

Springer-Lehrbuch

Jan Lunze

Regelungstechnik 2

Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung

5., neu bearbeitete Auflage

Mit 265 Abbildungen, 55 Beispielen, 94 Übungsaufgaben
sowie einer Einführung in das Programmsystem MATLAB

Prof. Dr.-Ing. Jan Lunze
Ruhr-Universität Bochum
Lehrstuhl für Automatisierungstechnik
und Prozessinformatik
44780 Bochum
Lunze@atp.rub.de

ISBN 978-3-540-78462-3

e-ISBN 978-3-540-78463-0

DOI 10.1007/978-3-540-78463-0

Springer Lehrbuch ISSN 0937-7433

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie;
detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© 2008, 2006, 2004, 2002, 1997 Springer-Verlag Berlin Heidelberg

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften. Text und Abbildungen wurden mit größter Sorgfalt erarbeitet. Verlag und Autor können jedoch für eventuell verbliebene fehlerhafte Angaben und deren Folgen weder eine juristische Verantwortung noch irgendeine Haftung übernehmen.

Satz: Reproduktionsfähige Vorlage des Autors
Herstellung: LE-TEX Jelonek, Schmidt & Vöckler GbR, Leipzig
Einbandgestaltung: WMXDesign GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier

9 8 7 6 5 4 3 2 1

springer.com

Vorwort

Aufbauend auf den im ersten Band vermittelten Grundlagen linearer Regelungen behandelt der zweite Band die Beschreibung und Analyse von Mehrgrößensystemen, den Entwurf von Mehrgrößenreglern sowie die digitale Regelung.

Mehrgrößensysteme wurden nach der Einführung der Zustandsraumdarstellung Anfang der sechziger Jahre zunächst im Zeitbereich betrachtet. In den siebziger Jahren wurden dann die Frequenzbereichsverfahren von Eingrößen- auf Mehrgrößensysteme erweitert, so dass für beide Vorgehensweisen seit dieser Zeit eine Vielzahl von Analyse- und Entwurfsverfahren zur Verfügung steht. Allerdings haben die theoretischen Grundlagen beider Betrachtungsweisen bisher nur begrenzt Eingang in Lehrbücher für das Ingenieurstudium gefunden. Insbesondere fehlen einführende Darstellungen, in denen die Theorie mit praxisrelevanten Beispielen und Übungsaufgaben verknüpft ist und in denen ein Anschluss an die rechnergestützten Entwurfswerkzeuge wie beispielsweise MATLAB hergestellt wird. Diese Lücke zu schließen ist ein Anliegen des vorliegenden Buches.

Die Stoffauswahl wurde wesentlich durch meine Erfahrungen bei der Behandlung praktischer Mehrgrößenregelungsaufgaben aus den Gebieten der Elektroenergieversorgung, der chemischen Verfahrenstechnik und der Bioverfahrenstechnik bestimmt. Diese Anwendungen legen es nahe, von der Vielzahl der im Laufe der Zeit entwickelten Verfahren diejenigen herauszugreifen, die einerseits von praktisch erfüllbaren Voraussetzungen ausgehen und ein gutes theoretisches Fundament haben, andererseits zu überschaubaren Analyse- und Entwurfsergebnissen führen. Viele **Beispiele** verdeutlichen diesen Charakter der beschriebenen Methoden. Der praktische Hintergrund der Beispiele kann hier zwar nur kurz angesprochen werden. Die betrachteten Regelungsaufgaben sowie die zu ihrer Lösung verwendeten Modelle zeigen jedoch, wo die wichtigsten Schwierigkeiten bei der Lösung von Regelungsaufgaben liegen und wo praktisch akzeptable Vereinfachungen möglich sind.

Die digitale Regelung wird im dritten Teil dieses Buches ausgehend von der Frage behandelt, welche Veränderungen sich für den Regelkreis ergeben, wenn anstelle eines kontinuierlich arbeitenden Reglers ein Abtastregler eingesetzt wird. Der Schwerpunkt liegt in der Behandlung derjenigen Probleme, die sich beim Übergang von der kontinuierlichen zur zeitdiskreten Betrachtungsweise ändern bzw. neu entstehen. Die Gliederung des dritten Teiles ähnelt deshalb der des ersten Teiles, wodurch die Parallelen bei der Behandlung kontinuierlicher und zeitdiskreter Systeme deutlich zum Ausdruck kommen und die neuen Aspekte der Abtastsysteme herausgehoben werden.

In Bezug auf einige Themen geht das Buch wesentlich über den Stoff bisheriger Lehrbücher und Monografien hinaus. So werden u. a. die strukturelle Steuerbarkeit und strukturelle Beobachtbarkeit, das Innere-Modell-Prinzip, Einstellregeln für Mehrgrößensysteme, die robuste Regelung sowie die dezentrale Regelung behandelt. Die zu diesen Themen vorgestellten Methoden entstanden aus Forschungsarbeiten der letzten 25 Jahre, die zu praktikablen Analyse- und Entwurfsverfahren geführt haben bzw. die Regelungstheorie an wichtigen Punkten ergänzen.

Bei der Vermittlung des Stoffes wird Wert auf eine in allen Einzelheiten durchschaubare Darstellung gelegt. Für Mehrgrößensysteme entsteht dabei jedoch das Problem, dass selbst sehr einfache Beispiele nicht mehr von Hand gerechnet werden können und der Lösungsweg nicht immer in allen Einzelheiten aufgeschrieben werden kann. Hier kommt das bereits im ersten Band eingeführte **Programmsystem MATLAB** zum Einsatz, das umfangreiche numerische Rechnungen übernimmt. Die Behandlung der Beispiele kann sich deshalb auf die Herausarbeitung der numerisch zu lösenden Probleme beschränken und mit den von MATLAB gelieferten Ergebnissen weiterarbeiten.

Zahlreiche **Übungsaufgaben** dienen zur Festigung des Stoffes. Die Lösungen der wichtigsten Aufgaben sind im Anhang angegeben.

Die am Ende jedes Kapitels gegebenen **Literaturhinweise** beziehen sich auf Aufsätze und Bücher, die maßgeblich zur Entwicklung der Regelungstheorie beigetragen haben bzw. in denen einzelne Aspekte des beschriebenen Stoffes vertieft dargestellt sind.

Ein großer Teil der für Mehrgrößensysteme entwickelten Ansätze setzt umfangreiche mathematische Kenntnisse voraus. Die Stoffauswahl dieses Buches ist u. a. durch das Ziel bestimmt, die wichtigsten Herangehensweisen und Verfahren so darzustellen, dass von den Lesern lediglich Kenntnisse über die Matrizenrechnung sowie die Fourier- und Laplacetransformation vorausgesetzt werden müssen, die den Ingenieurstudenten in den ersten Semestern vermittelt werden.

Ich verwende dieses Buch für eine weiterführende Regelungstechnikvorlesung für Elektrotechnikstudenten. In dieser einsemestrigen Veranstaltung werden die meisten der hier behandelten Themen angesprochen, allerdings nicht immer in der beschriebenen Tiefe. Das Buch dient als Vorlesungsskript, beschreibt Erweiterungen des behandelten Stoffes und dient als Vorlage für die Rechenübungen. Die im Anhang angegebenen Projektaufgaben sind parallel zur Vorlesung mit dem Programmsystem MATLAB zu lösen. Sie vermitteln erste Erfahrungen bei der Anwendung der behandelten Methoden.

An der mehrjährigen Umarbeitung meiner Vorlesung, aus der dieses Buch entstand, haben meine Mitarbeiter und Studenten großen Anteil. Die Herren Dr.-Ing. *Florian Wenck* und Dipl.-Math. *JÖRG PFAHLER* haben in den beiden letzten Jahren die zu dieser Vorlesung gehörende Übung geleitet und wertvolle Hinweise zur Verbesserung der Übungsaufgaben gegeben. Bedanken möchte ich mich auch für vielfältige Anregungen meiner Fachkollegen, die dieses Buch in ihrer Vorlesung einsetzen.

zen. Für die neue Druckvorlage zeichnete Frau *Andrea Marschall* einige Bilder neu.

Der Text wurde für die fünfte Auflage entsprechend den Erfahrungen bei der Verwendung des Buches in Vorlesungen und Übungen überarbeitet bzw. ergänzt. Die Beschreibung des Programmsystems MATLAB wurde der aktuellen Version 7.5 (Release R2007b) angepasst.

Bochum, im Januar 2008

J. Lunze

Auf der Homepage www.rub.de/atp → Books des Lehrstuhls für Automatisierungstechnik und Prozessinformatik der Ruhr-Universität Bochum finden Interessenten weitere Informationen zu den Beispielen, die zur Erzeugung von Bildern verwendeten MATLAB-Programme sowie die Abbildungen dieses Buches für den Gebrauch in Lehrveranstaltungen.

Inhaltsverzeichnis

Verzeichnis der Anwendungsbeispiele	XVII
Inhaltsübersicht des ersten Bandes	XXI
Hinweise zum Gebrauch des Buches	XXIII

Teil 1: Analyse von Mehrgrößensystemen

1	Einführung in die Mehrgrößenregelung	1
1.1	Regelungsaufgaben mit mehreren Stell- und Regelgrößen	1
1.1.1	Charakteristika von Mehrgrößensystemen	1
1.1.2	Beispiele für Mehrgrößenregelungsaufgaben	4
1.2	Mehrgrößenregelkreis	8
1.2.1	Regelungsaufgabe	8
1.2.2	Regelkreisstrukturen	9
1.3	Probleme und Lösungsmethoden für Mehrgrößenregelungen	11
	Literaturhinweise	13
2	Beschreibung und Verhalten von Mehrgrößensystemen	15
2.1	Beschreibung von Mehrgrößensystemen im Zeitbereich	15
2.1.1	Differenzialgleichungen	15
2.1.2	Zustandsraummodell	16
2.1.3	Übergangsfunktionsmatrix und Gewichtsfunktionsmatrix ...	18
2.2	Beschreibung im Frequenzbereich	20
2.2.1	E/A-Beschreibung	20
2.2.2	Beschreibung des Übertragungsverhaltens mit Hilfe der ROSENBROCK-Systemmatrix	23
2.3	Strukturierte Beschreibungsformen	24
2.3.1	Reihen-, Parallel- und Rückführschaltungen	24
2.3.2	Systeme in P- und V-kanonischer Struktur	27
2.3.3	Beliebig verkoppelte Teilsysteme	30
2.4	Verhalten von Mehrgrößensystemen	37
2.4.1	Zeitverhalten	37
2.4.2	Verhalten im Frequenzbereich	44

2.4.3	Übergangsverhalten und stationäres Verhalten	45
2.5	Pole und Nullstellen	48
2.5.1	Pole	48
2.5.2	Übertragungsnullstellen	48
2.5.3	Invariante Nullstellen	52
2.6	Stabilität von Mehrgrößensystemen	57
2.7	MATLAB-Funktionen für die Analyse von Mehrgrößensystemen ..	59
	Literaturhinweise	62
3	Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit	63
3.1	Steuerbarkeit	63
3.1.1	Problemstellung und Definition der Steuerbarkeit	63
3.1.2	Steuerbarkeitskriterium von KALMAN	65
3.1.3	Steuerbarkeit der kanonischen Normalform	77
3.1.4	Steuerbarkeitskriterium von HAUTUS	81
3.1.5	Nicht vollständig steuerbare Systeme	82
3.1.6	Erweiterungen	90
3.2	Beobachtbarkeit	92
3.2.1	Problemstellung und Definition der Beobachtbarkeit	92
3.2.2	Beobachtbarkeitskriterium von KALMAN	95
3.2.3	Dualität von Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit	101
3.2.4	Weitere Beobachtbarkeitskriterien	101
3.2.5	Nicht vollständig beobachtbare Systeme	103
3.3	KALMAN-Zerlegung des Zustandsraummodells	108
3.4	Strukturelle Analyse linearer Systeme	116
3.4.1	Struktur dynamischer Systeme	116
3.4.2	Strukturelle Steuerbarkeit und strukturelle Beobachtbarkeit ..	119
3.4.3	Strukturell feste Eigenwerte	126
3.5	Realisierbarkeit und Realisierung von Mehrgrößensystemen	132
3.6	MATLAB-Funktionen	138
	Literaturhinweise	139

