gebrochen rationalen) Übertragungsfunktion die Variable s durch die Variable $j\omega$ ersetzt (und damit wieder eine gebrochen rationale Funktion in $j\omega$ erhält), ist es bei Abtastsystemen erforderlich, in der (gebrochen rationalen) z -Übertragungsfunktion die Variable z durch die *transzendente* Funktion $e^{j\omega T}$ zu substituieren. Durch welchen Trick man aus dieser scheinbar ausgewegenen Situation herausgelangt, soll im folgenden Abschnitt geschildert werden.

5.3 Frequenzkennlinien für Abtastsysteme

Unser Ziel ist es, durch geeignete Maßnahmen zu erreichen, daß der Frequenzgang eines Abtastsystems eine *rationale* Funktion einer "Frequenz" wird. Wenn es uns also gelingt, eine Transformation zu finden, die den halben Einheitskreis der komplexen z -Ebene, den wir ja mit $e^{j\omega T}$ im Intervall $0 \leq \omega < \pi/T$ beschreiben, auf die imaginäre Achse der komplexen w -Ebene abbildet, so haben wir das Problem gelöst, sofern die Abbildungsvorschrift

selbst rational ist. Genau das können wir mit Hilfe der bilinearen Transformation

$$w = \frac{z - 1}{z + 1} \quad (5.18)$$

erreichen. Ersetzt man nämlich auf der rechten Seite dieser Gleichung z durch $e^{j\omega T}$, so erhält man dafür

$$\begin{aligned} \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} &= \frac{e^{j\omega \frac{T}{2}} - e^{-j\omega \frac{T}{2}}}{e^{j\omega \frac{T}{2}} + e^{-j\omega \frac{T}{2}}} = \\ &= \tanh j\omega \frac{T}{2} = j \tan \omega \frac{T}{2}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Der Imaginäranteil der komplexen Variablen w , den wir mit v bezeichnen wollen, hängt also über die Beziehung

$$v = \tan \omega \frac{T}{2} \quad (5.20)$$

von der Kreisfrequenz ω ab und nimmt Werte im Intervall $0 \leq v < \infty$ an, wenn ω im Intervall $0 \leq \omega < \pi/T$ liegt. Es hat sich nun als nützlich erwiesen, den Normierungsfaktor $T/2$ bei der Frequenz ω in Gl. (5.20) auch bei der Variablen auf der linken Seite einzuführen [18]:

$$v = \Omega \frac{T}{2} = \tan \omega \frac{T}{2} \quad (5.21)$$

Durch diese Normierung wird gewährleistet, daß Ω ebenfalls die Dimension einer Frequenz erhält, weshalb wir Ω auch als *transformierte Frequenz* bezeichnen. Für den Fall

$$\omega T \ll 1 \quad \text{bzw.} \quad \omega \ll \frac{1}{T}$$

– wenn also der Wert der Tangensfunktion in Gl.(5.21) etwa gleich dem Wert ihres Argumentes wird – gilt

$$\Omega \approx \omega, \quad (5.22)$$

d.h. dann unterscheiden sich reale und transformierte Frequenz nur noch beliebig wenig.

Wir wollen nun nachträglich die Normierung auch in der bilinearen Transformation (5.18) einführen und schreiben

$$w = q \frac{T}{2} = \frac{z - 1}{z + 1}. \quad (5.23)$$

Für die entsprechende Umkehrung erhalten wir dann

$$z = \frac{1 + q\frac{T}{2}}{1 - q\frac{T}{2}}, \quad (5.24)$$

womit wir jetzt in der Lage sind, den Weg zu einer für den Einsatz logarithmischer Frequenzkennlinien geeigneten Beschreibung eines Abtastsystems anzugeben:

Ausgehend von der z -Übertragungsfunktion $G^*(z)$ eines Abtastsystems bestimme man mit Hilfe der Transformation (5.24) die sogenannte q -Übertragungsfunktion $G^\#(q)$:

$$G^\#(q) := G^*(z) \Big|_{z = \frac{1 + q\frac{T}{2}}{1 - q\frac{T}{2}}} \quad (5.25)$$

In der so ermittelten q -Übertragungsfunktion ersetze man die komplexe Variable q durch $j\Omega$, womit man den Frequenzgang eines Abtastsystems als *rationale Funktion der transformierten Frequenz Ω* erhält.

Zur Verdeutlichung der bisherigen Ausführungen wollen wir nun die logarithmischen Frequenzkennlinien für das Abtastsystem (5.5) (mit $T = 0,1s$) bestimmen. Die Berechnung der q -Übertragungsfunktion nach Gl.(5.25) liefert

$$G^\#(q) = \frac{1}{z - 0,5} \Big|_{z = \frac{1+0,05q}{1-0,05q}} = \frac{2(1 - 0,05q)}{1 + 0,15q} \quad (5.26)$$

und damit erhält man für den Frequenzgang

$$G^\#(j\Omega) = \frac{2(1 - 0,05j\Omega)}{1 + 0,15j\Omega}. \quad (5.27)$$

Die zugehörigen Frequenzkennlinien können jetzt nach der von den kontinuierlichen Systemen her bekannten Vorgangsweise angefertigt werden. Das Programm $\mu LINSY$ stellt dem Anwender dazu den Befehl '**bode**' zur Verfügung, mit dessen Hilfe auch die Frequenzkennlinien im Bild 5.5 zum vorliegenden Beispiel gezeichnet wurden. Zur Illustration wurden dabei auch die Werte der realen Kreisfrequenz angegeben.

Wollte man z.B. aus den Frequenzkennlinien ablesen, wie die Antwort des Systems auf die Eingangsfolge $(u_k) = (e^{j0,5k})$ lautet, so muß man zuerst den

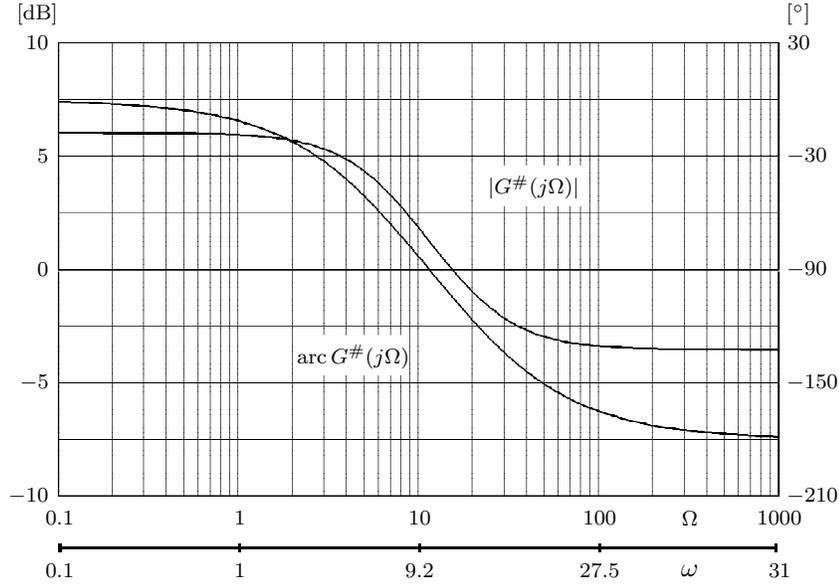


Bild 5.5: Logarithmische Frequenzkennlinien für das Abtastsystem (5.5).

entsprechenden Wert der transformierten Frequenz nach Gl.(5.21) bestimmen

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan \omega \frac{T}{2} = 20 \tan 0,25 = 5,11 .$$

Aus den Frequenzkennlinien entnimmt man für diesen Wert von Ω

$$|G^\#(j\Omega)| \approx 4,2 \text{ dB} = 1,6 \quad \text{arc } G^\#(j\Omega) \approx -52^\circ \approx -0,9 \text{ rad} ,$$

was im Rahmen der Zeichengenauigkeit mit dem Resultat aus Gl.(5.15) übereinstimmt. Demnach gilt im eingeschwungenen Zustand

$$\begin{aligned} y_k &= G^\#(j\Omega) e^{j\omega k T} = |G^\#(j\Omega)| e^{j(\omega k T + \text{arc } G^\#(j\Omega))} = \\ &= 1,6 e^{j(0,5k - 0,9)} . \end{aligned} \quad (5.28)$$

Die bilineare Transformation (5.23) bzw. (5.24) bringt noch einen weiteren Vorteil mit sich:

Jedem Punkt aus dem Inneren des Einheitskreises der z -Ebene wird nämlich durch Gl.(5.23) eindeutig ein Punkt in der linken offenen q -Halbebene zugeordnet. Es ist daher möglich, auch an Hand der q -Übertragungsfunktion

zu entscheiden, ob ein Abtastsystem die Eigenschaft der BIBO-Stabilität besitzt, denn aus dem Stabilitätskriterium (4.16) des Kapitels 4 folgt nun unmittelbar der Satz:

Ein kausales Abtastsystem mit der q -Übertragungsfunktion $G^\#(q)$ ist genau dann BIBO-stabil, wenn in $G^\#(q)$ der Zählergrad nicht größer als der Nennergrad ist, und alle Pole von $G^\#(q)$ in der linken offenen q -Halbebene liegen.

Diese notwendige und hinreichende Bedingung entspricht aber genau dem Stabilitätskriterium bei kontinuierlichen Systemen, sodaß wir alle bekannten Verfahren der Stabilitätsprüfung kontinuierlicher Übertragungssysteme ungeändert auf Abtastsysteme anwenden können, sofern deren Übertragungsverhalten durch die zugehörigen q -Übertragungsfunktionen gegeben ist.

5.4 Der Frequenzgang abgetasteter kontinuierlicher Systeme

Vor allem im Zuge der Anwendung von Syntheseverfahren im Frequenzbereich wird es sich häufig als notwendig erweisen, den Frequenzgang einer Anordnung, wie sie im Bild 5.6 dargestellt ist, ausgehend von der Übertragungsfunktion $G(s)$ des kontinuierlichen Systems zu berechnen.

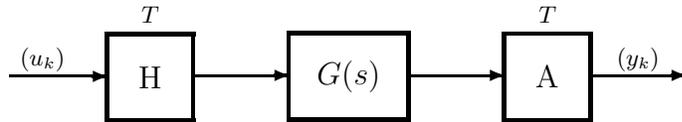


Bild 5.6: Abtastsystem mit kontinuierlichem Teil.

Aufgrund der bisherigen Ausführungen wäre es naheliegend, für diesen Zweck zuerst mit Hilfe der Beziehung (3.11) die zugehörige z -Übertragungsfunktion $G^*(z)$ zu bestimmen und diese anschließend der bilinearen Transformation zu unterwerfen:

$$G^\#(q) = G^*(z) \Big|_{z = \frac{1 + q\frac{T}{2}}{1 - q\frac{T}{2}}} \quad (5.29)$$

Es hat sich jedoch in vielen Fällen ein anderer Weg als günstig erwiesen. Man geht dabei so vor, daß man $G(s)$ in Partialbrüche zerlegt, für die einzelnen Terme dann mit Hilfe einer geeigneten Korrespondenztabelle direkt die

entsprechenden q -Übertragungsfunktionen bestimmt und diese anschließend aufsummiert. In der Tabelle 5.1 sind einige der wichtigsten Korrespondenzen für den Übergang vom s -Bereich in den q -Bereich angegeben.

$G(s)$	$G^\#(q)$
1	1
$\frac{1}{s}$	$\frac{1 - q^{\frac{T}{2}}}{q}$
$\frac{1}{1 + s\frac{1}{a}}$	$\frac{1 - q^{\frac{T}{2}}}{1 + q^{\frac{1}{A}}}$ $A = \frac{2}{T} \tanh(a\frac{T}{2})$
$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1 - q^{\frac{T}{2}}}{q^2}$
$\frac{1}{(1 + s\frac{1}{a})^2}$	$\frac{(1 - q^{\frac{T}{2}})(1 + q^{\frac{1}{B}})}{(1 + q^{\frac{1}{A}})^2}$ $A = \frac{2}{T} \tanh(a\frac{T}{2})$ $B = \frac{A}{1 + aA\frac{T^2}{4} - \frac{a}{A}}$

Tabelle 5.1: Korrespondenzen für den Übergang von der s -Übertragungsfunktion zur q -Übertragungsfunktion.

Aus dieser Korrespondenztabelle kann man eine weitere Eigenschaft der q -Übertragungsfunktion erkennen. Es gilt nämlich die Näherungsbeziehung

$$G^\#(.) \approx G(.) \quad (5.30)$$

für den Fall, daß im System vom Bild 5.6 hinreichend rasch abgetastet wird. Im Grenzfall $T \rightarrow 0$ entsteht aus der q -Übertragungsfunktion wiederum die entsprechende kontinuierliche Übertragungsfunktion.

Die praktische Anwendung der Korrespondenztabelle 5.1 soll nun an einem einfachen Beispiel demonstriert werden. Wir wollen dazu die zu

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad \text{und} \quad T = 0,4s$$

gehörende q -Übertragungsfunktion $G^\#(q)$ bestimmen.

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \\ &= \frac{1}{1+s} - \frac{0,5}{1+\frac{s}{2}}. \end{aligned}$$

Aus der Tabelle 5.1 entnehmen wir dafür

$$A_1 = 5 \tanh 0,2 = 0,987,$$

$$A_2 = 5 \tanh 0,4 = 1,9.$$

Für $G^\#(q)$ erhält man somit

$$G^\#(q) = \frac{1 - \frac{q}{5}}{1 + \frac{q}{0,987}} - \frac{0,5(1 - \frac{q}{5})}{1 + \frac{q}{1,9}} = \frac{0,5(1 - \frac{q}{5})(1 + \frac{q}{25,3})}{(1 + \frac{q}{0,987})(1 + \frac{q}{1,9})}.$$

Um den Anwender beim Übergang von der s -Übertragungsfunktion zur q -Übertragungsfunktion zu unterstützen, enthält das Programm $\mu LINSY$ die Funktion '@q'. Damit läßt sich das vorliegende Beispiel durch die beiden Anweisungen sehr einfach lösen.

$$G = 1 / (<1, 1> * <2, 1>)$$

$$G\# = @q(G, 0.4)$$

Zusammenfassend halten wir also fest:

Der Frequenzgang eines Abtastsystems kann dadurch, daß man sowohl der Eingangsfolge als auch der Ausgangsfolge gedanklich eine Trägerfunktion zuordnet, auf die gleiche Weise physikalisch gedeutet werden, wie wir es von den kontinuierlichen Systemen gewohnt sind. Durch die Einführung einer geeigneten bilinearen Transformation erreicht man außerdem, daß der diskrete Frequenzgang eine rationale Funktion der (transformierten) Frequenz wird, was den Einsatz logarithmischer Frequenzkennlinien mit all ihren Vorteilen auch bei Abtastsystemen gestattet.

5.5 Einige Eigenschaften der q -Übertragungsfunktion

Im folgenden Abschnitt wollen wir den Zusammenhang zwischen der Übertragungsfunktion $G(s)$ und der zugehörigen q -Übertragungsfunktion $G^\#(q)$ nochmals untersuchen. Dabei werden einige Eigenschaften gezeigt, die auch ohne

explizite Rechnung angegeben werden können. Es wird davon ausgegangen, daß die Übertragungsfunktion $G(s)$ in einer normierten Form vorliege

$$G(s) = \frac{VP(s)}{s^\lambda Q(s)}$$

$\lambda = 0, 1, 2, \dots$, $P(s), Q(s)$ Polynome in s mit $P(0) = Q(0) = 1$,

Zählergrad ($G(s)$) < Nennergrad ($G(s)$).

Der so definierte Parameter V wird *Verstärkungsfaktor* genannt. Der Tabelle 5.1 entnimmt man, daß ein Pol von $G(s)$ bei

$$s = a$$

in einen Pol bei

$$q = A = \frac{2}{T} \tanh\left(a\frac{T}{2}\right)$$

von $G^\#(q)$ übergeht. Setzt man nun $a = x + jy$, so folgt

$$A = \frac{2}{T} \cdot \frac{\sinh(Tx) + j \sin(Ty)}{\cosh(Tx) + \cos(Ty)}.$$

Eine zusätzliche Nullstelle tritt bei $q = 2/T$ auf. Da wir diesen speziellen Wert noch öfters benötigen werden, führen wir folgende Definition ein

$$\Omega_0 := \frac{2}{T}. \quad (5.31)$$

Faßt man die Ergebnisse zusammen, so lassen sich folgende Eigenschaften aus obiger Beziehung ableiten:

- Ein reeller Pol von $G(s)$ geht in einen reellen Pol von $G^\#(q)$ über.
- Ein komplexer Pol von $G(s)$ geht in einen komplexen Pol von $G^\#(q)$ über*.
- Ein stabiler Pol von $G(s)$ (d.h. $x < 0$) geht in einen ebensolchen von $G^\#(q)$ über.

*Wir schließen hier die Möglichkeit

$$y = k\frac{\pi}{2}\Omega_0 = k\frac{\pi}{T}, \quad k = 1, 2, \dots$$

aus. In diesem Fall wäre $G^\#(q)$ von niedrigerer Ordnung als $G(s)$.

- Ein Pol von $G(s)$ auf der $j\omega$ -Achse geht in einen Pol von $G^\#(q)$ auf der $j\Omega$ -Achse über.
- Die Übertragungsfunktion $G^\#(q)$ hat mindestens eine Nullstelle bei $q = \Omega_0$ ^{**}.

Beachtet man, daß die Beziehung (5.30) für betragsmäßig hinreichend kleine Werte von ωT gilt, so folgt

$$G^\#(q) = \frac{V \left(1 - \frac{q}{\Omega_0}\right) \tilde{P}(q)}{q^\lambda \tilde{Q}(q)}$$

$$\lambda = 0, 1, 2, \dots, \quad \tilde{P}(q), \tilde{Q}(q) \text{ Polynome in } q \text{ mit } \tilde{P}(0) = \tilde{Q}(0) = 1.$$

Der Verstärkungsfaktor V und der integrierende Charakter λ sind invariant gegenüber der q -Transformation.

Im Gegensatz zum kontinuierlichen Fall gilt jedoch im allgemeinen

$$\text{Zählergrad } (G^\#(q)) = \text{Nennergrad } (G^\#(q)).$$

Nicht zuletzt machen diese Eigenschaften die q -Transformation für den Entwurf diskreter Systeme so attraktiv. Viele der gewohnten Vorgangsweisen für kontinuierliche Systeme können direkt oder mit kleinen Modifikationen übernommen werden.

Entwirft man eine Reglerübertragungsfunktion im q -Bereich, so muß die zugehörige Differenzgleichung realisierbar sein. Aus der Gleichung (5.23) folgt

$$R^*(z) = R^\#(q) \Big|_{q = \frac{z-1}{z+1}}.$$

Eine Differenzgleichung ist genau dann realisierbar, wenn für die zugehörige z -Übertragungsfunktion gilt (siehe Abschnitt 3.5)

$$\text{Zählergrad } (R^*(z)) \leq \text{Nennergrad } (R^*(z))$$

oder gleichbedeutend

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |R^*(z)| < \infty.$$

Aufgrund der Gleichung (5.23) folgt sofort:

^{**}Das gilt nicht mehr, falls $G(s)$ sprungfähig ist.

Eine q -Übertragungsfunktion $R^\#(q)$ ist genau dann realisierbar, wenn gilt

$$\lim_{q \rightarrow \Omega_0} |R^\#(q)| < \infty .$$

Diese Realisierbarkeitsbedingung besagt, daß $R^\#(q)$ keine Polstelle bei $q = \Omega_0$ aufweisen darf. Man beachte die Abweichung von der entsprechenden Bedingung im zeitkontinuierlichen Fall.

Kapitel 6

Das Frequenzkennlinienverfahren

Das Frequenzkennlinienverfahren ist eine einfache Entwurfsmethode, die auf eine sehr häufig auftretende Synthesaufgabe zugeschnitten ist: Zu einer gegebenen Streckenübertragungsfunktion soll ein Regler derart angegeben werden, daß der geschlossene Regelkreis gewisse Spezifikationen erfüllt. Die Vorgaben betreffen hierbei die Antworten des Regelkreises auf gewisse ausgewählte Testfunktionen. Der Entwurf selbst wird der Einfachheit wegen im Frequenzbereich durchgeführt.

Der hier vorgestellte Weg ist eine Näherungslösung der ursprünglichen Aufgabe. Die hierdurch gewonnene Vereinfachung bringt eine gewisse Einbuße an Exaktheit mit sich, sodaß eine Simulation zur Absicherung der Ergebnisse unumgänglich wird. Trotzdem macht die Möglichkeit, schnell einen "brauchbaren" Regler zu entwerfen, gerade dieses Verfahren für den Praktiker interessant.

6.1 Das Synthesproblem

Allen weiteren Überlegungen liegt ein einschleifiger Regelkreis mit einem Freiheitsgrad, d.h. mit einer noch unbestimmten Übertragungsfunktion, zugrunde (Bild 6.1). Es ist zweckmäßig, gleich von den [4] q -Übertragungsfunktionen auszugehen, da die eigentliche Synthese im Frequenzbereich erfolgen wird. $G^\#(q)$ bezeichnet die gegebene Übertragungsfunktion der Strecke und $R^\#(q)$ die gesuchte Übertragungsfunktion des Reglers. Für das Übertragungsverhalten des Regelkreises ist ausschließlich das Produkt $G^\#(q)R^\#(q)$ maßgebend, das *Übertragungsfunktion des offenen Kreises* genannt wird

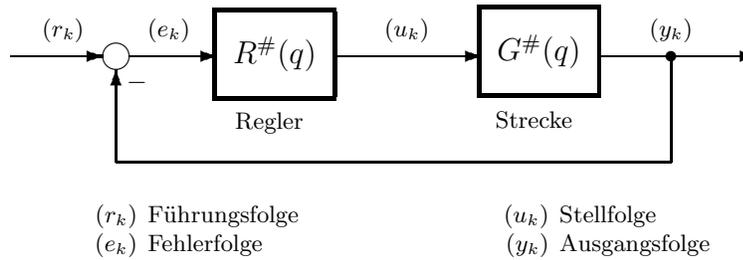


Bild 6.1: Einschleifiger Regelkreis.

(Bild 6.2)

$$L^\#(q) := G^\#(q)R^\#(q) . \quad (6.1)$$

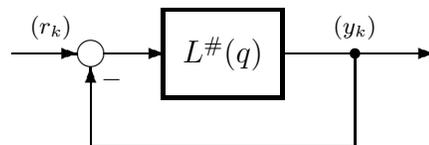


Bild 6.2: Zur Definition der Übertragungsfunktion des offenen Kreises $L^\#(q)$.

Eines der Entwurfsziele ist es, dieser Übertragungsfunktion eine gewünschte Form zu verleihen. Der Einfluß des Reglers $R^\#(q)$ auf $L^\#(q)$ läßt sich besonders einfach überblicken, wenn logarithmische Frequenzkennlinien benutzt werden, da gilt:

$$\begin{aligned}
 |L^\#(j\Omega)|_{\text{dB}} &= |G^\#(j\Omega)|_{\text{dB}} + |R^\#(j\Omega)|_{\text{dB}} \\
 \text{arc } L^\#(j\Omega) &= \text{arc } G^\#(j\Omega) + \text{arc } R^\#(j\Omega) .
 \end{aligned}$$

Die Reihenschaltung zweier Übertragungsfunktionen erfordert ja nur die Addition der jeweiligen Amplituden- bzw. Phasengänge. Mit Hilfe des *Nyquistkriteriums* [14] kann die Stabilität des geschlossenen Kreises anhand der Ortskurve $L^\#(j\Omega)$ beurteilt werden.

Die bevorstehende Aufgabe lautet: Herstellung einer Verbindung zwischen dem Einschwingverhalten des geschlossenen Kreises und der Übertragungsfunktion des offenen Kreises. Verfügen wir

- a) über Kenngrößen, die das Einschwingverhalten des geschlossenen Kreises charakterisieren,

- b) über Kenngrößen, die den Frequenzgang des offenen Kreises charakterisieren und
- c) über eine Beziehung zwischen den Größen von a) und b), dann sind wir am Ziel. Um einen Entwurf durchzuführen, müssen wir nur mehr im ersten Schritt die Kenngrößen von a) mittels c) in solche von b) überführen und im zweiten Schritt ein Korrekturglied so bestimmen, daß der offene Kreis $L^\#(q)$ die Vorgaben von b) erfüllt.

Das hier vorgestellte Frequenzkennlinienverfahren ist eine Näherungslösung des obigen Problems. Für einen bestimmten Typ von $L^\#(q)$ – $L^\#(q)$ ist hierbei von zweiter Ordnung – kann das Problem exakt gelöst werden. Wir geben uns aber mit Faustformeln und einigen qualitativen Überlegungen zufrieden. Über den Erfolg des Entwurfes entscheidet dann die anschließende Simulation.

6.2 Kenngrößen des geschlossenen Kreises

Das Einschwingverhalten des geschlossenen Kreises wird aufgrund seiner Sprungantwort bewertet. Hierzu wählt man einen typischen Regelkreis

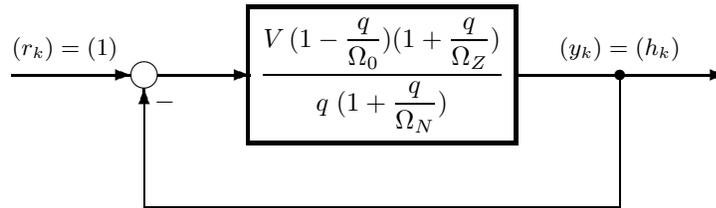


Bild 6.3: Ein typischer Regelkreis zweiter Ordnung.

zweiter Ordnung (Bild 6.3), schaltet auf den Eingang einen Sprung, also $(r_k) = (1)$, und untersucht die Ausgangsfolge (y_k) , die für diese Eingangsfolge mit (h_k) bezeichnet wird. Bei geeigneter Wahl der Parameter dieses Kreises gilt nun für die Sprungantwort (h_k) :

$$h_k = 1 - \alpha\beta^k \sin(k\varphi + \psi), \quad k = 0, 1, \dots$$

mit $1 = \alpha \sin(\psi), \quad 0 < \beta < 1$

und $0 < \psi < 90^\circ, \quad 0 < \varphi < 90^\circ.$

Für eine Folge ist es schwierig, geeignete Kenngrößen anzugeben, deshalb beschreiten wir einen kleinen Umweg. Wir versuchen, zu (h_k) eine möglichst

”glatte” Zeitfunktion anzugeben, die zu allen Abtastzeitpunkten mit der Folge übereinstimmt. Dies ist leicht möglich, da

$$h(kT) = h_k = 1 - \alpha \left(\beta^{\frac{1}{T}} \right)^{kT} \sin\left(\frac{\varphi}{T} kT + \psi\right)$$

gilt. Ersetzt man hier kT durch t , so ist die interpolierende Funktion bereits gefunden (Bild 6.4).

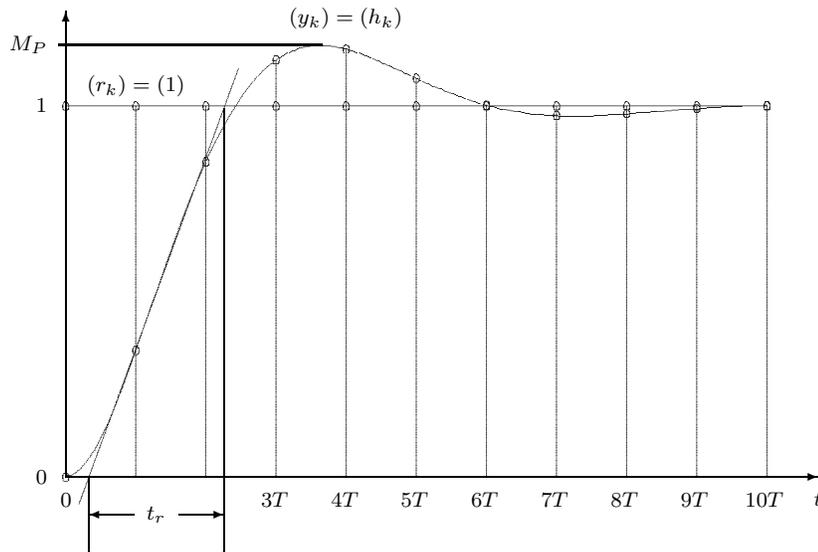


Bild 6.4: Kenngrößen einer Sprungantwort

Zur Bewertung dieser Funktion wählt man jetzt die Kenngrößen *Anstiegszeit* t_r und *Überschwingweite* M_p , die in enger Verbindung mit dem Frequenzgang des offenen Kreises stehen. Es ist jedoch zu beachten, daß diese interpolierende Funktion im allgemeinen nur zu den Abtastzeitpunkten mit der tatsächlichen Ausgangsgröße der Strecke übereinstimmt. Grob ausgedrückt ist die Anstiegszeit ungefähr die Zeit, die zum erstmaligen Erreichen des Sollwertes benötigt wird, und die Überschwingweite ist ungefähr der größte Wert von (h_k) .

Es hat sich nun gezeigt, daß diese Kenngrößen auch noch für Systeme höherer Ordnung sinnvoll sind, insbesondere dann, wenn die Sprungantwort des geschlossenen Kreises in erster Näherung durch ein konjugiert komplexes

Polpaar (im q -Bereich) bestimmt wird*.

Im Gegensatz zu den obigen zwei Kenngrößen kann die dritte Kenngröße, die bleibende Regelabweichung, einfach angegeben werden. Unter der *bleibenden Regelabweichung* für eine Testfunktion (r_k) versteht man den Grenzwert

$$e_\infty|_{(r_k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} (r_k - y_k)$$

jeweils für eine der Testfunktionen $(r_k) = (1), (kT), (\frac{1}{2}(kT)^2), \dots$. Den speziellen Fall $(r_k) = (1)$ zeigt Bild 6.5.

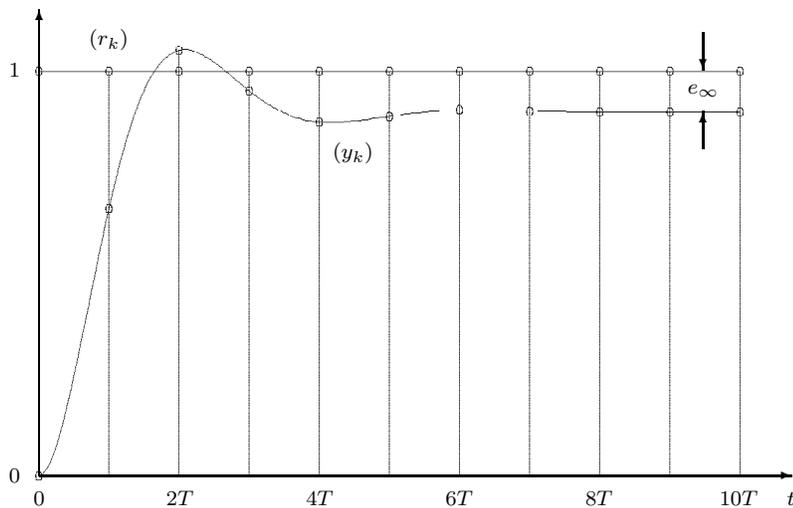


Bild 6.5: Bleibende Regelabweichung

*Wir setzen hierbei voraus, daß für einen derartigen Pol bei $q = a$ die Ungleichung $|a| \leq \Omega_0$ gilt, da anderenfalls keine interpolierende Funktion in unserem Sinne angegeben werden kann.

6.3 Kenngrößen des offenen Kreises

Die nachstehenden Betrachtungen gelten der Übertragungsfunktion des offenen Kreises $L^\#(q)$. Diese liege hierzu in folgender normierten Form vor

$$L^\#(q) = \frac{V P(q)}{q^\lambda Q(q)} \quad (6.2)$$

$$\lambda = 0, 1, 2, \dots, \quad P(q), Q(q) \text{ Polynome in } q, \quad P(0) = Q(0) = 1.$$

Die erste Kenngröße ist der *Verstärkungsfaktor* V gemäß der Beziehung (6.2). Für den Fall, daß der offene Kreis stabil ist, strebt seine Sprungantwort für $k \rightarrow \infty$ gegen V ; V ist also dann ein Maß der Verstärkung des offenen Kreises für Frequenzen, die sehr nahe bei Null liegen. Vor der Behandlung der anderen Größen sei die Stabilität des geschlossenen Kreises erörtert. Der Synthese selbst liegen die q -Übertragungsfunktionen zugrunde, daher führt das Nyquistkriterium prinzipiell zum Ziel. Für einen häufig vorkommenden Typ von Übertragungsfunktionen reicht jedoch ein *vereinfachtes Schnittpunktkriterium* aus [16]. $L^\#(q)$ liege in normierter Form gemäß (6.2) vor und genüge den folgenden Bedingungen:

- Alle Pole von $L^\#(q)$ haben einen negativen Realteil mit Ausnahme eventuell vorhandener Pole bei $q = 0$.
- Die Betragskennlinie von $L^\#(j\Omega)$ weist genau einen Schnittpunkt mit der 0-dB Linie auf, und sie verläuft für $\Omega \rightarrow \infty$ unterhalb dieser.
- Der Verstärkungsfaktor ist positiv.

Die zum Schnitt der Betragskennlinie mit der 0-dB Linie gehörende Frequenz (Bild 6.6) nennt man *Durchtrittsfrequenz* Ω_C ; sie genügt der Bestimmungsgleichung

$$|L^\#(j\Omega_C)| = 1.$$

Den Abstand der Phase eben an dieser Stelle zu -180° (Bild 6.6), also den Winkel

$$\phi = \arg L^\#(j\Omega_C) + 180^\circ,$$

bezeichnet man als *Phasenreserve*.

Unter diesen Voraussetzungen besagt das vereinfachte Schnittpunktkriterium:

Der geschlossene Kreis ist genau dann *stabil*, wenn die *Phasenreserve* ϕ positiv ist.

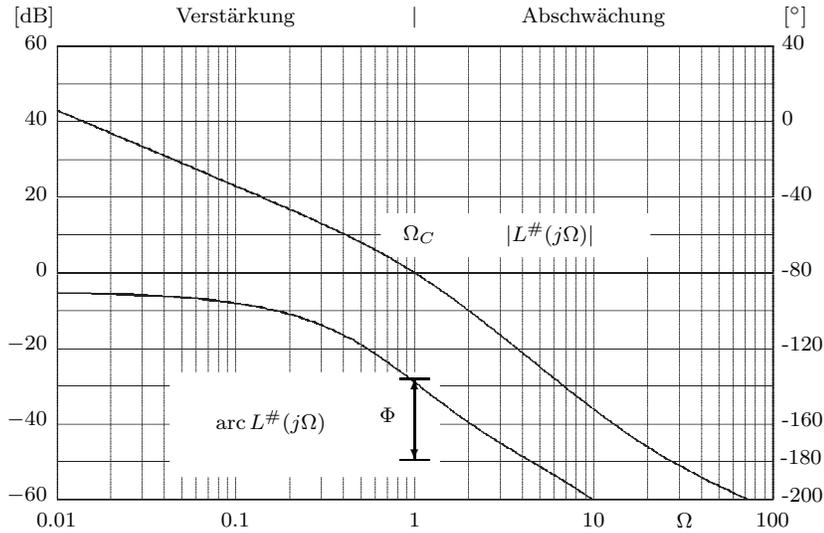


Bild 6.6: Frequenzgang einer typischen Übertragungsfunktion zweiter Ordnung

Von jetzt an werden die Betrachtungen auf Übertragungsfunktionen eingeschränkt, die dem vereinfachten Schnittpunktkriterium genügen.

Als zweite Kenngröße bietet sich die *Durchtrittsfrequenz* Ω_C an. Sie ist jene Frequenz, die das Frequenzband, das vom offenen Kreis verstärkt wird, von jenem trennt, das der offene Kreis abschwächt. Ω_C ist also ein ungefähres Maß für die Bandbreite des offenen Kreises (Bild 6.6).

Die dritte Kenngröße ist die *Phasenreserve* ϕ . Die Phasenreserve ist nicht nur für die Stabilität verantwortlich – sie mißt den Abstand zur Stabilitätsgrenze – sie sagt auch etwas über die Schwingungsneigung des geschlossenen Kreises aus. Berechnet man den Betrag der Führungsübertragungsfunktion $T^\#(q)$ an der Stelle $q = j\Omega_C$

$$T^\#(q) = \frac{L^\#(q)}{1 + L^\#(q)} \quad \text{mit} \quad y(z) = T^*(z)r(z)$$

$$|T^\#(j\Omega_C)| = \frac{|-\cos \phi - j \sin \phi|}{|1 - \cos \phi - j \sin \phi|} = \frac{1}{2} \frac{1}{|\sin \frac{\phi}{2}|},$$

so folgt

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} |T^\#(j\Omega_C)| = \infty.$$

Für $\phi = 0$ hat der geschlossene Kreis also eine Resonanzstelle bei $\Omega = \Omega_C$ (d.h. ein konjugiert komplexes Polpaar bei $q = \pm j\Omega_C$).

6.4 Der Zusammenhang zwischen den Kenngrößen des offenen und des geschlossenen Kreises

Der Verstärkungsfaktor V steht in direkter Verbindung mit der bleibenden Regelabweichung e_∞ , wie eine Nebenrechnung zeigt. Diesen Zusammen-

		λ		
		0	1	2
(r_k)	(1)	$\frac{1}{1+V}$	0	0
	(kT)	∞	$\frac{1}{V}$	0
	$(\frac{1}{2}(kT)^2)$	∞	∞	$\frac{1}{V}$

$$L^\#(q) = \frac{V}{q^\lambda} \frac{P(q)}{Q(q)}$$

Table 6.1: Die bleibende Regelabweichung e_∞ für verschiedene Testfunktionen.

hang gibt Tabelle 6.1 wieder, wobei vorausgesetzt ist, daß der geschlossene Kreis stabil ist. Es gibt für $\lambda \geq 0$ immer genau einen Wert, der vom Verstärkungsfaktor beeinflusst wird. Hat der offene Kreis z.B. einfach integrierenden Charakter ($\lambda = 1$), so beeinflusst der Verstärkungsfaktor die bleibende Regelabweichung für $(r_k) = (kT)$.

Bei einer typischen Übertragungsfunktion $L^\#(q)$ (Bild 6.6) schmiegt sich der Verlauf der Betragskennlinie der Führungsübertragungsfunktion $T^\#(j\Omega)$ für $\Omega \ll \Omega_C$ an die 0-dB Linie an, während er sich für $\Omega \gg \Omega_C$ an den Verlauf von $|L^\#(j\Omega)|$ anschmiegt (Bild 6.7). Die Durchtrittsfrequenz ist damit auch ein ungefähres Maß für die Bandbreite des geschlossenen Kreises. Damit ist sie aber auch ein Maß für die Schnelligkeit der Reaktion des Regelkreises auf Änderungen der Führungsgröße. Je *größer* die *Durchtrittsfrequenz* wird, desto *schneller* wird der Regelkreis auf einen Sprung reagieren, und wir können erwarten, daß die Anstiegszeit abnimmt. Untersuchungen an typischen Regelkreisen zweiter Ordnung haben gezeigt [15,16], daß das Produkt $\Omega_C t_r$ nur wenig von den Parametern des Kreises abhängt, und daß

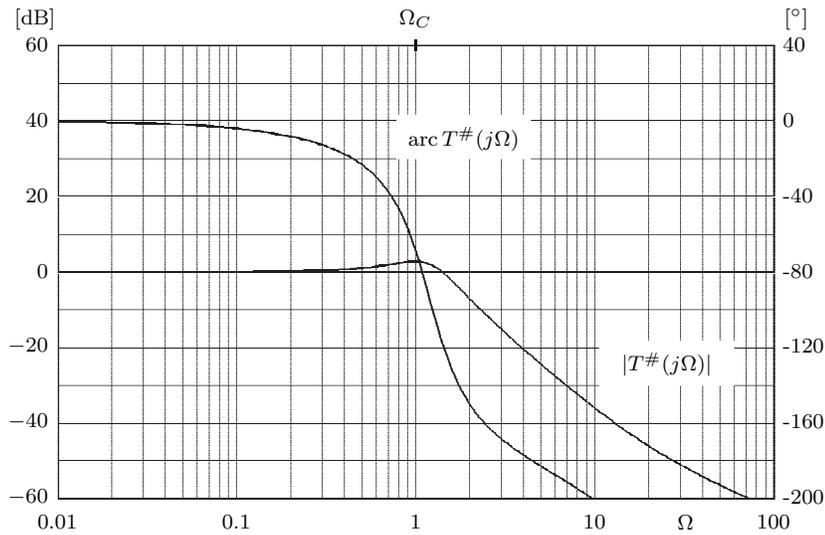


Bild 6.7: Frequenzgang der Führungsübertragungsfunktion $T^\#(j\Omega)$ eines typischen Systems zweiter Ordnung nach Bild 6.6.

näherungsweise gilt

$$\boxed{\Omega_C t_r \approx 1,2} \quad (6.3)$$

falls

$$\Omega_C \leq 0,2 \Omega_0 \quad \text{mit} \quad \Omega_0 = \frac{2}{T} .$$

Die Erfahrung hat gezeigt, daß diese Faustformel nicht nur bei den untersuchten Fällen zutrifft, sondern auch bei Regelkreisen höherer Ordnung als Richtschnur dienen kann.

Ganz ähnlich liegen die Verhältnisse beim Zusammenhang zwischen der Überschwingweite M_p und der Phasenreserve ϕ . Eine Verminderung der Phasenreserve bedeutet ja eine Annäherung an die Stabilitätsgrenze, und man kann eine Zunahme der Überschwingweite erwarten, bis sich für $\phi = 0$ überhaupt kein stationärer Zustand mehr einstellt. Genauere Untersuchungen haben gezeigt, daß in guter Näherung gilt

$$\phi [^\circ] + 100(M_p - 1) \approx 70 .$$

Diese Gleichung ist als reine Zahlenwertgleichung aufzufassen. Führt man

noch das *prozentuale Überschwingen* \ddot{u} ein, so folgt

$$\boxed{\phi [^\circ] + \ddot{u} [\%] \approx 70 .} \quad (6.4)$$

Auch diese Faustformel hat sich in der Praxis gut bewährt.

6.5 Entwurfsbeispiele

Das Frequenzkennlinienverfahren kann weitgehend in einem Rechenschema zusammengefaßt werden. Dieses wird hier angegeben, und die nachfolgenden Beispiele zeigen seinen Gebrauch. Die Abschnitte dieses Schemas lauten:

- a) Die Kenngrößen e_∞ , t_r und M_p , sowie die Abtastzeit T sind für eine Streckenübertragungsfunktion $G(s)$ zu spezifizieren.
- b) Die q -Übertragungsfunktion ist zu berechnen (Gl. (5.29)).
- c) Die Kenngrößen e_∞ , t_r und M_p werden in die Kenngrößen V bzw. λ , Ω_C und ϕ übersetzt. Dies geschieht mit Hilfe der Tabelle 6.1 und den Gln.(6.3) und (6.4).
- d) Ein Korrekturglied $R^\#(q)$ wird so gewählt, daß die Vorgaben an den Frequenzgang von $L^\#(q)$ erfüllt werden und der geschlossene Kreis stabil ist.
- e) Mit Hilfe der Beziehung (5.23) berechnet man

$$R^*(z) = R^\#(q) \Big|_q = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} = \frac{\sum_{i=0}^n b_i z^i}{\sum_{i=0}^n a_i z^i} = \frac{u(z)}{e(z)}, \quad a_n = 1$$

und erhält wegen Gleichungen (3.9) und (3.10) sofort die zugehörige Differenzengleichung

$$u_k + a_{n-1}u_{k-1} + \dots + a_0u_{k-n} = b_n e_k + b_{n-1}e_{k-1} + \dots + b_0e_{k-n} .$$

- f) Durch Simulation der Sprungantwort wird die Synthese überprüft. Ist das Ergebnis negativ, so sind Überlegungen anzustellen, ob die Spezifikationen von a) prinzipiell erfüllbar sind, bzw. ob das Korrekturglied von Punkt d) durch ein geeigneteres ersetzt werden kann.

Die Punkte a) bis f) bilden sozusagen eine Gebrauchsanweisung für das Frequenzkennlinienverfahren. Der Erfolg ist selbstverständlich wesentlich von der Wahl des Korrekturgliedes abhängig. Der Leser hat hier die Möglichkeit, seine Erfahrung einfließen zu lassen, die nicht zuletzt der Garant für einen Erfolg sein wird. Da der Entwurf im Frequenzbereich erfolgt, können viele Methoden Verwendung finden, die vom kontinuierlichen Fall her bekannt sind. Hierzu werden in den folgenden drei Beispielen Entwurfsmethoden vorgestellt.

Alle Berechnungen und ihre graphischen Präsentationen erfolgen mit $\mu LINSY$. Die zugehörigen Dialoge sind im Abschnitt A.6 zu finden. Die hier angegebenen numerischen Ergebnisse sind gerundete Werte dieser Dialoge. Falls man den Berechnungsvorgang exakt nachvollziehen will, wird empfohlen, dies anhand der $\mu LINSY$ -Dialoge zu tun.

Beispiel 1

a)
$$G(s) = 0,5 \frac{1}{1 + 2 \cdot 0.707s + s^2}$$

$$T = 0,5, \quad e_\infty|_{(1)} = 0, \quad t_r = 3, \quad \ddot{u} = 10\%$$

b)
$$G^\#(q) = 0,5 \frac{(1 - \frac{q}{4})(1 + \frac{q}{33,9})}{1 + 2 \cdot 0,722q + q^2}$$

c)
$$\lambda \geq 1, \quad \Omega_C = 0,4, \quad \phi = 60^\circ$$

d) Der offene Kreis muß mindestens einfach integrierenden Charakter haben. Wir wählen für den Regler $R^\#(q)$ den Ansatz

$$R^\#(q) = V_R \frac{1 + \frac{q}{\Omega_Z}}{q} \quad \text{mit} \quad V_R, \Omega_Z > 0,$$

dessen Form vollkommen einem analogen PI-Regler entspricht. An Stelle der logarithmischen Kennlinien der Strecke zeichnen wir gleich die von

$$L_1^\#(q) = \frac{G^\#(q)}{q}.$$

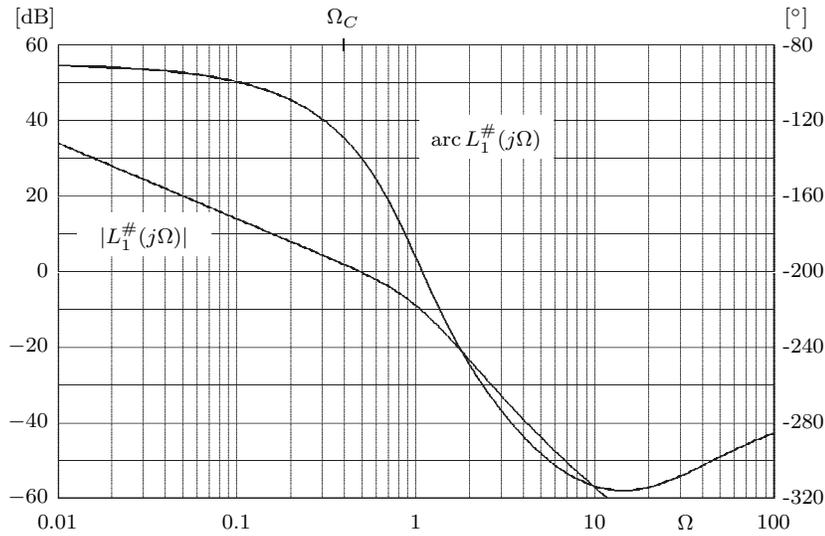


Bild 6.8: Frequenzgang des offenen Kreises $L_1^\#(q)$ zu Beispiel 1.

Aus dem Bild 6.8 liest man nun direkt ab, daß die Phase an der Stelle $\Omega = \Omega_C$ um $9,5^\circ$ angehoben und der Betrag eben an dieser Stelle um 2 dB gesenkt werden muß. Wegen

$$\arctan \left(V_R \left(1 + j \frac{\Omega_C}{\Omega_Z} \right) \right) = \arctan \frac{\Omega_C}{\Omega_Z} = 9,5^\circ$$

erhält man $\Omega_Z = 2,38$, bzw. aus

$$\left| V_R \left(1 + j \frac{\Omega_C}{\Omega_Z} \right) \right|_{\text{dB}} = |V_R|_{\text{dB}} + 10 \log \left(1 + \left(\frac{\Omega_C}{\Omega_Z} \right)^2 \right) = -2 \text{dB}$$

folgt $V_R = 0,8$. Also gilt für $R^\#(q)$

$$R^\#(q) = 0,8 \frac{1 + \frac{q}{2,38}}{q}.$$

Die logarithmischen Frequenzkennlinien des offenen Kreises $L^\#(q)$ (Bild 6.9) zeigen nicht nur, daß die Vorgaben erfüllt sind, sondern auch, daß der geschlossene Kreis stabil ist, da $L^\#(q)$ dem vereinfachten Schnittpunktkriterium genügt.

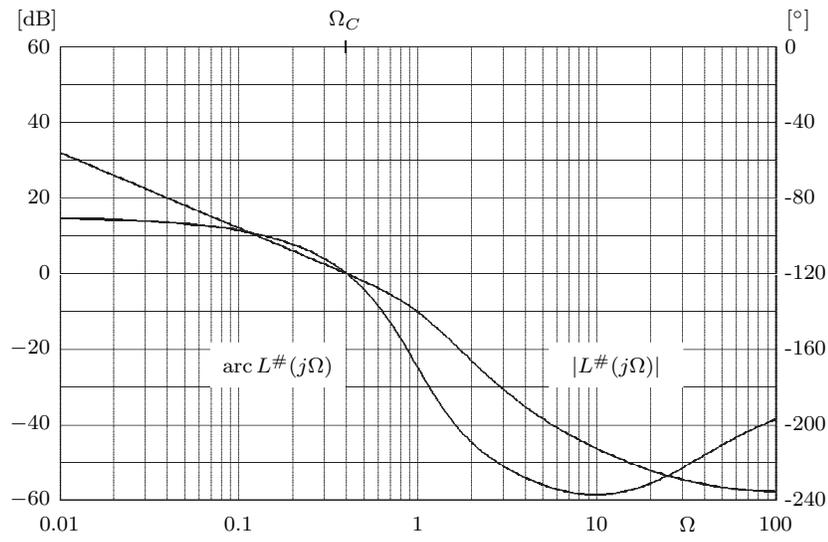


Bild 6.9: Frequenzgang des offenen Kreises zu Beispiel 1.

e)

$$R^*(z) = \frac{-0,136 + 0,536z}{-1 + z}$$

$$u_k - u_{k-1} = 0,536e_k - 0,136e_{k-1}$$

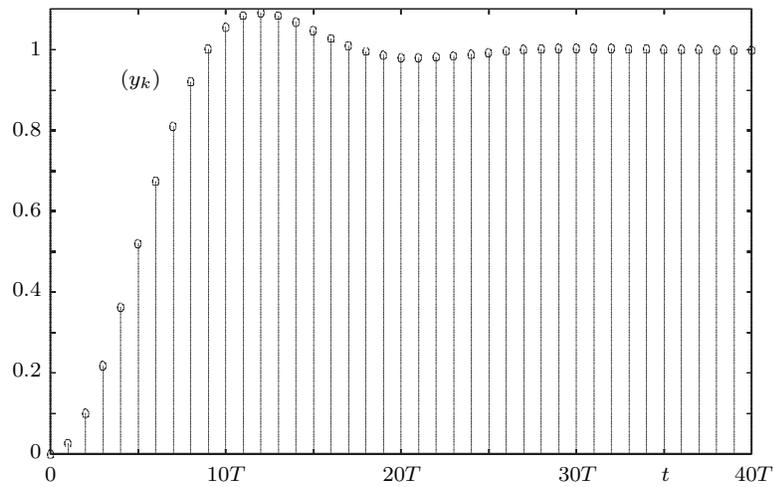


Bild 6.10: Simulation der Sprungantwort von Beispiel 1.

- f) $\mu LINSY$ erlaubt einfach die Sprungantworten von s - oder z -Übertragungsfunktionen graphisch darzustellen. So ist dem Bild 6.10, es ist mit dem Befehl **'stpg'** erzeugt worden, die gute Erfüllung der Spezifikationen von a) zu entnehmen.

Beispiel 2

a)
$$G(s) = 0,5 \frac{1}{s(1 + 2 \cdot 0,707s + s^2)}$$

$$T = 0,5, \quad e_{\infty}|_{(kT)} = 0,4, \quad t_r = 2, \quad \ddot{u} = 20\%$$

b)
$$G^{\#}(q) = 0,5 \frac{(1 - \frac{q}{4})(1 + \frac{q}{6,32})(1 - \frac{q}{7,78})}{q(1 + 2 \cdot 0,722q + q^2)}$$

c) $V = 2,5, \quad \lambda = 1, \quad \Omega_C = 0,6, \quad \phi = 50^{\circ}$

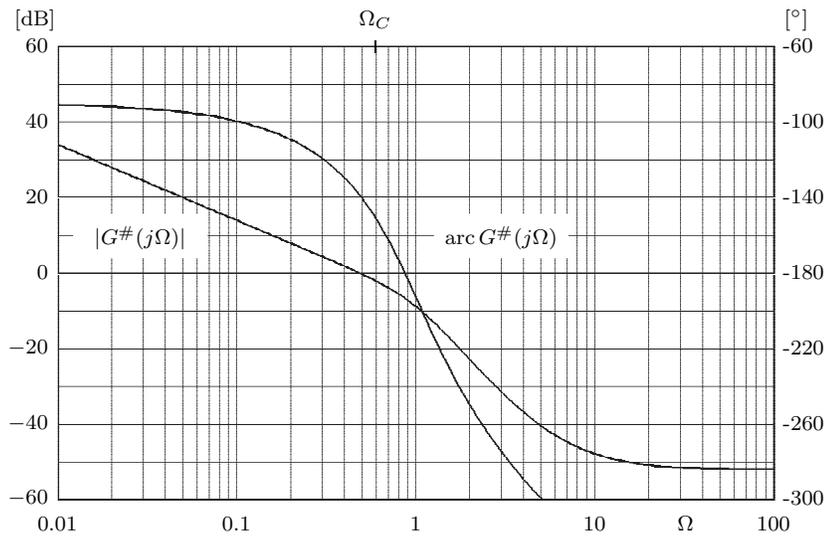


Bild 6.11: Frequenzgang der Strecke zu Beispiel 2.

- d) Da $G^{\#}(q)$ einen Pol bei $q = 0$ hat, ist die Forderung den integrierenden Charakter betreffend erfüllt. Die Korrektur des Verstärkungsfaktors

erfolgt mit einem Proportionalglied V_R . Wegen

$$0,5 V_R = 2,5, \quad \text{folgt} \quad V_R = 5.$$

Die logarithmischen Frequenzkennlinien der Strecke sind Bild 6.11 zu entnehmen. Wir streben im nächsten Schritt einen möglichst einfachen Entwurf an. Hierzu kompensieren wir von $G^\#(q)$ alle Pole und Nullstellen mit negativem Realteil und ergänzen die Reglerübertragungsfunktion mit einem Pol bei $q = -4$. Dann lautet der Regler vorerst

$$R_1^\#(q) = 5 \frac{1 + 2 \cdot 0,722q + q^2}{(1 + \frac{q}{4})(1 + \frac{q}{6,32})}$$

bzw. die Übertragungsfunktion des offenen Kreises

$$L_1^\#(q) = 2,5 \frac{(1 - \frac{q}{4})(1 - \frac{q}{7,78})}{q(1 + \frac{q}{4})}.$$

Wie diese Ausdrücke zeigen, wird dadurch sichergestellt, daß $L_1^\#(q)$ vom einfachen Typ ist (nur ein Schnittpunkt mit der 0-dB Linie). Selbstverständlich sind auch andere Maßnahmen möglich, die dasselbe leisten.

Nach dieser Korrektur erhält man die logarithmischen Frequenzkennlinien von $L_1^\#(q)$ nach Bild 6.12. Nun muß noch die Phase an der Stelle $\Omega = \Omega_C$ um $18,5^\circ$ gesenkt und der Betrag eben an dieser Stelle um $12,4$ dB erniedrigt werden. Dies leistet eine Übertragungsfunktion erster Ordnung der Form

$$R_{\text{Lag}}^\#(q) = \frac{1 + \frac{q}{\Omega_Z}}{1 + \frac{q}{\Omega_N}}, \quad \Omega_Z, \Omega_N > 0, \quad \Omega_Z > \Omega_N.$$

Dieses Korrekturglied wird auch *Lag-Glied* genannt. Einen typischen Verlauf der Frequenzkennlinien eines Lag-Gliedes gibt Bild 6.13 wieder. Zur Bestimmung der unbekanntenen Parameter Ω_Z und Ω_N stehen die Gleichungen

$$\text{arc } R_{\text{Lag}}^\#(j\Omega_C) = \arctan \frac{\Omega_C}{\Omega_Z} - \arctan \frac{\Omega_C}{\Omega_N} = -\Delta\varphi = -18,5^\circ$$

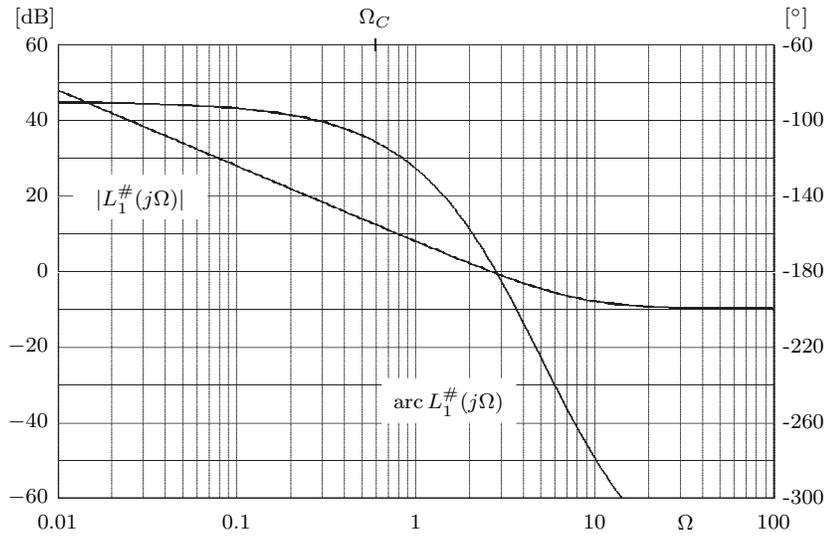


Bild 6.12: Frequenzgang des offenen Kreises zu Beispiel 2 nach der ersten Korrektur.

und

$$\begin{aligned}
 |R_{\text{Lag}}^{\#}(j\Omega_C)|_{\text{dB}} &= 10 \log \left(1 + \left(\frac{\Omega_C}{\Omega_Z} \right)^2 \right) - 10 \log \left(1 + \left(\frac{\Omega_C}{\Omega_N} \right)^2 \right) \\
 &= |\Delta a|_{\text{dB}} = -12,4 \text{ dB}
 \end{aligned}$$

zur Verfügung. Nach einigen Rechenschritten folgt

$$\Omega_N = \Omega_C \frac{\Delta a \sin \Delta \varphi}{1 - \Delta a \cos \Delta \varphi} = 0,059$$

und

$$\Omega_Z = \Omega_C \frac{\sin \Delta \varphi}{\cos \Delta \varphi - \Delta a} = 0,269 .$$

Hiermit ist aber der Regler bereits gefunden.

$$R^{\#}(q) = 5 \frac{(1 + 2 \cdot 0,722q + q^2) \left(1 + \frac{q}{0,269} \right)}{\left(1 + \frac{q}{4} \right) \left(1 + \frac{q}{6,32} \right) \left(1 + \frac{q}{0,059} \right)}$$

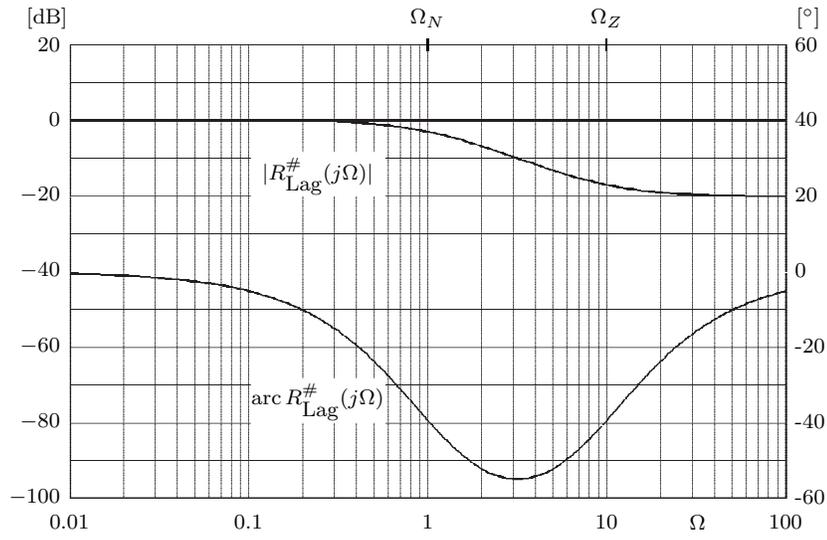


Bild 6.13: Frequenzgang eines Lag-Gliedes

Zur Berechnung eines Lag-Gliedes stellt $\mu LINSY$ die Funktion 'lag' zur Verfügung. Der Regler erfüllt nicht nur die Vorgaben an den offenen Kreis (Bild 6.14),

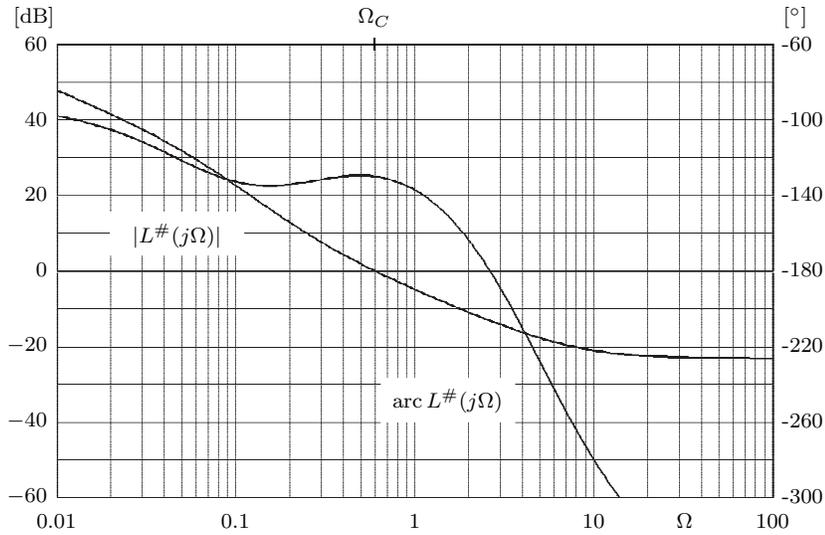


Bild 6.14: Frequenzgang des offenen Kreises zu Beispiel 2.

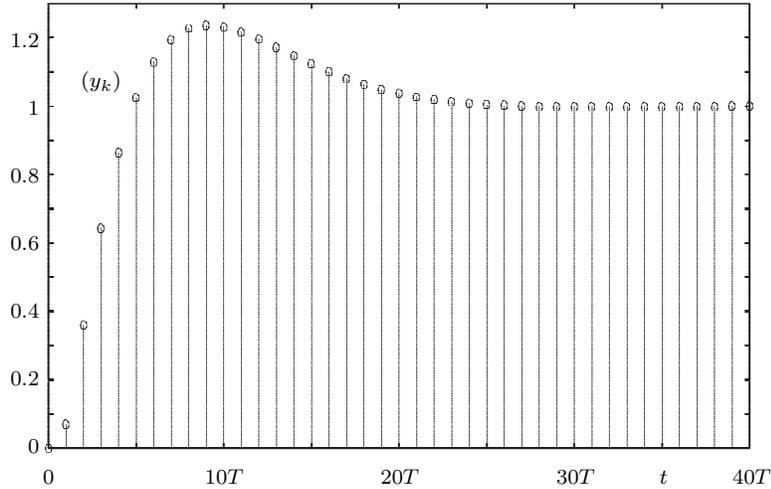


Bild 6.15: Simulation der Sprungantwort von Beispiel 2.

sondern gewährleistet auch die Stabilität. $L^\#(q)$ genügt dem vereinfachten Schnittpunktkriterium, und die Phasenreserve ist ja trivialerweise positiv.

e)
$$R^*(z) = \frac{-3,47 + 13,243z - 17,647z^2 + 8,052z^3}{0,0 - 0,219z - 0,746z^2 + z^3}$$

$$\begin{aligned} u_k - 0,746u_{k-1} - 0,219u_{k-2} &= \\ &= 8,052e_k - 17,647e_{k-1} + 13,243e_{k-2} - 3,47e_{k-3} . \end{aligned}$$

Der Leser wird schon bemerkt haben, daß die Wahl des Poles $q = -\Omega_0 = -4$ bei $R^\#(q)$ einen Pol $z = 0$ bei $R^*(z)$ zufolge hat. Bei geeigneter Realisierung der Differenzengleichung kann der Rechenaufwand hierdurch herabgesetzt werden.

- f) Die Erfüllung der ursprünglichen Forderungen im Rahmen der Genauigkeit dieser Methode kann man wieder an der Simulation der Sprungantwort (Bild 6.15) ablesen.