Teil 2: Entwurf von Mehrgrößenreglern

4	Struktur und Eigenschaften von Mehrgrößenregelkreisen	141
4.1	Struktur von Mehrgrößenreglern	141
4.1.1	Zustands- und Ausgangsrückführungen	141
4.1.2	Dynamische Mehrgrößenregler	147
4.1.3	Dezentrale Regelung	151
4.2	Grundlegende Eigenschaften von Mehrgrößenregelkreisen	154
4.2.1	Pole und Nullstellen des Führungsverhaltens	154
4.2.2	Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des Regelkreises	158
4.3	Stabilität von Mehrgrößenregelkreisen	160

4.3.1	Stabilitätsanalyse anhand der Pole des Regelkreises	160
4.3.2	HSU-CHEN-Theorem	162
4.3.3	Nyquistkriterium für Mehrgrößensysteme	164
4.3.4	Stabilität bei kleiner Kreisverstärkung	167
4.3.5	Robuste Stabilität	170
4.4	Stationäres Verhalten von Regelkreisen	177
4.4.1	Sollwertfolge und Störunterdrückung	177
4.4.2	Entwurf von Vorfiltern zur Sicherung der Sollwertfolge	179
4.4.3	Störgrößenaufschaltung	181
4.4.4	PI-Mehrgrößenregler	182
4.4.5	Verallgemeinerte Folgeregelung	184
4.5	Kriterien für die Wahl der Regelkreisstruktur	188
4.5.1	Auswahl von Stell- und Regelgrößen anhand der Pole und Nullstellen der Regelstrecke	188
4.5.2	Kopplungsanalyse einer dezentralen Regelung	189
4.5.3	Auswahl von Stellgrößen	192
4.5.4	Beispiele	194
	Literaturhinweise	202
5	Einstellregeln für PI-Mehrgrößenregler	203
5.1	Zielstellung	203
5.2	Gegenkopplungsbedingung für I-Mehrgrößenregler	205
5.3	Einstellung von I-Reglern	212
5.3.1	Idee der Reglereinstellung	212
5.3.2	Festlegung der Reglermatrix	213
5.3.3	Festlegung des Tuningfaktors	216
5.3.4	Erweiterung auf PI-Regler	219
5.3.5	Beispiel	221
5.4	Robustheit des eingestellten PI-Reglers	227
5.5	MATLAB-Programm zur Reglereinstellung	231
	Literaturhinweise	231
6	Reglerentwurf zur Polzuweisung	233
6.1	Zielstellung	233
6.2	Polzuweisung durch Zustandsrückführung	235
6.2.1	Polzuweisung für Systeme in Regelungsnormalform	235
6.2.2	Erweiterung auf beliebige Modellform	237
6.2.3	Diskussion der Lösung	239
6.2.4	Darstellung der Reglerparameter in Abhängigkeit von den Eigenwerten	244
6.3	Erweiterung auf Regelstrecken mit mehreren Stellgrößen	246
6.3.1	Dyadische Regelung	247
6.3.2	Vollständige Modale Synthese	249
6.4	Polzuweisung durch Ausgangsrückführung	253

6.4.1	Überlegungen zu den Freiheitsgraden von Ausgangsrückführungen	253
6.4.2	Näherung einer Zustandsrückführung durch eine Ausgangsrückführung	255
6.4.3	Ersetzen einer Zustandsrückführung durch einen dezentralen Regler	263
6.5	Polzuweisung durch dynamische Kompensation	272
6.6	MATLAB-Programme für den Entwurf zur Polzuweisung	273
	Literaturhinweise	277
7	Optimale Regelung	279
7.1	Grundgedanke der optimalen Regelung	279
7.2	Lösung des LQ-Problems	286
7.2.1	Umformung des Gütefunktionalen	286
7.2.2	Ableitung einer notwendigen Optimalitätsbedingung	288
7.2.3	Optimalreglergesetz	290
7.2.4	Lösung der Riccatigleichung	292
7.3	Eigenschaften des LQ-Regelkreises	293
7.3.1	Stabilität des Regelkreises	294
7.3.2	Eigenschaft der Rückführdifferenzmatrix	294
7.3.3	Stabilitätsrand	296
7.3.4	Abhängigkeit der Eigenwerte des Regelkreises von den Wichtungsmatrizen	298
7.3.5	Diskussion der angegebenen Eigenschaften	299
7.4	Rechnergestützter Entwurf von LQ-Regelungen	300
7.4.1	Entwurfsalgorithmus	300
7.4.2	Wahl der Wichtungsmatrizen	301
7.4.3	Beispiele	304
7.5	Erweiterungen	309
7.6	Optimale Ausgangsrückführung	313
7.7	H^∞ -optimaler Regler	317
7.7.1	Erweiterungen der optimalen Regelung	317
7.7.2	H^∞ -Optimierungsproblem	318
7.7.3	Lösung des H^∞ -Optimierungsproblems	322
7.8	Optimalreglerentwurf mit MATLAB	326
	Literaturhinweise	328
8	Beobachterentwurf	331
8.1	Beobachtungsproblem	331
8.2	LUENBERGER-Beobachter	335
8.2.1	Struktur des Beobachters	335
8.2.2	Konvergenz des Beobachters	337
8.2.3	Wahl der Rückführmatrix $\mathbf{L}$	337
8.2.4	Berechnung des Beobachters aus der Beobachtungsnormalform	338

8.2.5	Störverhalten des Beobachters	339
8.3	Realisierung einer Zustandsrückführung mit Hilfe eines Beobachters	341
8.3.1	Beschreibung des Regelkreises	341
8.3.2	Separationstheorem	342
8.3.3	Entwurfsverfahren	344
8.4	Reduzierter Beobachter	351
8.5	Weitere Anwendungsgebiete von Beobachtern	357
8.6	Beziehungen zwischen LUENBERGER-Beobachter und KALMAN-Filter	359
8.7	Beobachterentwurf mit MATLAB	362
	Literaturhinweise	365
9	Reglerentwurf mit dem Direkten Nyquistverfahren	367
9.1	Grundidee des Direkten Nyquistverfahrens	367
9.2	Stabilitätsanalyse unter Verwendung von Abschätzungen	369
9.2.1	Betrachtungen zum Nyquistkriterium	369
9.2.2	Abschätzung der Eigenwerte der Rückführdifferenzmatrix	370
9.2.3	Stabilitätsbedingung für ein dezentral geregeltes System	373
9.2.4	Integrität des Regelkreises	374
9.3	Entwurf mit dem Direkten Nyquistverfahren	376
9.4	Verbesserung der Analyse des Regelkreises	381
9.4.1	Ableitung einer Stabilitätsbedingung aus Robustheitsbetrachtungen	382
9.4.2	Abschätzung des E/A-Verhaltens des Regelkreises	386
9.5	Entkopplung der Regelkreise	394
9.6	Entwurfsdurchführung mit MATLAB	400
	Literaturhinweise	406

Teil 3: Digitale Regelung

10	Einführung in die digitale Regelung	409
10.1	Digitaler Regelkreis	409
10.2	Abtaster und Halteglied	411
10.2.1	Abtaster	411
10.2.2	Halteglied	418
10.2.3	Wahl der Abtastzeit	420
10.3	Vergleich von kontinuierlichem und zeitdiskretem Regelkreis	422
	Literaturhinweise	424
11	Beschreibung und Analyse zeitdiskreter Systeme im Zeitbereich	425
11.1	Beschreibung zeitdiskreter Systeme	425
11.1.1	Modellbildungsaufgabe	425

11.1.2	Beschreibung zeitdiskreter Systeme durch Differenzgleichungen	426
11.1.3	Zustandsraummodell	430
11.1.4	Ableitung des Zustandsraummodells aus der Differenzgleichung	432
11.1.5	Zeitdiskrete Systeme mit Totzeit	435
11.1.6	Ableitung des Zustandsraummodells eines Abtastsystems aus dem Modell des kontinuierlichen Systems	437
11.1.7	Kanonische Normalform	443
11.2	Verhalten zeitdiskreter Systeme	444
11.2.1	Lösung der Zustandsgleichung	444
11.2.2	Bewegungsgleichung in kanonischer Darstellung	446
11.2.3	Übergangsfolge und Gewichtsfolge	449
11.2.4	Darstellung des E/A-Verhaltens durch eine Faltungssumme ..	455
11.2.5	Übergangsverhalten und stationäres Verhalten	456
11.3	Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit zeitdiskreter Systeme	459
11.3.1	Definitionen und Kriterien	459
11.3.2	Steuerbarkeitsanalyse	460
11.3.3	Beobachtbarkeitsanalyse	469
11.3.4	Weitere Ergebnisse zur Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit ..	473
11.4	Pole und Nullstellen	473
11.5	Stabilität	475
11.5.1	Zustandsstabilität	475
11.5.2	E/A-Stabilität	479
11.6	MATLAB-Funktionen für die Analyse des Zeitverhaltens zeitdiskreter Systeme	481
	Literaturhinweise	483
12	Beschreibung und Analyse zeitdiskreter Systeme im Frequenzbereich	485
12.1	$\mathcal{Z}$ -Transformation	485
12.1.1	Definition	485
12.1.2	Eigenschaften	490
12.2	$\mathcal{Z}$ -Übertragungsfunktion	493
12.2.1	Definition	493
12.2.2	Berechnung	494
12.2.3	Eigenschaften und grafische Darstellung	497
12.2.4	Pole und Nullstellen	500
12.2.5	Übertragungsfunktion zusammengesetzter Übertragungsglieder	504
12.3	MATLAB-Funktionen für die Analyse zeitdiskreter Systeme im Frequenzbereich	504
	Literaturhinweise	505

13 Digitaler Regelkreis	507
13.1 Regelkreisstrukturen	507
13.2 Stabilitätsprüfung digitaler Regelkreise	509
13.2.1 Stabilitätsprüfung anhand der Pole des geschlossenen Kreises	509
13.2.2 Nyquistkriterium	510
13.3 Stationäres Verhalten digitaler Regelkreise	514
14 Entwurf von Abtastreglern	517
14.1 Entwurfsvorgehen	517
14.2 Zeitdiskrete Realisierung kontinuierlicher Regler	518
14.2.1 Approximation kontinuierlicher Regler durch Verwendung von Methoden der numerischen Integration	518
14.2.2 Approximation des PN-Bildes	525
14.2.3 Anwendungsgebiet	527
14.3 Reglerentwurf anhand des zeitdiskreten Streckenmodells	527
14.3.1 Entwurf einschleifiger Regelungen anhand des PN-Bildes des geschlossenen Kreises	527
14.3.2 Entwurf von Mehrgrößenreglern durch Polzuweisung	529
14.3.3 Zeitdiskrete optimale Regelung	530
14.3.4 Beobachter für zeitdiskrete Systeme	530
14.4 Regler mit endlicher Einstellzeit	532
14.5 MATLAB-Funktionen für den Entwurf digitaler Regler	540
Literaturhinweise	541
15 Ausblick auf weiterführende Regelungskonzepte	543
Literaturverzeichnis	545

Anhänge

Anhang 1: Lösung der Übungsaufgaben	551
Anhang 2: Matrizenrechnung	621
A2.1 Bezeichnungen und einfache Rechenregeln	621
A2.2 Eigenwerte und Eigenvektoren	623
A2.3 Singulärwertzerlegung	626
A2.4 Determinantensätze	628
A2.5 Normen von Vektoren und Matrizen	629
A2.6 Definitheit	630
A2.7 Lösung linearer Gleichungssysteme	631
A2.8 Nichtnegative Matrizen und M-Matrizen	631
Literaturhinweise	636

Anhang 3: MATLAB-Programme	637
A3.1 Funktionen für den Umgang mit Matrizen und Vektoren	637
A3.2 MATLAB-Funktionen für die Systemanalyse	638
A3.3 Funktionen für den Reglerentwurf	641
A3.4 Zusammenstellung der Programme	641
Anhang 4: Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung	643
Anhang 5: Projektaufgaben	647
Anhang 6: Verzeichnis der wichtigsten Formelzeichen	655
Anhang 7: Korrespondenztabelle der Funktionaltransformationen	659
Anhang 8: Fachwörter deutsch – englisch	661
Sachwortverzeichnis	665

Verzeichnis der Anwendungsbeispiele

Regelung von Elektroenergieversorgungssystemen

• Frequenz-Übergabeleistungsregelung (FÜ-Regelung)

Kalmanzerlegung eines Elektroenergieversorgungsnetzes (Aufgabe 3.10)	115
Netzkennlinienverfahren für die FÜ-Regelung von Elektroenergienetzen (Aufgabe 5.1 mit Lösung)	210, 567
Dezentrale FÜ-Regelung (Beispiel 6.4)	264
Entwurf einer FÜ-Regelung als Optimalregler (Aufgabe 7.5 mit Lösung)	328, 585
Entwurf einer FÜ-Regelung mit dem Direkten Nyquistverfahren (Aufgabe 9.5 mit Lösung)	406, 598
Entwurf einer dezentralen FÜ-Regelung (Projektaufgabe A5.6 mit Lösung) ..	650, 614

• Knotenspannungsregelung

Spannungs-Blindleistungsverhalten eines Elektroenergienetzes (Aufgabe 2.4) ..	35
Entwurf einer dezentralen Knotenspannungsregelung (Beispiel 9.1)	377
Verbesserte Abschätzung für das Verhalten der dezentralen Knotenspannungsregelung (Beispiel 9.2)	389
Knotenspannungsregelung eines Elektroenergienetzes mit zwei Teilnetzen (Projektaufgabe A5.5)	650

• Dampferzeugerregelung

Verhalten eines Dampferzeugers (Beispiel 2.2)	41
Kalmanzerlegung eines Dampferzeugers (Aufgabe 3.11)	115
Minimale Realisierung eines Dampferzeugers (Aufgabe 3.18 mit Lösung)	138, 565
Optimalreglerentwurf für einen Dampferzeuger (Aufgabe 7.4 mit Lösung) ...	327, 581
Regelung eines Dampferzeugers (Projektaufgabe A5.2)	648

Prozessregelung

Regelungsaufgabe für einen Wärmetauscher (Beispiel 1.1)	4
Regelung einer Destillationskolonne (Beispiel 1.2)	5

• Regelung einer Anlage zur Herstellung von Ammoniumnitrat-Harnstoff-Lösung

Einstellung der PI-Regelung für die AHL-Anlage (Beispiel 5.1)	221
Zeitdiskrete Realisierung des PI-Reglers (Aufgabe 14.2)	525
Analyse und Regelung der AHL-Anlage (Projektaufgabe A5.3)	649

• Analyse und Regelung von Rührkesselreaktoren

Beschreibung eines Rührkesselreaktors in V-kanonischer Struktur (Beispiel 2.1)	29
Steuerbarkeit gekoppelter Rührkesselreaktoren (Beispiel 3.1)	68
Steuerbarkeit gekoppelter Rührkesselreaktoren mit zeitdiskreter Eingangsgröße (Beispiel 11.5)	462
Beobachtbarkeit gekoppelter Rührkesselreaktoren (Beispiel 3.7)	98
Beobachtbarkeit der Füllstände eines Behältersystems (Aufgabe 3.9)	108
Reduzierter Beobachter für zwei gekoppelte Rührkesselreaktoren (Aufgabe 8.4)	356
Konzentrationsregelung gekoppelter Rührkesselreaktoren durch Zustandsrückführung (Beispiel 6.1)	242
Stabilitätsanalyse der Konzentrationsregelung (Beispiel 4.1)	166
Konzentrationsregelung gekoppelter Rührkesselreaktoren durch Ausgangsrückführung (Beispiel 6.3)	260
Zustandsraummodell eines Mischprozesses (Aufgabe 2.1)	18
Regelung eines Mischprozesses (Projektaufgabe A5.8)	653

• Regelung eines Biogasreaktors

Regelungsaufgaben für einen Biogasreaktor (Beispiel 1.4)	6
Kopplungseigenschaften eines Biogasreaktors (Beispiel 4.5)	199
Existenz von PI-Reglern für einen Biogasreaktor (Beispiel 5.2)	230
Zeitdiskrete Messung der Betriebsgrößen (Aufgabe 10.1)	421

• Regelung einer Klärschlammverbrennungsanlage

Auswahl der Stellgrößen für die Regelung einer Klärschlammverbrennungsanlage (Beispiel 4.4)	194
Einstellung der PI-Regelung für die Klärschlammverbrennungsanlage (Aufgabe 5.2)	226
Zeitdiskretes Modell der Klärschlammverbrennungsanlage (Aufgabe 11.5) ...	443
Analyse und Regelung einer Klärschlammverbrennungsanlage (Projektaufgabe A5.4)	649

Regelung von Fahrzeugen und Flugkörpern

Beobachtbarkeit der Satellitenbewegung (Aufgabe 3.8 mit Lösung)	107, 557
Flugüberwachung als zeitdiskreter Vorgang (Aufgabe 10.1)	421

• Flugregelung

Autopilot für ein Flugzeug (Beispiel 1.3)	6
Optimalregler für die Rollbewegung eines Flugzeuges (Beispiel 7.2)	304
Entwurf eines Reglers mit endlicher Einstellzeit für die Rollbewegung eines Flugzeugs (Aufgabe 14.4)	539

• Regelung einer Magnetschwebbahn

Stabilitätsprüfung der geregelten Magnetschwebbahn (Beispiel 4.2)	167
Stabilisierung der Magnetschwebbahn durch Zustandsrückführung (Aufgabe 6.5 mit Lösung)	274, 576
Beobachter für die Magnetschwebbahn (Aufgabe 8.6 mit Lösung)	364, 588

Regelung mechanischer Systeme

Strukturelle Steuerbarkeit eines elektrischen Rotationsantriebs (Aufgabe 3.14 mit Lösung)	129, 560

• Analyse und Regelung einer Verladebrücke

Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit einer Verladebrücke (Aufgabe 3.15 mit Lösung)	130, 561
Steuerbarkeit einer Verladebrücke mit zeitdiskreter Eingangsgröße (Beispiel 11.7)	468
Regelung einer Verladebrücke mit Zustandsrückführung (Aufgabe 6.2 mit Lösung)	244, 573
Regelung einer Verladebrücke mit Ausgangsrückführung (Aufgabe 6.3 mit Lösung)	255, 576
Positionsregelung für eine Verladebrücke (Projektaufgabe A5.1)	648

• Stabilisierung eines invertierten Pendels

Kalmanzerlegung des Zustandsraummodells des invertierten Pendels (Beispiel 3.9)	110
Stabilisierung des invertierten Pendels durch Zustandsrückführung (Aufgabe 6.4)	273
LQ-Problem für das invertierte Pendel (Beispiel 7.1)	284
Stabilisierung des invertierten Pendels durch einen Optimalregler (Beispiel 7.3)	305
Beobachter für das invertierte Pendel (Beispiel 8.1)	346
Reduzierter Beobachter (Beispiel 8.2)	355

Regelung eines Gleichstrommotors

Beobachtbarkeit eines Gleichstrommotors (Aufgabe 3.12 mit Lösung)	125, 558
Störverhalten eines digital geregelten Gleichstrommotors (Beispiel 10.2)	416
Zeitdiskrete Realisierung einer Drehzahlregelung (Beispiel 14.1)	523
Regler mit endlicher Einstellzeit für einen Gleichstrommotor (Beispiel 14.3)	536

Weitere Anwendungen

Raumtemperaturregelung mit fester Einstellzeit (Aufgabe 14.3)	539
Regelung einer Züchtungsanlage für GaAs-Einkristalle (Aufgabe 9.4 mit Lösung)	403, 594
Analyse und Regelung der Einkristallzüchtungsanlage (Projektaufgabe A5.7)	652
Zeitdiskrete Zustandsraumbeschreibung einer Rinderzucht (Aufgabe 11.1 mit Lösung)	434, 603
Preisdynamik in der Landwirtschaft (Aufgabe 11.14 mit Lösung)	481, 609
Zeitdiskrete Zustandsraumbeschreibung der Lagerhaltung (Aufgabe 11.2)	434
Zustandsraummodell eines Filters (Beispiel 11.4)	452
Zustandsraummodell der Fußball-Bundesliga (Aufgabe 11.3)	435
Beobachtbarkeit eines Oszillators (Aufgabe 11.11 mit Lösung)	472, 607
Stabilitätsanalyse eines Bankkontos (Aufgabe 11.13)	480

Inhaltsübersicht des ersten Bandes

Zielstellung der Regelungstechnik

Beispiele für technische und nichttechnische Regelungsaufgaben

Strukturelle Beschreibung dynamischer Systeme

Blockschaltbild, Signalflussgraf

Systembeschreibung im Zeitbereich

Beschreibung durch Differenzialgleichungen, Zustandsraummodell

Verhalten linearer Systeme

Lösung der Zustandsgleichung

Kennfunktionen des dynamischen Übertragungsverhaltens

Modellvereinfachung, Kennwertermittlung

Beschreibung linearer Systeme im Frequenzbereich

Frequenzgang, Übertragungsfunktion

Eigenschaften wichtiger Übertragungsglieder im Frequenzbereich

Regelkreis

Modell des Standardregelkreises

Stabilität rückgekoppelter Systeme

Nyquistkriterium; robuste Stabilität

Entwurf einschleifiger Regelkreise

Übersicht über die Entwurfsverfahren

Einstellregeln für PID-Regler

Reglerentwurf anhand des PN-Bildes des geschlossenen Kreises

Konstruktionsvorschriften für Wurzelortskurven

Reglerentwurf mittels Wurzelortskurve

Reglerentwurf anhand der Frequenzkennlinie der offenen Kette

Frequenzkennlinie und Regelgüte

Reglerentwurf auf Führungs- und auf Störverhalten

Weitere Entwurfsverfahren

Erweiterung der Regelungsstruktur

6. Auflage 2007

mit 390 Abbildungen, 67 Beispielen und 166 Übungsaufgaben

Hinweise zum Gebrauch des Buches

Formelzeichen. Die Wahl der Formelzeichen hält sich an folgende Konventionen: Kleine kursive Buchstaben bezeichnen Skalare, z. B. x , a , t . Vektoren sind durch kleine halbfette Buchstaben, z. B. $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{a}$, und Matrizen durch halbfette Großbuchstaben, z. B. $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{A}$, dargestellt. Entsprechend dieser Festlegung werden die Elemente der Matrizen und Vektoren durch kursive Kleinbuchstaben (mit Indizes) symbolisiert, beispielsweise mit x_1 , x_2 , x_i für Elemente des Vektors $\boldsymbol{x}$ und a_{12} , a_{ij} für Elemente der Matrix $\boldsymbol{A}$. Werden Größen, die im allgemeinen Fall als Vektor oder Matrix geschrieben werden, in einem einfachen Beispiel durch Skalare ersetzt, so wird dies durch den Übergang zu kleinen kursiven Buchstaben verdeutlicht, beispielsweise durch Verwendung von x , a anstelle von $\boldsymbol{x}$ bzw. $\boldsymbol{A}$. Dann gelten die vorher mit Vektoren und Matrizen geschriebenen Gleichungen mit den skalaren Größen gleichen Namens.