Beispiel 3

$$\text{a) } G(s) = 0,5 \frac{\left(1 + \frac{s}{0,3}\right)}{s \left[1 + 2 \cdot 0,6 \left(\frac{s}{0,2}\right) + \left(\frac{s}{0,2}\right)^2\right]}$$

$$T = 0,5, \quad e_\infty|_{(kT)} = 1, \quad t_r = 2,4, \quad \ddot{u} = 25\%$$

$$\text{b) } G^\#(q) = 0,5 \frac{\left(1 - \frac{q}{4}\right) \left(1 + \frac{q}{0,299}\right) \left(1 - \frac{q}{805}\right)}{q \left[1 + 2 \cdot 0,601 \left(\frac{q}{0,2}\right) + \left(\frac{q}{0,2}\right)^2\right]}$$

$$\text{c) } V = 1, \quad \lambda = 1, \quad \Omega_C = 0,5, \quad \phi = 45^\circ$$

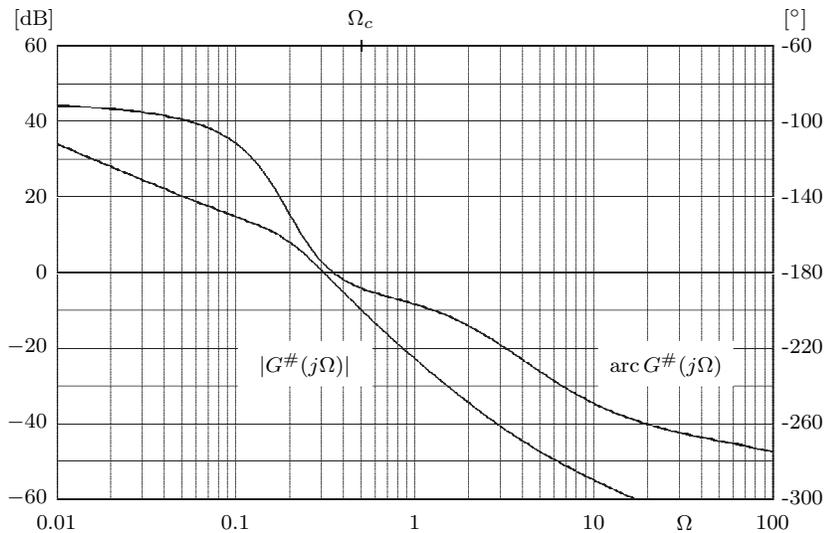


Bild 6.16: Frequenzgang der Strecke zu Beispiel 3.

- d) Da $G^\#(q)$ einfach integrierenden Charakter hat, ist die Forderung $\lambda = 1$ bereits erfüllt. Der Verstärkungsfaktor wird wieder mittels eines Proportionalitätsreglers $R_1^\# = V_R$ korrigiert. Da gilt

$$V = 0,5 V_R = 1, \quad \text{folgt} \quad V_R = 2.$$

Aus den logarithmischen Frequenzkennlinien der Strecke von Bild 6.16 entnimmt man, daß die Phase an der Stelle $\Omega = \Omega_C$ um 53° angehoben werden muß. Hierzu verwenden wir eine Übertragungsfunktion der Form

$$R_{\text{Lead}}^\#(q) = \frac{1 + \frac{q}{\Omega_Z}}{1 + \frac{q}{\Omega_N}}, \quad \Omega_Z, \Omega_N > 0, \quad \Omega_Z < \Omega_N.$$

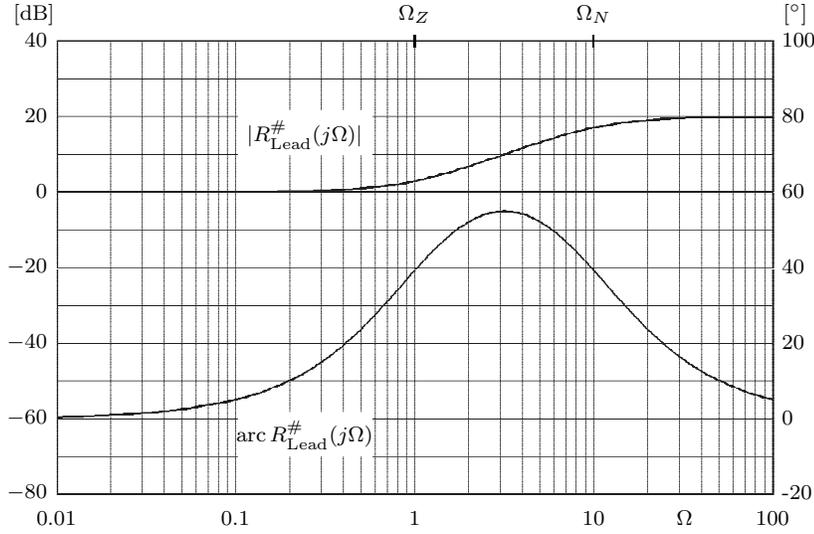


Bild 6.17: Frequenzgang eines Lead-Gliedes

Sie wird auch *Lead-Glied* genannt. Man beachte hier die Umkehrung der Ungleichung gegenüber dem Lag-Glied. Bild 6.17 zeigt den typischen Verlauf seines Frequenzganges. Das Maximum der Phasenvordrehung ist an der Stelle $\Omega = \sqrt{\Omega_Z \Omega_N}$. Die Phasenvordrehung an der Stelle $\Omega = \Omega_C$ berechnet man aus der Gleichung

$$\text{arc } R_{\text{Lead}}^\#(j\Omega_C) = \arctan \frac{\Omega_C}{\Omega_Z} - \arctan \frac{\Omega_C}{\Omega_N} = \Delta\varphi,$$

und mit

$$a = \frac{\Omega_C}{\sqrt{\Omega_Z \Omega_N}} + \frac{\sqrt{\Omega_Z \Omega_N}}{\Omega_C}$$

folgt

$$\frac{\Omega_N}{\Omega_Z} = \left(\frac{a}{2} \tan \Delta\varphi + \sqrt{\frac{a^2}{4} \tan^2 \Delta\varphi + 1} \right)^2.$$

Zur Berechnung eines Lead-Gliedes stellt $\mu LINSY$ die Funktion 'lead' zur Verfügung.

Nach der Phasenkorrektur muß im allgemeinen noch der Betrag an der Stelle $\Omega = \Omega_C$ gesenkt werden. Dies geschieht mit einem Lag-Glied. Positioniert man das Lag-Glied nur hinreichend weit links von der Durchtrittsfrequenz, so beeinflußt es die Phase an dieser Stelle nur unmerklich (siehe auch Bild 6.13). Obwohl hierdurch nicht nur die Anforderungen an $L^\#(j\Omega)$ erfüllt werden, sondern auch das Einschwingverhalten des geschlossenen Kreises den Vorgaben genügt, hat die Erfahrung gezeigt, daß oft und auch in diesem Beispiel die Sprungantwort keinesfalls befriedigt. Nach einem anfänglich tadellosen Verlauf – die Vorgaben, die die Anstiegszeit und das Überschwingen betreffen, werden durchaus eingehalten – nähert sie sich nur sehr schleppend dem Endwert. Positioniert man das Lag-Glied in die Nähe der Durchtrittsfrequenz – die Korrektur erfolgt nicht mehr auf einem so breiten Frequenzband – wird dieser Nachteil umgangen. Hierdurch wird aber die Phasenrückdrehung des Lag-Gliedes bereits merkbar, und diese muß bei der Dimensionierung des Lead-Gliedes berücksichtigt werden. Die Phase muß um mehr als 53° gehoben werden, um eine geeignete Lage des Lag-Gliedes zu ermöglichen. Wir wählen*

$$\Delta\varphi = 53^\circ + 10^\circ, \quad \Omega_C = \sqrt{\Omega_Z \Omega_N}$$

und erhalten

$$a = 2, \quad \frac{\Omega_N}{\Omega_Z} = 17,7,$$

woraus folgt

$$\Omega_Z = 0,119, \quad \Omega_N = 2,11,$$

bzw.

$$R_{\text{Lead}}^\#(q) = \frac{1 + \frac{q}{0,119}}{1 + \frac{q}{2,11}}.$$

Die Auswertung von $L_1^\#(q) = V_R R_{\text{Lead}}^\#(q) G^\#(q)$ bei $q = j\Omega_C$ ($\mu LINSY$ Funktion 'val') ergibt, daß der Betrag an dieser Stelle um 8,74 dB und die

*Es ist nicht immer günstig $\sqrt{\Omega_N \Omega_Z} = \Omega_C$ zu wählen, falls hierdurch die Steigung der Betragskennlinie in der Nähe der Durchtrittsfrequenz zu gering wird. Ein Wert von -20 dB/Dekade sollte nicht überschritten werden. In vielen Fällen erfordert dies eine außermittige Platzierung des Lead-Gliedes.

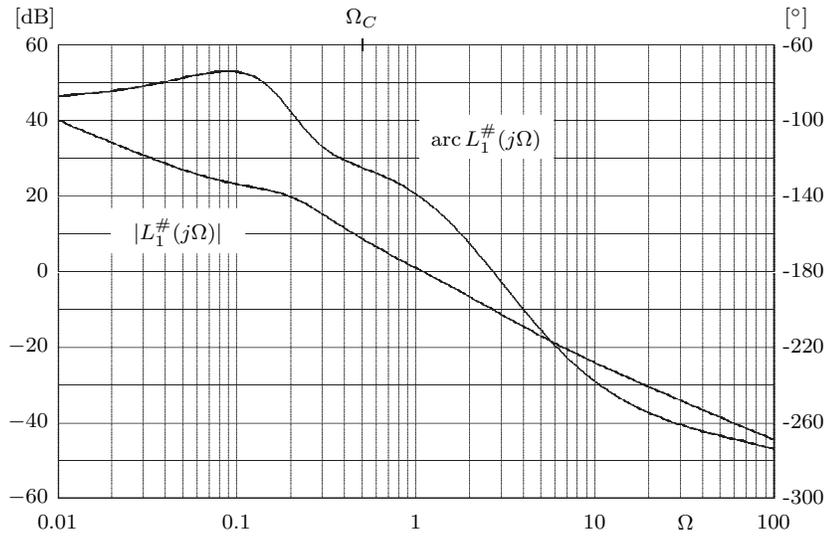


Bild 6.18: Frequenzgang zu Beispiel 3 nach der ersten Korrektur.

Phase selbstverständlich noch um 10° abgesenkt werden müssen (siehe Bild 6.18). Aus den Gleichungen zum vorigen Beispiel folgt:

$$R_{\text{Lag}}^\#(q) = \frac{1 + \frac{q}{0,14}}{1 + \frac{q}{0,0496}}.$$

Wieder zeigt Bild 6.19 nicht nur die Erfüllung der Forderungen, sondern auch, daß der geschlossene Kreis stabil ist. Das Korrekturglied lautet nun

$$R^\#(q) = V_R R_{\text{Lead}}^\#(q) R_{\text{Lag}}^\#(q)$$

$$R^\#(q) = 2 \frac{1 + \frac{q}{0,119}}{1 + \frac{q}{2,11}} \frac{1 + \frac{q}{0,14}}{1 + \frac{q}{0,0496}}.$$

e)
$$R^*(z) = \frac{7,6118 - 16,2421z + 8,6642z^2}{0,3024 - 1,2855z + z^2}$$

$$u_k - 1,2855u_{k-1} + 0,3024u_{k-2} =$$

$$= 8,6642e_k - 16,2421e_{k-1} + 7,6118e_{k-2}.$$

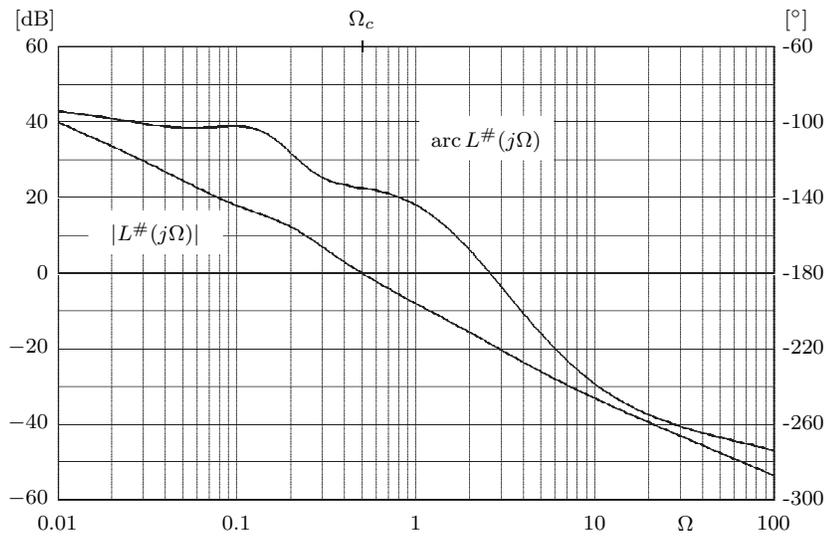


Bild 6.19: Frequenzgang des offenen Kreises zu Beispiel 3.

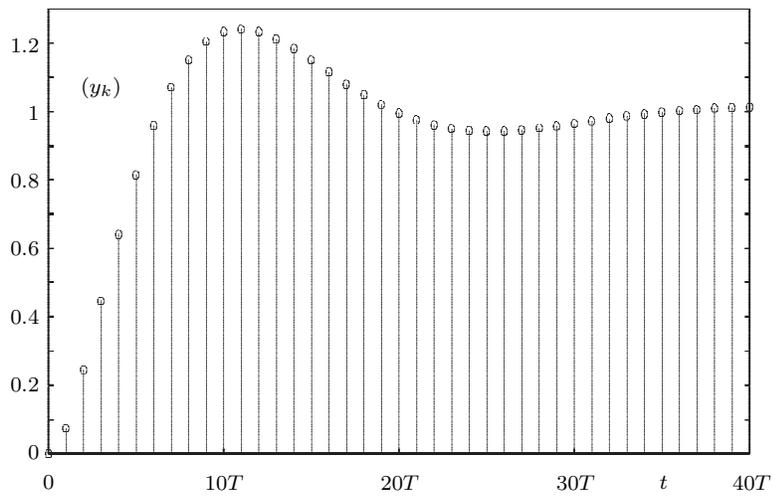


Bild 6.20: Simulation der Sprungantwort von Beispiel 3.

- f) Die Simulation der Sprungantwort (Bild 6.20) zeigt wieder die Erfüllung der Spezifikation von a).

Das hier vorgestellte Frequenzkennlinienverfahren für Abtastsysteme gestattet für eine gewisse Problemklasse einen überraschend einfachen Entwurf. Genügt eine Übertragungsfunktion nicht dem vereinfachten Schnittpunktkriterium, so können die Faustformeln auch noch Verwendung finden. Die Betragskennlinie des offenen Kreises soll aber auch dann nur einen Schnittpunkt mit der 0-dB Linie haben. Für die Stabilitätsprüfung bietet sich in diesem Fall das Nyquistkriterium in seiner allgemeinen Form an.

Kapitel 7

Entwurf von Abtastregelkreisen mit Beschränkungen

Im letzten Kapitel wurde gezeigt, wie das Frequenzkennlinienverfahren für den Entwurf von linearen und zeitinvarianten Abtastregelkreisen angewandt werden kann, sodaß die Antwort des Regelkreises auf gewisse Führungsfolgen – vornehmlich die Sprungantwort – vorgegebene Spezifikationen näherungsweise erfüllt.

In diesem Kapitel wollen wir zunächst untersuchen, wie man die Maximalwerte der in einem Regelkreis auftretenden Größen berechnen kann. Dabei werden wir nicht gewisse Testfolgen als Führungsfolgen betrachten, sondern gleich *Klassen* von Testfolgen. Die Kenntnis der Maximalwerte ist insbesondere für die Stellgröße von Bedeutung, können wir doch die im Rahmen des Frequenzkennlinienverfahrens erarbeiteten Eigenschaften des Regelkreises wie z.B. die Stabilität nur dann garantieren, wenn die Stellgröße im realen System keinen Beschränkungen unterliegt, bzw. die vorhandenen Stellgrößenbeschränkungen nicht überschritten werden.

Im Anschluß daran werden wir das Frequenzkennlinienverfahren dahingehend erweitern, daß wir in der Lage sind, vorgegebene Schranken für interessierende Systemgrößen schon beim Reglerentwurf – zumindest näherungsweise – zu berücksichtigen. Dabei werden wir die generelle Vorgangsweise bei der Anwendung des Frequenzkennlinienverfahrens beibehalten: Nämlich die Frequenzkennlinien des offenen Kreises so festzulegen, daß sie vorgegebenen Spezifikationen genügen. Nur werden in diesem Fall nicht *Kenndaten* wie Verstärkungsfaktor, Durchtrittsfrequenz und Phasenreserve herangezogen, sondern *Bereiche*, in denen die Betragskennlinie des offenen Kreises liegen darf. In diesem Zusammenhang wird sich zeigen, daß wir einen vorhandenen

Freiheitsgrad für die Lage der Betragskennlinie dazu ausnützen können, eine noch zu definierende Regelgüte möglichst hoch zu halten.

7.1 Berechnung der Betragsmaxima von Systemgrößen

Wir betrachten den Abtastregelkreis nach Bild 7.1 und wollen nun die Frage beantworten,*

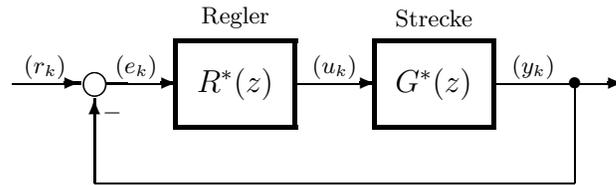


Bild 7.1: Abtastregelkreis.

wie groß das Betragsmaximum u_{max} der Stellfolge (u_k) ist, wenn wir zunächst als Führungsfolgen (r_k) alle jene Folgen zulassen, die selbst betragsmäßig beschränkt sind:

$$|r_k| \leq 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.1)$$

Die Beschränkung auf den Zahlenwert Eins stellt dabei wegen der Linearität des Übertragungssystems keine Einschränkung dar. Zur Berechnung des Betragsmaximums u_{max} fassen wir den Regelkreis nach Bild 7.1 als ein Übertragungssystem mit der Ausgangsfolge (u_k) und der Eingangsfolge (r_k) auf und bezeichnen die zugehörige Übertragungsfunktion mit $S^*(z)$:

$$S^*(z) = \frac{u(z)}{r(z)} = \frac{R^*(z)}{1 + R^*(z)G^*(z)}. \quad (7.2)$$

Hierin bedeuten $u(z)$ und $r(z)$ die z -Transformierten der Ausgangsfolge bzw. der Eingangsfolge. Ferner verstehen wir unter (s_k^*) die zur Übertragungsfunktion $S^*(z)$ gehörende Gewichtsfolge, sodaß gilt:

$$S^*(z) = \mathcal{Z} \{(s_k^*)\}. \quad (7.3)$$

*In [20] wird diese Thematik für kontinuierliche Systeme ausführlich behandelt.

Der Zusammenhang zwischen der Stellfolge (u_k) und der Führungsfolge (r_k) ist über die Faltungssumme

$$u_k = \sum_{j=0}^k s_{k-j}^* r_j, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.4)$$

gegeben. Fassen wir nun einen festen Zeitpunkt $k = m$ ins Auge, dann wird offenbar der Stellfolgenwert u_m genau dann maximal, wenn bei gegebener Gewichtsfolge die Führungsfolge so gewählt wird, daß jeder einzelne Summand seinen größtmöglichen Wert zur Summe (7.4) beiträgt. Unter Beachtung der Beschränkung (7.1) ist dies die Führungsfolge

$$(r_k) = \text{sgn}(s_{m-j}^*), \quad j = 0, 1, 2, \dots, m, \quad (7.5)$$

und man erhält für das Maximum des Stellfolgenwertes u_m

$$u_m = \sum_{j=0}^m |s_j^*|. \quad (7.6)$$

Da die Summe auf der rechten Seite von Gl.(7.6) mit wachsendem m monoton zunimmt, liefert die *unendliche Summe*

$$u_{max} = \sum_{j=0}^{\infty} |s_j^*| \quad (7.7)$$

die kleinste obere Schranke u_{max} , welche die Beträge der Stellfolgenwerte nicht überschreiten, und zwar für alle *zulässigen Führungsfolgen*; das sind alle jene, die der Beschränkung (7.1) genügen.

Ein Vergleich mit dem Stabilitätskriterium (4.7) zeigt, daß die Existenz der unendlichen Summe (7.7) genau dann gesichert ist, wenn mit der Übertragungsfunktion (7.2) ein BIBO-stabiles Übertragungssystem beschrieben wird.

Eine anschauliche Deutung der Berechnungsvorschrift (7.7) für das Stellgrößenmaximum zeigt das Blockschaltbild 7.2:

Wenn man den Regelkreis mit der speziellen Führungsfolge

$$(r_k) = 1, 0, 0, 0, \dots$$

– das ist die Impulsfolge – erregt, erhält man als Stellfolge die zum Übertragungssystem (7.2) gehörende Gewichtsfolge (s_k^*) . Dem Stellfolgenmaximum u_{max} kommt man nun beliebig nahe, wenn diese Gewichtsfolge hinreichend lange absolut summiert wird.

Für die Berechnung einer solchen Absolutsumme ist im Programm $\mu LINSY$ die Funktion 'sabs(.)' vorgesehen; sie bildet nach Gl. (7.7) die Absolutsumme der Gewichtsfolge zu jenem Übertragungssystem, dessen z -Übertragungsfunktion als Argument übergeben wird. Würde z.B. die Übertragungsfunktion (7.2) als Operand im Programm $\mu LINSY$ den Namen 'Sz' tragen, so kann man die Beziehung (7.7) mit der einfachen Anweisung

$$u_max = sabs(Sz)$$

auswerten.

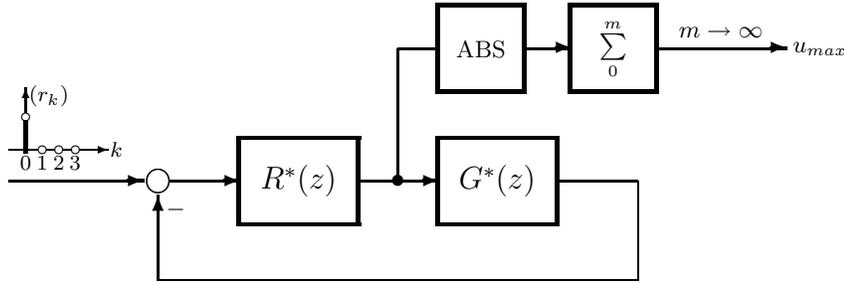


Bild 7.2: Blockschaltbild zur Berechnung des Betragsmaximums u_{max} der Stellfolge.

Wir haben nun gezeigt, wie das Stellfolgenmaximum u_{max} berechnet wird, wenn die Führungsfolgen der *Betragsbeschränkung* (7.1) genügen. Gewisse Fälle anderer Beschränkungen der zulässigen Führungsfolgen (r_k) können aber durch Einführung eines *gedachten* (fiktiven) Filters wieder auf eine Betragsbeschränkung – jetzt allerdings von fiktiven Führungsfolgen (\hat{r}_k) – zurückgeführt werden (Bild 7.3).

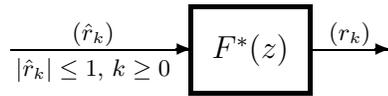


Bild 7.3: Zur Erzeugung zulässiger Führungsfolgen.

So etwa wird durch die Filterübertragungsfunktion

$$F^*(z) = T\dot{r}_{max} \frac{z}{z-1} \quad (7.8)$$

unter Berücksichtigung der Beschränkung

$$|\hat{r}_k| \leq 1 \quad \text{für alle } k \geq 0 \quad (7.9)$$

eine Klasse von Führungsfolgen beschrieben, für die die Differenzen zweier benachbarter Folgenwerte beschränkt sind:

$$\frac{|r_{k+1} - r_k|}{T} \leq \dot{r}_{max} \quad \text{für } k \geq 0. \quad (7.10)$$

In Gl. (7.10) bezeichnet \dot{r}_{max} eine geeignete positive Konstante, die man für den Fall $T \rightarrow 0$ als maximale Änderungsgeschwindigkeit des Führungssignals deuten kann.

Zur Beschränkung (7.10) gelangt man auf folgende Weise: Bezeichnet man mit $r(z)$ und $\hat{r}(z)$ die z -Transformierten der Folgen (r_k) bzw. (\hat{r}_k) , so erhält man gemäß Bild 7.3 und Gl.(7.8) zunächst die Beziehung

$$(z - 1)r(z) = T\dot{r}_{max}z\hat{r}(z),$$

die in den Folgenbereich zurücktransformiert lautet:

$$r_{k+1} - r_k = T\dot{r}_{max}\hat{r}_{k+1}.$$

Daraus folgt schließlich unter Beachtung der Beschränkung (7.9) für die Folge (\hat{r}_k) unmittelbar die Beschränkung (7.10) für die Folge (r_k) .

Betrachten wir an dieser Stelle den im Abschnitt 6.5 (Beispiel 2) entworfenen Abtastregelkreis und lassen nur Führungsfolgen (r_k) zu, die der Beschränkung (7.10) mit $\dot{r}_{max} = 1$ genügen, so ergibt sich für das Betragsmaximum u_{max} der Stellfolge (u_k) :

$$u_{max} = 7. \quad (7.11)$$

Im Zuge der Berechnung ist zu beachten, daß wegen der Beschränkung (7.10) in der Übertragungsfunktion (7.2) noch die Filterübertragungsfunktion (7.8) zu berücksichtigen ist:

$$S^*(z) = \frac{u(z)}{\hat{r}(z)} = F^*(z) \frac{R^*(z)}{1 + R^*(z)G^*(z)}. \quad (7.12)$$

Diejenige Führungsfolge (r_k) , für die die Stellfolge (u_k) nach Bild 7.4 dem Betragsmaximum (7.11) sehr nahe kommt, ist im Bild 7.5 dargestellt; sie wurde aufgrund des speziellen Verlaufs der Gewichtsfolge (s_k^*) zum Übertragungssystem (7.12) für $m = 30$ (vgl. Gln.(7.5) und (7.6)) ermittelt.

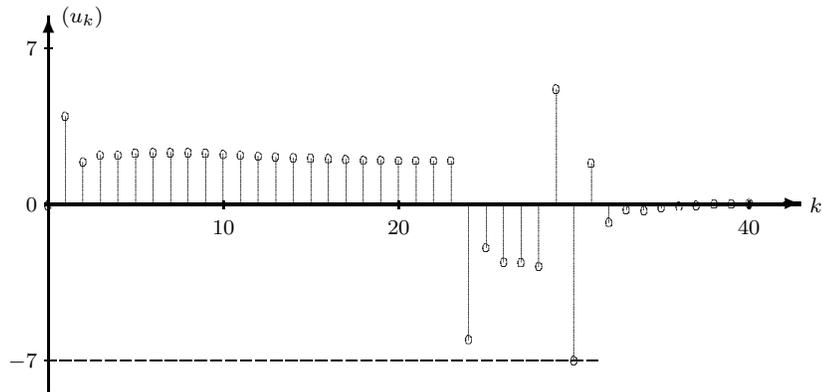


Bild 7.4: Stellfolge, die das Betragsmaximum (7.11) erreicht.

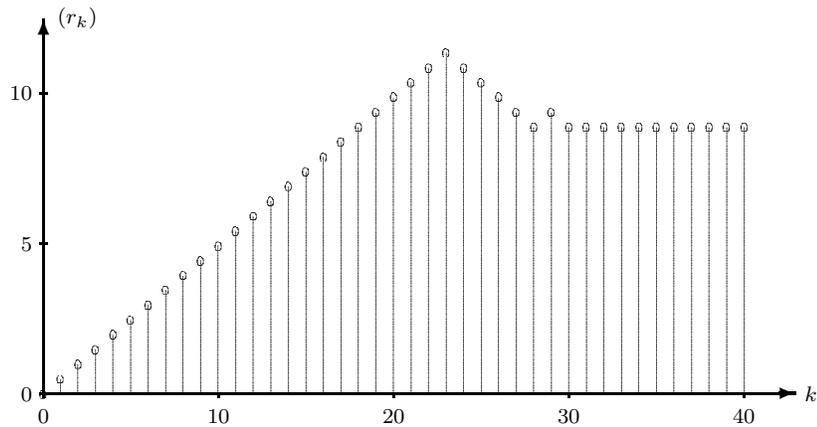


Bild 7.5: Zulässige Führungsfolge (r_k) für die die Stellfolge das Betragsmaximum (7.11) erreicht.

Wir betrachten in diesem Beispiel jetzt anstelle beliebiger fiktiver Führungsfolgen (\hat{r}_k), die der Betragsbeschränkung (7.9) genügen, folgende zulässige *harmonische* Folgen:

$$(\hat{r}_k) = (e^{j\omega kT}). \quad (7.13)$$

Bei einem stabilen Gesamtsystem (7.12) ist dann der Verlauf der Stellfolge (u_k) nach Abklingen der Einschwingvorgänge gegeben durch (vergleiche Gl.(5.17)):

$$u_k = S^*(e^{j\omega T})e^{j\omega kT}. \quad (7.14)$$

Unter Beachtung der Einschränkung (5.14) für die Kreisfrequenz ω ist die Amplitude \tilde{u} der Trägerschwingung zur Folge (7.14) bestimmt durch

$$\tilde{u} = |S^*(e^{j\omega T})| = |S^\#(j\Omega)|,$$

wobei sich die q -Übertragungsfunktion $S^\#(q)$ über die Transformation (5.25) aus der z -Übertragungsfunktion $S^*(z)$ berechnet und die reale Frequenz ω über die Beziehung (5.21) mit der transformierten Frequenz Ω verknüpft ist. Somit gilt im eingeschwungenen Zustand für das Betragsmaximum \tilde{u}_{max} der Stellfolge für *alle* zulässigen *harmonischen* Folgen (7.13)*:

$$\tilde{u}_{max} = \max_{\Omega} |S^\#(j\Omega)|. \quad (7.15)$$

Für das gegenständliche Beispiel findet man so anhand der Frequenzkennlinien $S^\#(j\Omega)$ nach Bild 7.6 den Zahlenwert:

$$\tilde{u}_{max} = 16,3 \text{ dB} = 6,5. \quad (7.16)$$

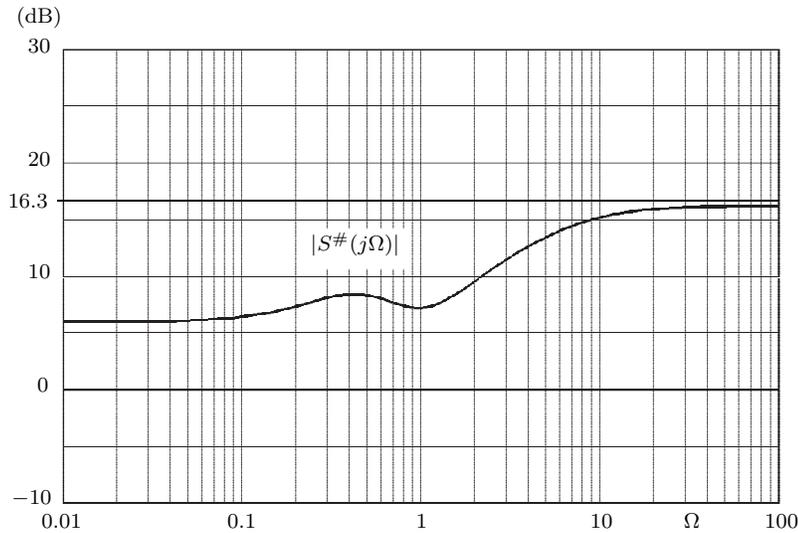


Bild 7.6: Bestimmung des Stellfolgenmaximums \tilde{u}_{max} bei betragsmäßig beschränkten harmonischen Erregungen.

*Mathematisch streng gesehen, müßte in Gl.(7.15) das Supremum (sup) anstelle des Maximums (max) genommen werden.

Dem Bild 7.6 entnimmt man weiters, daß die Stellfolge diesen Maximalwert für Frequenzen $\Omega \rightarrow \infty$, d.h. $\omega \rightarrow \pi/T$ erreicht.

Abgesehen von der Tatsache, daß bei der Bestimmung von \tilde{u}_{max} nach Gl.(7.15) Einschwingvorgänge außer acht gelassen werden, drückt der Unterschied in den Zahlenwerten (7.16) und (7.11),

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{max} &= 6,5, \\ u_{max} &= 7\end{aligned}$$

noch mögliche härtere Beanspruchungen des betrachteten Regelkreises durch die Folgen (7.9) im Vergleich zu den Folgen (7.13) aus.

Dennoch werden wir das Entwurfsverfahren in den folgenden Abschnitten auf zulässige *harmonische* Eingangsfolgen (7.13) aufbauen, denn auf diese Weise können wir den Entwurf mit Hilfe von BODE-Diagrammen durchführen. Diese Vorgangsweise kann zu Regelkreisen führen, in denen für zulässige *nichtharmonische* Eingangsfolgen (7.9) das dem Entwurf zugrunde gelegte Stellgrößenmaximum überschritten wird. Es ist jedoch möglich, diesen Überschreitungen von vornherein zu begegnen, indem wir *lediglich für die Durchführung des Entwurfs* größere Änderungsgeschwindigkeiten \dot{r}_{max} der Führungssignale berücksichtigen, als sie dann tatsächlich im Betrieb auftreten. Das heißt, wir werden für den Entwurf den gegebenen Wert \dot{r}_{max} um einen Faktor β vergrößern; die Größe dieses Faktors läßt sich nicht in einer Formel ausdrücken, eine Größenordnung von

$$\beta \simeq 1,5. \tag{7.17}$$

hat sich aber für die meisten Fälle als zweckmäßig erwiesen. Nach dem Entwurf können wir mit dem ermittelten Regler über die Beziehungen (7.7) und (7.12) – jetzt allerdings mit gegebenem Wert von \dot{r}_{max} – das Betragsmaximum u_{max} für *alle* zulässigen Führungsfolgen berechnen. Für den Fall, daß das so ermittelte u_{max} größer ist als das dem Entwurf zugrunde gelegte, besteht die Möglichkeit, den Entwurf mit einem vergrößerten Faktor β zu wiederholen.

Abschließend sei bemerkt, daß wir in den Ausführungen dieses Abschnitts unser Augenmerk zwar auf die Stellfolge gerichtet haben, doch lassen sich bei ihrer sinngemäßen Anwendung auch die Betragsmaxima anderer Systemgrößen – etwa der Folge des Regelfehlers – angeben.

7.2 Festlegung der Aufgabenstellung

Wir betrachten die Folgeregelung nach Bild 7.7 und nehmen an, daß alle Systemgrößen für $t < 0$ verschwinden.

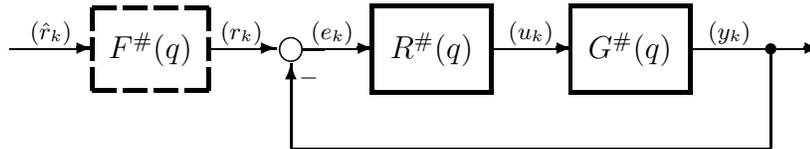


Bild 7.7: Folgeregelung.

Ferner setzen wir folgende Daten als gegeben voraus:

1. Die q -Übertragungsfunktion $G^\#(q)$ der Regelstrecke,
2. eine Klasse von zulässigen Führungsfolgen (r_k) (das sind alle jene Folgen, die sich über das fiktive Filter $F^\#(q)$ mit fiktiven Führungsfolgen (\hat{r}_k) erzeugen lassen, wobei diese der Beschränkung $|\hat{r}_k| \leq 1$ für alle $k \geq 0$ genügen),
3. das zulässige Betragsmaximum u_{max} der Stellfolgenwerte u_k .

Wir suchen einen (realisierbaren) Regler mit der q -Übertragungsfunktion $R^\#(q)$, so daß für alle zulässigen Führungsfolgen (r_k) und unter Einhaltung der Stellgrößenbeschränkung

$$|u_k| \leq u_{max} \quad \text{für alle} \quad k \geq 0 \quad (7.18)$$

der Betrag des Regelfehlers (e_k) immer kleiner als ε bleibt:

$$|e_k| \leq \varepsilon \quad \text{für alle} \quad k \geq 0 \quad (7.19)$$

Nun betrachten wir ε als ein Maß für die mit dem entworfenen Regelkreis erreichbare Regelgüte und verlangen daher, daß ε im Hinblick auf die ange-setzte Reglerstruktur möglichst klein wird; d.h., wir suchen das Minimum von ε bezüglich $R^\#(q)$.

Selbstverständlich setzen wir voraus, daß überhaupt eine solche Lösung existiert, was insbesondere verlangt, daß der Entwurf zu einem stabilen Gesamtsystem führt und die Regelstrecke unter Beachtung der Stellgrößenbeschränkung allen zulässigen Führungsgrößen wenigstens prinzipiell folgen kann.

7.3 Grafische Lösung mit Hilfe von BODE-Diagrammen

Wir wollen nun die beiden Ungleichungen (7.18) und (7.19) für die Betragsmaxima der Stellfolge bzw. der Folge des Regelfehlers in andere Bedingungen, die jetzt aber im (transformierten) Frequenzbereich gelten, umsetzen. Gemäß den Ausführungen am Ende des Abschnitts 7.1 betrachten wir nur zulässige harmonische Folgen (7.13). Bei einem stabilen Gesamtsystem und nach Abklingen der Einschwingvorgänge muß dann bei entsprechender Anwendung der Beziehung (7.15) gelten:

$$\left| \frac{F^\#(j\Omega)R^\#(j\Omega)}{1 + R^\#(j\Omega)G^\#(j\Omega)} \right| \leq u_{max} \quad \text{für alle } \Omega \quad (7.20)$$

$$\left| \frac{F^\#(j\Omega)}{1 + R^\#(j\Omega)G^\#(j\Omega)} \right| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } \Omega \quad (7.21)$$

Auf der linken Seite der Ungleichung (7.20) steht der Betrag des Frequenzganges zum Übertragungssystem mit der Eingangsfolge (\hat{r}_k) und der Ausgangsfolge (u_k); in der Ungleichung (7.21) steht links der Betrag des Frequenzganges zum Übertragungssystem mit derselben Eingangsfolge, jedoch mit (e_k) als Ausgangsfolge. Die Forderung nach der Stabilität des Gesamtsystems bedingt die Stabilität der den linken Seiten der Ungln.(7.20) und (7.21) zugeordneten Übertragungsfunktionen. Das bedeutet insbesondere, daß *alle instabilen* Pole der Filterübertragungsfunktion $F^\#(q)$ auch Polstellen der Streckenübertragungsfunktion $G^\#(q)$ sein müssen.

Mit der Übertragungsfunktion $L^\#(q)$ des offenen Kreises

$$L^\#(q) = R^\#(q)G^\#(q) \quad (7.22)$$

erhalten wir nach einer Umformung der Ungln.(7.20) und (7.21):

$$\left| \frac{L^\#(j\Omega)}{1 + L^\#(j\Omega)} \right| \leq \left| \frac{G^\#(j\Omega)}{F^\#(j\Omega)} \right| u_{max} \quad \text{für alle } \Omega, \quad (7.23)$$

$$|1 + L^\#(j\Omega)| \geq \frac{|F^\#(j\Omega)|}{\varepsilon} \quad \text{für alle } \Omega. \quad (7.24)$$

Auf diese Weise müssen wir freie Parameter in einem Ansatz für die Übertragungsfunktion $L^\#(q)$ so bestimmen, daß die zweite Ungleichung (7.24) für ein möglichst kleines ε erfüllt ist.

Wird damit auch die Einhaltung der ersten Ungleichung (7.23) erreicht, so ist die Entwurfsaufgabe gelöst, und wir können über die Beziehung (7.22) die Reglerübertragungsfunktion angeben. Aus diesem Grunde werden die Ungleichungen (7.23) und (7.24) *Syntheseungleichungen* genannt.

Allerdings ist wegen der Beschaffenheit der linken Seiten der Syntheseungleichungen die Bestimmung freier Parameter in der Übertragungsfunktion $L^\#(q)$ im allgemeinen nur rechnergestützt möglich. Da wir aber bestrebt sind, den Entwurf mit Hilfe der Bode-Diagramme durchzuführen, gehen wir wie folgt vor [19]: Wir setzen die Übertragungsfunktion $L^\#(q)$ so an, daß ihre logarithmische Betragskennlinie $|L^\#(j\Omega)|_{dB}$ die 0-dB-Linie nur einmal bei der Durchtrittsfrequenz Ω_C schneidet und daß zudem gilt (vergleiche hierzu etwa Bild 6.6):

$$\begin{aligned} |L^\#(j\Omega)| &\gg 1 && \text{für } \Omega \ll \Omega_C, \\ |L^\#(j\Omega)| &\ll 1 && \text{für } \Omega \gg \Omega_C. \end{aligned}$$

Diese Forderungen entsprechen durchaus dem Vorhaben, in einem gewissen Frequenzbereich ein gutes Führungsübertragungsverhalten zu erreichen.

Unter diesen Voraussetzungen können die Syntheseungleichungen näherungsweise wie in der Tabelle 7.1 angegeben geschrieben werden.

$ L^\# \gg 1$	$ L^\# \ll 1$
$1 \leq \left \frac{G^\#}{F^\#} \right u_{max} \quad (7.23a)$	$ L^\# \leq \left \frac{G^\#}{F^\#} \right u_{max} \quad (7.23b)$
$ L^\# \geq \frac{ F^\# }{\varepsilon} \quad (7.24a)$	$1 \geq \frac{ F^\# }{\varepsilon} \quad (7.24b)$

Tabelle 7.1. Approximierte Syntheseungleichungen.

Im Zuge des Entwurfs sind nun die beiden gerahmten Ungleichungen (7.23b) und (7.24a) für die Wahl von $L^\#(q)$ in den beiden Bereichen $|L^\#(j\Omega)| \gg 1$ bzw. $|L^\#(j\Omega)| \ll 1$ entscheidend. Hingegen läßt die Ungleichung (7.23a) eine Aussage über den mindestens erforderlichen Stellbereich u_{max} zu, und die Ungleichung (7.24b) gibt eine untere Schranke für den Wert von ε an. Es ist also zu erwarten, daß eine angemessene Aufgabenstellung von vornherein diesen beiden nicht gerahmten Ungleichungen genügt.

Es ergibt sich somit folgendes **Entwurfsschema**, das wir anhand eines im Bild 7.8 gezeigten demonstrativen Falles erläutern:

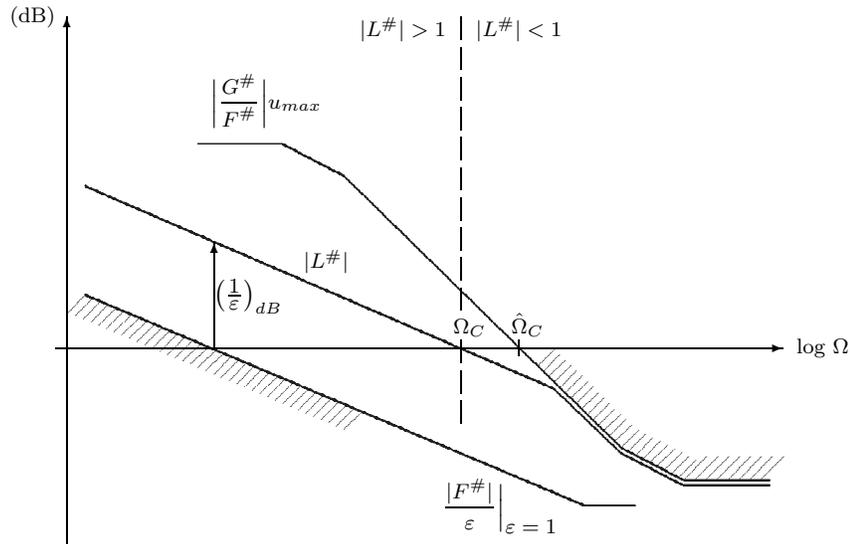


Bild 7.8: Demonstrationsbeispiel für den Entwurf; asymptotische Darstellung der Betragskennlinien.

- A. Zeichnen der sogenannten *Begrenzungskennlinie* $|G^\#(j\Omega)/F^\#(j\Omega)|u_{max}$ und der sogenannten *Filterkennlinie* $|F^\#(j\Omega)|$. Im Bild 7.8 sind jene Teile dieser beiden Kennlinien schraffiert hervorgehoben, die die Bereichsgrenzen für die Lage der Betragskennlinie $|L^\#(j\Omega)|$ bilden (vergleiche Ungleichungen (7.23b), (7.24a)).
- B. Wahl einer Übertragungsfunktion $L^\#(q)$, so daß ihre Betragskennlinie $|L^\#(j\Omega)|$ in Erfüllung der Ungleichung (7.23b) rechts der Durchtrittsfrequenz Ω_C nicht oberhalb der Begrenzungskennlinie zu liegen kommt.

Da aber die Ungleichung (7.24a) im Bereich links der Durchtrittsfrequenz für ein möglichst kleines ε erfüllt werden soll, ist die Betragskennlinie $|L^\#(j\Omega)|$ so weit wie möglich nach oben zu schieben (siehe Pfeil im Bild 7.8). Bei der Wahl von $L^\#(q)$ sind noch zwei Punkte zu beachten:

- B1. Um auch bei Parameterschwankungen bzw. Störungen die Stabilität des Regelkreises zu erhalten, werden *alle* in der rechten q -Halbebene liegenden Pol- und Nullstellen der Streckenübertragungsfunktion $G^\#(q)$ in den Ansatz für $L^\#(q)$ mit aufgenommen.
- B2. Anhand der approximierten Syntheseungleichungen in Tabelle 7.1 kann keine Aussage über ein gefordertes Verhalten der Betragskennlinie $|L^\#(j\Omega)|$ im Bereich $|L^\#(j\Omega)| \simeq 1$ – also im Frequenzbereich um Ω_C – abgelesen werden. Damit die eigentlichen Syntheseungleichungen (7.23) und (7.24) auch in diesem Frequenzbereich gelten, hat man für eine ausreichende Phasenreserve zu sorgen; etwa indem man

$$\text{arc}L^\#(j\Omega_C) = -120^\circ \quad (7.25)$$

fordert, was gemäß Bild 7.9 plausibel erscheint, denn dann stimmen

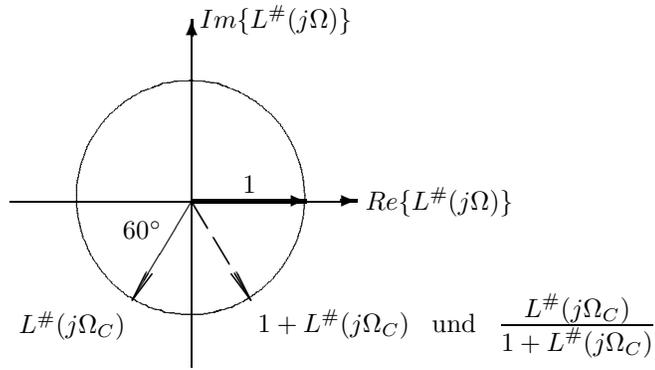


Bild 7.9. Zur Erfüllung der Syntheseungleichungen für $\Omega = \Omega_C$.

die approximierten Syntheseungleichungen für $\Omega = \Omega_C$ mit den eigentlichen Syntheseungleichungen überein. Jedoch muß von Fall zu Fall geprüft werden, ob dadurch die Syntheseungleichungen auch in der Umgebung von Ω_C eingehalten werden. Diese

Überprüfung ist mit dem Programm $\mu LINSY$ leicht durchzuführen. Denn letztlich muß zur Einhaltung der Stellgrößenbeschränkung gemäß der eigentlichen Syntheseungleichung (7.23) die Betragskennlinie des Führungsfrequenzganges $|T^\#(j\Omega)|$ (linke Seite der Ungl.(7.23)) im *gesamten* Frequenzbereich unterhalb der Begrenzungskennlinie (rechte Seite der Ungl.(7.23)) liegen: Man zeichne mit dem $\mu LINSY$ -Befehl **'bode'** die beiden Betragskennlinien

```
B# = G#/F#*u_max
bode B#
T# = loop(L#)
bode T#
```

und prüfe die Einhaltung der Ungl.(7.23) anhand ihrer grafischen Darstellung.

Die Frage nach der Stabilität des geschlossenen Kreises läßt sich leicht beantworten, wenn die q -Übertragungsfunktion $L^\#(q)$ vom *einfachen* Typ ist (siehe Abschnitt 6.3); denn mit dieser Voraussetzung ist der Regelkreis genau dann BIBO-stabil, wenn die Phasenreserve $\phi = \text{arc}L^\#(j\Omega_C) + 180^\circ$ positiv ist. Ist $L^\#(q)$ nicht vom einfachen Typ, so führt das Nyquist-Kriterium angewandt auf $L^\#(j\Omega)$ zum Ziel.

- C. Ausgehend von der im Punkt B entworfenen Übertragungsfunktion $L^\#(q)$ wird über die Beziehung (7.22) zunächst die q -Übertragungsfunktion $R^\#(q)$ des Reglers

$$R^\#(q) = \frac{L^\#(q)}{G^\#(q)}$$

berechnet* und in weiterer Folge mit Gl.(5.23) die z -Übertragungsfunktion des Reglers

$$R^*(z) = R^\#(q) \Big|_{q = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}},$$

womit man wegen Gln. (3.9) und (3.10) sofort die zugehörige Differenzengleichung angeben kann.

*Bezüglich der Realisierbarkeit von q -Übertragungsfunktion sei auf den Abschnitt 5.5 verwiesen.

D. Nun ermitteln wir das Betragsmaximum, das die Stellfolgenwerte u_k im entworfenen Regelkreis für *alle* zulässigen Führungsfolgen (r_k) und für *alle* $k \geq 0$ nicht überschreiten. Man erhält dieses Maximum, indem die Werte der Gewichtsfolge zum Übertragungssystem mit der Eingangsfolge (\hat{r}_k) und der Ausgangsfolge (u_k) gemäß den Gln. (7.7),(7.3) und (7.12) absolut summiert werden. Geringfügige Überschreitungen im Vergleich mit dem gegebenen Stellgrößenmaximum u_{max} werden wir tolerieren; denn wir können an dieser Stelle des Entwurfes mit den gegebenen Zahlenwerten der Streckenparameter zwar die Maxima von Systemgrößen exakt berechnen, dürfen aber nicht vergessen, daß diese Parameter selbst im allgemeinen nicht exakt bekannt sind.

Das Betragsmaximum ε der Folgenwerte des Regelfehlers erhält man auf ganz analoge Weise – lediglich für die Übertragungsfunktion (7.12) muß jetzt

$$S^*(z) = \frac{e(z)}{\hat{r}(z)} = F^*(z) \frac{1}{1 + R^*(z)G^*(z)}$$

geschrieben werden. Die hier verwendeten z -Übertragungsfunktionen $F^*(z)$ des Filters und $G^*(z)$ der Regelstrecke berechnen sich über die Transformation (5.23) aus den gegebenen q -Übertragungsfunktionen $F^\#(q)$ bzw. $G^\#(q)$.

Während wir den Entwurf in den Punkten A und B im transformierten Frequenzbereich durchführen und daher mit q -Übertragungsfunktionen arbeiten, geben wir in den Punkten C und D die z -Übertragungsfunktion an, weil an ihnen unmittelbar die Differenzengleichungen abgelesen werden können.

7.4 Beispiel 1

Gegeben seien für die Folgeregelung nach Bild 7.7:

A. Die Übertragungsfunktion $G(s)$ der Regelstrecke

$$G(s) = \frac{1,2}{s \left[1 + \frac{s}{0,5} + \left(\frac{s}{0,5} \right)^2 \right]};$$

bei einer Abtastperiode $T = 0,2$ ergibt sich daraus die q-Übertragungsfunktion $G^\#(q)$ der Regelstrecke*

$$G^\#(q) = 1,2 \frac{\left(1 - \frac{q}{10}\right) \left(1 - \frac{q}{17,6}\right) \left(1 + \frac{q}{17,1}\right)}{q \left[1 + \frac{q}{0,5} + \left(\frac{q}{0,5}\right)^2\right]}.$$

B. Eine Klasse von zulässigen Führungsfolgen (7.10) mit $\dot{r}_{max} = 0,04$. Für die z-Übertragungsfunktion $F^*(z)$ des fiktiven Filters ergibt sich nach Gl.(7.8)

$$F^*(z) = 0,008 \frac{z}{z-1}$$

und für die zugehörige q-Übertragungsfunktion

$$F^\#(q) = 0,04 \frac{1 + \frac{q}{10}}{q}.$$

C. Das zulässige Betragsmaximum der Stellfolgenwerte:

$$u_{max} = 2.$$

Im Einklang mit den Ausführungen am Ende des Abschnitts 7.1 werden wir für die grafische Lösung der Entwurfsausgabe in den folgenden Schritten A,B und C (jedoch nicht im Schritt D) das gemäß Gl.(7.17) manipulierte Filter verwenden.

A. Filterkennlinie:

$$|F^\#| = \left| 0,06 \frac{1 + \frac{j\Omega}{10}}{j\Omega} \right|.$$

Begrenzungskennlinie:

$$\left| \frac{G^\#}{F^\#} \right| u_{max} = \left| 40 \frac{\left(1 - \frac{j\Omega}{10}\right) \left(1 - \frac{j\Omega}{17,6}\right) \left(1 + \frac{j\Omega}{17,1}\right)}{\left(1 + \frac{j\Omega}{10}\right) \left[1 + \frac{j\Omega}{0,5} + \left(\frac{j\Omega}{0,5}\right)^2\right]} \right|.$$

*Die im folgenden angegebenen Ergebnisse sind Zwischenergebnisse eines Berechnungsvorganges gemäß dem $\mu LINSY$ -Dialog im Abschnitt A.6. Insbesondere sind die Knickfrequenzen an der 1. Stelle nach dem Komma gerundet angegeben und die Betragskennlinien zur Hervorhebung der Knickfrequenzen asymptotisch dargestellt.

Die Begrenzungskennlinie schneidet die 0-dB-Linie (sh. Bild 7.10) bei

$$\hat{\Omega}_C = 3,2. \quad (7.26)$$

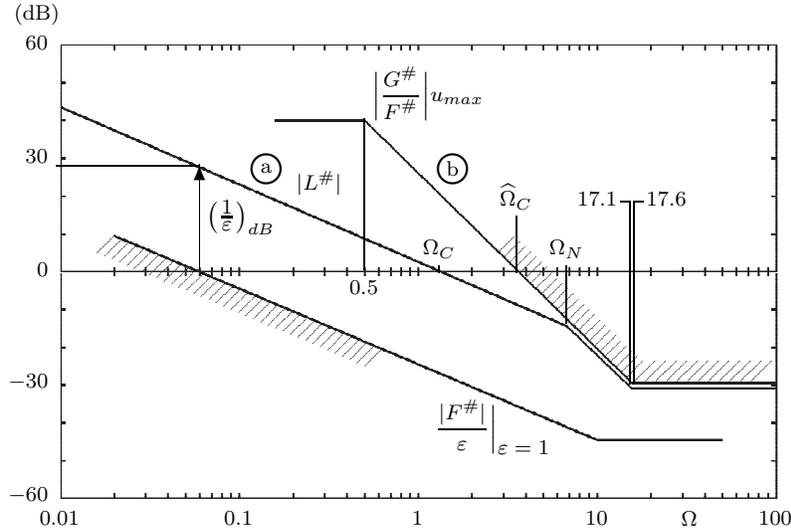


Bild 7.10. Asymptotische Betragskennlinien für das Entwurfsbeispiel 1.

B. Ansatz für $L^\#$:

$$L^\#(q) = \frac{\left(1 - \frac{q}{10}\right) \left(1 - \frac{q}{17,6}\right) \left(1 + \frac{q}{17,1}\right)}{\frac{q}{\Omega_C} \left(1 + \frac{q}{10}\right) \left(1 + \frac{q}{\Omega_N}\right)}.$$

Die beiden Nullstellen von $G^\#(q)$ bei $q = 10$ und $q = 17,6$ liegen in der rechten q -Halbebene und werden daher gemäß Punkt B1 des Entwurfschemas in den Ansatz für $L^\#(q)$ aufgenommen. Mit den restlichen Pol- und Nullstellen im Ansatz für $L^\#(q)$ wollen wir erreichen, daß die Betragskennlinie $|L^\#(j\Omega)|$ im Bereich $\Omega \ll \Omega_C$ möglichst weit über der Filterkennlinie (siehe Bild 7.10), dabei aber im Bereich $\Omega \gg \Omega_C$ nicht über der Begrenzungskennlinie liegt und der Entwurf zudem zu einem stabilen Gesamtsystem führt.

B2.

$$\text{arc}L^\#(j\Omega_C) = -90^\circ - 2\arctan\left(\frac{\Omega_C}{10}\right) - \arctan\left(\frac{\Omega_C}{\Omega_N}\right) -$$

$$\underbrace{-\arctan\left(\frac{\Omega_C}{17,6}\right) + \arctan\left(\frac{\Omega_C}{17,1}\right)}_{\simeq 0^\circ} = -120^\circ. \quad (7.27)$$

Die zur Bestimmung der beiden Frequenzen Ω_C und Ω_N notwendige zweite Gleichung finden wir in der Schnittpunktgleichung für die beiden Geradenstücke a und b bei Ω_N (siehe Bild 7.10):

$$-20 \log\left(\frac{\Omega_N}{\Omega_C}\right) = -40 \log\left(\frac{\Omega_N}{\widehat{\Omega}_C}\right)$$

bzw.

$$\frac{\Omega_N}{\Omega_C} = \left(\frac{\Omega_N}{\widehat{\Omega}_C}\right)^2. \quad (7.28)$$

Die Gln. (7.27) und (7.28) ergeben nun mit dem Zahlenwert (7.26) die Gleichung

$$-2\arctan\left(\frac{\Omega_C}{10}\right) - \arctan\left(\frac{\Omega_C}{3,2}\right)^2 = -30^\circ,$$

deren Lösung

$$\Omega_C = 1,5$$

man leicht mit Hilfe des Programmes $\mu LINSY$ findet; damit ist aber auch die Frequenz

$$\Omega_N = 6,8$$

festgelegt. Mit diesen Daten ist die Übertragungsfunktion $L^\#(q)$ vom einfachen Typ; der Regelkreis ist somit BIBO-stabil, weil die Phasenreserve positiv ist (siehe Gl. (7.27)). Für das Betragsmaximum der Werte des Regelfehlers findet man nach Bild 7.10:

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = 28\text{dB} \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon = 0,04.$$

C. Reglerübertragungsfunktion:

$$R^\#(q) = 1,25 \frac{\left[1 + \frac{q}{0,5} + \left(\frac{q}{0,5}\right)^2\right]}{\left(1 + \frac{q}{10}\right) \left(1 + \frac{q}{6,8}\right)},$$

$$R^*(z) = \frac{96,51 - 202,17z + 106,67z^2}{-0,1886z + z^2}.$$

Reglerdifferenzgleichung:

$$u_k = 106,67e_k - 202,17e_{k-1} + 96,51e_{k-2} + 0,1886u_{k-1} .$$

D. Exakte Berechnung der Betragsmaxima der Stellfolgenwerte und der Werte des Regelfehlers für *alle* zulässigen Führungsfolgen:

$$\frac{u(z)}{\hat{r}(z)} = \frac{0,7721z - 1,617z^2 + 0,8533z^3}{0,0396 + 0,3508z - 1,147z^2 + z^3} , \quad (7.29)$$

$$\frac{e(z)}{\hat{r}(z)} = \frac{-0,001509z^2 + 0,008z^3}{0,0396 + 0,3508z - 1,147z^2 + z^3} . \quad (7.30)$$

Die Absolutsumme der Werte der zum Übertragungssystem (7.29) gehörenden Gewichtsfolge liefert

$$|u_k|_{max} = 2,08 ,$$

und die entsprechende Absolutsumme zum Übertragungssystem (7.30) ergibt

$$|e_k|_{max} = 0,03 .$$

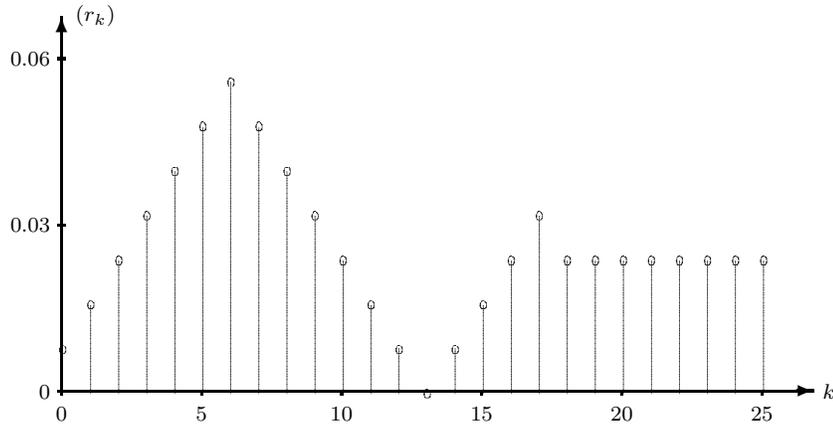


Bild 7.11: Ungünstigste Führungsfolge (r_k) zum Entwurfsbeispiel 1.

Die Verläufe der Führungsfolge (r_k) und der Stellfolge (u_k) im ungünstigsten Fall, bei dem die Stellgrößenbeschränkung $u_{max} = 2$ geringfügig überschritten wird, sind in den Bildern 7.11 und 7.12 dargestellt.

Dieses Beispiel hat wohl deutlich gemacht, daß sich die Entwurfsaufgabe *nach* getroffener Wahl für die Übertragungsfunktion $L^\#(q)$ auf mehr oder weniger einfache Rechenaufgaben reduziert. Letztlich hängt aber der Erfolg des Entwurfes von einem "geschickten" Ansatz für $L^\#(q)$ ab.

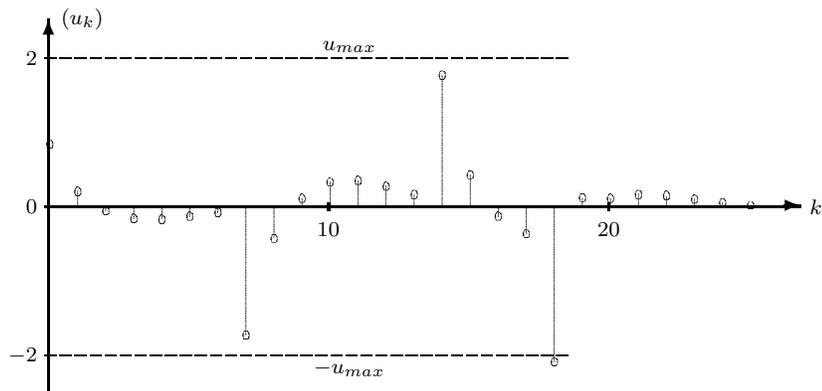


Bild 7.12: Ungünstigster Verlauf der Stellfolge (u_k) zum Entwurfsbeispiel 1.

Wir werden noch ein zweites Beispiel angeben, fordern dabei aber, daß neben der Stellfolge (u_k) noch eine zweite Systemgröße (v_k) einer Beschränkung genügen soll. Das Entwurfsschema A bis D wird in diesem Fall nur geringfügig im Punkt A zu ändern und im Punkt D zu erweitern sein; dies wollen wir im folgenden Abschnitt zeigen.

7.5 Erweiterung der Aufgabenstellung

Wir betrachten die Folgeregelung nach Bild 7.13, wobei die beiden Übertragungssysteme mit den Übertragungsfunktionen $P^\#(q)$ und $G^\#(q)$ ein dynamisches System mit einer Eingangsgröße (u_k) und zwei Ausgangsgrößen (v_k) und (y_k) seien, sodaß das Nennerpolynom von $P^\#(q)$ vollständig im Nennerpolynom von $G^\#(q)$ enthalten ist*.

Nun erweitern wir die im Abschnitt 7.2 gestellte Aufgabe dadurch, daß wir zusätzlich zur Stellgrößenbeschränkung (7.18) noch die Beschränkung

$$|v_k| \leq v_{max} \quad \text{für alle } k \geq 0 \quad (7.31)$$

*Die Tatsache, daß der Nenner von $P^\#(q)$ vollständig im Nenner von $G^\#(q)$ enthalten ist, folgt aus der Annahme, daß die Folge (v_k) eine *innere* Größe der Regelstrecke ist.

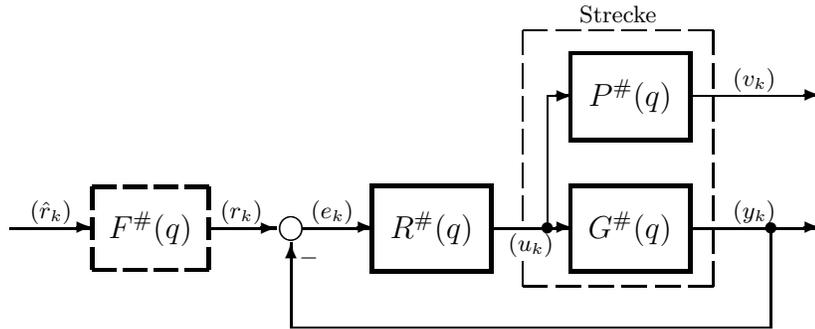


Bild 7.13: Folgeregelung zur erweiterten Aufgabenstellung.

aufnehmen; v_{max} ist eine gegebene positive Konstante. Die Herleitung des Entwurfsverfahrens für die so erweiterte Aufgabenstellung unterscheidet sich von den Ausführungen des Abschnitts 7.3 lediglich dadurch, daß wegen der Beschränkung (7.31) zur Ungleichung (7.20) noch eine zweite Ungleichung

$$\left| \frac{F^\#(j\Omega)R^\#(j\Omega)P^\#(j\Omega)}{1 + R^\#(j\Omega)G^\#(j\Omega)} \right| \leq v_{max} \quad \text{für alle } \Omega \quad (7.32)$$

hinzu kommt. Zur Gewährleistung der Stabilität des Gesamtsystems muß jetzt neben der Stabilität der den linken Seiten der Ungln.(7.20) und (7.21) zugeordneten Übertragungsfunktionen auch die Stabilität der entsprechenden Übertragungsfunktion in Ungl.(7.32) sichergestellt sein. Daraus folgt die Forderung, daß die instabilen Pole von $F^\#(q)$ *nicht* Polstellen von $P^\#(q)$ sind.

Wir können uns diesen Sachverhalt auf folgende Weise plausibel machen: Wenn wir Führungsfolgen (r_k) zulassen, die unbegrenzt anwachsen, so enthält das fiktive Filter $F^\#(q)$ mindestens einen instabilen Pol. Damit die Regelgröße (y_k) bei beschränkter Stellgröße (u_k) diesen Führungssignalen auch folgen kann (damit e_k endlich bleibt), muß die Streckenübertragungsfunktion $G^\#(q)$ alle instabilen Pole des Filters enthalten. Wären diese instabilen Pole auch Pole der Übertragungsfunktion $P^\#(q)$, so würde die Folge (v_k) ebenfalls über alle Grenzen wachsen können, was aber im Widerspruch zur Beschränkung (7.31) stünde. Somit darf $P^\#(q)$ die instabilen Pole des Filters $F^\#(q)$ nicht enthalten.