Mengen sind durch kalligrafische Buchstaben dargestellt, z. B. $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$.

Funktionen der Zeit und deren Fourier-, Laplace- und $\mathcal{Z}$ -Transformierte haben denselben Namen, unterscheiden sich aber in der Größe. Den Funktionen $f(t)$ bzw. $f(k)$ im Zeitbereich sind die Funktionen $F(j\omega)$, $F(s)$ bzw. $F(z)$ im Frequenzbereich zugeordnet.

Bei den Indizes wird zwischen Abkürzungen und Laufindizes unterschieden. Bei k_s ist der Index „s“ die Abkürzung für „statisch“ und deshalb steil gesetzt, während bei x_p das p einen Parameter darstellt, der beliebige Werte annehmen kann und deshalb kursiv gesetzt ist.

Die verwendeten Bezeichnungen orientieren sich an den international üblichen und weichen deshalb auch in wichtigen Fällen von der DIN 19299 ab. Beispielsweise werden für die Regelgröße und die Stellgröße die Buchstaben y und u verwendet. x bzw. $\boldsymbol{x}$ ist das international gebräuchliche Formelzeichen für eine Zustandsvariable bzw. den Zustandsvektor.

Eine Zusammenstellung der wichtigsten Formelzeichen enthält Anhang 6.

Wenn bei einer Gleichung hervorgehoben werden soll, dass es sich um eine Forderung handelt, die durch eine geeignete Wahl von bestimmten Parametern erfüllt werden soll, wird über das Gleichheitszeichen ein Ausrufezeichen gesetzt ($\stackrel{!}{=}$).

Bei Verweisen auf Textstellen des ersten Bandes (6. Auflage 2007) ist den Kapitel-, Aufgaben-, Beispiel- und Gleichungsnummern eine römische Eins vorangestellt, z. B. Abschn. I-3.2, Gl. (I-4.98).

Bei den Beispielen wird mit Zahlengleichungen gearbeitet, in die die physikalischen Größen in einer zuvor festgelegten Maßeinheit einzusetzen sind. Bei den Ergebnissen werden die Maßeinheiten wieder an die Größen geschrieben. Dabei wird zur Vereinfachung der Darstellung in den Gleichungen nicht zwischen den physikalischen Größen und ihren auf eine vorgegebene Maßeinheit bezogenen Größen unterschieden (vgl. Abschn. I-4.4.4).

Übungsaufgaben. Die angegebenen Übungsaufgaben sind ihrem Schwierigkeitsgrad entsprechend folgendermaßen gegliedert:

- Aufgaben ohne Markierung dienen der Wiederholung und Festigung des unmittelbar zuvor vermittelten Stoffes. Sie können in direkter Analogie zu den behandelten Beispielen gelöst werden.
- Aufgaben, die mit einem Stern markiert sind, befassen sich mit der Anwendung des Lehrstoffes auf ein praxisnahes Beispiel. Für ihre Lösung werden vielfach außer dem unmittelbar zuvor erläuterten Stoff auch Ergebnisse und Methoden vorhergehender Kapitel genutzt. Die Leser sollen bei der Bearbeitung dieser Aufgaben zunächst den prinzipiellen Lösungsweg festlegen und erst danach die Lösungsschritte nacheinander ausführen. Die Lösungen dieser Aufgaben sind im Anhang 1 angegeben.
- Aufgaben, die mit zwei Sternen markiert sind, sollen zum weiteren Durchdenken des Stoffes bzw. zu Erweiterungen der angegebenen Methoden anregen.

MATLAB. Eine kurze Einführung in das Programmpaket MATLAB wird im Anhang I-2 des ersten Bandes gegeben. Die wichtigsten Funktionen der *Control System Toolbox* für die in diesem Band behandelten Methoden werden am Ende der entsprechenden Kapitel erläutert. Sie sind im Anhang 3 zusammengestellt. Dabei wird nur auf die unbedingt notwendigen Befehle und deren einfachste Form eingegangen, denn im Vordergrund steht die Demonstration des prinzipiellen Funktionsumfangs heutiger rechnergestützter Analyse- und Entwurfssysteme am Beispiel von MATLAB und die Nutzung dieses Werkzeugs für die Lösung einfacher Regelungsaufgaben. Von diesen Erläuterungen ausgehend können die Leser mit Hilfe des MATLAB-Handbuchs den wesentlich größeren Funktionsumfang des Programmsystems leicht erschließen. Programmzeilen sind im Text in Schreibmaschinenschrift angegeben.

Die Behandlung von MATLAB zur Demonstration der rechnergestützten Arbeitsweise des Ingenieurs bringt die Schwierigkeit mit sich, dass das Buch mit jeder neuen MATLAB-Version veraltet, weil wichtige Befehle von Version zu Version umgestellt werden. Es sei deshalb darauf hingewiesen, dass derartige Umstellungen zwar die fehlerfreie Nutzung des Programmsystems erschweren, nicht jedoch

die methodischen Grundlagen der Regelungstechnik verändern, die im Mittelpunkt dieses Buches stehen.

Die MATLAB-Programme, mit denen die in diesem Buch gezeigten Abbildungen hergestellt wurden und die deshalb als Muster für die Lösung ähnlicher Analyse- und Entwurfsprobleme dienen können, stehen über die Homepage des Lehrstuhls für Automatisierungstechnik und Prozessinformatik der Ruhr-Universität Bochum

<http://www.rub.de/atp>

jedem Interessenten zur Verfügung.

1

Einführung in die Mehrgrößenregelung

Mehrgrößenregelungen müssen immer dann verwendet werden, wenn mehrere Regelgrößen und Stellgrößen untereinander stark verkoppelt sind. Anhand von typischen Beispielen wird in diesem Kapitel gezeigt, welche neuartigen Probleme für die Modellbildung, die Analyse von Regelkreisen und den Reglerentwurf aus diesen Kopplungen resultieren und welche Lösungswege für diese Probleme in den nachfolgenden Kapiteln behandelt werden.

1.1 Regelungsaufgaben mit mehreren Stell- und Regelgrößen

1.1.1 Charakteristika von Mehrgrößensystemen

Im Band 1 dieses Buches wurden Regelungsprobleme behandelt, bei denen *eine* Regelgröße mit Hilfe *einer* Stellgröße einer Führungsgröße angepasst werden soll. In vielen praktischen Anwendungen ist es jedoch notwendig, gleichzeitig mehrere Regelgrößen auf vorgegebenen Sollwerten zu halten oder entlang von Solltrajektorien zu führen. Die folgende Aufzählung nennt Gründe dafür:

- Mehrgrößenregelungen sind erforderlich, wenn die Arbeitsweise einer Anlage durch unterschiedliche physikalische Größen charakterisiert ist, die in starker Wechselwirkung zueinander stehen. Beispiele dafür sind Dampfzerzeuger, bei denen Druck und Temperatur des Frischdampfes über die Gasgesetze (bei vorgegebenem Volumen) zusammenhängen und folglich nicht unabhängig voneinander

auf vorgegebene Sollwerte gebracht werden können. Ähnlich verhält es sich mit den Regelgrößen Temperatur und Luftfeuchtigkeit bei einer Klimaregelung, mit Temperatur, Flammenhöhe und Rauchgaszusammensetzung bei einer Brennerregelung sowie mit Position, Kraft und Geschwindigkeit bei der Regelung eines Roboterarms.

- Mehrgrößenprobleme entstehen, wenn das bestimmungsgemäße Verhalten der Regelstrecke Bedingungen an mehrere Regelgrößen gleichzeitig stellt und dadurch einen koordinierten Eingriff an mehreren Stellgliedern erfordert. Beispiele dafür sind das Robotergreifen, bei dem mehrere Antriebe gleichzeitig verwendet werden müssen, um den Greifer zu positionieren, der Kurvenflug eines Flugzeugs, der nur mit Hilfe gleichzeitiger Roll- und Gierbewegungen realisiert werden kann, und die Stabilisierung des Arbeitspunktes von Bioreaktoren, bei der pH -Wert, Temperatur und Biomasseverteilung in bestimmten Grenzen zu halten sind.
- Systeme mit örtlich verteilten Parametern sind durch dynamisch stark verkoppelte Signale beschrieben, die an unterschiedlichen Stellen im System auftreten und durch eine gemeinsame Regelung beeinflusst werden müssen. Beispielsweise ist die Spannung in Elektroenergieverteilungsnetzen nicht an allen Netzknoten gleich, sondern Regelungen müssen dafür sorgen, dass die Spannungen an ausgewählten Knoten auf vorgegebenen Werten gehalten werden, damit der gewünschte Leistungsfluss eintritt.
- Wenn mehrere Anlagen mit gemeinsamen Ressourcen arbeiten, muss die Regelung auf vorhandene Ressourcenbeschränkung Rücksicht nehmen. Eine ähnliche Situation liegt vor, wenn mehrere gleichartige Anlagen gemeinsam eine Aufgabe erfüllen müssen. Beispielsweise wird eine größere Zahl von Generatoren in Elektroenergienetzen oder von Verdichtern in Gasversorgungsnetzen betrieben, wobei diese Elemente gemeinsam den Gesamtbedarf an elektrischer Leistung bzw. Gas im Netz decken müssen.
- Wenn eine Produktionsanlage aus mehreren Bearbeitungsstufen besteht, so sind die Teilanlagen immer dann stark miteinander gekoppelt, wenn zwischen ihnen keine Lager oder Puffer angeordnet sind.

Charakteristisch für die in der Aufzählung genannten Probleme ist die Tatsache, dass die angegebenen Stellgrößen und Regelgrößen dynamisch so stark miteinander verkoppelt sind, dass sie nicht mehr als unabhängige Größen betrachtet werden können. Man bezeichnet die Regelstrecke als ein Mehrgrößensystem, wenn die Kopplungen zwischen den Stellgrößen-Regelgrößen-Paaren bei der Analyse und beim Reglerentwurf nicht vernachlässigt werden können. Diese Tatsache unterscheidet die im Folgenden betrachteten Probleme von Regelungsaufgaben, die durch mehrere einschleifige Regelkreise gelöst werden können, weil dort die Kopplungen zwischen diesen Regelkreisen so schwach sind, dass sie beim Entwurf vernachlässigt werden

können. Die Regelkreise können in diesem Falle einzeln betrachtet und mit denen im Band 1 erläuterten Methoden behandelt werden.

Abbildung 1.1 veranschaulicht die genannten Kopplungseigenschaften von Mehrgrößensystemen für eine Regelstrecke mit drei Stell- und zwei Regelgrößen. Ein wesentlicher neuer Aspekt bei der Behandlung von Mehrgrößensystemen entsteht aufgrund der durch die Pfeile dargestellten Kopplungen zwischen allen Stellgrößen und allen Regelgrößen. Diese Kopplungen müssen bei der Modellbildung und der Systemanalyse beachtet und nach Möglichkeit für die Regelung ausgenutzt werden.

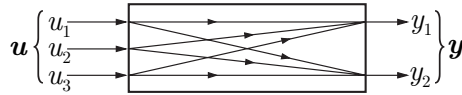


Abb. 1.1: Mehrgrößensystem

Um für die Regelstrecke eine möglichst kompakte Beschreibung zu erhalten, werden die m Eingangsgrößen $u_i(t)$ zu einem m -dimensionalen Vektor $\mathbf{u}(t)$ zusammengefasst. Ähnlich verfährt man mit den r Ausgangsgrößen $y_i(t)$:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_r(t) \end{pmatrix}.$$

Während man bei Eingrößensystemen von *der* Eingangsgröße und *der* Ausgangsgröße spricht, muss man bei Mehrgrößensystemen streng genommen immer von Eingangsvektoren und Ausgangsvektoren sprechen. Diese Unterscheidung wird beachtet, wenn es auf den Unterschied zwischen Ein- und Mehrgrößensystemen ankommt. Ansonsten wird der Einfachheit halber auch bei Mehrgrößensystemen oft von *dem* Eingang und *dem* Ausgang gesprochen.