Aus der Ungl.(7.32) erhält man mit der Übertragungsfunktion (7.22) des

offenen Kreises zunächst die Ungleichung

$$\left| \frac{L^\#(j\Omega)}{1 + L^\#(j\Omega)} \right| \leq \left| \frac{G^\#(j\Omega)}{F^\#(j\Omega)P^\#(j\Omega)} \right| v_{max} \quad \text{für alle } \Omega,$$

die dann mit der ersten Syntheseungleichung (7.23) leicht zu einer einzigen Ungleichung (7.33) zusammengefaßt werden kann*:

$$\left| \frac{L^\#(j\Omega)}{1 + L^\#(j\Omega)} \right| \leq \min \left\{ \left| \frac{G^\#(j\Omega)}{F^\#(j\Omega)} \right| u_{max}, \left| \frac{G^\#(j\Omega)}{F^\#(j\Omega)P^\#(j\Omega)} \right| v_{max} \right\} \quad \text{für alle } \Omega. \quad (7.33)$$

Diese Ungleichung (7.33) tritt jetzt an die Stelle der ersten Syntheseungleichung (7.23). So gesehen heißt dies, daß wir dem Punkt A des Entwurfschemas nunmehr die Begrenzungskennlinie

$$\min \left\{ \left| \frac{G^\#(j\Omega)}{F^\#(j\Omega)} \right| u_{max}, \left| \frac{G^\#(j\Omega)}{F^\#(j\Omega)P^\#(j\Omega)} \right| v_{max} \right\}$$

zugrunde legen müssen. Indessen bleiben die Punkte B und C unverändert. Selbstverständlich erhalten wir im Punkt D das Betragsmaximum der Folgenwerte v_k für alle zulässigen Führungsfolgen (r_k), indem wir gemäß den Gln.(7.3) und (7.7) die zur Übertragungsfunktion $S^*(z)$

$$S^*(z) = \frac{v(z)}{\hat{r}(z)} = F^*(z) \frac{R^*(z)P^*(z)}{1 + R^*(z)G^*(z)}$$

gehörende Gewichtsfolge absolut summieren.

7.6 Beispiel 2

Gegeben seien für die Folgeregelung nach Bild 7.13:

1. Die Übertragungsfunktionen $G(s)$ und $P(s)$

$$G(s) = \frac{0,5 \left[1 + \frac{s}{20} + \left(\frac{s}{20} \right)^2 \right]}{s(1+s) \left[1 + 1,2 \frac{s}{5} + \left(\frac{s}{5} \right)^2 \right]},$$

$$P(s) = \frac{-0,05s}{(1+s) \left[1 + 1,2 \frac{s}{5} + \left(\frac{s}{5} \right)^2 \right]},$$

*In diesem Zusammenhang bedeutet die Funktion $\min\{a, b\}$ die kleinere der beiden Zahlen a und b .

mit einer Abtastperiode $T = 0,05$ findet man für die zugehörigen q -Übertragungsfunktionen $G^\#(q)$ bzw. $P^\#(q)$ (siehe Fußnote auf Seite 122):

$$G^\#(q) = 0,5 \frac{\left(1 - \frac{q}{40}\right) \left[1 + 1,13 \frac{q}{20,7} + \left(\frac{q}{20,7}\right)^2\right] \left(1 - \frac{q}{329}\right)}{q(1+q) \left[1 + 1,2 \frac{q}{5} + \left(\frac{q}{5}\right)^2\right]},$$

$$P^\#(q) = -0,05 \frac{q \left(1 - \frac{q}{40}\right) \left(1 + \frac{q}{686}\right)}{(1+q) \left[1 + 1,2 \frac{q}{5} + \left(\frac{q}{5}\right)^2\right]}.$$

2. Eine Klasse von zulässigen Führungsfolgen (r_k) nach Gl. (7.10) mit $\dot{r}_{max} = 0,1$. Für die z -Übertragungsfunktion $F^*(z)$ des fiktiven Filters ergibt sich nach Gl.(7.8)

$$F^*(z) = 0,005 \frac{z}{z-1}$$

und für die zugehörige q -Übertragungsfunktion

$$F^\#(q) = 0,1 \frac{\left(1 + \frac{q}{40}\right)}{q}.$$

3. Das zulässige Betragsmaximum der Stellfolgenwerte u_k mit

$$u_{max} = 2$$

und das zulässige Betragsmaximum der Folgenwerte v_k mit

$$v_{max} = 0,025.$$

Lösung der Aufgabenstellung nach dem **Entwurfsschema** aus dem Abschnitt 7.3:

- A. Gemäß (7.17) manipulierte Filterkennlinie:

$$\left|F^\#(j\Omega)\right| = 0,15 \left| \frac{1 + \frac{j\Omega}{40}}{j\Omega} \right|.$$

Begrenzungslinie $|B_u^\#(j\Omega)|$ aufgrund der Beschränkung der Stellgröße auf u_{max} :

$$\begin{aligned} |B_u^\#(j\Omega)| &= \left| \frac{G^\#(j\Omega)}{F^\#(j\Omega)} \right| u_{max} = \\ &= 6,67 \left| \frac{\left(1 - \frac{j\Omega}{40}\right) \left(1 - \frac{j\Omega}{329}\right) \left[1 + 1,13 \frac{j\Omega}{20,7} + \left(\frac{j\Omega}{20,7}\right)^2\right]}{(1 + j\Omega) \left(1 + \frac{j\Omega}{40}\right) \left[1 + 1,2 \frac{j\Omega}{5} + \left(\frac{j\Omega}{5}\right)^2\right]} \right|. \end{aligned}$$

Begrenzungskennlinie $|B_v^\#(j\Omega)|$ aufgrund der zweiten Beschränkung v_{max} :

$$\begin{aligned} |B_v^\#(j\Omega)| &= \left| \frac{G^\#(j\Omega)}{F^\#(j\Omega)P^\#(j\Omega)} \right| v_{max} = \\ &= \left| -1,67 \frac{\left(1 - \frac{j\Omega}{329}\right) \left[1 + 1,13 \frac{j\Omega}{20,7} + \left(\frac{j\Omega}{20,7}\right)^2\right]}{j\Omega \left(1 + \frac{j\Omega}{40}\right) \left(1 + \frac{j\Omega}{686}\right)} \right|. \end{aligned}$$

Der durch

$$\min \left\{ |B_u^\#(j\Omega)|, |B_v^\#(j\Omega)| \right\} \quad \text{für } \Omega \gg \Omega_C$$

gegebene zulässige Bereich für die Lage der Betragskennlinie $|L^\#(j\Omega)|$ ist im Bild 7.14 schraffiert gekennzeichnet.

B. Ansatz für $L^\#(q)$

$$L^\#(q) = \frac{\left(1 - \frac{q}{40}\right) \left(1 - \frac{q}{329}\right) \left[1 + 1,13 \frac{q}{20,7} + \left(\frac{q}{20,7}\right)^2\right]}{\frac{q}{\Omega_C} \left(1 + \frac{q}{40}\right) \left(1 + \frac{q}{\Omega_N}\right)^2}.$$

Dieser Ansatz genügt der Bedingung des Punktes B1 des Entwurfschemas und es läßt sich mit ihm erreichen, daß die Betragskennlinie $|L^\#(j\Omega)|$ einerseits im Bereich $\Omega \gg \Omega_C$ möglichst nahe an die Begrenzungskennlinie $\min\{|B_u^\#(j\Omega)|, |B_v^\#(j\Omega)|\}$ herankommt und andererseits im Bereich $\Omega \ll \Omega_C$ möglichst weit über der Filterkennlinie

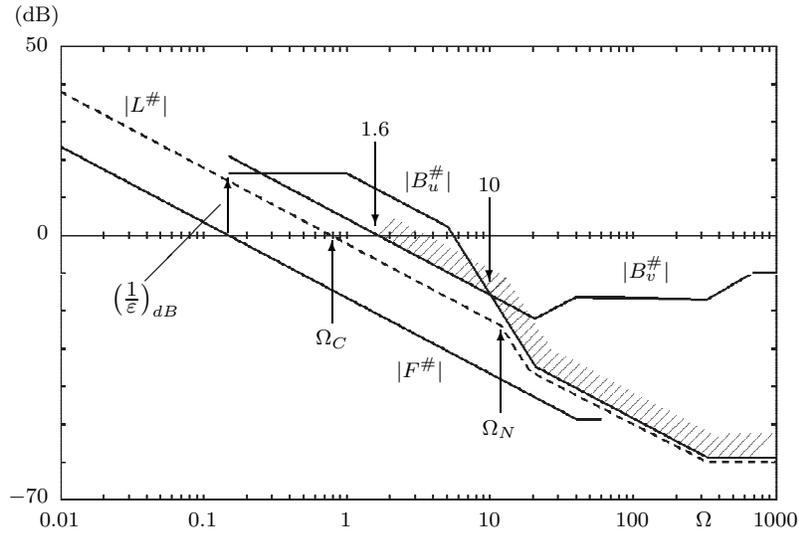


Bild 7.14. Asymptotische Betragskennlinien für das Entwurfsbeispiel 2.

$|F^\#(j\Omega)|$ liegt (siehe Bild 7.14). Man beachte, daß $L^\#(q)$ für $\Omega_C > 0$ und $\Omega_N > 0$ vom einfachen Typ ist; daher ist der Regelkreis genau dann BIBO-stabil, wenn die Phasenreserve $\phi = \text{arc}L^\#(j\Omega_C) + 180^\circ$ positiv ist.

- B1. Die Betragskennlinie $|L^\#(j\Omega)|$ ist im Bild 7.14 strichliert gezeichnet. Schieben wir sie so weit wie erlaubt nach oben, setzen wir also für

$$\Omega_C = 1,6 \quad \text{und} \quad \Omega_N = 10, \quad (7.34)$$

so ergibt sich für

$$\text{arc}L^\#(j\Omega_C) = -108^\circ.$$

Dem entspricht eine Phasenreserve von 72° , die in diesem Beispiel gerade zur Erfüllung der Syntheseungleichung (7.23) im Bereich der Durchtrittsfrequenz Ω_C ausreicht. Mit den Daten (7.34) findet man gemäß Bild 7.14 für das Betragsmaximum des Regelfehlers:

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = 21 \text{ dB} \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon = 0,09.$$

C. Reglerübertragungsfunktion:

$$R^\#(q) = 3,2 \frac{(1+q) \left[1 + 1,2 \frac{q}{5} + \left(\frac{q}{5} \right)^2 \right]}{\left(1 + \frac{q}{40} \right) \left(1 + \frac{q}{10} \right)^2},$$

$$R^*(z) = \frac{-138,35 + 460,51z - 517,97z^2 + 196,33z^3}{0,36z - 1,2z^2 + z^3}.$$

Reglerdifferenzgleichung:

$$u_k = 196,33e_k - 517,97e_{k-1} + 460,51e_{k-2} - 138,35e_{k-3} + \\ + 1,2u_{k-1} - 0,36u_{k-2}.$$

D. Zur exakten Berechnung der Betragsmaxima

- der Stellfolgenwerte u_k ,
- der Werte des Regelfehlers e_k und
- der Folgenwerte v_k

für alle zulässigen Führungsfolgen (r_k) müssen wir die Gewichtsfolgen der nachstehenden Übertragungssysteme

$$\text{a) } \frac{u(z)}{\hat{r}(z)} = \frac{-0,6917z + 2,3026z^2 - 2,5899z^3 + 0,9816z^4}{0,004577 - 0,3662z + 1,5647z^2 - 2,1903z^3 + z^4},$$

$$\text{b) } \frac{e(z)}{\hat{r}(z)} = \frac{0,0018z^2 - 0,006z^3 + 0,005z^4}{0,004577 - 0,3662z + 1,5647z^2 - 2,1903z^3 + z^4},$$

$$\text{c) } \frac{v(z)}{\hat{r}(z)} = \frac{0,001211z + 0,00015z^2 - 0,001361z^3}{0,004577 - 0,3662z + 1,5647z^2 - 2,1903z^3 + z^4}$$

absolut summieren und erhalten so:

- $|u_k|_{max} = 1,8,$
- $|e_k|_{max} = 0,063,$
- $|v_k|_{max} = 0,025.$

Im diesem Abschnitt wurde ein Entwurfsverfahren für lineare zeitinvariante Abtastsysteme anhand von Beispielen zur Folgeregelung dargelegt. Ziel

des Entwurfes ist ein Regelkreis, in dem gewisse Systemgrößen vorgegebene Beschränkungen nicht überschreiten und der Betrag des Regelfehlers möglichst klein bleibt. Dabei werden nur Führungsgrößen betrachtet, die selbst wieder geeigneten Beschränkungen unterliegen. Das Entwurfsproblem wird grafisch mit Hilfe von Bode-Diagrammen gelöst. In dieser Phase ist es zunächst ein Näherungsverfahren, doch kann man anschließend die sich im entworfenen Regelkreis einstellenden Betragsmaxima der Systemgrößen exakt berechnen.

Das Verfahren läßt sich erweitern z.B. für die Ausregelung von Störungen und für die Berücksichtigung von Meßrauschen auf der Rückführleitung, doch ist in diesen Fällen der grafische Entwurf etwas erschwert. Einen anderen Zugang zu diesem Syntheseproblem findet der Leser in [13], wo u.a. Einstellregeln für bestimmte Typen von Regelstrecken angegeben werden.

Kapitel 8

Numerische Berechnung der z - bzw. q -Übertragungsfunktion

Der Entwurf von Abtastregelkreisen mit Hilfe logarithmischer Frequenzkennlinien bietet dem Anwender den Vorteil großer Anschaulichkeit. Allerdings ist der "Eintrittspreis in den Frequenzbereich" bei Abtastsystemen relativ hoch. Der Leser möge sich nur vor Augen halten, welchen Aufwand man treiben muß, wenn man die z -Übertragungsfunktion einer Regelstrecke höherer Ordnung ausgehend von deren kontinuierlicher Übertragungsfunktion per Hand ermitteln will. Dabei sind die Probleme keineswegs theoretischer Natur sondern rein rechentechnische Schwierigkeiten. Es ist dabei sehr naheliegend - bei der steigenden Verbreitung leistungsfähiger Personal-Computer, sich dieser Bürde durch ein geeignetes Programm zu entledigen. Das Programm $\mu LINSY$ stellt dem Anwender dazu die zwei Funktionen '@z' (Berechnung der z -Übertragungsfunktion) bzw. '@q' (Berechnung der q -Übertragungsfunktion) zur Verfügung. In der folgenden Abhandlung wird nun gezeigt, mit welchen Algorithmen man numerisch aus $G(s)$ die Übertragungsfunktion $G^*(z)$ gewinnt, bzw. die Variablentransformationen $z \rightarrow q$ und $q \rightarrow z$ durchführt.

8.1 Ermittlung der z -Übertragungsfunktion

Wir betrachten ein einfaches Abtastsystem, wie es im Bild 8.1 dargestellt ist und gehen davon aus, daß die Koeffizienten der Übertragungsfunktion $G(s)$

und die Abtastperiode T gegeben sind.

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n}, \quad m \leq n. \quad (8.1)$$

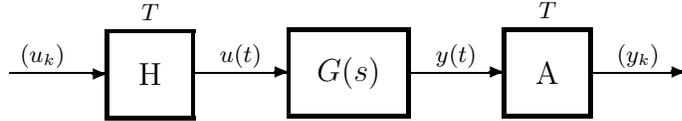


Bild 8.1: Abtastsystem

Gesucht ist nun eine numerische Methode, die eine Ermittlung der zugehörigen z -Übertragungsfunktion $G^*(z)$ mit Hilfe eines Digitalrechners erlaubt. Wollte man per Hand die z -Übertragungsfunktion berechnen, so könnte man nach der Beziehung

$$G^*(z) = \frac{z-1}{z} \mathbf{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad (8.2)$$

vorgehen und dabei die gebrochen rationale Funktion $G(s)/s$ in Partialbrüche zerlegen und anschließend die einzelnen Terme der Partialbruchentwicklung mit Hilfe der Korrespondenztabelle 3.2 in den z -Bereich transformieren. Prinzipiell wäre dieser Weg auch für den Rechereinsatz denkbar, doch ist dabei der Aufwand bei der programmtechnischen Realisierung erheblich. Es soll deshalb an dieser Stelle ein anderer Weg eingeschlagen werden.

Wir betrachten dazu nochmals die Beziehung (8.2) und nehmen der Einfachheit halber vorerst einmal an, daß $G(s)$ nur einfache Polstellen besitzt und außerdem auch keinen Pol bei $s = 0$ aufweist. Damit ergibt sich für die gesuchte z -Übertragungsfunktion

$$G^*(z) = \frac{z-1}{z} \mathbf{Z} \left\{ \frac{c_0}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s - \alpha_i} \right\}, \quad (8.3)$$

wobei mit α_i die Polstellen von $G(s)$ und mit c_i die Koeffizienten der Partialbruchentwicklung bezeichnet werden. Nach dem Übergang in den z -Bereich erhalten wir aus der Gl.(8.3) den Ausdruck

$$G^*(z) = \frac{z-1}{z} \left(\frac{c_0 z}{z-1} + \sum_{i=1}^n \frac{c_i z}{z - e^{\alpha_i T}} \right) \quad (8.4)$$

Bringt man die rechte Seite der Gl.(8.4) auf einen gemeinsamen Nenner, so kann auch der Faktor $(z - 1)$ gekürzt werden, so daß man schließlich zur Beziehung

$$G^*(z) = \frac{P(z)}{\prod_{i=1}^n (z - e^{\alpha_i T})} \quad (8.5)$$

gelangt. Die Berechnung des *Nennerpolynoms* der z -Übertragungsfunktion läßt sich demnach so durchführen:

Ausgehend von den Nennerkoeffizienten a_i der Übertragungsfunktion $G(s)$ bestimme man die Wurzeln α_i des Nennerpolynoms. Für diese Aufgabe gibt es eine Reihe erprobter Algorithmen (siehe z.B. [9]). Anschließend berechne man die Wurzeln β_i des Nennerpolynoms von $G^*(z)$ nach der Vorschrift

$$\beta_i = e^{\alpha_i T} \quad (8.6)$$

und daraus dann die gesuchten Nennerkoeffizienten der z -Übertragungsfunktion.

Der Leser kann sich sehr leicht selbst davon überzeugen, daß dieser eben beschriebene Weg auch dann noch beibehalten werden kann, wenn $G(s)$ mehrfache Polstellen bzw. Polstellen bei $s = 0$ besitzt.

Zur Herleitung eines geeigneten Rechenverfahrens für das *Zählerpolynom* $P(z)$ tun wir nun so, als ob die gesuchte z -Übertragungsfunktion bereits ermittelt worden sei und in der Form

$$G^*(z) = \frac{B_0 + B_1 z + \dots + B_n z^n}{A_0 + A_1 z + \dots + A_{n-1} z^{n-1} + z^n} \quad (8.7)$$

vorliege. Man kann dazu sofort die entsprechende Differenzgleichung angeben, die den Zusammenhang zwischen der Eingangsfolge (u_k) und der Ausgangsfolge (y_k) beschreibt.

$$y_k + A_{n-1} y_{k-1} + \dots + A_0 y_{k-n} = B_n u_k + B_{n-1} u_{k-1} + \dots + B_0 u_{k-n} \quad (8.8)$$

Wir denken uns jetzt die spezielle Eingangsfolge

$$(u_k) = (1, 0, 0, \dots) \quad (8.9)$$

aufgeschaltet und bestimmen die zugehörige Ausgangsfolge (y_k) , wobei wir zu berücksichtigen haben, daß das System von seinem Ruhezustand (d.h.

$y_i = u_i = 0$ für $i = -1, -2, \dots, -n$) heraus angeregt wird.

$$\begin{aligned}
 k = 0 : & & y_0 &= B_n 1 \\
 k = 1 : & & y_1 + A_{n-1}y_0 &= B_{n-1} 1 \\
 & \vdots & & \vdots \\
 k = n : & & y_n + A_{n-1}y_{n-1} + \dots + A_0y_0 &= B_0 1 .
 \end{aligned} \tag{8.10}$$

Daraus kann nun folgender interessanter Sachverhalt abgeleitet werden: *Wenn es gelingt, die ersten $n + 1$ Werte y_k der Antwort des Abtastsystems auf die Eingangsfolge (8.9) zu bestimmen, so können damit die Zählerkoeffizienten B_i bei bekannten Koeffizienten A_i berechnet werden.* Es kann also die Aufgabe der Ermittlung des Zählerpolynoms von $G^*(z)$ auf die Bestimmung der Impulsantwort des Abtastsystems zurückgeführt werden.

Eine geeignete Möglichkeit, zu den Folgenwerten y_k der Impulsantwort zu gelangen, bietet die digitale Simulation des Übertragungssystems. Dazu muß lediglich die zu $G(s)$ gehörende Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
 y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y &= \\
 = b_mu^{(m)} + \dots + b_1\dot{u} + b_0u &
 \end{aligned} \tag{8.11}$$

mit Hilfe eines geeigneten numerischen Verfahrens gelöst werden, wobei als Eingangsfunktion $u(t)$ ein Impuls der Höhe Eins und der Dauer einer Abtastperiode auf das kontinuierliche System einwirkt. Vom Verlauf der Lösung interessieren uns jedoch nur die Werte an den ersten $n + 1$ Abtastzeitpunkten.

Im folgenden Abschnitt soll nun das einfachste Verfahren zur numerischen Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen behandelt werden. Wir betrachten dazu eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{8.12}$$

und setzen voraus, daß wir den zeitlichen Verlauf der Eingangsfunktion $u(t)$ für $t \geq 0$ sowie den Anfangszustand $x(t = 0) = x_0$ kennen. Wir suchen jetzt ein Rechenverfahren, das uns erlaubt, die Lösung $x(t)$ an zeitlich äquidistanten Stützstellen mit dem Abstand Δt zu ermitteln. Zunächst führen wir noch die abkürzende Schreibweise ein*

$$\begin{aligned}
 x_i &:= x(i\Delta t) \\
 u_i &:= u(i\Delta t)
 \end{aligned}$$

*Man beachte, daß sich die Indizierung in diesem Fall auf die Schrittweite Δt und nicht auf die Abtastperiode T bezieht.

und ersetzen in der Differentialgleichung (8.12) den Differentialquotienten durch folgenden Differenzenquotienten

$$\dot{x}(i\Delta t) \approx \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} \quad (8.13)$$

wodurch wir die Beziehung erhalten:

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} = f(x_i, u_i)$$

bzw.

$$x_{i+1} = x_i + f(x_i, u_i)\Delta t. \quad (8.14)$$

Mit dieser Rekursionsformel ist es jetzt möglich, ausgehend vom gegebenen Anfangswert x_0 eine Näherungslösung der Differentialgleichung (8.12) zu bestimmen, wobei die Abweichungen von der exakten Lösung im wesentlichen von der Wahl der Schrittweite Δt abhängen.

Das eben skizzierte Verfahren, das in der Literatur auch als Euler-Verfahren oder Ganzinkrement-Verfahren bezeichnet wird, kann jedoch nicht unmittelbar zur Lösung einer Differentialgleichung *höherer* Ordnung herangezogen werden. Man kann aber leicht Abhilfe schaffen, indem man die Differentialgleichung n -ter Ordnung in ein äquivalentes System von n Differentialgleichungen erster Ordnung umformt und diese n Differentialgleichungen dann gleichzeitig zur Lösung bringt. Wir wenden uns nun der Aufgabe zu, wie man am einfachsten ein solches System von Differentialgleichungen erster Ordnung aufstellen kann und betrachten dazu wieder die Übertragungsfunktion $G(s)$ nach (8.1). Wir nehmen dabei der Einfachheit halber an, daß der Zählergrad m kleiner sei als der Nennergrad n und führen jetzt eine neue Funktion $x_1(t)$ ein, indem wir deren Laplace-Transformierte $x_1(s)$ durch die Beziehung

$$x_1(s) = \frac{1}{a_0 + a_1s + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n} u(s) \quad (8.15)$$

festlegen. Für die Ausgangsgröße $y(t)$ gilt im Bildbereich der Zusammenhang

$$y(s) = G(s)u(s),$$

der sich nun durch die Verwendung der Funktion x_1 auch so angeben läßt:

$$y(s) = b_0x_1(s) + b_1sx_1(s) + \dots + b_ms^mx_1(s). \quad (8.16)$$

Definiert man noch die Größen

$$\begin{aligned}
 x_2(s) &:= sx_1(s) \\
 x_3(s) &:= sx_2(s) \\
 &\vdots \\
 x_n(s) &:= sx_{n-1}(s)
 \end{aligned}
 \tag{8.17}$$

dann lassen sich die beiden Gleichungen (8.15) und (8.16) zu folgenden Beziehungen umformen:

$$sx_n(s) = -a_0x_1(s) - a_1x_2(s) - \dots - a_{n-1}x_n(s) + u(s) \tag{8.18}$$

$$y(s) = b_0x_1(s) + b_1x_2(s) + \dots + b_mx_{m+1}(s) . \tag{8.19}$$

Wenn wir jetzt die Gln.(8.17), (8.18) und (8.19) in den Zeitbereich rücktransformieren, so erhalten wir daraus n Differentialgleichungen erster Ordnung* und eine algebraische Gleichung

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 , & x_1(0) &= 0 , \\
 \dot{x}_2 &= x_3 , & x_2(0) &= 0 , \\
 &\vdots & & \\
 \dot{x}_{n-1} &= x_n , & x_{n-1}(0) &= 0 , \\
 \dot{x}_n &= -a_0x_1 - a_1x_2 - \dots - a_{n-1}x_n + u , & x_n(0) &= 0 , \\
 y &= b_0x_1 + b_1x_2 + \dots + b_mx_{m+1} .
 \end{aligned}
 \tag{8.20}$$

Die Rekursionsformel (8.14) auf jede Differentialgleichung einzeln angewandt führt zu folgendem Satz von Rechenvorschriften

$$\begin{aligned}
 x_{1,i+1} &= x_{1,i} + x_{2,i}\Delta t \\
 &\vdots \\
 x_{n-1,i+1} &= x_{n-1,i} + x_{n,i}\Delta t \\
 x_{n,i+1} &= x_{n,i} + (-a_0x_{1,i} - \dots - a_{n-1}x_{n,i} + u_i)\Delta t \\
 y_i &= b_0x_{1,i} + b_1x_{2,i} + \dots + b_mx_{m+1,i} ,
 \end{aligned}
 \tag{8.21}$$

*Es läßt sich zeigen, daß die Festlegung der Anfangswerte $x_1(0) = x_2(0) = \dots = x_n(0) = 0$ genau derjenigen entspricht, die man beim Übergang von der Differentialgleichung n -ter Ordnung (8.11) zur Übertragungsfunktion (8.1) mit $y(0) = \dot{y}(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$ vorgenommen hat.

deren Auswertung auf einem Digitalrechner jetzt sehr einfach ist. Bei der Wahl der Schrittweite Δt ist unter anderem noch zu berücksichtigen, daß die Abtastperiode T ein ganzzahliges Vielfaches von Δt sein muß. Selbstverständlich stehen zur numerischen Lösung eines Systems von Differentialgleichungen leistungsfähigere Algorithmen als das Ganzinkrementverfahren zur Verfügung [2]. Dieses wurde hier nur zur einfacheren Herleitung des Lösungsprinzips gewählt.

Damit sind alle wesentlichen Schritte zur numerischen Berechnung der z -Übertragungsfunktion erläutert worden und es soll nun die prinzipielle Vorgangsweise nochmals zusammengefaßt werden.

1.Schritt: Berechnung der Wurzeln des Nennerpolynoms von $G(s)$; Ergebnis: α_i , $i = 1, \dots, n$

2.Schritt: Berechnung der Wurzeln des Nennerpolynoms von $G^*(z)$ nach der Vorschrift

$$\beta_i = e^{\alpha_i T}, \quad i = 1, \dots, n$$

3.Schritt: Berechnung der Koeffizienten des Nennerpolynoms von $G^*(z)$ aus den Wurzeln β_i ; Ergebnis: A_i , $i = 0, \dots, n$

4.Schritt: Übergang von $G(s)$ zu einem äquivalenten System von Differentialgleichungen erster Ordnung und numerische Lösung dieses Systems von Differentialgleichungen für die spezielle Eingangsfunktion $u(t) = 1$ für $0 \leq t < T$; Ergebnis: Ausgangsfolge y_k , $k = 0, \dots, n$

5.Schritt: Bestimmung der Koeffizienten des Zählerpolynoms von $G^*(z)$ aus den bekannten Werten A_i und y_i nach Gl.(8.10)

8.2 Bilineare Transformation

In diesem Abschnitt soll die Frage behandelt werden, wie man mit Hilfe eines Digitalrechners bei gegebenen Koeffizienten der z -Übertragungsfunktion $G^*(z)$ die Koeffizienten der zugehörigen q -Übertragungsfunktion $G^\#(q)$ möglichst einfach ermitteln kann. Die q -Übertragungsfunktion $G^\#(q)$ hängt – wie im 5. Kapitel bereits dargelegt wurde – über folgende Beziehung

$$G^\#(q) = G^*(z) \Big|_{z = \frac{1 + q\frac{T}{2}}{1 - q\frac{T}{2}}} \quad (8.22)$$

mit der z -Übertragungsfunktion $G^*(z)$ zusammen.

Zur Herleitung des Rechenverfahrens, das im wesentlichen auf die zweimalige Anwendung eines Hornerchemas hinausläuft [17], betrachten wir der Einfachheit halber vorerst ein Polynom $f(x)$

$$f(x) = d_0 + d_1x + \dots + d_mx^m \quad (8.23)$$

und versuchen die Funktion

$$g(y) = f(x) \Big|_{x = b \frac{y+c}{y-c}} \quad (8.24)$$

zu bestimmen. Dabei können wir die Funktion $g(y)$ sofort als Quotient zweier Polynome anschreiben

$$g(y) = \frac{h(y)}{(y-c)^m} = \frac{D_0 + D_1y + \dots + D_my^m}{(y-c)^m}. \quad (8.25)$$

Wir stehen nun vor der Aufgabe, die Koeffizienten D_i des Polynoms $h(y)$ zu ermitteln. Zu diesem Zweck führen wir eine neue Variable w ein, die wir durch die Beziehung

$$w := \frac{2bc}{y-c} \quad (8.26)$$

definieren. Damit gelten jetzt die Zusammenhänge

$$b \frac{y+c}{y-c} = b+w \quad (8.27)$$

und

$$\begin{aligned} g(y) &= f(b+w) \Big|_{w = \frac{2bc}{y-c}} = \\ &= [d_0 + d_1(b+w) + \dots + d_m(b+w)^m] \Big|_{w = \frac{2bc}{y-c}} = \\ &= (\delta_0 + \delta_1w + \dots + \delta_mw^m) \Big|_{w = \frac{2bc}{y-c}}, \end{aligned} \quad (8.28)$$

wobei die Koeffizienten δ_i nun leicht mit Hilfe eines Hornerchemas aus den Koeffizienten d_i berechnet werden können. Aus Gln. (8.25) und (8.28) erhält man

$$h(y) = (y-c)^m \sum_{i=0}^m \delta_i \left(\frac{2bc}{y-c} \right)^i \quad (8.29)$$

und daraus nach kurzer Zwischenrechnung

$$h(y) = \sum_{i=0}^m \delta_i (2bc)^i (y-c)^{m-i} =: \sum_{i=0}^m D_i y^i . \quad (8.30)$$

Damit haben wir aber eine brauchbare Ermittlungsvorschrift für die gesuchten Koeffizienten D_i gefunden und fassen die Vorgangsweise zusammen.

1. *Schritt*: Berechnung der Koeffizienten δ_i aus

$$d_0 + d_1(b+w) + \dots + d_m(b+w)^m = \sum_{i=0}^m \delta_i w^i$$

mittels eines Hornerchemas.

2. *Schritt*: Berechnung der Koeffizienten γ_i nach der Vorschrift

$$\gamma_{m-i} = \delta_i (2bc)^i , \quad i = 0, \dots, m .$$

3. *Schritt*: Berechnung der Koeffizienten D_i aus den Koeffizienten γ_i (gleiche Aufgabe wie im ersten Schritt)

$$\gamma_0 + \gamma_1(y-c) + \dots + \gamma_m(y-c)^m = \sum_{i=0}^m D_i y^i .$$

Wollen wir diesen Algorithmus zur Berechnung der q -Übertragungsfunktion verwenden, so müssen wir lediglich für die Konstanten b und c die Werte

$$b = -1 , \quad c = \frac{2}{T}$$

einsetzen und sowohl das Zählerpolynom als auch das Nennerpolynom nach der eben hergeleiteten Vorschrift berechnen. Für den Fall, daß der Zählergrad r der z -Übertragungsfunktion kleiner als der Nennergrad n ist, muß das Zählerpolynom mit $(q - \frac{2}{T})^{n-r}$ multipliziert werden. Natürlich läßt sich mit diesem Algorithmus auch die zu einer gegebenen q -Übertragungsfunktion gehörende z -Übertragungsfunktion bestimmen, denn dazu ist lediglich

$$b = \frac{2}{T} , \quad c = -1$$

zu setzen.