Im Regelkreis müssen jetzt r Führungsgrößen $w_i(t)$ vorgegeben werden. Die Dimension des Führungsgrößenvektors

$$\mathbf{w}(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ \vdots \\ w_r(t) \end{pmatrix}$$

stimmt mit der des Ausgangsvektors $\mathbf{y}$ überein. Mit p wird die Zahl der Störgrößen d_i bezeichnet, so dass

$$\mathbf{d}(t) = \begin{pmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \\ \vdots \\ d_p(t) \end{pmatrix}$$

gilt.

Viele der im Folgenden behandelten Modellierungs-, Analyse- und Entwurfsverfahren lassen sich auch auf Eingrößensysteme anwenden. Im Rahmen der Mehrgrößensysteme bezeichnet man die Eingrößenprobleme auch als den „skalaren Fall“, weil die Signale dann keine Vektoren mehr sind, sondern skalare Zeitfunktionen. Dieser Tatsache wird in der Schreibweise der Formelzeichen dadurch Rechnung getragen, dass anstelle von halbfett gesetzten Buchstaben kursive Formelzeichen verwendet werden.

In der englischsprachigen Literatur spricht man bei Mehrgrößensystemen auch von MIMO-Systemen (*multiple-input multiple-output systems*) und bei Eingrößensystemen von SISO-Systemen (*single-input single-output systems*). In Abhängigkeit von der Zahl der Stell- und Regelgrößen kann man auch die Abkürzungen MISO- bzw. SIMO-Systeme verwenden.

1.1.2 Beispiele für Mehrgrößenregelungsaufgaben

In diesem Abschnitt werden praktische Regelungsaufgaben behandelt, für deren Lösung man Mehrgrößenregler einsetzen muss.

Beispiel 1.1 Regelung eines Wärmetauschers

Ein Wärmetauscher hat die Aufgabe, eine Flüssigkeit auf eine vorgegebene Temperatur zu bringen, wobei die Wärme von einem Heizmittel auf die aufzuheizende Flüssigkeit übertragen wird. Die erreichte Temperatur hängt von vielen Größen ab, u. a. von der Temperatur beider Flüssigkeiten vor Eintritt in den Wärmetauscher und von den Durchflussgeschwindigkeiten.

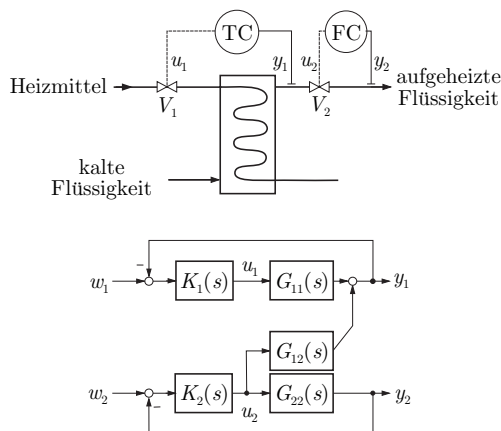


Abb. 1.2: Mehrgrößenregelung eines Wärmetauschers

Der in Abb. 1.2 gezeigte Wärmetauscher ist deshalb mit zwei Regelkreisen ausgestattet. Die Durchflussmenge y_2 des aufzuheizenden Mittels wird mit Hilfe des Ventils V_2 geregelt. Seine Temperatur y_1 wird dadurch geregelt, dass die Menge des Heizmittels über das Ventil V_1 verändert wird.

Das Blockschaltbild ist in Abb. 1.2 (unten) zu sehen. Da der Durchfluss y_2 die Wärmeübertragung und damit die Temperatur y_1 beeinflusst, bewegen sich die beiden gezeigten Regelkreise nicht unabhängig voneinander, sondern es gibt eine Kopplung des Durchflusses auf die Temperatur. Diese Kopplung ist durch den Block mit der Übertragungsfunktion $G_{12}(s)$ dargestellt. Allerdings gibt es keine Kopplung von der Temperatur auf den Durchfluss.

Die einseitige Kopplung der beiden Regelkreise bewirkt, dass die Temperatur durch den Durchfluss beeinflusst wird, aber nicht umgekehrt. Man verwendet deshalb trotz der Kopplung zwei Eingrößenregler $K_1(s)$ bzw. $K_2(s)$. Das Gesamtsystem ist genau dann stabil, wenn die beiden Eingrößenregelungen stabil sind. Für die Stabilitätsanalyse bereitet die beschriebene einseitige Kopplung also keine Schwierigkeiten. Allerdings beeinflussen sich die Regelkreise in einer Richtung dynamisch. Wenn beispielsweise eine Sollwerterhöhung für den Durchfluss vorgenommen wird, so wirkt sich dies auch auf den Temperaturregelkreis aus. Die Temperatur wird zunächst abnehmen und dann durch den ersten Regler wieder auf den vorgegebenen Sollwert angehoben werden. Wenn man diese unerwünschte Kopplung verkleinern will, muss man anstelle der beiden im Blockschaltbild gezeigten Eingrößenregler einen Mehrgrößenregler einsetzen. □

Beispiel 1.2 Regelung einer Destillationskolonne

Destillationskolonnen dienen der Trennung von Stoffgemischen, wenn die Stoffe unterschiedliche Siedepunkte haben. Der Stoff mit der niedrigeren Siedetemperatur kann am Kopf der Kolonne abgezogen werden, während sich der schwerer siedende Stoff im Sumpf sammelt.

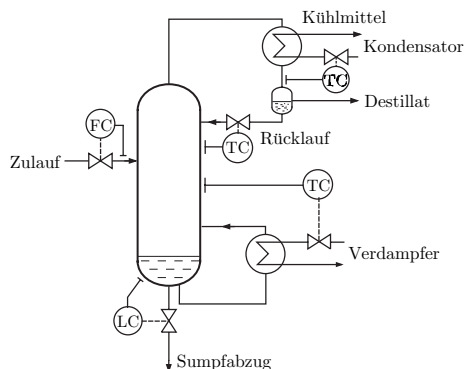


Abb. 1.3: Regelung einer Destillationskolonne

In Abb. 1.3 sind Regelungen für den Zulauf (FC), die Sumpftemperatur (TC) und den Füllstand (LC) im Sumpf sowie die Kopftemperatur (TC) eingetragen. Diese Regelungen

sind als Eingrößenregelungen gekennzeichnet. Allerdings beeinflussen sich diese Regelungen über die Destillationskolonne dynamisch sehr stark.

Viele Destillationskolonnen werden heute mit mehreren einschleifigen Regelkreisen geregelt. Es hat sich jedoch gezeigt, dass die Kopplung der Kreise so groß ist, dass eine wesentlich bessere Produktqualität (Reinheit der getrennten Stoffe) erreicht werden kann, wenn die Regelung als Mehrgrößenregelung ausgelegt wird. Bei Verwendung einer Mehrgrößenregelung kann durch den Regler darauf Rücksicht genommen werden, dass sich die einzelnen Größen wie Temperatur und Füllstand im Sumpf bzw. im Kopf gegenseitig sehr stark beeinflussen. □

Beispiel 1.3 Autopilot für ein Flugzeug

Die in Abb. 1.4 schematisch dargestellte Regelung eines Flugzeuges durch einen Autopiloten und einen Piloten stellt ein Beispiel dar, bei dem technisch realisierte Regelkreise mit Regelungen verknüpft sind, bei denen der Mensch als Regler fungiert.

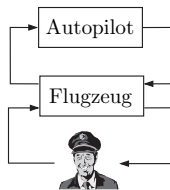


Abb. 1.4: Regelung eines Flugzeugs durch Autopilot und Pilot

Die Flugbewegung, die durch die Position des Flugzeuges über dem Erdboden, die Flughöhe und die Flugrichtung gekennzeichnet ist, wird sowohl durch automatische Regelkreise als auch den Piloten beeinflusst. Die Abbildung macht deutlich, dass sich diese Regelkreise gegenseitig beeinflussen. Zählt man beispielsweise den Piloten zur Regelstrecke „Flugzeug“ hinzu, so wird offensichtlich, dass die Regelstrecke des Autopiloten die Tätigkeit des Piloten einschließt. Der Autopilot muss also so entworfen werden, dass die Stelleingriffe des Piloten seine Funktionsweise nicht wesentlich verändern können. Rechnet man andererseits den Autopilot zum Flugzeug hinzu, so erkennt man, dass die Flugeigenschaften des Flugzeugs aus der Sicht des Piloten durch den Autopiloten mitbestimmt werden. Der Pilot hat eine andere Regelstrecke, muss also bei eingeschaltetem Autopiloten anders reagieren, als wenn der Autopilot abgeschaltet ist. Die Kopplung der beiden gezeigten Regelkreise spielt bei der Analyse des Flugverhaltens eine entscheidende Rolle. □

Beispiel 1.4 Regelungsaufgaben für einen Biogasreaktor

Biogasreaktoren können die Konzentrationen organischer Schadstoffe in Abwässern soweit reduzieren, dass sie unterhalb der vorgeschriebenen Grenzwerte liegen. Es gibt unterschiedliche Reaktorkonzepte, von denen eines in Abb. 1.5 gezeigt ist. Der Reaktor besteht aus vier übereinander angeordneten gleichartigen Modulen. Abwasser wird an mehreren Stellen entlang der Reaktorhöhe kontinuierlich eingespeist. Die im Abwasser gelösten organischen Schadstoffe werden von den im Reaktor verteilten Mikroorganismen abgebaut. Dabei

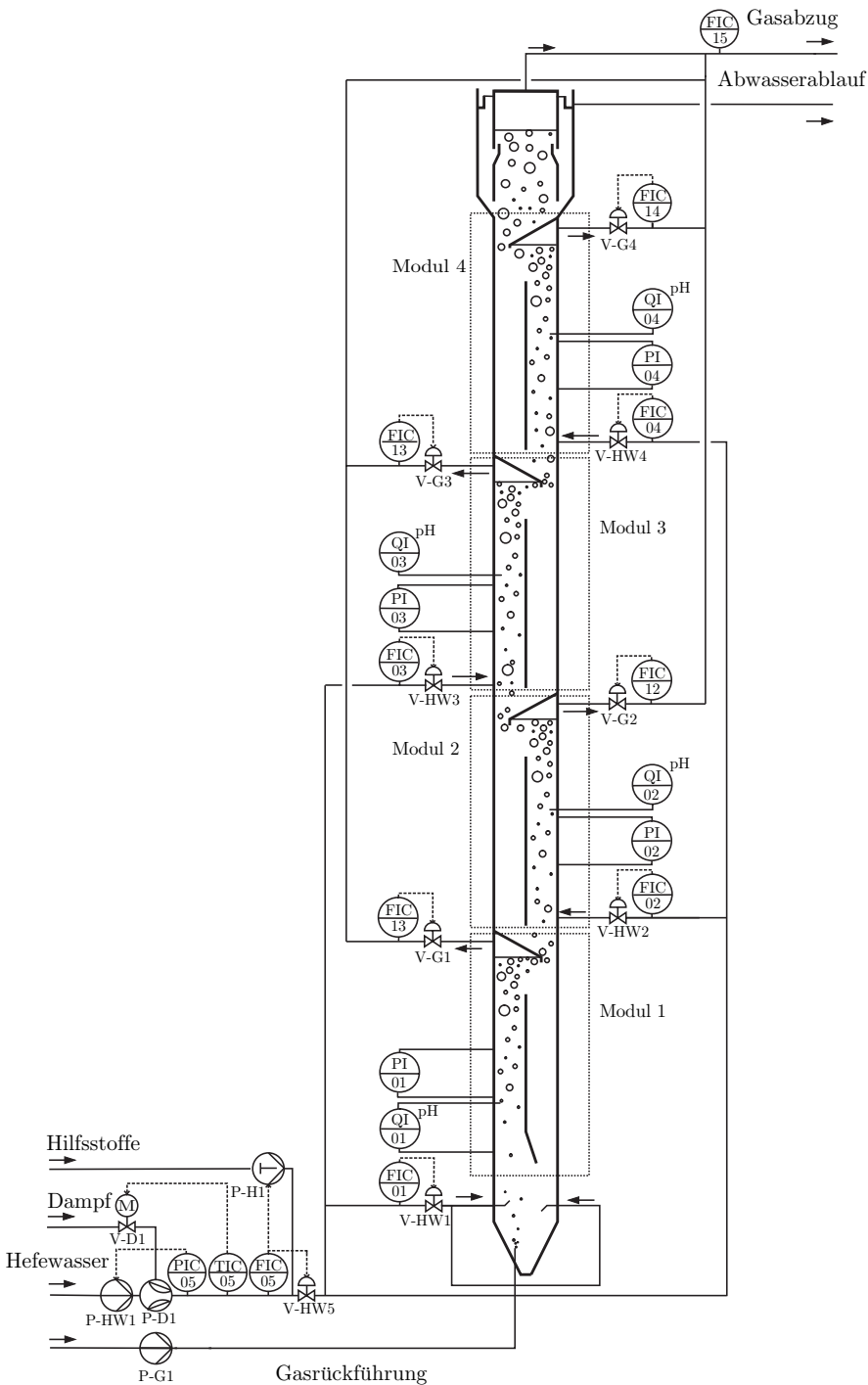


Abb. 1.5: Biogasreaktor mit Kennzeichnung wichtiger Regelkreise

entsteht Biogas mit den Hauptbestandteilen Methan und Kohlendioxid. Das gereinigte Abwasser läuft am Reaktorkopf ab.

Die Module sind in der Mitte durch Trennplatten in eine Auf- und eine Abströmzone (*Riser* und *Downcomer*) unterteilt. Die Gasblasen steigen aufgrund der Strömungsführung überwiegend in der Aufströmzone auf. Die daraus resultierende hydrostatische Druckdifferenz zwischen beiden Zonen treibt eine Flüssigkeitszirkulation um die Trennplatte an. Diese Airlift-Schlaufen erzeugen die für die biochemischen Reaktionen notwendige Durchmischung innerhalb der Module.

Jedes Modul besitzt einen Gassammelraum, aus dem das Biogas durch Stellventile kontrolliert abgezogen werden kann. Nicht abgezogenes Gas strömt in das darüber liegende Modul. Das entnommene Biogas gelangt in eine Gassammelleitung und wird zusammen mit dem restlichen im Reaktorkopf gesammelten Gas der Entschwefelungsanlage zugeführt. Danach steht es für eine energetische Nutzung zur Verfügung.

Das dynamische Verhalten des Reaktors ist erheblich komplexer als das von Rührkesselreaktoren. Außerdem kann die pH -Wert-Regelung nicht durch Zudosierung von Säure und Lauge erfolgen, sondern muss als Stellgröße den Volumenstrom des zugeführten Abwassers verwenden. Zur Realisierung des beschriebenen Wirkprinzips des Reaktors sind deshalb eine Reihe von Mehrgrößenregelungsaufgaben zu lösen. Im Beispiel 4.5 wird untersucht, unter welchen Bedingungen die pH -Werte in den vier Modulen nur mit einem Mehrgrößenregler auf dem vorgegebenen Sollwert 7 gehalten werden können. Ferner wird eine Vielzahl von Regelkreisen benötigt, die der Zuführung des Abwassers und der definierten Entnahme von Biogas aus dem Reaktor dienen. Ein Teil dieser Regelkreise ist in Abb. 1.5 eingetragen. □

In den folgenden Kapiteln werden die hier beschriebenen sowie eine Vielzahl weiterer Regelungsprobleme aufgegriffen und gelöst. Eine Übersicht über die behandelten praktischen Problemstellungen gibt das Inhaltsverzeichnis auf Seite XVII.

1.2 Mehrgrößenregelkreis

1.2.1 Regelungsaufgabe

Die Regelungsaufgabe ist bei Mehrgrößensystemen grundsätzlich dieselbe wie bei Eingrößensystemen. Es kommen jedoch zu den Güteforderungen an den geschlossenen Kreis neue Forderungen hinzu, die die Kopplungseigenschaften des Regelkreises betreffen und deshalb bei Eingrößensystemen keine Rolle spielen.

Die Güteforderungen werden wie bisher in vier Gruppen eingeteilt:

- (I) Stabilitätsforderung
- (II) Forderung nach Sollwertfolge
- (III) Dynamikforderungen an das Übergangsverhalten
- (IV) Robustheitsforderung.

Zu den für Mehrgrößensysteme neuen Güteforderungen zählen die folgenden:

- **Schwache Querkopplungen zwischen den Regelgrößen.** Typisch für Mehrgrößenregelkreise ist die Forderung, dass im dynamischen Verhalten der Regelkreise nur geringe Querkopplungen zwischen den einzelnen Regelgrößen auftreten sollen. Will man beispielsweise den Füllstand in einem Reaktor erhöhen, so soll davon die Temperatur der im Reaktor befindlichen Flüssigkeit wenig oder gar nicht beeinflusst werden, obwohl die zufließende Flüssigkeit für die Temperaturregelung als Störgröße wirkt.
- **Integrität des Regelkreises.** Unter der Integrität eines Mehrgrößenregelkreises versteht man die Eigenschaft, dass der Regelkreis stabil bleibt, wenn einzelne Stell- bzw. Messglieder versagen. Die Forderung nach Integrität ist für die technische Realisierung von großer Bedeutung, weil der Regelkreis als Ganzes wenigstens stabil bleiben muss, wenn ein Mehrgrößenregler einzelne Stell- oder Messgrößen nicht wie vorgesehen verarbeiten kann.

1.2.2 Regelkreisstrukturen

Der prinzipielle Aufbau eines Regelkreises ist bei der Mehrgrößenregelung derselbe wie bei einer Eingrößenregelung. Abbildung 1.6 zeigt die wichtigsten Komponenten. Im Unterschied zur bisherigen Betrachtungsweise stellen die durch Pfeile dargestellten Signale jedoch Vektoren dar. Außerdem stehen in den Blöcken keine (skalaren) Übertragungsfunktionen, sondern Übertragungsfunktionsmatrizen.

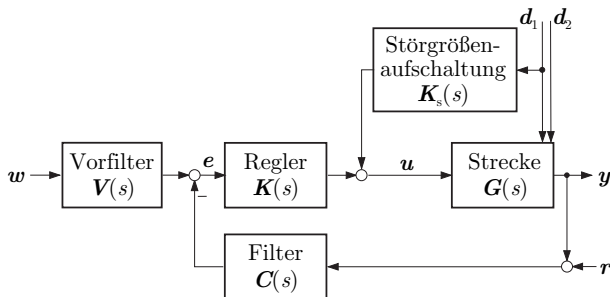


Abb. 1.6: Regelkreis mit Störgrößenaufschaltung und Vorfilter

Die wesentliche Schwierigkeit des Reglerentwurfes betrifft die aus der Strecke und dem Regler gebildete Rückkopplungsstruktur. Die folgenden Kapitel beziehen sich deshalb auf den in Abb. 1.7 gezeigten Standardregelkreis.

Die Abbildung zeigt, dass die Regelabweichungen für die einzelnen Regelgrößen getrennt gebildet werden. Der wesentliche Unterschied zwischen zwei getrennten Eingrößenregelkreisen und dem abgebildeten Mehrgrößenregelkreis besteht in der

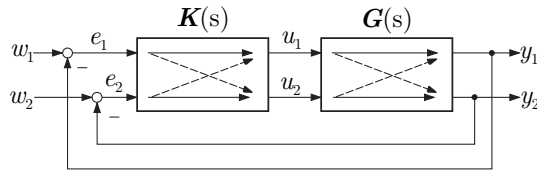


Abb. 1.7: Mehrgrößenregelkreis

Tatsache, dass die Regelstrecke nicht vernachlässigbare Querkopplungen von u_1 auf y_2 und von u_2 auf y_1 besitzt und dass der Regler diesen Querkopplungen entgegenwirkt, indem er u_1 nicht nur in Abhängigkeit von e_1 , sondern auch unter Beachtung von e_2 vorgibt. Gleiches gilt für die Wirkung von u_2 auf y_1 .

Dezentrale Regelung. Die Tatsache, dass die Regelstrecke ein Mehrgrößensystem ist, bedeutet nicht zwangsläufig, dass auch der Regler ein Mehrgrößenregler sein muss. Es bedeutet nur, dass die Querkopplungen innerhalb der Strecke beim Reglerentwurf beachtet werden müssen.

Die Regelung kann durchaus mit zwei oder mehr getrennten Teilreglern realisiert werden, wie es in Abb. 1.8 gezeigt ist. Man spricht dann auch von einer *dezentralen Regelung*. Im Unterschied zur einschleifigen Regelung werden beim Entwurf beider Teilregler (TR) jedoch die Querkopplungen zwischen den Regelkreisen beachtet.

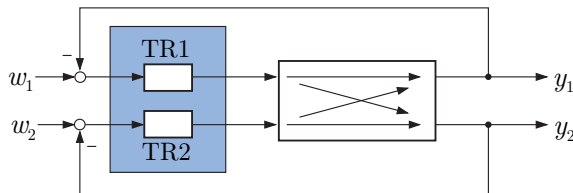


Abb. 1.8: Dezentrale Regelung

Entkopplung der Regelkreise. Zur Kompensation starker Querkopplungen in der Strecke sind entsprechende Querkopplungen im Regler notwendig, wie es in Abb. 1.9 gezeigt ist. Ein wesentliches Problem der Mehrgrößenregelung besteht in der Frage, wie die Querkopplungen im Regler gewählt werden müssen, um die in der Strecke vorhandenen Querkopplungen zu kompensieren. Die prinzipielle Wirkungsweise einer solchen Entkopplung ist durch die in der Abbildung hervorgehobenen Signalpfade verdeutlicht.

In der Regelstrecke wirkt die Stellgröße u_2 nicht nur auf y_2 , sondern auch auf y_1 . Man führt deshalb im Regler den Block L_{12} ein, so dass die unbeabsichtigte Wirkung der Stellgröße u_2 über G_{12} auf y_1 durch den Signalweg über L_{12} und G_{11} kompensiert wird. Im Idealfall hat die neue Stellgröße $\tilde{u}_2$ nur noch einen Einfluss auf y_2 und gar keinen Einfluss mehr auf y_1 , weil

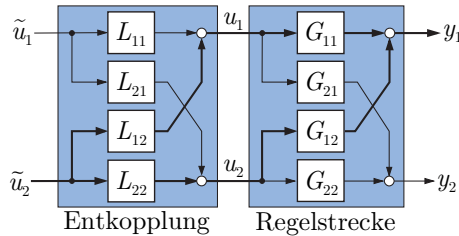


Abb. 1.9: Entkopplung von Mehrgrößensystemen

$$G_{12}L_{22} = -G_{11}L_{12}$$

gilt.

Eine derartige Entkopplung wird häufig vor dem eigentlichen Reglerentwurf durchgeführt. Das hat den Vorteil, dass anschließend zwei unabhängige Regler für die Stellgrößen-Regelgrößen-Paare $(\tilde{u}_1, y_1)$ und $(\tilde{u}_2, y_2)$ entworfen werden können, wofür die von der Eingrößenregelung bekannten Verfahren einsetzbar sind. Der Regler besteht dann aus den beiden Eingrößenrückführungen und dem Entkopplungsglied. Er stellt einen Mehrgrößenregler dar.