Kapitel 9

Realisierung digitaler Regler

Die Realisierung eines Regelgesetzes steht am Ende des Weges von Problem-analyse über Modellbildung und Entwurf bis zu einem funktionstüchtigen Regelkreis. Realisierung heißt im diskreten Fall Umsetzung des Regelgesetzes in einen Algorithmus und seine Implementierung als Programm auf einem Digitalrechner. Wie bei der Realisierung kontinuierlicher elektrischer Regler mit Operationsverstärkern, Widerständen und Kondensatoren hängt auch hier der Erfolg stark vom Detail ab. Mit dem Digitalrechner steht ein äußerst mächtiges und flexibles Hilfsmittel zur Verfügung. Doch sorgen auch hier gewisse Effekte wie Rundungsfehler, Quantisierungsfehler oder Schwankungen im zeitlichen Ablauf für Erscheinungen, die verlangen, dem Realisierungsproblem einige Aufmerksamkeit zu schenken.

9.1 Vorbemerkungen und Einschränkungen

Das Realisierungsproblem ist nicht nur wesentlich umfangreicher als es hier dargestellt werden kann, es hängt auch abweichend von den bisher in diesem Buch behandelten Aufgaben sehr stark von der Zielanlage ab. Neben der bisherigen Einschränkung auf zeitinvariante Regelalgorithmen werden gerätespezifische Details hier nur soweit behandelt, wie sie von allgemeinem Interesse sind. Ähnlich wie im kontinuierlichen Fall kann ein und dasselbe Regelgesetz – hier durch eine z -Übertragungsfunktion beschrieben – durch verschiedene Algorithmen realisiert werden. Naturgemäß taucht nun die Frage auf, welcher dieser Algorithmen denn für eine gegebene Aufgabe geeignet ist. Am schnellsten kann eine Antwort hierauf durch Simulation gefunden werden [8].

Um nicht gerätespezifischen Details allzu große Aufmerksamkeit schenken zu

müssen, stützen sich alle weiteren Überlegungen auf Anlagen, deren Leistung einem heute üblichen 16-bit- Mikroprozessor (mit oder ohne Arithmetikprozessor) entspricht. Diese Klasse von Rechnern erlaubt ohne weiteres Abtastzeiten im Bereich von einigen Millisekunden. Von speziellen Maschinen wie Signalprozessoren für Abtastzeiten von derzeit $20\mu s$ und weniger wird abgesehen.

Neben den apparativen Bestandteilen eines Mikrocomputers sind auch das Betriebssystem und die Programmiersprache entscheidend für seine Effizienz. Im allgemeinen erhöht eine maschinennahe Programmiersprache den Durchsatz, sie schränkt aber die Übertragbarkeit gefundener Lösungen stark ein. Deshalb wird hier die praktische Anwendung der Algorithmen anhand von FORTRAN Programmen vorgeführt. Eine aus Geschwindigkeitsgründen erforderliche Übersetzung in Maschinensprache sollte aber ebenso leicht möglich sein, wie ihre Einbindung in ein Echtzeitbetriebssystem.

9.2 Realer und idealer Regelkreis

Die exakte Beschreibung eines Regelkreises — sofern überhaupt möglich — erfordert einen erheblichen mathematischen Aufwand, der durch geeignete Idealisierungen, wie sie insbesondere im Abschnitt 1.2 dargelegt worden sind, reduziert werden kann. Bei der Realisierung gilt es nun, diesen Idealen möglichst nahe zu kommen. Hierbei sind, abgesehen von der Linearität und der Zeitinvarianz der zu regelnden Strecke, dem idealen Regler folgende Eigenschaften unterstellt worden:

- Fehlerfreie Realisierung der Parameter der Differenzgleichung (Koeffizienten bzw. Pole, Nullstellen und Verstärkungsfaktor).
- Rundungsfehlerfreie Arithmetik.
- Unendlich hohe Rechengeschwindigkeit.
- Exakter Synchronisation der A/D- und D/A-Wandler und äquidistante Abtastung.
- Keine Begrenzungseffekte, keine Quantisierungsfehler und keine Zeitverzögerungen in den Aktuatoren und in den Rezeptoren.

Träfen all diese Annahmen auch für den realen Regler zu, so wäre das Übertragungsverhalten des realen Reglers identisch mit dem des theoretisch

entworfenen. Demgegenüber steht der reale Regler mit folgenden unerwünschten Eigenschaften:

- Es treten Veränderungen in der Lage der Pol- und Nullstellen infolge nur näherungsweise Realisierung der Parameter der Differenzgleichung auf.
- Rundungsfehler in der Arithmetik verursachen Störungen.
- Die endliche Rechenzeit bringt Verzögerungen mit sich.
- Die endliche Reaktionszeit des Echtzeitbetriebssystems führt zu einer variierenden Abtastzeit. Synchronisationsfehler bei den Aktuatoren und den Rezeptoren machen aus dem ursprünglich zeitinvarianten System ein zeitvariantes.
- Verzögerungen, Quantisierungs- und insbesondere Begrenzungseffekte können das Übertragungsverhalten des Regelkreises grundsätzlich verändern*.

Ehe wir in der Diskussion fortfahren, wird jetzt ein Postulat aufgestellt, das ein mit Hilfe der Methoden der mathematischen Idealisierung entworfenes Regelgesetz erfüllen muß, um praktisch einsetzbar zu sein.

Alle wesentlichen Eigenschaften des Regelkreises müssen erhalten bleiben, falls er beliebigen aber hinreichend kleinen Änderungen unterworfen wird.

Die praktische Relevanz dieses Postulats ist unmittelbar einsichtig; es gewährleistet, daß das gewünschte Verhalten des Regelkreises noch erhalten bleibt, wenn nur der reale Regler hinreichend gut mit dem idealen übereinstimmt. Die Erfahrung hat gezeigt, daß viele Frequenzbereichsmethoden, insbesondere die in diesem Buch vorgestellten, diesem Postulat genügen.

An die Stelle der idealen Reglerübertragungsfunktion tritt eine vornehmlich durch Abschneidefehler veränderte Übertragungsfunktion. Das Überprüfen der Lage ihrer Pole und Nullstellen bzw. des Verstärkungsfaktors erlaubt es, die Anzahl der erforderlichen Dezimalstellen festzulegen*. Ohne besondere Allgemeinheit anzustreben kann festgestellt werden,

*Der Begrenzer des Aktuators muß nicht vorhanden sein. Bei gewissen D/A-Wandlern verursacht eine Bereichsüberschreitung einen Vorzeichenwechsel der Ausgangsgröße. Hier muß der Begrenzer auf alle Fälle als Teil des Reglerprogrammes ausgeführt werden. Auch in allen anderen Fällen ist eine Begrenzung der Aktuatoreingangsgröße u_k auf ihren zulässigen Bereich zu empfehlen.

*Hierbei ist besonders auf die Qualität der verwendeten Algorithmen zu achten, da bei Polynomen höherer Ordnung vielfach ein numerisch diffiziles Problem vorliegt.

daß das Problem der Abschneidefehler bei Fixkommaarithmetik generell und bei Fließkommaarithmetik im Falle von Differenzgleichungen höherer Ordnung auftritt. Leistungsfähige Arithmetikprozessoren stehen heute kostengünstig zur Verfügung. Muß aus anderen Überlegungen eine Fixkommaarithmetik zum Einsatz kommen, führen Normierungsmethoden, wie sie vom Analogrechner her bekannt sind, zu einer erhöhten Rechengenauigkeit. Hier sei auf das Entwurfsverfahren im Kapitel 7 verwiesen; die dort vorgestellten Methoden erlauben zusammen mit $\mu LINSY$ ein exaktes und einfaches Bestimmen aller auftretenden Maximalwerte und damit eine adäquate Normierung.

Die kritische Zeitspanne τ im zeitlichen Ablauf der Abarbeitung der Differenzgleichung ist die Spanne von der Messung der Reglereingangsgrößen r_k und y_k bis zur Ausgabe der Stellgröße u_k (siehe auch Bild 9.2). Laut Idealisierung wird diese Spanne zu Null. Um dem obigen Postulat zu genügen, muß zumindest dieses Intervall τ klein gegenüber der Abtastzeit T werden ($\tau < T$). Die Verzögerungen resultieren einerseits aus den Meß- und Wandlungszeiten und andererseits aus der Zeit zur Berechnung der Stellgröße. Die erste Komponente ist bei geeigneter Wahl der Rezeptoren und Aktuatoren vernachlässigbar. Wie die zweite durch geeignete Programmierung minimiert werden kann, wird im Abschnitt 9.3 gezeigt.

Eine zeitlich äquidistante Abtastung sollte vom jeweiligen Betriebssystem sichergestellt werden. Im Bereich von Millisekunden kann diese Forderung bei mächtigeren Echtzeitsystemen durchaus kritisch werden. Derartige Vorgaben sind aber im Bedarfsfalle durch geeignete programmtechnische Maßnahmen durchaus zu erreichen.

Die heutige Halbleitertechnologie erlaubt die preisgünstige Herstellung schneller und genauer Wandler, wobei die Wandlungszeiten im Bereich von μs liegen. Bei den meisten Geräten ist der Quantisierungsfehler kleiner als der eigentliche Meßfehler; er kann also hier vernachlässigt werden. Zu vollkommen anderen Verhältnissen führt die Berücksichtigung der *Begrenzungseffekte*, denn sie machen aus dem *linearen Regelkreis* einen *nichtlinearen*. Während alle bisherigen Idealisierungen bei Verwendung eines Entwurfes, der dem obigen Postulat genügt, bei geeigneter Realisierung zu rechtfertigen sind, ist die Vernachlässigung von Begrenzungen im allgemeinen eine fragwürdige Vorgangsweise. *So darf nicht einmal von der Stabilität des Regelkreises ohne Begrenzungen auf die Stabilität des Regelkreises mit Begrenzungen geschlossen werden.* Hier sei besonders auf das Entwurfsverfahren des Kapitels 7 hingewiesen, das einen *Reglerentwurf mit Berücksichtigung der Begrenzungen* ermöglicht.

9.3 Spezielle Realisierungsformen

Das Realisierungsproblem hat, wie bereits erwähnt, keine eindeutige Lösung. Im folgenden werden hierzu einige Vorschläge dargelegt, wobei durchaus für die Realisierung eines einzigen Reglers Kombinationen dieser Formen gebildet werden können. Es sei schon jetzt darauf verwiesen, daß diese Formen vom praktischen Standpunkt nicht gleichwertig sind. Zur Vereinfachung der Darstellung werden hier ausschließlich Reglerübertragungsfunktionen zweiter Ordnung behandelt, wobei die Übertragung auf Funktionen n -ter Ordnung ebenso kein Problem mit sich bringt, wie die Erweiterung der zugehörigen Strukturbilder. Für die im Abschnitt 9.4 angeführten Programme gilt diese Einschränkung bezüglich der Reglerordnung selbstverständlich nicht.

Bei gegebener Reglerübertragungsfunktion

$$R^*(z) = \frac{u(z)}{e(z)} = \frac{b_0 + b_1z + b_2z^2}{a_0 + a_1z + z^2} \quad (9.1)$$

folgt unmittelbar durch Ausmultiplizieren

$$u(z) = -a_1 \frac{1}{z} u(z) - a_0 \frac{1}{z^2} u(z) + b_2 e(z) + b_1 \frac{1}{z} e(z) + b_0 \frac{1}{z^2} e(z) ,$$

und man erhält die Differenzengleichung

$$u_k = -a_1 u_{k-1} - a_0 u_{k-2} + b_2 e_k + b_1 e_{k-1} + b_0 e_{k-2} . \quad (9.2)$$

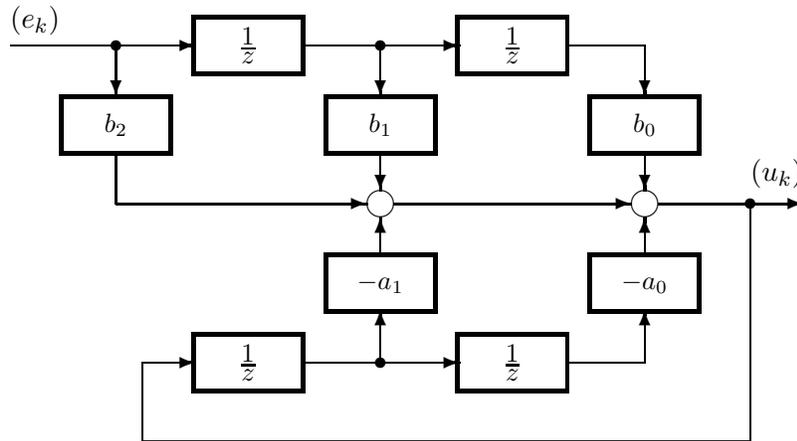


Bild 9.1: Direkte Realisierung einer Übertragungsfunktion nach Differenzgleichung (9.2).

Die direkte Umsetzung der Differenzgleichung (9.2) in ein Strukturbild zeigt Bild 9.1. Um die kritische Zeitspanne τ klein zu halten, wird zur Berechnung von u_k eine minimale Anzahl von arithmetischen Operationen angestrebt. Man liest nun von der Differenzgleichung (9.2) unschwer ab, daß ein großer Teil der Rechenoperationen ohne Kenntnis von e_k ausgeführt werden kann, da hierzu lediglich Daten aus der Vergangenheit, nämlich e_{k-1} , e_{k-2} , u_{k-1} und u_{k-2} , benötigt werden. Es ist nahe liegend, diese Operationen vorher im Intervall nach der Ausgabe von u_{k-1} bis zur Bestimmung von e_k auszuführen. Hierzu führt man die Hilfsgröße h_k ein

$$h_k = -a_1 u_{k-1} - a_0 u_{k-2} + b_1 e_{k-1} + b_0 e_{k-2} ,$$

und berechnet u_k nach der Vorschrift

$$\begin{aligned} e_k &= r_k - y_k \\ u_k &= h_k + b_2 e_k . \end{aligned}$$

Im kritischen Intervall τ sind also nur mehr eine Multiplikation, eine Addition und eine Subtraktion durchzuführen, wobei dies zudem unabhängig von der Ordnung n der Differenzgleichung ($n \geq 1$) gilt. In der verbleibenden Spanne von T wird die Hilfsgröße h_{k+1}

$$h_{k+1} = -a_1 u_k - a_0 u_{k-1} + b_1 e_k + b_0 e_{k-1}$$

für den nächsten Schritt vorbereitet, bzw. der Prozessor wird für andere Aufgaben frei. Der zeitliche Ablauf ist dem Bild 9.2 zu entnehmen. Selbst-

Berechnung von

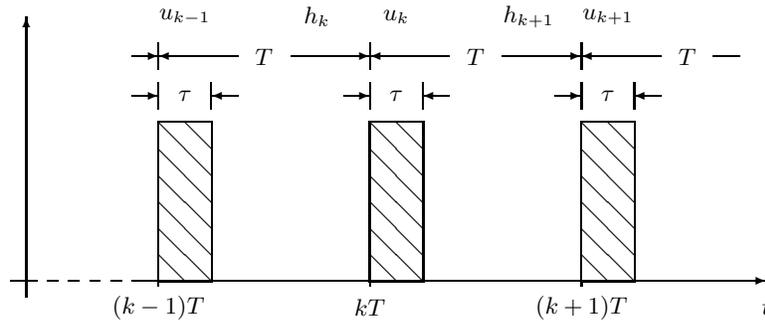


Bild 9.2: Zeitdiagramm zur Berechnung einer Differenzgleichung mit optimaler Verteilung der Rechenoperationen.

verständlich muß die Abtastzeit T zur vollständigen Berechnung der gesamten Differenzgleichung ausreichen, denn durch diese Vorgangsweise wird ja nur eine günstigere zeitliche Verteilung erreicht.

Die direkte Realisierung der Differenzgleichung (9.2) benötigt vier Verschiebeoperationen, also vier Speicherplätze. Bild 9.3 zeigt, wie man ebensogut mit zwei Speicherplätzen auskommt, denn es gilt

$$u(z) = b_2 e(z) + \frac{1}{z} \left(b_1 e(z) - a_1 u(z) + \frac{1}{z} (b_0 e(z) - a_0 u(z)) \right).$$

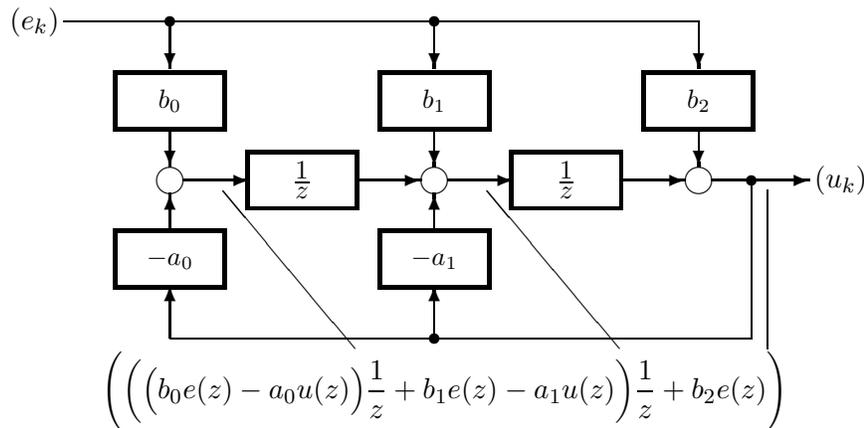


Bild 9.3: Realisierung dertragungsfunktion (9.1) mit minimaler Speicheranzahl.

Eine weitere Form erhält man durch Ausdividieren der Reglerübertragungsfunktion (9.1)

$$R^*(z) = b_2 + \frac{(b_0 - a_0 b_2) + (b_1 - a_1 b_2)z}{a_0 + a_1 z + z^2} .$$

Dem Bild 9.4 ist das Strukturbild zu entnehmen.

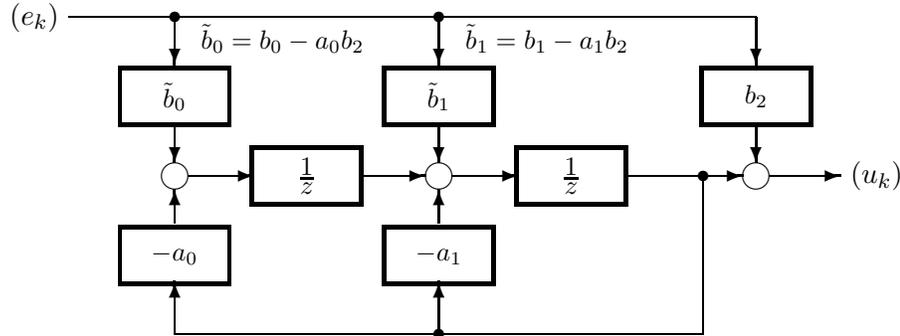


Bild 9.4: Abgewandelte Form zu Bild 9.3.

Wie man durch einfaches algebraisches Umformen der Reglerübertragungsfunktion und Kombinieren der bisherigen Formen zu neuen Formen gelangt, wird jetzt anhand der Hintereinanderschaltung der Übertragungsfunktionen $R_1^*(z)$, $R_2^*(z)$ und K gezeigt. Es gelte

$$\frac{u(z)}{e(z)} = K R_1^*(z) R_2^*(z)$$

$$\frac{x(z)}{e(z)} = R_1^*(z) = \frac{z + \tilde{a}}{z + a}$$

$$\frac{w(z)}{x(z)} = R_2^*(z) = \frac{z^2 + \tilde{b}z + \tilde{c}}{z^2 + bz + c}$$

und

$$u(z) = K w(z) .$$

Als Parameter des Reglers treten hier die Koeffizienten der linearen und quadratischen Terme der Reglerübertragungsfunktion auf. Im allgemeinen ist das Problem der Rundungs- und Abschneidefehler bei der Produktdarstellung einfacher zu beherrschen als bei anderen. Wendet man nun auf

die Übertragungsfunktionen $R_1^*(z)$ und $R_2^*(z)$ die Methode des zeitlichen Vorwegrechnens an, so erhält man im j -ten Abtastzeitpunkt die Beziehungen

$$x_j = h_{1,j} + e_j \quad \text{und} \quad w_j = h_{2,j} + x_j$$

woraus folgt

$$u_j = Kw_j = Ke_j + K(h_{1,j} + h_{2,j}) . \quad (9.3)$$

Die Größen $h_{1,j}$ und $h_{2,j}$ berechnen sich wie oben, jedoch ist bei der Berechnung von $h_{2,j}$ zu beachten, daß x_j die Eingangsgröße ist und nicht e_j . Auch hier kommt man im kritischen Zeitabschnitt mit der minimalen Anzahl von Rechenoperationen aus. Hierzu berechnet man den zweiten Term in Gl(9.3) mittels der Vorschrift

$$h_j = K(h_{1,j} + h_{2,j})$$

vorweg.

Neben dem obigen Weg, zu neuen Formen zu gelangen, existiert auch eine einfache und systematische Methode zur Konstruktion einer neuen Realisierung, der sogenannten *dualen* Form.

Die Realisierung einer Übertragungsfunktion werde durch ein Strukturbild beschrieben. Vertauscht man in diesem Strukturbild die Eingangsgröße mit der Ausgangsgröße, ersetzt man jeden Knoten durch einen Summierer bzw. jeden Summierer durch einen Knoten, und dreht man alle Richtungspfeile um, so ist das neue, *duale Strukturbild* ebenfalls eine Realisierung dieser Übertragungsfunktion.

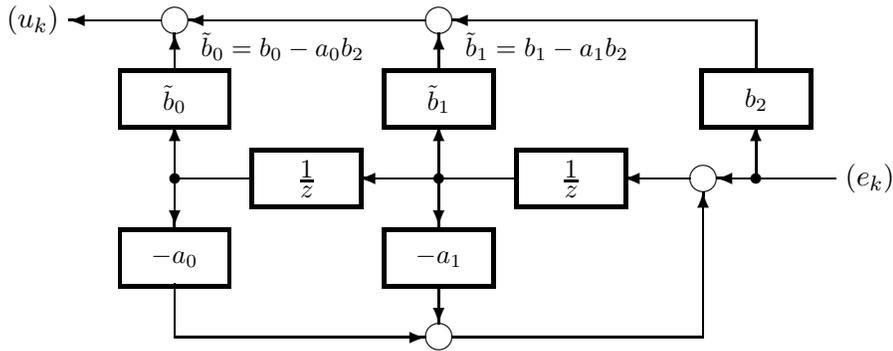


Bild 9.5: Das zu Bild 9.4 duale Strukturbild.

Wendet man diese Umformungsregel auf die Realisierung nach Bild 9.4 an, so erhält man die hierzu duale Form nach Bild 9.5.

9.4 Die Programme

Zu den Realisierungsformen nach den Bildern 9.1, 9.3, 9.4 und 9.5 werden jetzt FORTRAN Programme angegeben*. Nach Nullsetzen der Arbeitsfelder X bzw. Y und der Hilfsgröße H erfolgt die Berechnung der Stellgröße U entsprechend der Vorschrift

$$u_k = h_k + b_n e_k .$$

Anschließend ist durch Aufruf eines der Funktionsunterprogramme DGL1 bis DGL4 der Wert von

$$h_{k+1} = DGLx(\dots)$$

für den nächsten Abtastschritt zur Verfügung zu stellen. Die zeitliche Ablaufsteuerung wird durch Einbinden der Programme in eine Echtzeitumgebung erreicht. Die Verwendung der Unterprogramme wird anhand von DGL2 in einem Demonstrationsprogramm DEMO, das die Hintereinanderschaltung zweier Übertragungsfunktionen berechnet, gezeigt. Wie sich vielfach in der Praxis herausgestellt hat, ist die Realisierung nach Bild 9.3 (DGL2) robuster gegenüber Rundungsfehlern als die anderen oben angeführten Formen.

*Das Programm im Abschnitt 2.3 entspricht der Realisierung nach Bild 9.1, wobei auf eine günstige zeitliche Verteilung der Rechenoperationen verzichtet wurde.

Realisierung einer Reglerübertragungsfunktion nach Bild 9.1.

```
      REAL FUNCTION DGL1 ( E, U, A, B, N, X, Y )
C
      REAL E, U, A(*), B(*), X(*), Y(*)
      INTEGER N
C
C   E : Regelabweichung
C   U : Stellgröße
C   A : Nenner aufsteigend ( $A(i) = a(i-1)$ ,  $i = 1, \dots, N$ )
C   B : Zähler aufsteigend ( $B(i) = b(i-1)$ ,  $i = 1, \dots, N+1$ )
C   N : Ordnung der Differenzgleichung
C   X, Zwischenspeicher
C   Y : (2n Elemente, anfangs auf 0 gesetzt)
C
      REAL H
      INTEGER I
C
      H = B(N) * E - A(N) * U
      DO 1 I = 1, N-1
          X(I) = X(I+1)
          Y(I) = Y(I+1)
          H = H + B(I) * Y(I) - A(I) * X(I)
1    CONTINUE
C
      X(N) = U
      Y(N) = E
C
      DGL1 = H
      RETURN
      END
```

Realisierung einer Reglerübertragungsfunktion nach Bild 9.3.

```
      REAL FUNCTION DGL2 ( E, U, A, B, N, X )
C
      REAL E, U, A(*), B(*), X(*)
      INTEGER N
C
C   E : Regelabweichung
C   U : Stellgröße
C   A : Nenner aufsteigend ( $A(i) = a(i-1)$ ,  $i = 1, \dots, N$ )
C   B : Zähler aufsteigend ( $B(i) = b(i-1)$ ,  $i = 1, \dots, N+1$ )
C   N : Ordnung der Differenzgleichung
C   X : Zwischenspeicher, n Elemente anfangs auf 0 gesetzt
C
      INTEGER I
C
      DO 1 I = N, 2, -1
          X(I) = B(I) * E - A(I) * U + X(I-1)
1  CONTINUE
      X(1) = B(1) * E - A(1) * U
C
      DGL2 = X(N)
      RETURN
      END
```

Realisierung einer Reglerübertragungsfunktion nach Bild 9.4.

```
      REAL FUNCTION DGL3 ( E, A, B, N, X )
C
      REAL E, A(*), B(*), X(*)
      INTEGER N
C
C   E : Regelabweichung
C   U : Stellgröße
C   A : Nenner aufsteigend ( $A(i) = a(i-1)$ ,  $i = 1, \dots, N$ )
C   B : Zähler aufsteigend ( $B(i) = b(i-1)$ ,  $i = 1, \dots, N+1$ )
C   N : Ordnung der Differenzgleichung
C   X : Zwischenspeicher, n Elemente anfangs auf 0 gesetzt
C
      REAL H
      INTEGER I
C
      H = X(N)
      DO 1 I = N, 2, -1
          X(I) = B(I) * E - A(I) * H + X(I-1)
1  CONTINUE
      X(1) = B(1) * E - A(1) * H

      DGL3 = X(N)
      RETURN
      END
```

Realisierung einer Reglerübertragungsfunktion nach Bild 9.5.

```
      REAL FUNCTION DGL4 ( E, A, B, N, X )
C
      REAL E , A(*), B(*), X(*)
      INTEGER N
C
C   E : Regelabweichung
C   U : Stellgröße
C   A : Nenner aufsteigend ( $A(i) = a(i-1)$ ,  $i = 1, \dots, N$ )
C   B : Zähler aufsteigend ( $B(i) = b(i-1)$ ,  $i = 1, \dots, N+1$ )
C   N : Ordnung der Differenzgleichung
C   X : Zwischenspeicher, n Elemente anfangs auf 0 gesetzt
C
      REAL H, S
      INTEGER I
C
      H = 0.0
      S = A(N) * X(N)
      DO 1 I = 1 , N-1
          S = S + A(I) * X(I)
          X(I) = X(I+1)
          H = H + B(I) * X(I)
1      CONTINUE
      X(N) = E - S
C
      DGL4 = H + B(N) * X(N)
      RETURN
      END
```

Hauptprogramm DEMO zur Realisierung der Reglerübertragungsfunktion

$$R(z) = 568,8681 \left(\frac{-0,333333 + z}{-0,904761 + z} \right) \left(\frac{0,497006 - 0,419162z + z^2}{0,733333 - 1,60000z + z^2} \right)$$

in Produktform. Als Testfolge für den Regelfehler (e_k) wird gewählt

$$(e_k) = (\sin(k)) .$$

```

PROGRAM DEMO
C
REAL    E, H, H1, H2, K, U, Z1, Z2
REAL    A1(5), B1(5), X1(5), A2(5), B2(5), X2(5)
REAL    DGL2
INTEGER I, N1, N2
C
C .... Reglerdaten
C
DATA N1 /1/
DATA A1 / -.333333, 1.0, 3*0.0 /
DATA B1 / -.904761, 1.0, 3*0.0 /
C
DATA N2 /2/
DATA A2 / .497006, -.419162, 1.0, 2*0.0 /
DATA B2 / .733333, -1.60000, 1.0, 2*0.0 /
C
DATA K /565.8681/
C
C .... Initialisierung
C
X1(1) = 0.0
X2(1) = 0.0
X2(2) = 0.0
H1    = 0.0
H2    = 0.0
H     = H1 + H2
C
C .... Rechenschleife, die L"ange ist hier willk"urlich 10
C
DO 1 I = 0,10
C
C .... Messung von r und y, Berechnung von e = r - y
C .... Hier wird e ( i ) = sin ( i ) gesetzt
C
E = SIN ( FLOAT(I) )
C
C .... Berechnung der Stellgr"o{\ss}e
C
U = H + K*E
C

```

```

C .... Ausgabe der Stellgr\o{\ss}e, hier auf das Terminal
C
      WRITE (*,100) I, E, U
100   FORMAT ( I10, 2G14.6 )
C
C .... Bereitstellen von H f\"ur den n\"achsten Schritt
C
      Z1 = E + H1
      H1 = DGL2 ( E, Z1, A1, B1, N1, X1 )
      Z2 = Z1+ H2
      H2 = DGL2 ( Z1, Z2, A2, B2, N2, X2 )
      H  = K * ( H1 + H2 )
C
C .... Bis zum n\"achsten Abtastzeitpunkt warten,
C
1     CONTINUE
C
      STOP
      END

```

Die Ergebnisse der Berechnungen sind der nachfolgenden Tabelle 9.1 zu entnehmen.

k	e_k	u_k
0	.000000	.000000
1	.841471	476.162
2	.909297	-319.819
3	.141120	-714.313
4	-.756802	-77.0006
5	-.958924	706.702
6	-.279415	676.535
7	.656987	-85.1388
8	.989358	-733.908
9	.412118	-639.335
10	-.544021	54.4640

Table 9.1: Ausdruck zum Programm DEMO, Zahlenwerte der Fehler- und Stellgrenfolge.

Anhang A

Das Programm $\mu LINSY$

A.1 Einleitung und Installationshinweise

Um dem Leser die praktische Anwendung der vorgestellten theoretischen Methoden zu erleichtern, ist dem Buch eine Diskette mit dem Programm $\mu LINSY$ beigelegt. Es handelt sich dabei um eine 'Public Domain' Version des am Institut für Regelungstechnik der Technischen Universität Graz entwickelten Programm-Paketes *LINSY* [10]. In der folgenden Zusammenstellung sind die erforderlichen Voraussetzungen bezüglich der Hard- und Software für die Verwendung von $\mu LINSY$ angeführt:

- IBM PC/AT/PS2 kompatibler Rechner
- mindestens 640 kB RAM
- Arithmetik - Coprozessor (8087/80287/80387)
- EGA oder VGA Graphik - Adapter
- Betriebssystem PC-DOS 3.0 bzw. MS-DOS 3.0 oder höher
- ein Diskettenlaufwerk
- Festplattenlaufwerk empfehlenswert aber nicht unbedingt notwendig

Die mitgelieferte Diskette enthält fünf Files:

MLY.EXE	exekutierbares Programm μ LINSY
LINHELP.DAC	Help-File für μ LINSY
LINHELP.DOC	Help-File für μ LINSY
8X8.FON	Font-File für Graphik
READ.ME	

Das Programm μ LINSY kann von der Diskette aus durch Eingabe von

MLY

gestartet werden.

Hinweise für das Installieren des Programms auf einer Festplatte:

- 1) Directory für μ LINSY auf der Festplatte erzeugen und Kopieren der Files von der Diskette, z.B.

```
C:  
MKDIR LINSY  
CD LINSY  
COPY A:*.*
```

- 2) Setzen einer Umgebungsvariablen LINSY mit dem vollständigen Pfad des eben erzeugten Directorys im AUTOEXEC.BAT File unter Verwendung eines Text - Editors, z.B.

```
SET LINSY=C:\LINSY
```

Diese Umgebungsvariable wird zum Auffinden der Help Files bzw. des Font Files benötigt.

- 3) Erweitern der PATH Definition mit dem vollständigen Pfad des eben erzeugten Directorys im File AUTOEXEC.BAT mit einem Text - Editor.
- 4) Neue Version des AUTOEXEC.BAT Files einmal exekutieren, danach kann das Programm μ LINSY von jedem beliebigen Directory aus gestartet werden.

A.2 Ein erster Streifzug durch das Programm $\mu LINSY$

$\mu LINSY$ ist ein interaktives Programm zur Manipulation von Objekten, die folgenden Typen angehören können:

- reelle Zahl
- komplexe Zahl
- Polynom mit reellen Koeffizienten
- gebrochen rationale Funktion mit reellen Koeffizienten

Die Objekte werden dabei vornehmlich durch Zuweisungen in der Form

$$Name = Ausdruck$$

erzeugt und sodann in einem programminternen Datenspeicher aufbewahrt. Der Name, mit dem ein Objekt identifiziert wird, kann maximal 8 Zeichen umfassen, wobei das erste Zeichen ein Groß - oder Kleinbuchstabe (Umlaute ausgenommen) sein muß. Für die restlichen Zeichen sind zusätzlich noch die Ziffern sowie die Sonderzeichen '\$', '#' und '_' zulässig. Groß - und Kleinbuchstaben werden bei Namen unterschieden, bei Befehlen und eingebauten Funktionen jedoch nicht.