1.3 Probleme und Lösungsmethoden für Mehrgrößenregelungen

In den vorhergehenden Abschnitten wurde einerseits gezeigt, dass der Aufbau von Mehrgrößenregelkreisen dem der Eingrößenregelungen sehr ähnlich ist und deshalb, mathematisch gesehen, beim Übergang von Eingrößen- zu Mehrgrößensystemen lediglich skalare Funktionen durch Matrixfunktionen zu ersetzen sind. Diese Tatsache wird im Folgenden genutzt, um Mehrgrößenprobleme in weitgehender Analogie zu einschleifigen Regelkreisen zu behandeln.

Andererseits wurde gezeigt, dass aufgrund der Verkopplung mehrerer Stellgrößen und Regelgrößen neue Phänomene auftreten und neuartige Güteforderungen beachtet werden müssen. Damit verbunden sind neue Freiheitsgrade in der Wahl des Reglers. Diese Tatsachen führen auf eine Reihe neuartiger Probleme, die bei der Behandlung einschleifiger Regelkreise keine Entsprechung haben. Für diese Probleme sind grundsätzlich neuartige Methoden zu entwickeln.

Die ersten beiden Teile dieses Bandes, die sich mit Mehrgrößensystemen und Mehrgrößenregelungen befassen, enthalten deshalb sowohl Verallgemeinerungen bekannter Herangehensweisen als auch neue Methoden für bisher nicht behandelte Problemstellungen. Zu den **Verallgemeinerungen** von Methoden, die für einschleifige Regelkreise entwickelt wurden, gehören insbesondere die folgenden:

- Die Beschreibung dynamischer Systeme durch Zustandsraummodelle, Übertragungsfunktionen, Gewichtsfunktionen usw. kann ohne größere Schwierigkeiten auf Mehrgrößensysteme verallgemeinert werden (Kap. 2).

- Die Definitionen von Polen und Nullstellen müssen für Mehrgrößensysteme erweitert werden und dienen dann wie bei Eingrößensystemen zur Charakterisierung der dynamischen Systemeigenschaften (Kap. 2).
- Die Stabilitätsanalyse kann auch für Mehrgrößensysteme mit Hilfe des Hurwitzkriteriums oder mit dem verallgemeinerten Nyquistkriterium durchgeführt werden (Kap. 4).
- Die Robustheitsanalyse kann man durch Verwendung von Norm- oder Betragsabschätzungen für Matrizen von Eingrößensystemen auf Mehrgrößensysteme verallgemeinern (Kap. 4).
- Das Innere-Modell-Prinzip gilt auch für Mehrgrößenregler, wenn man es auf jede einzelne Regelgröße bezieht (Kap. 4).
- Das Prinzip der Einstellung von Reglern mit Hilfe von Experimenten kann mit einigen Änderungen für Mehrgrößenregler erweitert werden (Kap. 5).

Allerdings sind die im Band 1 behandelten Entwurfsverfahren wie das Wurzelortskurvenverfahren oder der Entwurf anhand der Frequenzkennlinie im Wesentlichen an Eingrößensysteme gebunden, weil die mit diesen Verfahren verbundenen grafischen Darstellungen nur bei einem oder wenigen Freiheitsgraden im Regler überschaubar sind.

Zu den **neuartigen Problemen und Lösungsmethoden** gehören die folgenden:

- Für eine tiefgründige Analyse der innerhalb der Regelstrecke vorhandenen Kopplungen werden die Steuerbarkeit und die Beobachtbarkeit dynamischer Systeme eingeführt (Kap. 3).
- Es gibt neue Reglerstrukturen, wobei insbesondere proportionale Mehrgrößenregler betrachtet und zielgerichtete dynamische Erweiterungen dieser Regler behandelt werden (Kap. 4, 8).
- Die größeren Freiheitsgrade im Regler erfordern neue Herangehensweisen an den Entwurf. Polverschiebungsverfahren gestatten es, sämtlichen Polen (und nicht nur dem dominierenden Polpaar) vorgegebene Werte zuzuweisen (Kap. 6). Die optimale Regelung beruht auf der Minimierung eines Gütefunktional (Kap. 7).
- Es muss untersucht werden, wie groß die Querkopplungen innerhalb der Regelstrecke sind und wie diese kompensiert werden können bzw. müssen. Dafür stehen einerseits Kopplungsmaße zur Verfügung (Kap. 4), andererseits werden Herangehensweisen beschrieben, bei denen der Entwurf des Mehrgrößenreglers auf den Entwurf mehrerer Eingrößenregler reduziert werden kann, wobei aber weiterhin die Querkopplungen in der Regelstrecke berücksichtigt werden (Kap. 9).

- Die Kopplungseigenschaften der Strecke und des Regelkreises führen auf neue Entwurfsforderungen wie z. B. die Forderung nach Integrität, für deren Behandlung neue Verfahren eingeführt werden müssen.

Literaturhinweise

Das Thema Mehrgrößenregelung wurde bereits ab 1975 in Monografien behandelt, beispielsweise in [45], [80], [83], [100], [111], [112], [117] und [118]. Methoden zur Robustheitsanalyse sind ausführlich in [4], [71] und [85] beschrieben. Inwieweit die hier behandelten Analyse und Entwurfsverfahren auf nichtlineare Systeme erweitert werden können, ist beispielsweise in [41] und [44] dargestellt.

Numerische Methoden für die hier behandelten Lösungsmethoden für Analyse- und Entwurfsprobleme werden beispielsweise in [14] behandelt.

2

Beschreibung und Verhalten von Mehrgrößensystemen

Nach einer Zusammenstellung der Beschreibungsformen für lineare Mehrgrößensysteme im Zeitbereich und im Frequenzbereich werden die Bewegungsgleichungen angegeben. Dann wird die Zerlegung der erzwungenen Bewegung in das Übergangsverhalten und das stationäre Verhalten in Analogie zu Eingrößensystemen eingeführt. Das Kapitel schließt mit einer Verallgemeinerung der Begriffe der Pole und Nullstellen für Mehrgrößensysteme.

2.1 Beschreibung von Mehrgrößensystemen im Zeitbereich

2.1.1 Differenzialgleichungen

Lineare Mehrgrößensysteme können wie Eingrößensysteme durch Differenzialgleichungen beschrieben werden, in denen die Eingangsgrößen u_i und die Ausgangsgrößen y_i einschließlich deren Ableitungen vorkommen. Dabei kann man für jede Ausgangsgröße eine getrennte Differenzialgleichung aufstellen, in die jedoch i. Allg. sämtliche Eingangsgrößen eingehen. In Verallgemeinerung der Gl. (I-4.3) gilt

$$\sum_{j=0}^n a_{ij} \frac{d^j y_i}{dt^j} = \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^q b_{kj} \frac{d^j u_k}{dt^j} \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (2.1)$$

wobei wie bisher die Anfangsbedingungen

$$\frac{d^j y_i}{dt^j}(0) = y_{0,ij} \quad (i = 1, 2, \dots, r; \quad j = 0, 1, \dots, n-1)$$

bekannt sein müssen.

Die Ordnung n bzw. q der höchsten Ableitungen auf beiden Seiten der Differenzialgleichungen kann von Eingangsgröße zu Eingangsgröße und von Ausgangsgröße zu Ausgangsgröße schwanken, denn die Koeffizienten a_{ij} und b_{ij} mit den höchsten Indizes können durchaus gleich null sein. Die höchste auf der linken Seite vorkommende Ableitung bestimmt die Systemordnung n .

Die Anfangsbedingungen der einzelnen Ausgangsgrößen können i. Allg. nicht vollkommen getrennt voneinander gewählt werden, was aus diesen Gleichungen allerdings nicht ohne weiteres ablesbar ist, jedoch aus der im Folgenden verwendeten Zustandsraumbeschreibung hervorgeht.

Mit den bisher angegebenen Gleichungen wird im Folgenden nicht gearbeitet. Sie werden hier aus zwei Gründen aufgeschrieben. Erstens beschreiben sie die Systemklasse, mit denen sich die folgenden Kapitel beschäftigen. Es wird stets vorausgesetzt, dass es lineare gewöhnliche Differenzialgleichungen mit einer endlichen Ordnung n gibt, die als Modell des betrachteten Systems verwendet werden könnten. Zweitens zeigen die Formeln, wie kompliziert das Modell aufgebaut ist, wenn man es als Differenzialgleichungssystem schreibt. Wie im Eingrößenfall wird im Folgenden das wesentlich einfachere Zustandsraummodell verwendet.

2.1.2 Zustandsraummodell

Die Erweiterung des Zustandsraummodells auf Systeme mit mehreren Eingängen und Ausgängen wurde schon im Abschn. I-4.3 angegeben:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{d}(t) \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.2)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{F}\mathbf{d}(t). \quad (2.3)$$

Da Systeme ohne Störung ($\mathbf{d} = \mathbf{0}$) durch die Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ und im Falle sprungförmiger Systeme unter Hinzunahme der Matrix $\mathbf{D}$ beschrieben werden, wird auch mit den Abkürzungen $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ bzw. $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ zur Kennzeichnung eines Systems gearbeitet. Für Systeme mit einer Stellgröße wird $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{C})$, für Eingrößensysteme $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}')$ geschrieben.

Im Folgenden wird stets vorausgesetzt, dass

$$\text{Rang } \mathbf{B} = m$$

und

$$\text{Rang } \mathbf{C} = r$$

gilt, ohne dass dies im Einzelfall noch einmal besonders angegeben wird. Diese Voraussetzungen stellen sicher, dass die einzelnen Eingangsgrößen u_i das System in unterschiedlicher Weise beeinflussen bzw. dass die Ausgangsgrößen unterschiedliche

Informationen über den Systemzustand liefern. Hätte entgegen dieser Voraussetzung beispielsweise die Matrix $\mathbf{C}$ einen kleineren Rang als r , so könnte mindestens eine Ausgangsgröße aus den anderen Ausgangsgrößen berechnet werden und wäre somit überflüssig.

Zustandsraummodell in kanonischer Normalform. Die im Abschnitt I-5.3 beschriebene Zustandstransformation kann für Mehrgrößensysteme ohne Veränderungen übernommen werden. Von besonderer Bedeutung ist auch hier die Transformation in kanonische Normalform. Verwendet man die Matrix $\mathbf{V}$ der Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ als Transformationsmatrix, so erhält man nach dem Übergang zum neuen Zustandsvektor

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{x}(t) \quad (2.4)$$

für $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ die Modellgleichungen

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt} = \text{diag } \lambda_i \tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t), \quad \tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{x}_0 \quad (2.5)$$

$$\mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (2.6)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{B} \quad (2.7)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{V}. \quad (2.8)$$

Dabei wurde wiederum vorausgesetzt, dass die Matrix $\mathbf{A}$ diagonalähnlich ist, was insbesondere dann der Fall ist, wenn alle Eigenwerte λ_i einfach auftreten. Für nicht-diagonalähnliche Matrizen gelten die im Abschn. I-5.3.3 angegebenen Transformationsbeziehungen, bei denen die Matrix $\mathbf{A}$ in Jordanform überführt wird.

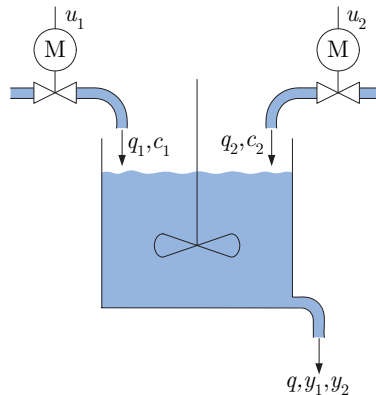


Abb. 2.1: Mischprozess

Aufgabe 2.1 Zustandsraummodell eines Mischprozesses

Der in Abb. 2.1 gezeigte Rührkessel hat zwei Zuläufe, die zwei Flüssigkeiten, in denen die Stoffe 1 und 2 mit der Konzentration $c_1(t)$ bzw. $c_2(t)$ gelöst sind, mit dem Volumenstrom $q_1(t)$ bzw. $q_2(t)$ einleiten. Die zugehörigen Ventile werden durch Stellmotoren angesteuert, wobei $u_1(t)$ und $u_2(t)$ die Ankerspannungen der Motoren bezeichnen. Stellen Sie ein Zustandsraummodell des Mischprozesses auf.