Der wohl wichtigste Objekttyp ist das Polynom mit reellen Koeffizienten. Will man zum Beispiel das Polynom

$$1,5 + 3,2s + s^2$$

unter dem Namen 'p' erzeugen, so ist dazu folgende Eingabe erforderlich:

$$p = < 1.5, 3.2, 1 >$$

Formal wird also ein Polynom als Liste mit den nach steigenden Potenzen der unabhängigen Variablen geordneten Koeffizienten eingegeben, wobei die Liste durch die beiden Klammern '<' bzw. '>' abgeschlossen wird. Die Listenelemente (Koeffizienten) müssen durch Beistriche voneinander getrennt werden. Die Koeffizienten können selbst wiederum durch arithmetische Ausdrücke definiert werden.

Die Eingabezeile, die natürlich durch Drücken der Eingabetaste (RETURN Taste) abzuschließen ist, verursacht folgende Ausgabe am Bildschirm:

```

p = POLYNOMIAL(*) DEGREE = 2
Coefficients (in ascending powers):
1.50000      3.20000      1.00000
-2.62956    +j* .000000      Omegas      Zetas      Mult.
-.570437    +j* .000000      2.62956
.570437     V = 1.50000

```

Diese Darstellung enthält neben den Angaben über den Namen und den Typ bzw. Grad des eben erzeugten Operanden noch die Koeffizientenliste, die Wurzeln (Roots) des Polynoms sowie die Daten der normierten Faktorform wie Knickfrequenzen (Omegas), Dämpfungen (Zetas) und den Verstärkungsfaktor (V). (Eine genaue Definition des Begriffes 'Faktorform' findet der Leser im Abschnitt A.3 bei der Behandlung der Objekttypen.)

Das eben erzeugte Polynom mit dem Namen 'p' steht nun für weitere Operationen zur Verfügung und könnte z.B. für die Eingabe des Nenners der gebrochen rationalen Funktion

$$\frac{1 + \frac{1}{2\pi}s}{1,5 + 3,2s + s^2}$$

verwendet werden. Dazu ordnen wir im ersten Schritt durch die Anweisung*

$$pi = 4 * atan(1)$$

der Variablen 'pi' die Zahl π zu und definieren im nächsten Schritt die gebrochen rationale Funktion mit dem Namen 'G'

$$G = < 1, 1/(2 * pi) > / p$$

Man beachte die Klammern beim Ausdruck '1/(2*pi)', die deshalb notwendig sind, da gleichrangige Operationen wie '/' und '*' in der Reihenfolge von links nach rechts ausgeführt werden (1/2 * pi liefert als Ergebnis $\pi/2$). Natürlich antwortet das Programm auch in diesem Fall mit der Ausgabe des jeweils neu definierten Objekts, d.h. nach der ersten Anweisung erscheint am Bildschirm

```
pi = 3.14159
```

bzw. nach der Definition von 'G'

*Die eingebaute Funktion 'atan' berechnet den Arcustangens eines Winkels, der im Bogenmaß gegeben ist.

```

G      = RATIONAL F(*)  DEGREES:  1 / 2
Coefficients (in ascending powers):
1.00000      .159155
-----
1.50000      3.20000      1.00000
Numerator:   Roots      Omegas      Zetas      Mult.
-6.28319     +j*      .000000     6.28319     1
Denominator: Roots      Omegas      Zetas      Mult.
-2.62956     +j*      .000000     2.62956     1
-.570437     +j*      .000000     .570437     1
                      V =      .666667

```

Die Darstellung der gebrochen rationalen Funktion 'G' enthält die Liste der Zählerkoeffizienten und davon, durch einen Bruchstrich getrennt, die Liste der Nennerkoeffizienten, danach erfolgt die Ausgabe der Wurzeln bzw. der Daten der Faktorform für das Zählerpolynom (**Numerator**) und anschließend für das Nennerpolynom (**Denominator**). Durch diese umfassende Ausgabe läßt sich zum Beispiel die Stabilität eines Übertragungssystems, das durch eine gebrochen rationale Übertragungsfunktion beschrieben wird, sehr leicht überprüfen.

Im nächsten Schritt soll untersucht werden, wie das Übertragungssystem mit der Übertragungsfunktion 'G' auf die harmonische Eingangsfunktion

$$u(t) = \sin 3t$$

im eingeschwungenen Zustand antwortet. Diese Aufgabe läßt sich mit Hilfe des Frequenzgangs sehr leicht lösen. Die beiden Parameter A und ϕ der Antwort

$$y(t) = A \sin(3t + \phi)$$

sind durch die komplexe Zahl $G(j3)$ bestimmt, wobei gilt

$$A = |G(j3)|$$

$$\phi = \arg G(j3) .$$

Mit den folgenden Anweisungen werden die beiden gesuchten Werte für die Amplitude A und die Phasenverschiebung ϕ ermittelt:

$$G_{j3} = \text{val}(G, [0, 3])$$

```
G_j3 = -.196505E-01 +j* -.888147E-01
```

$$A = \text{abs}(G_j3)$$

A = .909626E-01

$$\text{phi} = \text{atan2}(\text{imag}(G_j3), \text{real}(G_j3))$$

phi = -1.78854

Die Funktion 'val' wertet die Übertragungsfunktion 'G' an der Stelle $s = j3$ aus. Man beachte, daß im vorliegenden Fall das zweite Argument der Funktion direkt als komplexe Zahl mit der Darstellung

[*Realteil* , *Imaginärteil*]

eingegeben wurde. In der zweiten Anweisung wird der Variablen 'A' der Absolutbetrag der komplexen Zahl 'G_j3' durch die Funktion 'abs' zugeordnet, während in der letzten Eingabezeile über die eingebaute Funktion 'atan2' der Winkel von 'G_j3' berechnet und der Variablen 'phi' zugewiesen wird.

Um festzustellen, welche Objekte im Augenblick zur Verfügung stehen, kann mit dem Befehl 'dir' (DIRectory) ein Inhaltsverzeichnis des Datenspeichers ausgegeben werden. Im vorliegenden Fall erhält man dabei folgende Bildschirmausgabe:

Operands:					
#	Name	Type	Sampl.P.	Degrees	Size
1)	p	P(*)		2	8
2)	pi	R			1
3)	G	F(*)		1 / 2	13
4)	G_j3	C			2
5)	A	R			1
6)	phi	R			1

Free data-memory : 1974

Das Inhaltsverzeichnis gibt Auskunft über den Namen, den Typ und den Speicherplatzbedarf (Size) eines Objekts, bei Polynomen (Type = P) und gebrochen rationalen Funktionen (Type = F) wird zusätzlich noch die Gradinformation (Degrees) und gegebenenfalls die Abtastperiode (Sampl.P.) ausgegeben. Am Ende des Inhaltsverzeichnisses wird der noch zur Verfügung stehende Speicherplatz (Free data-memory) ausgewiesen. Mit dem Befehl 'del' (DElete) können Objekte im Datenspeicher gelöscht werden. So zum Beispiel bewirkt der Befehl

del p G_j3

das Löschen des Polynoms 'p' und der komplexen Zahl 'G.j3', wovon man sich durch Ausgabe des Inhaltsverzeichnisses (Befehl 'dir') sofort überzeugen kann.

```
Operands:
#   Name      Type  Sampl.P.  Degrees  Size
-----
1) pi         R                1         1
2) G         F(*)           1 / 2     13
3) A         R                1         1
4) phi       R                1         1
```

Free data-memory : 1984

Will man genauere Information über einen Operanden im Datenspeicher, so kann über den Befehl 'disp' (DISPlay) die Bildschirmausgabe des betreffenden Objektes veranlaßt werden. Die Eingabezeile

disp pi A phi

liefert in unserem Fall

```
pi   =   3.14159
A    =   .909626E-01
phi  =  -1.78854
```

Um noch einige weitere Fähigkeiten des Programms $\mu LINSY$ zu demonstrieren, soll als nächstes die zur Übertragungsfunktion 'G' gehörende z-Übertragungsfunktion berechnet werden, wobei eine Abtastperiode $T = 0,5s$ angenommen wird. Dazu ist folgende Eingabe erforderlich

$$Gz = @z(G, 0.5)$$

Bei der darauffolgenden Bildschirmausgabe wird zunächst eine Kürzung (cancel) einer Zählernullstelle bei Eins gegen eine entsprechende Nennernullstelle mitgeteilt (diese Kürzung ergibt sich aufgrund der Berechnungsvorschrift für die z-Übertragungsfunktion), danach erfolgt die Darstellung der neu erzeugten gebrochen rationalen Funktion 'Gz' auf gewohnte Weise. Erwähnenswert ist der Umstand, daß in diesem Fall neben der unabhängigen Variablen 'z' auch noch die zugehörige Abtastperiode ausgegeben wird.

```
cancel ( 1.00000 +j* .000000 )/( 1.00000 +j* .000000 )
Gz     = RATIONAL F(z)  DEGREES:  1 / 2  Sampl. period:  .500000
Coefficients (in ascending powers):
      .748070E-02 .113528
-----
      .201897      -1.02038      1.00000
```

Numerator:	Roots		Omeegas	Zetas	Mult.
	-.658928E-01	+j*	.000000	.658928E-01	1
Denominator:	Roots		Omeegas	Zetas	Mult.
	.268533	+j*	.000000	-.268533	1
	.751850	+j*	.000000	-.751850	1

Zum Abschluß dieses einführenden Streifzuges durch das Programm $\mu LINSY$ wollen wir uns noch seinen graphischen Fähigkeiten zuwenden und als Anwendungsbeispiel zunächst die Sprungantwort des Abtastsystems mit der eben erzeugten z -Übertragungsfunktion 'Gz' zeichnen. Dazu dient der Befehl 'stpg' (STePresponse Graphic), der als Parameter den Namen der Übertragungsfunktion benötigt, d.h. in unserem Fall

stpg Gz

Der Anwender wird nun vom Programm aufgefordert, die Zeitspanne (t-max), für die die Sprungantwort ermittelt werden soll, einzugeben. Aufgrund der vorliegenden Abtastperiode und der festen Länge des internen Graphik-Puffers muß t-max kleiner als 349.5 gewählt werden.

```
t-max (t-max < 349.500 )
>>
```

Wir wollen in diesem Beispiel den Wert von t-max mit

10

festlegen und erhalten damit folgende durch $\mu LINSY$ getroffene Auswahl der Parameter für die graphische Ausgabe der Sprungantwort:

```
TERMINAL MENUE :
=====
1...X : Minimum = .00000      Maximum = 10.000
        Tic      = 1.0000     Y-Offset= .00000
-----
2...Y : Minimum = .00000      Maximum = .70000
        Tic      = .10000     X-Offset= .00000
-----
3...Axes: Initialize device, draw axes
-----
4...Style: Line-colour = 10
           Draw sequence
=====
Enter group number for change or press RETURN to continue >
```

Dieses sogenannte 'TERMINAL MENUE' enthält vier Gruppen von Parametern, wobei sich die erste auf die x-Achse, die zweite auf die y-Achse, die dritte auf das Zeichnen der Achsen und schließlich die vierte auf die Darstellungsart bezieht. Ist man mit der Parameterauswahl einverstanden, wird durch Drücken der RETURN - Taste das Zeichnen der Sprungantwort am

Bildschirm gestartet. Andernfalls kann durch Eingabe der entsprechenden Gruppennummer jede der vier Parametergruppen ausgewählt und sodann nach eigenen Wünschen modifiziert werden. Mit den vorliegenden Parameterwerten erhält man folgendes Bild, das solange eingeblendet bleibt, bis der Benutzer eine beliebige Taste drückt.

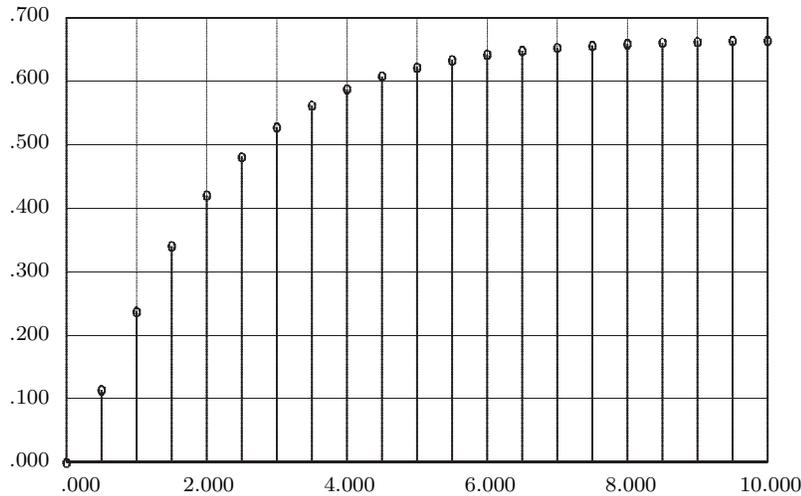


Bild A.1: Sprungantwort

Output to graphics-plotter desired ? (Y/N) >

Auf Wunsch kann das Bild auch auf einem Plotter ausgegeben werden, wobei dafür zunächst ein Datenfile mit der Sprache HP-GL (Hewlett Packard Graphics Language) erzeugt wird, der dann zum Beispiel mit dem 'COPY' Befehl des Betriebssystems zum entsprechenden Gerät geschickt werden kann. Durch Drücken der RETURN - Taste oder Eingabe von 'n' (no) wird die Plotterausgabe unterbunden.

Das Anfertigen von BODE-Diagrammen erfolgt mit Hilfe des Befehls 'bode'. Seine Anwendung soll nun an Hand der q -Übertragungsfunktion 'G#' demonstriert werden, wobei 'G#' durch die Anweisung

$$G\# = @q(Gz)$$

aus der z -Übertragungsfunktion 'Gz' berechnet werden kann. Durch Eingabe von

bode G#

erscheint zunächst eine Menüzeile am Bildschirm:

```
D/evice  A/xes  S/tyl  M/agnit  P/hase  G/r.Screen  E/xit
>>
```

Die einzelnen Auswahlmöglichkeiten in diesem Menü besitzen dabei folgende Bedeutung

D/evice:	Ausgabegerät (Ersatzwert = Bildschirm)
A/xes:	Achsenspezifikationen
S/tyl:	Darstellungsparameter (Farbe, Strichart usw.)
M/agnit:	Zeichnen der Betragskennlinie
P/hase:	Zeichnen der Phasenkennlinie
G/r.Screen:	Einblenden des Graphikbildschirminhalts
E/xit:	Verlassen des 'bode' -Menüs

Die Auswahl erfolgt durch Eingabe des ersten Zeichens, wobei die Festlegung der Achsen (Eingabe 'a') beim ersten Aufruf von **'bode'** unbedingt erforderlich ist. Die Achsen werden im interaktiven Dialog festgelegt, bei Verwendung der vorgeschlagenen Ersatzwerte kann die Dateneingabe durch Drücken der RETURN Taste übersprungen werden, z.B.

```
Starting frequency, number of decades, number of points/decade :
( .100000E-01) ( 4) ( 40)
>>
Magnitude: minimum maximum tic [db]
( -60.0000 ) ( 60.0000 ) ( 10.0000 )
>>
Phase-angle: minimum, tic [deg.] :
>> -270, 30
Phase-angle: maximum = 90.0000 OK ? (Y/N)
```

Es erfolgt nun die Ausgabe des halblogarithmischen Achsenkreuzes mit der Beschriftung für den Betrag in dB am linken und der Phase in Grad am rechten Rand. Danach wird wieder das **'bode'**-Menü aktiviert, von dem aus der Benutzer das Zeichnen der Betrags - bzw. Phasenkennlinie durch Eingabe von 'm' bzw. 'p' auslösen kann. Mit 'e' wird das **'bode'**-Menü verlassen und das Programm signalisiert dem Benutzer durch das Prompterzeichen seine Bereitschaft für weitere Anweisungen.

Der Befehl **'save'** ermöglicht das Abspeichern der augenblicklich vorhandenen Objekte in einem Daten - File auf der Diskette bzw. Festplatte. Als Parameter muß noch ein Filename nach den Richtlinien des Betriebssystems angegeben werden, z.B.

save beispiel.dat

Um Rundungsfehler zu vermeiden, werden dabei die Daten unformatiert im File abgelegt, was allerdings den Nachteil mit sich bringt, daß der so erzeugte

Datenfile nicht unmittelbar am Bildschirm oder Drucker ausgegeben werden kann. Es wird daher dem Anwender nahegelegt, diese Datenfiles durch eine spezielle Nachsilbe z.B. 'dat' im Filenamen zu kennzeichnen. Durch den Befehl 'load' können die Operanden bei Bedarf wieder in den Datenspeicher geladen werden, wobei natürlich auch bei diesem Befehl ein gültiger Datenfilename als Parameter erforderlich ist.

Der interessierte Anwender, der Auskunft über alle im Programm μ LINSY vorhandenen Möglichkeiten erhalten möchte, sei auf den Befehl '??' verwiesen, der folgende Zusammenstellung am Bildschirm liefert:

```

Commands:
=====
??      BODE   CLM    CLS    DEL    DIR    DISP
EDIC    EDIF   EDIR   EXIT   HELP   HIST   IMPG
INFC    INFF   INFR   INPC   INPF   INPR   LOAD
OFF     ON     PRINT  SAVE   STACK  STPG   XSTO

Operators:  +   -   *   /
=====

Functions:
=====
@Q      @Z      ABS    ARC    ATAN   ATAN2
CAN     COS     DB     EXP    IDB    IMAG
LAG     LEAD   LN     LOG    LOOP   REAL
SABS    SIN    SQRT   TAN    VAL

```

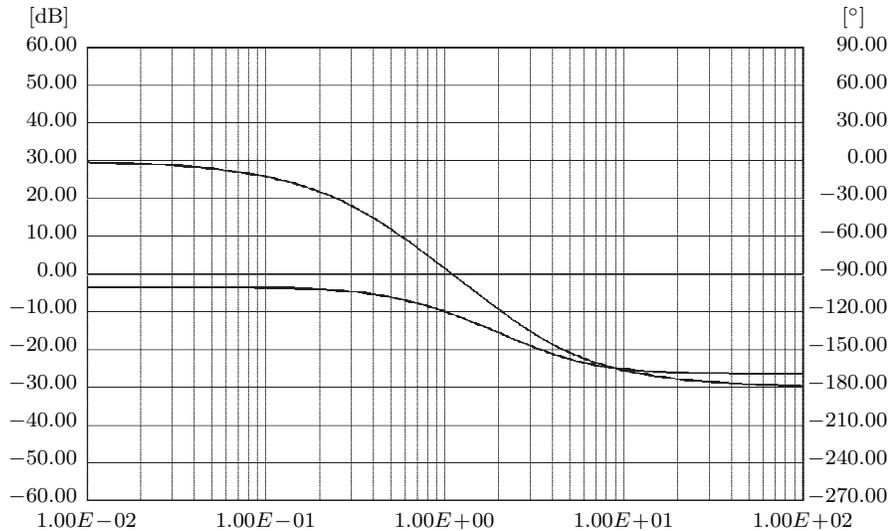


Bild A.2: Frequenzkennlinien

Prinzipiell stehen dem Benutzer also Befehle, Operatoren und Funktionen zur Verfügung, wobei kennzeichnend für Operatoren und Funktionen ist, daß sie in arithmetischen Ausdrücken verwendet werden und stets als Ergebnis ihrer Ausführung ein Objekt erzeugen. Wird eine genaue Auskunft über einen Befehl, eine Funktion oder einen Operator gewünscht, so steht dazu der **'help'** Befehl zur Verfügung. Zum Beispiel ergibt die Anweisung

help @z

folgende Auskunft über die Funktion **'@Z'** am Bildschirm:

```
@Z ( expression1 {, expression2 } )
```

```
-----
Berechnung der z - Uebertragungsfunktion ausgehend von einer
s - oder q - Uebertragungsfunktion. Wird die z - Uebertragungs-
funktion zu einer s - Uebertragungsfunktion ermittelt, so muss
als zweites Argument (expression2) die Abtastperiode angegeben
werden.
```

```
Typ der Argumente: expression1: gebrochen rationale Funktion in
                    einer Variablen verschieden von z
                    expression2: reelle Zahl > 0
```

```
Typ des Resultates: gebrochen rationale Funktion in z
```

Das Programm μ LINSY wird mit dem Befehl **'exit'** beendet. (Achtung! Es erfolgt dabei **kein** automatisches Abspeichern der vorhandenen Objekte in einem Datenfile.)

A.3 Objekttypen des Programms μ LINSY

In der folgenden Aufstellung wird nun eine genaue Definition der vier zulässigen Objekttypen gegeben. Allen Typen ist gemeinsam, daß ihre zugehörigen Daten programmintern im sogenannten IEEE Double Precision Format [21] dargestellt werden, wodurch mit etwa 16 signifikanten Dezimalstellen und folgendem Zahlenbereich

$$\begin{array}{l}
 -1.797 * 10^{308} \quad \text{bis} \quad -2.225 * 10^{-308} \\
 0 \\
 2.225 * 10^{-308} \quad \text{bis} \quad 1.797 * 10^{308}
 \end{array}$$

gerechnet werden kann. Ein gegebenenfalls vorhandener Exponent muß bei der Eingabe durch das Zeichen 'e' bzw. 'E' und einer entsprechenden ganzen Zahl berücksichtigt werden. Das Typenkurzzeichen, das in der Zusammenstellung für jeden Objekttyp angeführt ist, wird bei der Ausgabe der Inhaltsverzeichnisse (Befehle **'dir'** bzw. **'stack'**) benötigt. Die

Angabe des Speicherplatzbedarfes bezieht sich auf den programminternen Datenspeicher, der in $\mu LINSY$ als Double Precision Feld mit insgesamt 2000 Elementen festgelegt ist.

1) Reelle Zahl:

Eingabe : durch Wertzuweisung,

Beispiel: $a = 1.23456789e - 5$

Ausgabe : durch den Befehl '**disp**' (Standardausgabe auf 6 Dezimalstellen gerundet),

Beispiel: $disp a$

$a = 0.123457E-04$

Typenkurzzeichen : R

Speicherplatzbedarf : 1 Element des Speicherfeldes

2) komplexe Zahl:

Eingabe : durch Wertzuweisung unter Verwendung der Notation

$$[\text{Realteil}, \text{Imaginärteil}]$$

Real - und Imaginärteil können selbst wieder arithmetische Ausdrücke sein

Beispiel: $b = [1.23, -0.25]$

Ausgabe : durch den Befehl '**disp**' (Standardausgabe auf 6 Dezimalstellen gerundet),

Beispiel: `disp b`

$$b = 1.23000 + j* -0.25000$$

Typenkurzzeichen : C

Speicherplatzbedarf : 2 Elemente des Speicherfeldes

3) Polynom:

unabhängige Variable : * (nicht definierte Variable)

s

z

q

Darstellungsformen : (die Variable x steht stellvertretend für ein Element aus $\{*, s, z, q\}$)

- Koeffizientenform:

$$p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$$

- Wurzelform:

$$p(x) = K(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$$

- Faktorform:

$$p(x) = Vx^\lambda \left(1 + \frac{x}{\omega_1}\right) \left(1 + \frac{x}{\omega_2}\right) \dots \left[1 + 2\zeta_1 \frac{x}{\tilde{\omega}_1} + \left(\frac{x}{\tilde{\omega}_1}\right)^2\right] \dots$$

V ... Verstärkungsfaktor

λ ... Anzahl der Wurzeln bei $x = 0$

w_i ... Knickfrequenzen der Linearfaktoren

ζ_i ... Dämpfungen und

$\tilde{\omega}_i$... Knickfrequenzen der quadratischen Faktoren

Einschränkungen:

$$n = \text{Grad}(p(x)) \leq 39$$

Die Koeffizienten müssen reelle Zahlen sein.

Die Parameter der Faktorform ($V, \omega_i, \zeta_i, \tilde{\omega}_i$) müssen reelle Zahlen sein.

$$|c_n| \geq 10^{-30}, |K| \geq 10^{-30}, |V| \geq 10^{-30}$$

Eingabe :

- in Koeffizientenform mit einer undefinierten unabhängigen Variablen durch die Symbole '<' und '>', die Koeffizienten können selbst wiederum arithmetische Ausdrücke sein

$$\langle c_0, c_1, \dots, c_n \rangle$$

- in Koeffizientenform durch den Befehl '**inpc**' (INput Polynomial Coefficients)
- in Wurzelform durch den Befehl '**inpr**' (INput Polynomial Roots)
- in Faktorform durch den Befehl '**inpf**' (INput Polynomial Factors)

Beispiele:

Eingabe des Polynoms $x+0,5 \arctan(1)x^2-1,3 \cdot 10^{-5}x^3+x^4$ mit dem Operandennamen 'poly'

```
poly =< 0, 1, 0.5 * atan(1), -1.3E - 5, 1 >
```

Eingabe des Polynoms $1+z+3z^2+4z^3$ mit der Abtastperiode $T=0,4$ unter dem Operandennamen 'ppz'

```
inpc ppz
```

```
Degree:
```

```
>> 3
```

```
Coefficients:
```

```
>> 1, 1, 3, 4
```

```
Type of variable: *, S, Z, Q (Default = S)
```

```
>> z
```

```
Sampling period:
```

```
>> 0.4
```

Eingabe des Polynoms $10(q+1-j)(q+1+j)$ mit der Abtastperiode $T=1$ unter dem Operandennamen 'xxx'

```
inpr xxx
```

```
Degree:
```

```
>> 2
```

```
K-factor:
```

```
>> 10
```

```
Real-part, Imaginary-part, Multiplicity
```

```
>> -1, 1, 1
```

```
Type of variable: *, S, Z, Q (Default = S)
```

```
>> q
```

```
Sampling period:
```

```
>> 1
```

Eingabe des Polynoms

$$100s \left(1 + \frac{s}{3,3}\right) \left(1 - \frac{s}{10,25}\right) \left[1 + \frac{s}{0.45} + \left(\frac{s}{0.45}\right)^2\right]$$

mit dem Operandennamen 'xyz'

```
inpf xyz
```

```
Lambda, Number of lin. factors, Number of quad. factors
```

```
>> 1, 2, 1
```

```

V-Factor:
>> 100
Corner-frequency of linear factor:
>> 3.3
>> -10.25
Damping ratio, corner-frequency of quadr. factor:
>> 0.5,0.45
Type of variable: *, S, Z, Q (Default = S)
>>

```

Ausgabe : durch den Befehl '**disp**'

Beispiel:

disp ppz

```

ppz = POLYNOMIAL(z) DEGREE = 3 Samp. period: .400000
Coefficients (in ascending powers):
1.00000 1.00000 3.00000 4.00000
Roots      Omegas      Zetas      Mult.
-.818000   +j*   .000000E+00   .818000      1
.339998E-01 +j*   .551786      .552832   -.615011E-01  1
.339998E-01 +j*  -.551786

```

Diese Standardausgabe von Polynomen enthält die gesamte Information über ein Polynom in komprimierter Form. Die Kopfzeile gibt dabei Auskunft über Namen, Type, unabhängige Variable, Grad und gegebenenfalls Abtastperiode. Darunter werden die Koeffizienten des Polynoms nach aufsteigenden Potenzen geordnet und auf 6 Dezimalstellen gerundet ausgegeben. Schließlich erfolgt die Ausgabe der Wurzeln des Polynoms sowie die Angabe der Knickfrequenzen, der Dämpfungen und der entsprechenden Vielfachheit (**Omegas Zetas Mult.**). Bei Polynomen mit der unabhängigen Variablen s oder q bzw. mit einer nicht definierten Variablen wird auch der Verstärkungsfaktor ausgegeben.

Typenkurzzeichen : P

Speicherplatzbedarf : $3n + 2$ Elemente des Speicherfeldes
($n \dots$ Grad des Polynoms)

4) Gebrochen rationale Funktion:

Für das Zählerpolynom und das Nennerpolynom einer gebrochen rationalen Funktion gelten alle Angaben aus der Beschreibung des Operandentyps 'Polynom' bezüglich der unabhängigen Variablen, der Darstellungsformen und der Einschränkungen. In der internen Darstellung einer gebrochen rationalen Funktion wird der Koeffizient bei der höchsten Potenz des Nennerpolynoms stets auf Eins normiert.

Eingabe :

- durch Bildung eines Quotienten mit einer reellen Zahl oder einem Polynom im Zähler und einem Polynom im Nenner
- in Koeffizientenform durch den Befehl '**infc**'
(INput Fraction Coefficients)
- in Wurzelform durch den Befehl '**infr**'
(INput Fraction Roots)
- in Faktorform durch den Befehl '**inff**'
(INput Fraction Factors)

Beispiele:

Eingabe der Funktion

$$\frac{1}{1 + 2x + x^2}$$

mit einer nichtdefinierten unabhängigen Variablen unter dem Operandennamen '*strecke*'

strecke = 1/ < 1, 2, 1 >

Eingabe der Funktion

$$\frac{1 + 2s}{4 + 3s + 2s^2 + s^3}$$

mit dem Operandennamen '*p1*'

infc p1

Numerator:

Degree :

>> 1

Coefficients:

```

>> 1,2
Denominator:
-----
Degree :
>> 3
Coefficients:
>> 4,3,2,1
Typ of variable: *, S, Z, Q (Default = S)
>> s

```

Eingabe der z-Übertragungsfunktion

$$\frac{10}{(z+2)(z-2j)(z+2j)}$$

mit der Abtastperiode $T = 1.5$ unter dem Operandennamen 'G_1'

infr G_1

```

Numerator:
-----
Degree :
>> 0
K-Factor :
>> 10
Denominator:
-----
Degree :
>> 3
Real-part, Imaginary-part, Multiplicity
>> -2,0,1
>> 0,2,1
Typ of variable: *, S, Z, Q (Default = S)
>> z
Sampling period :
>> 1.5

```

Eingabe der q-Übertragungsfunktion

$$10 \frac{(1 - \frac{q}{10})(1 + \frac{q}{15})}{(1 + \frac{q}{0,5})(1 + \frac{q}{5,55})}$$

mit der Abtastperiode $T = 0.2$ unter dem Operandennamen 'P#'

inff P#

Numerator:

Lambda, Number of lin. factors, Number of quad. factors

>> 0,2,0

V-Factor :

>> 10

Corner-frequency of linear factor :

>> -10

>> 15

Denominator:

Lambda, Number of lin. factors, Number of quad. factors

>> 0,2,0

Corner-frequency of linear factor :

>> 0.5

>> 5.55

Typ of variable: *, S, Z, Q (Default = S)

>> q

Sampling period :

>> 0.2

Ausgabe : durch den Befehl '**disp**'

Beispiel:

disp P#

P# = RATIONAL F(q) DEGREES: 2 / 2 Sampl. period: .200000

Coefficients (in ascending powers):

27.7500 -.925000 -.185000

2.77500 6.05000 1.00000

Numerator:	Roots		Omegas	Zetas	Mult.
10.0000	+j*	.000000E+00	-10.0000		1
-15.0000	+j*	.000000E+00	15.0000		1

Denominator:	Roots		Omegas	Zetas	Mult.
-.500000	+j*	.000000E+00	.500000		1
-5.55000	+j*	.000000E+00	5.55000		1

V = 10.00000

Diese Standardausgabe für rationale Funktionen enthält die gesamte Information in komprimierter Form. Die Kopfzeile gibt dabei Auskunft über Namen, Type, unabhängige Variable, Grade und gegebenenfalls Abtastperiode. Darunter erfolgt die Darstellung der rationalen Funktion in Koeffizientenform, wobei die Koeffizienten der Polynome nach aufsteigenden Potenzen geordnet und auf 6 Dezimalstellen gerundet ausgegeben werden. Im Anschluß daran werden die Wurzeln sowie die normierten Faktoren (**Omegas Zetas Mult.**) und der Verstärkungsfaktor ausgegeben. Die Angabe des Verstärkungsfaktors erfolgt nur, wenn die unabhängige Variable entweder nicht definiert oder s bzw. q ist.

Typenkurzzeichen : F

Speicherplatzbedarf : $3(m + n) + 4$ Elemente des Speicherfeldes
($m \dots$ Zählergrad, $n \dots$ Nennergrad)

A.4 Prinzipielle Arbeitsweise von $\mu LINSY$

Wie schon bei der Erläuterung des Befehls '??' (Kurzauskunft) im zweiten Abschnitt dieses Anhangs erwähnt wurde, hat man beim Umgang mit $\mu LINSY$ grundsätzlich zwischen

- Befehlen
- (binären) Operatoren
- Funktionen

zu unterscheiden. Dabei können Operatoren und Funktionen in arithmetischen Ausdrücken verwendet werden. Die Auswertung der Ausdrücke erfolgt nach den üblichen Bindungsregeln, d.h. Multiplikation und Division vor Addition und Subtraktion. Durch Verwendung von Klammern '(' und ')'' kann natürlich die Reihenfolge der Auswertung beeinflußt werden. Grundsätzlich sind alle Ausdrücke erlaubt, deren Auswertung einen zulässigen Objekttyp ergibt. Insbesondere gilt die Tabelle A.1 für die Verknüpfung zweier Objekte mit einem Operator (+, -, *, /).

Objekt1	Objekt2			
	<i>R</i>	<i>C</i>	<i>P</i>	<i>F</i>
<i>R</i>	<i>ja</i>	<i>ja</i>	<i>ja</i>	<i>ja</i>
<i>C</i>	<i>ja</i>	<i>ja</i>	<i>nein</i>	<i>nein</i>
<i>P</i>	<i>ja</i>	<i>nein</i>	<i>ja</i>	<i>ja</i>
<i>F</i>	<i>ja</i>	<i>nein</i>	<i>ja</i>	<i>ja</i>

R ... reelle Zahl *C* ... komplexe Zahl
P ... Polynom *F* ... rationale Funktion

Tabelle A.1: Verknüpfungsmöglichkeiten

Aus dieser Tabelle liest man zum Beispiel ab, daß die Verknüpfung eines Polynoms mit einer komplexen Zahl nicht zulässig ist, weil dabei im allgemeinen ein Polynom mit komplexen Koeffizienten entstehen würde. Entsprechendes gilt für gebrochen rationale Funktionen. Weiters muß noch beachtet werden, daß *μLINSY* bei der Verknüpfung eines Polynoms oder einer gebrochen rationalen Funktion einerseits mit einem Polynom oder einer gebrochen rationalen Funktion andererseits überprüft, ob die unabhängigen Variablen der betreffenden Objekte übereinstimmen. Eine Ausnahme bildet hier die Variable '*' (nicht definierte unabhängige Variable), die mit jeder beliebigen Variablen kombiniert werden kann. Bei Operanden in der Variablen 'z' oder 'q' wird zusätzlich noch kontrolliert, ob auch die zugehörigen Abtastperioden übereinstimmen. Das resultierende Objekt erhält eine nicht definierte Variable, sofern beide Operanden eine nicht definierte Variable aufweisen, andernfalls wird die Variable von dem Operand übernommen, bei dem sie definiert ist.

Funktionen besitzen mindestens ein Argument oder gegebenenfalls mehrere Argumente und liefern bei ihrer Auswertung ein Objekt. Der Funktionsaufruf hat formal folgenden Aufbau

$$Funktionsname(Argument_1, Argument_2, \dots)$$

Die Argumente können selbst wieder arithmetische Ausdrücke sein und müssen in der Argumentenliste durch Kommas voneinander getrennt angegeben werden.

Beispiele für Funktionsaufrufe:

sin(45 * *pi*/180)

@*z*(*G*, 0.1)

lead(1.5, 20 * *grad*, 2)

Die Befehle des Programms $\mu LINSY$ dienen vorwiegend der Ein - oder Ausgabe von Objekten, der Speicherverwaltung sowie der Erstellung von Bildern. Bei ihrer Verwendung sind gegebenenfalls Parameter anzugeben, wobei dafür nur Objektnamen, Filenamen oder Konstanten aber niemals arithmetische Ausdrücke verwendet werden dürfen. Werden mehrere Parameter angegeben, so sind diese entweder durch Leerzeichen oder durch Kommas voneinander zu trennen.

Beispiele für Befehlseingaben:

dir

stpg Gz

del A, B, C

Die grundlegende Funktionsweise des Programms $\mu LINSY$ soll nun an einem einfachen Beispiel näher erläutert werden. Nehmen wir an, es seien bereits drei Operanden mit den Namen 'a', 'b' und 'c' eingegeben worden. Diese drei Operanden befinden sich im Datenspeicher und werden durch das Inhaltsverzeichnis verwaltet. Es soll nun folgende Operation ausgeführt werden:

$$x = (a + b) * c - 1$$

Der Benutzer gibt diese Zeile ein (und schließt die Eingabe durch Drücken der RETURN - Taste ab), wodurch der Befehlsinterpreter, das ist der zentrale Baustein von $\mu LINSY$, seine Arbeit aufnimmt. Seine erste Aufgabe besteht nun darin, diese Eingabezeile in eine Folge von 'Elementarbefehlen' zu zerlegen. Dabei wird eine syntaktische Überprüfung der Eingabe durchgeführt. Wird ein Fehler in der Eingabezeile entdeckt, so wird die Ausgabe einer entsprechenden Fehlermeldung veranlaßt und der Befehlsinterpreter bricht seine Arbeit ab. Das Programm kehrt damit wieder in seinen Ruhezustand zurück und wartet auf weitere Eingaben des Benutzers. In unserem Fall lautet die Folge von Elementarbefehlen:

1. *a*
2. *b*

- 3. +
- 4. c
- 5. *
- 6. 1
- 7. -
- 8. $xsto x$

Diese Elementarbefehlsfolge wird in einem Befehlspeicher abgespeichert und der Befehlsinterpreter beginnt mit der Ausführung des ersten Elementarbefehls. In diesem Beispiel lautet der erste Befehl 'a', der jetzt folgende Operation bedeutet:

- a Hole den Operanden mit dem Namen 'a' aus dem Datenspeicher und gibt ihn als neues Element auf den Stack. Der Stack ist ein programminterner Arbeitsspeicher, in dem die Verknüpfung bzw. Bearbeitung erfolgt.

Entsprechendes gilt für den nächsten Elementarbefehl 'b'. Der dritte Befehl '+' hat die Bedeutung:

- + Addiere die letzten beiden Operanden des Stacks, lösche beide Operanden im Stack und füge die Summe als neues (letztes) Element dem Stack hinzu.

Im nächsten Schritt wird der Operand 'c' in den Stack geholt und danach der Befehl '*' ausgeführt:

- * Multipliziere die letzten beiden Operanden des Stacks, lösche beide Operanden im Stack und füge das Produkt als neues (letztes) Element dem Stack hinzu.

Im sechsten Elementarbefehl '1' wird die reelle Zahl 1 als neuer Operand am Stack erzeugt und daraufhin werden im nächsten Schritt '-' folgende Operationen ausgeführt:

- Subtrahiere die letzten beiden Operanden des Stacks, lösche beide Operanden im Stack und füge die Differenz als neues (letztes) Element dem Stack hinzu.

Der letzte Elementarbefehl *'xsto x'* bedeutet nun:

xsto x Nimm den letzten Operanden des Stacks, lege ihn unter dem Namen 'x' im Datenspeicher ab und lösche den Operanden im Stack.

Bei der Durchführung der Elementarbefehle überwacht der Befehlsinterpreter auch die Zulässigkeit der Operandentypen. Wird dabei ein Fehler erkannt (wenn z.B. 'a' ein Polynom und 'b' eine komplexe Zahl wäre), so bricht der Befehlsinterpreter seine Tätigkeit mit einer Fehlermitteilung ab. Nach dem Abarbeiten des letzten Elementarbefehls wird die Elementarbefehlsfolge im Befehlspeicher gelöscht. Der Befehlsinterpreter hat damit seine Arbeit beendet und das Programm kehrt in seinen Ruhezustand zurück.

Im Bild A.3 sind nun die Stack - und Datenspeicherbewegungen für das eben geschilderte Beispiel nochmals zusammengefaßt. Dabei ist die Situation stets nach der Beendigung des jeweiligen Elementarbefehls dargestellt.

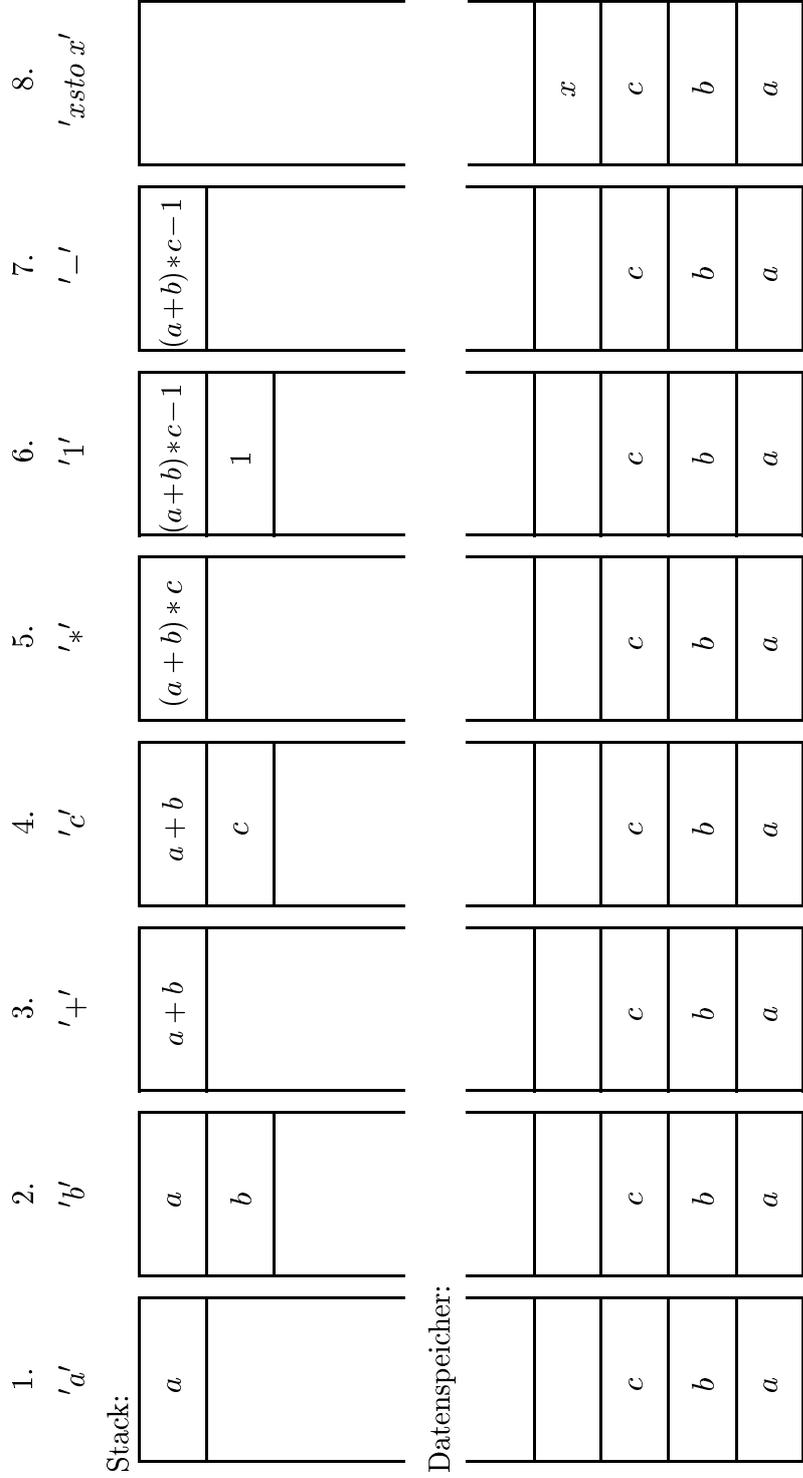


Bild A.3. Stack und Datenspeicher bei der Bearbeitung der Elementarbefehlsfolge

Besteht eine Eingabezeile nur aus einem Ausdruck – wenn also keine Zuweisung des Wertes zu einer Variablen erfolgt – so bleibt das Ergebnis des Ausdrucks im Stack als namenloses Objekt bestehen. Dies kann auch dann eintreten, wenn ein Fehler während der Abarbeitung einer Elementarbefehlsfolge auftritt. Mit dem Befehl **'stack'** kann der Benutzer ein Inhaltsverzeichnis des Stacks am Bildschirm ausgeben. Das Löschen des Stacks erfolgt durch die Anweisung **'cls'** (CLear Stack).

A.5 Liste der Befehle und Funktionen

Folgende Bezeichnungsweise wird in dieser Zusammenstellung verwendet:

<i>name</i>	Operandenname
<i>file</i>	Name eines Files (gegebenenfalls mit Suchpfad)
{ }	Angaben zwischen geschwungenen Klammern sind entweder optionell oder nur in gewissen Fällen erforderlich
<i>n</i>	Zeilennummer einer Anweisung im History-File
<i>Schlüsselwort</i>	Name eines Befehls, eines Operators oder einer Funktion
<i>R_expr</i>	arithmetischer Ausdruck mit reellem Wert
<i>C_expr</i>	arithmetischer Ausdruck mit komplexem Wert
<i>R/C_expr</i>	arithmetischer Ausdruck mit reellem oder komplexem Wert
<i>F_expr</i>	arithmetischer Ausdruck, dessen Auswertung eine gebrochen rationale Funktion ergibt
<i>P/F_expr</i>	arithmetischer Ausdruck, dessen Auswertung entweder ein Polynom oder eine gebrochen rationale Funktion ergibt

a) Alphabetisch sortierte Liste aller Befehle

# <i>n</i>	Ausführung der n-ten Zeile des History-Files
??	Kurzauskunft
BODE <i>name</i>	Zeichnen eines BODE - Diagramms
CLM	Löschen des Datenspeichers
CLS	Löschen des Stacks
DEL <i>name1 name2 ...</i>	Löschen einzelner Operanden
DIR	Inhaltsverzeichnis des Datenspeichers

DISP <i>name1 name2 ...</i>	Ausgabe von Operanden am Bildschirm
EDIC <i>name</i>	ndern der Koeffizienten eines Polynoms oder einer rationalen Funktion
EDIF <i>name</i>	ndern der Faktoren eines Polynoms oder einer rationalen Funktion
EDIR <i>name</i>	ndern der Wurzeln eines Polynoms oder einer rationalen Funktion
EXIT	Beenden des Programms <i>μLINSY</i>
HELP <i>Schlüsselwort</i>	Auskunft über einen Befehl, einen Operator oder eine Funktion
HIST	Ausgabe des History-Files am Bildschirm
IMPG <i>name</i>	Zeichnen der Impulsantwort
INFC <i>name</i>	Eingabe einer gebrochen rationalen Funktion in Koeffizientenform
INFF <i>name</i>	Eingabe einer gebrochen rationalen Funktion in Faktorform
INFR <i>name</i>	Eingabe einer gebrochen rationalen Funktion in Wurzelform
INPC <i>name</i>	Eingabe eines Polynoms in Koeffizientenform
INPF <i>name</i>	Eingabe eines Polynoms in Faktorform
INPR <i>name</i>	Eingabe eines Polynoms in Wurzelform

LOAD <i>file</i>	Laden von Operanden aus einem Datenfile
OFF	Löschen des Graphik-Bildschirminhalts und Umschalten auf den Alpha-Modus
ON	Einblenden des Graphik-Bildschirminhalts
PRINT <i>name1 name2 ...</i>	Ausgabe von Operanden auf den Druck-File ' linsy.lst '
SAVE <i>file</i>	Speichern aller Operanden in einem Datenfile
STACK	Ausgabe des Stack-Inhaltsverzeichnis am Bildschirm
STPG <i>name</i>	Zeichnen der Sprungantwort
XSTO <i>name</i>	Ablegen des letzten Stack-Objekts im Datenspeicher

b) Alphabetisch sortierte Liste aller Funktionen

$\langle R_expr \{, R_expr, \dots \} \rangle$	Definition eines Polynoms in Koeffizientenform nach aufsteigenden Potenzen
$[R_expr , R_expr]$	Definition einer komplexen Zahl Reihenfolge: Realteil, Imaginärteil
$@Q (F_expr \{, R_expr \})$	Berechnung der q-Übertragungsfunktion
$@Z (F_expr \{, R_expr \})$	Berechnung der z-Übertragungsfunktion
ABS (<i>R/C_expr</i>)	Absolutbetrag

ARC (<i>C_expr</i>)	Winkel von <i>C_expr</i> im Bogenmaß
ATAN (<i>R_expr</i>)	Arcustangens
ATAN2 (<i>R_expr1</i> , <i>R_expr2</i>)	Arcustangens von <i>R_expr1</i> / <i>R_expr2</i>
CAN (<i>F_expr</i> {, <i>R_expr</i> })	Kürzen einer gebrochen rationalen Funktion
COS (<i>R/C_expr</i>)	Cosinusfunktion
DB (<i>R/C_expr</i>)	Berechnung des Absolutbetrages von <i>R/C_expr</i> in Dezibel
EXP (<i>R/C_expr</i>)	Exponentialfunktion
IDB (<i>R_expr</i>)	Umkehrfunktion zu 'DB'
IMAG (<i>C_expr</i>)	Imaginärteil von <i>C_expr</i>
LAG (<i>R_expr,R_expr,R_expr</i>)	Festlegung eines Lag - Gliedes
LEAD (<i>R_expr,R_expr,R_expr</i>)	Festlegung eines Lead - Gliedes
LN (<i>R/C_expr</i>)	natürlicher Logarithmus
LOG (<i>R_expr</i>)	Dekadischer Logarithmus
LOOP (<i>F_expr</i>)	Berechnet $F_expr/(1+F_expr)$
REAL (<i>C_expr</i>)	Realteil von <i>C_expr</i>
SABS (<i>F_expr</i>)	Berechnung der unendlichen Summe über den Absolutbetrag der Impulsantwort
SIN (<i>R/C_expr</i>)	Sinusfunktion

SQRT (<i>R/C_expr</i>)	Quadratwurzel
TAN (<i>R/C_expr</i>)	Tangensfunktion
VAL (<i>P/F_expr</i> , <i>R/C_expr</i>)	Auswertung von <i>P/F_expr</i> an der Stelle <i>R/C_expr</i>

A.6 μ LINSY Eingaben für die Entwurfsbeispiele

In der folgenden Aufstellung sind die Anweisungen an das Programm μ LINSY zusammengefaßt, wie sie zur Lösung der Entwurfsbeispiele in den Kapiteln 6 und 7 benötigt werden. Es gilt dabei die Vereinbarung: Besteht die Eingabe lediglich aus dem Drücken der RETURN-Taste (z.B. bei der Übernahme von vorgeschlagenen Ersatzwerten), so wird das im folgenden durch das Symbol | dargestellt.

Beispiel 6.1 (Seite 93)

```
G=0.5/<1,2*0.707,1>
T=0.5
G#=@q(G,T)
wc=0.4
j=sqrt(-1)
grad=4*atan(1)/180
L1#=G#/<0,1>
L1#c=val(L1#,j*wc)
wz=wc/tan(-120*grad-arc(L1#c))
dummy=@q(1/<1>,T)
R#=<1,1/wz>/<0,1>*dummy
V=1/abs(val(R#*G#,j*wc))
R#=V*R#
L#=R#*G#
bode L#
  a | | -240,20 | m p e
Rz=@z(R#)
Tz=@z(loop(L#))
stpg Tz
  20 |
```

Hinweise:

Die Variable '*grad*' wird zur Umrechnung von Winkeln in Grad auf das Bogenmaß verwendet.

Die Variable '*dummy*' dient zur Definition der unabhängigen Variablen in der Reglerübertragungsfunktion '*R#*'.

Beispiel 6.2 (Seite 96)

```
G=0.5/<0,1,2*0.707,1>
T=0.5
G#=@q(G,T)
wc=0.6
j=sqrt(-1)
grad=4*atan(1)/180
inff L1#
    0,2,0
    2.5
    -4
    -7.78237
    1,1,0
    4
    q
    0.5
R1#=can(L1#/G#)
L1#c=val(L1#,j*wc)
phi=130*grad+arc(L1#c)
delta=1/abs(L1#c)
Rlag=lag(wc,phi,delta)
R#=R1#*Rlag
L#=L1#*Rlag
bode L#
    a | | -300,20 | m p e
Rz=@z(R#)
Tz=@z(loop(L#))
stpg Tz
    20 |
```

Beispiel 6.3 (Seite 101)

```
inff G
  0,1,0
  0.5
  0.3
  1,0,1
  0.6,0.2
  |
T=0.5
G#=@q(G,T)
wc=0.5
j=sqrt(-1)
grad=4*atan(1)/180
G#c=val(G#,j*wc)
arcG=arc(G#c)-8*atan(1)
dphi=-135*grad-arcG+10*grad
Rlead=lead(wc,dphi)
L1#=2*G#*Rlead
L1#c=val(L1#,j*wc)
Rlag=lag(wc,10*grad,1/abs(L1#c))
L#=L1#*Rlag
bode L#
  a | | -300,20 | m p e
R#=can(L#/G#)
Rz=@z(R#)
Tz=@z(loop(L#))
stpg Tz
  20 |
```

Beispiel 7.1 (Seite 121)

```
G=1.2/<0,1,2,4>
T=0.2
G#=@q(G,T)
infc Fz
  1
  0, 0.008
  1
  -1, 1
  z
  0.2
F#=1.5*@q(Fz)
umax=2
grad=4*atan(1)/180
B#=can(G#/F#)*umax
bode B#
  a | | | m e
wc=1
x=-2*atan(wc/10)-atan(wc*wc/3.2/3.2)+30*grad
hist
  (Bestimmen der Zeilennummer f\"ur die Anweisung
  x=-2*atan(wc/10)... im History-File)
wc=1.2
# Zeilennummer
wc=1.4
# Zeilennummer
wc=1.5
# Zeilennummer
wn=3.2*3.2/wc
L#=wc*<1,-1/10>*<1,-1/17.58>*<1,1/17.08>
L#=L#/(<0,1,0.1>*<1,1/wn>)
bode L#
  m e
R#=can(L#/G#,0.01)
  y y y y
Rz=@z(R#)
T#=loop(L#)
Te#=can(T#/L#*F#,0.01)
```

```

y y y y
Te=@z(Te#)/1.5
epsi=sabs(Te)
Tu#=can(T#/G#*F#,0.01)
y y y y
Tu=@z(Tu#)/1.5
del Te#,Tu#
ux=sabs(Tu)

```

Hinweise:

Die Bestimmung des Wertes von Ω_C erfordert die Lösung der nichtlinearen Gleichung

$$-2 \arctan\left(\frac{\Omega_C}{10}\right) - \arctan\left(\frac{\Omega_C}{3,2}\right)^2 + 30^\circ = 0$$

Dies wird im Programm $\mu LINSY$ behelfsmäßig mit dem sogenannten "History-Mechanismus" durchgeführt. Jede Eingabezeile wird im History-File unter einer fortlaufenden Nummer aufbewahrt und kann durch Eingabe des Zeichens '#' und der entsprechenden Zeilennummer erneut ausgeführt werden. Nach der Eingabe eines Schätzwertes für Ω_C (Anweisung `wc=1`) wird der Wert der linken Seite der nichtlinearen Gleichung der Variablen 'x' zugeordnet (Anweisung `x=-2*atan(wc/10)...`). Danach muß die Zeilennummer dieser Anweisung im History-File ermittelt werden (Anweisung `hist`). Damit kann nun die linke Seite der nichtlinearen Gleichung für verschiedene Werte von Ω_C sehr leicht berechnet werden, ohne daß sie jedesmal neu eingegeben werden muß.

Beispiel 7.2 (Seite 128)

```
inff G
  0, 0, 1
  0.5
  0.5, 20
  1, 1, 1
  1
  0.6, 5
  |
inff P
  1, 0, 0
  -0.05
  0, 1, 1
  1
  0.6, 5
  |
T=0.05
G#=@q(G,T)
P#=@q(P,T)
infc Fz
  1
  0, 0.005
  1
  -1, 1
  z
  0.05
F#=1.5*@q(Fz)
Bu#=can(G#/F#)*2
Bv#=can(G#/P#/F#)*0.025
bode Bu#
  a 0.01,5,40 | -280, 40 | m e
bode Bv#
  m e
inff L#
  0, 2, 1
  1.6
  -40
  -329
```

```

0.565, 20.7
1, 3, 0
40
10
10
q
0.05
bode L#
m p e
R#=can(L#/G#,0.1)
y y y y y
Rz=@z(R#)
T#=loop(L#)
Te#=can(T#/L#*F#)
Te=@z(Te#)/1.5
del Te#
epsi=sabs(Te)
Tu#=can(T#/G#*F#,0.1)
y y y y y
Tu=@z(Tu#)/1.5
ux=sabs(Tu)
Tv#=can(Tu#*P#,0.1)
y y y
Tv=@z(Tv#)/1.5
del Tu#, Tv#
vx=sabs(Tv)

```


Literatur

- [1] Ackermann, J.: Abtastregelung. Springer Verlag, Berlin 1988.
- [2] Atkinson, K.E.: An Introduction to Numerical Analysis. John Wiley, New York 1978.
- [3] Birck, H., Swik, R.: rtp-Mikroprozessor-Lehrgang. Regelungstechnische Praxis 21(1979), Hefte 6 bis 11 oder Birck, H., Swik, R.: Mikroprozessoren und Mikrorechner. R.Oldenbourg Verlag, München 1983, S.190-252.
- [4] Bronstein, I.N., Semendjajew, K.A.: Taschenbuch der Mathematik, BSB B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig und Verlag Nauka, Moskau 1979.
- [5] Cadzow, J.A.: Discrete-Time-Systems. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs 1973.
- [6] Doetsch, G.: Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation und der z -Transformation. R.Oldenbourg Verlag, München 1989.
- [7] Föllinger, O.: Lineare Abtastsysteme. R.Oldenbourg Verlag, München 1990.
- [8] Gausch, F.: Simulation of Continuous-time and Discrete-time Dynamical Systems Using the Program Package DASP. VDI-Workshop "Regelungstechnische Programmpakete", Düsseldorf, 1990.
- [9] Grant, J.A., Hitchins, G.D.: Two Algorithms for the Solution of Polynomial Equations to Limiting Machine Precision. The Computer Journal 18 (1975), S.258-264.
- [10] Hofer, A.: LINSY - Ein Programmpaket zur Analyse und Synthese dynamischer Systeme im Frequenzbereich. VDI-Workshop "Regelungstechnische Programmpakete", Düsseldorf, 1990.
- [11] Hofer, A.: Rechnergestützter Regelkreisentwurf im Frequenzbereich mit Hilfe des Programmes LINSY. Proceedings of the IASTED International Symposium "Modelling, Identification and Control", Innsbruck, 1984, S. 38-41.

- [12] Jury, E.I.: Theory and Application of the z -Transform Method. Robert E. Krieger Publishing Co., Huntington, New York 1964.
- [13] Janschek, K.: Entwurf von linearen Abtastregelkreisen bei Begrenzungen. Dissertation, Technische Universität Graz, 1982.
- [14] Landgraf, C., Schneider, G.: Elemente der Regelungstechnik. Springer Verlag, Berlin 1970.
- [15] Latzel, W., Zimmermann, L.: Analytische Bestimmung von Kenngrößen im Zeit- und Frequenzbereich zur Synthese von Abtastregelkreisen. Regelungstechnik 31 (1983), S. 165-171.
- [16] Pangalos, J., Voss, J.: Synthese von Abtastregelkreisen mit einem Freiheitsgrad im transformierten Frequenzbereich. Regelungstechnik 26 (1978), S. 123-129.
- [17] Policastro, M.: A Simple Algorithm to Perform the Bilinear Transformation. International Journal of Control 30 (1979), S. 713-715.
- [18] Schneider, G.: Über die Beschreibung von Abtastsystemen im transformierten Frequenzbereich. Regelungstechnik 27 (1979), S. A26-A35.
- [19] Schneider, G.: Eine einfache Methode zum Entwurf von Regelsystemen mit Begrenzungen. Regelungstechnik 32 (1984), S. 290-298.
- [20] Schneider, G., Dourdoumas, N., Janschek, K.: Exakter Entwurf linearer Regler bei Begrenzungen. Regelungstechnik 30 (1982), S. 39-45.
- [21] Stevenson, D.: A Proposed Standard for Binary Floating-Point Arithmetic. Computer 14 (1981), S. 51-62.
- [22] Tou, J.: Digital and Sampled Data Control Systems. McGraw-Hill, New York 1959.

Sachverzeichnis

- Abbauverfahren 57
- Absolutsumme 51,110,125
- Abtaster 8,21,61
- Abtastperiode
 - 2,7,8,9,19,61,70,166
- Abtastprozess 40,43,63
- Abtastregelkreis 11,61
 - Entwurf 83,107
 - mit Beschränkungen 107
 - Stabilität 60
- Abtastsystem 10,13,21,31,45
 - Frequenzgang 67,71
 - Frequenzkennlinien 73,76
 - Stabilität 49,62
- A/D-Wandler 2,7
 - idealer 8
- analoger PI-Regler 2
- analoger Regelkreis 1
- Änderungsgeschwindigkeit 4,111,114
- Anstiegszeit 86,90

- Begrenzungseffekte 146
- Begrenzungskennlinie 118
- Beschränkungen 107,115
- Betragsmaximum 108
- BIBO-Stabilität
 - Definition 49
 - Kriterium 51,56,77,88
- bilineare Transformation 74,141
- bleibende Regelabweichung 87,90

- charakteristische Verläufe der Gewichtsfolge 53,55

- D/A-Wandler 2,7
 - idealer 9
- Differenzgleichung 13,19,21,45
 - kausale 20
 - numerische Lösung 24
 - Ordnung 20
 - Realisierbarkeit 45
 - Realisierung 149
 - zugehörige Übertragungsfunktion 45
- digitaler PI-Regler 2,5
- digitaler Regelkreis 3
- Dualität 153
- Durchtrittsfrequenz 88,91

- Einheitskreis 55,56
- Einheitskreispolynom 56,57
- Einheitssprungfunktion 31
- Entwurf von Abtastregelkreisen 83,107
- Entwurfsschema 118

- Faltungintegral 14,29
- Faltungssatz 33,43
- Faltungssumme 32,109
- fiktives Filter 110,115
- Filterkennlinie 118
- Folge 5,16
 - beschränkte 50,108
 - harmonische 68,112

- verschobene 40
- zulässige 110
- Frequenz
 - reale 74
 - transformierte 74
- Frequenzgang 65
 - eines abgetasteten kontinuierlichen Systems 77
 - eines Abtastsystems 67,71
 - eines kontinuierlichen Systems 66
- Frequenzkennlinien für Abtastsysteme 73,76
- Frequenzkennlinienverfahren 83
- Führungsfrequenzgang 120
- Gewichtsfolge 31,32,35,44,51
 - charakteristische Verläufe 53,55
- Gewichtsfunktion 14,35
- Grenzwertsatz 43
- Halteglied 9,13,21
- idealer A/D-Wandler 8
- idealer D/A-Wandler 9
- idealer Rechner 10
- idealer Regler 146
- Idealisierungen 8
- Impulsantwort 14,65,138
- integrierender Charakter 81,90
- inverse z-Transformation 35,39
- kausale Differenzgleichung 20
- Korrespondenzen
 - q-Übertragungsfunktion 78
 - z-Transformation 44
- Kreisfrequenz
 - reale 74
 - transformierte 74
- kritische Zeitspanne 148,150
- Lag-Glied 97
- Laplace-Transformation 29,39
- Lead-Glied 102
- Linearität 14,40
- Numerische Berechnung
 - Differenzgleichung 24
 - q-Übertragungsfunktion 135,141,143
 - z-Übertragungsfunktion 135,141
- Nyquist-Kriterium 84
- offener Kreis, Übertragungsfunktion 84
- Ordnung der Differenzgleichung 20
- Ortskurve eines Abtastsystems 73
- Parametervariation 1
- Partialbruchentwicklung 21,22,37
- Phasenreserve 88,89,92
- PI-Regler
 - analoger 2
 - digitaler 2,5
- Quantisierung 8,145,147
- q-Übertragungsfunktion
 - Definition 75
 - Eigenschaften 79
 - Korrespondenzen 78
 - numerische Berechnung 135,141,143
 - Realisierbarkeit 82
- reale Frequenz 74
- realer Regler 147
- Realisierbarkeit
 - Differenzgleichung 45

- q-Übertragungsfunktion 82
- z-Übertragungsfunktion 81
- Realisierungsformen 149
- Rechenzeit 146,147
- Regelabweichung, bleibende 87,90
- Regelalgorithmus 2,5-8,10,145
- Regelgüte 115
- Regelkreis
 - analoger 1
 - digitaler 3
- Reglerprogramm 2,6,154
- Rückwärtsdifferenz 19
- Rundungsfehler 10,146,147,154
- Schnittpunktkriterium 88
- Stabilität
 - Abtastregelkreis 60
 - Abtastsystem 49,62
 - Definition 49
 - Kriterium 51,56,77,88
- Stabilitätsbereich 52,63
- Stellgrößenbeschränkung 115
- Syntheseungleichungen 116
 - approximiert 117
- Trägerfunktion 69-71,86
- Trägerschwingung 69-71
- Transformation, bilinear 74
- Transformationen 39
- transformierte Frequenz 74
- Treppenfunktion 5,10,14,17
- Übertragungsfunktion
 - einfacher Typ 88,120
 - offener Kreis 84
- Übertragungssystem,
 - zeitdiskret 21
- Überschwingweite 86,92
- vereinfachtes Schnittpunkt-
 - kriterium 88
- Verschiebungssatz 40,42
- Verstärkungsfaktor 2,61,80,88,90
- Vorwärtsdifferenz 19
- Wandler
 - ideale 8,9,146
 - reale 147
- Wandlungszeit 8,9
- zeitdiskrete Folge 5,8,16,19,27
- Zeitinvarianz 14
- z-Transformation 29
 - Eigenschaften 38
 - inverse 35,39
 - Korrespondenzen 44
- z-Transformierte einer
 - Folge 34,39
- z-Übertragungsfunktion
 - Berechnung 45
 - Definition 35
 - numerische Berechnung 135,141
 - Realisierbarkeit 45,81