Lösungshinweise. Das dynamische Modell des Reaktors erhält man aus Massenbilanzen, wobei die zulaufenden Massen durch die Öffnung der Ventile und die auslaufende Masse durch den Füllstand bestimmt sind (vgl. Gl.(I-4.115)). Die Stoffkonzentration $c(t)$ ergibt sich aus der Masse $m(t)$ des Stoffes im Volumen $V(t)$ der betrachteten Flüssigkeit entsprechend der Beziehung $c(t) = \frac{m(t)}{V(t)}$. Der Volumenstrom $q(t)$ beschreibt das pro Zeiteinheit durch ein Ventil bzw. ein Rohrleitung fließende Flüssigkeitsvolumen: $q(t) = \frac{dV(t)}{dt}$.

Betrachtet man die Abweichungen von einem vorgegebenen Arbeitspunkt, so kann man mit einem linearisierten Modell rechnen. Schreiben Sie die Änderungen der Massen bei der Stoffe im Reaktor zunächst für eine Zeitänderung Δt auf und betrachten Sie dann den Grenzfall $\Delta t \rightarrow 0$. Die Stellmotoren der Ventile können vereinfachend durch I-Glieder beschrieben werden. $\square$

2.1.3 Übergangsfunktionsmatrix und Gewichtsfunktionsmatrix

Wie bei Eingrößensystemen spielt die Antwort des Systems auf eine sprungförmige bzw. impulsförmige Eingangsgröße eine besondere Rolle. Da nun jedoch mehrere Eingänge einzeln oder gleichzeitig verändert und mehrere Ausgänge beobachtet werden können, entstehen anstelle skalarer Funktionen jetzt (r, m) -Matrizen. Wie diese Matrizen aufgebaut sind, wird im Folgenden erläutert.

Übergangsfunktionsmatrix. Wird für ein in der Ruhelage $x_0 = 0$ befindliches System die erste Eingangsgröße $u_1(t)$ sprungförmig verändert

$$\mathbf{u}^1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \sigma(t),$$

so misst man am Systemausgang

$$\mathbf{y}^1(t) = \begin{pmatrix} y_1^1(t) \\ y_2^1(t) \\ \vdots \\ y_r^1(t) \end{pmatrix}$$

diejenigen Übergangsfunktionen, die durch die erste Eingangsgröße an allen r Ausgängen erzeugt werden. Die hochgestellte „1“ dient als Kennzeichen dafür, dass das System im ersten Experiment an der ersten Eingangsgröße erregt wurde.

Verändert man den zweiten Eingang sprungförmig

$$\mathbf{u}^2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \sigma(t),$$

so misst man mit

$$\mathbf{y}^2(t) = \begin{pmatrix} y_1^2(t) \\ y_2^2(t) \\ \vdots \\ y_r^2(t) \end{pmatrix}$$

die durch den zweiten Eingang erzeugten Übergangsfunktionen. Schreibt man die für alle m Eingänge auf diese Weise erhaltenen Messvektoren nebeneinander, so entsteht die Übergangsfunktionsmatrix (Übergangsmatrix) $\mathbf{H}(t)$:

$$\mathbf{H}(t) = \left(\begin{pmatrix} y_1^1(t) \\ y_2^1(t) \\ \vdots \\ y_r^1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^2(t) \\ y_2^2(t) \\ \vdots \\ y_r^2(t) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} y_1^m(t) \\ y_2^m(t) \\ \vdots \\ y_r^m(t) \end{pmatrix} \right).$$

Bezeichnet man die Elemente dieser Matrix wie üblich mit h_{ij} , so gibt das Element $h_{ij}(t)$ an, welche Übergangsfunktion die j -te Eingangsgröße $u_j(t)$ an der i -ten Ausgangsgröße $y_i(t)$ erzeugt. Das heißt, dass zwischen den Elementen h_{ij} von $\mathbf{H}$ und den Messgrößen die Beziehung $h_{ij} = y_i^j$ gilt.

Da das System linear ist, überlagern sich die durch mehrere Eingänge gleichzeitig erzeugten Übergangsfunktionen nach dem Superpositionsprinzip. Wird also allgemein mit einer sprungförmigen Erregung

$$\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}} \sigma(t)$$

gearbeitet, bei der das i -te Element $\bar{u}_i$ des beliebig gewählten Vektors $\bar{\mathbf{u}}$ die Amplitude („Sprunghöhe“) des i -ten Eingangs beschreibt, so erhält man die dabei entstehende Ausgangsgröße durch Multiplikation der Übergangsfunktionsmatrix $\mathbf{H}(t)$ mit dem Amplitudenvektor $\bar{\mathbf{u}}$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}(t) \bar{\mathbf{u}}. \quad (2.9)$$

Gewichtsfunktionsmatrix. Die Gewichtsfunktion entsteht bekanntlich als Systemantwort auf eine impulsförmige Erregung ausgehend vom Ruhezustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Ähnlich wie die Übergangsfunktionsmatrix $\mathbf{H}(t)$ kann nun eine Gewichtsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(t)$ gebildet werden, deren Element $g_{ij}(t)$ diejenige Gewichtsfunktion darstellt, die eine impulsförmige Erregung des j -ten Eingangs am i -ten Ausgang erzeugt. Verwendet man einen beliebigen impulsförmigen Eingangsvektor

$$\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}} \delta(t),$$

bei dem $\bar{\mathbf{u}}$ wieder ein Vektor mit den „Amplituden“ der an den einzelnen Eingängen verwendeten Impulse ist, so erhält man als Systemantwort

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{G}(t) \bar{\mathbf{u}}. \quad (2.10)$$

Die Gewichtsfunktionsmatrix hat für die Darstellung des E/A-Verhaltens von Mehrgrößensystemen dieselbe Bedeutung wie die Gewichtsfunktion von Eingrößensystemen. Wie im Abschn. 2.4.1 noch ausführlich behandelt wird, kann das Verhalten eines zur Zeit $t = 0$ in der Ruhelage befindlichen Systems durch die Faltung der Gewichtsfunktionsmatrix mit dem Vektor der Eingangsgrößen dargestellt werden. Es gilt

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{G} * \mathbf{u} = \int_0^t \mathbf{G}(t - \tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau.$$

Für die Faltungsoperation $*$ gelten die Regeln der Matrizenrechnung. Insbesondere darf die Reihenfolge der zu faltenden Elemente i. Allg. nicht verändert werden.

2.2 Beschreibung im Frequenzbereich

2.2.1 E/A-Beschreibung

Mit Hilfe der Laplacetransformation erhält man aus den Gln. (2.2) und (2.3) bei $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ und $\mathbf{d}(t) = \mathbf{0}$ die Beziehungen

$$\begin{aligned} s\mathbf{X}(s) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \\ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) &= \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \\ \mathbf{X}(s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(s) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \\ &= (\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D})\mathbf{U}(s), \end{aligned}$$

also die E/A-Beschreibung im Frequenzbereich

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s) \quad (2.11)$$

mit der

Übertragungsfunktionsmatrix: $\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}.$

(2.12)

$\mathbf{G}(s)$ wird auch als Übertragungsmatrix bezeichnet. Im Folgenden wird jedoch die direkte Übersetzung des englischen Begriffs *transfer function matrix* verwendet oder

der Einfachheit halber wieder von der Übertragungsfunktion gesprochen, wenn aus dem Formelzeichen $\mathbf{G}$ oder dem Zusammenhang hervorgeht, dass es sich um eine Matrix handelt.

In den Gleichungen stellen $\mathbf{X}(s)$, $\mathbf{U}(s)$ und $\mathbf{Y}(s)$ n -, m - bzw. r -dimensionale Vektoren dar, deren Elemente $X_i(s)$, $U_i(s)$ und $Y_i(s)$ die Laplacetransformierten der entsprechenden Zeitfunktionen $x_i(t)$, $u_i(t)$ und $y_i(t)$ sind. Die Verwendung der Großbuchstaben für Vektoren ist durch die Vereinbarung begründet, Laplacetransformierte mit großen Buchstaben darzustellen.

Für ein System mit m Eingangsgrößen und r Ausgangsgrößen ist $\mathbf{G}(s)$ eine (r, m) -Matrix. Ausführlich geschrieben heißt die Frequenzbereichsdarstellung (2.11) eines Mehrgrößensystems also

$$\begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_r(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \dots & G_{1m}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \dots & G_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{r1}(s) & G_{r2}(s) & \dots & G_{rm}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{pmatrix}.$$

Das Element $G_{ij}(s)$ der Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(s)$ beschreibt, wie der j -te Eingang $U_j(s)$ auf den i -ten Ausgang $Y_i(s)$ einwirkt.

Im Blockschaltbild wird entsprechend Gl. (2.11) die in einem Block stehende Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(s)$ mit dem Vektor $\mathbf{u}$ der Eingangsgrößen dieses Blockes multipliziert. Dabei muss man natürlich mit dem in den Frequenzbereich transformierten Vektor $\mathbf{U}(s)$ rechnen. Der einheitlichen Darstellung wegen werden aber im Folgenden alle Signale in Blockschaltbildern mit den für die Zeitbereichsdarstellung üblichen Symbolen ($\mathbf{u}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ usw.) bezeichnet, es sei denn, es soll besonders auf die Frequenzbereichsbetrachtung hingewiesen werden.

Jedes der Elemente $G_{ij}(s)$ der Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(s)$ ist eine gebrochen rationale Funktion der komplexen Frequenz s . Diese Tatsache wird aus der Darstellung (2.12) offensichtlich, wenn man bedenkt, dass die in dieser Beziehung vorkommende Inverse entsprechend

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$$

gebildet werden kann. Dabei bezeichnet $\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ die adjungierte Matrix zu $s\mathbf{I} - \mathbf{A}$, also diejenige Matrix, deren Element ij dadurch entsteht, dass man aus der transponierten Matrix $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})'$ die i -te Zeile und j -te Spalte streicht, die Determinante der verbleibenden Matrix bildet und diese mit $(-1)^{i+j}$ multipliziert. Aufgrund dieser Berechnungsvorschrift von $\mathbf{G}$ erscheint die Determinante $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ im Nenner jedes Elementes G_{ij} und der Zähler wird durch

$$\mathbf{c}'_i \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{b}_j$$

gebildet, wobei $\mathbf{c}'_i$ die i -te Zeile von $\mathbf{C}$ und $\mathbf{b}_j$ die j -te Spalte von $\mathbf{B}$ ist. Ist d_{ij} von null verschieden, so erscheint es als additive Konstante. Insgesamt entsteht also der gebrochen rationale Ausdruck

$$G_{ij}(s) = \mathbf{c}'_i (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}_j + d_{ij} = \frac{\mathbf{c}'_i \operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{b}_j}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} + d_{ij},$$

der dem eines Eingrößensystems entspricht.

Jedes Element der Übertragungsfunktionsmatrix kann in der Form

$$G_{ij}(s) = k_{ij} \frac{\prod_{l=1}^{q_{ij}} (s - s_{ol})}{\prod_{l=1}^{n_{ij}} (s - s_l)}$$

dargestellt werden, in der s_{ol} die Nullstellen und s_l die Pole von $G_{ij}(s)$ bezeichnen. Dabei ist im Vergleich zu Eingrößensystemen zu beachten, dass bei einem System n -ter Ordnung sehr häufig nicht alle Elemente G_{ij} den größtmöglichen Nennergrad n besitzen. Dies ist zwar zu vermuten, denn nach den bisherigen Betrachtungen steht $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ in jedem Nenner. Es ist jedoch in der Regel so, dass sich einige Linearfaktoren dieser Determinante gegen entsprechende Linearfaktoren im Zähler kürzen lassen. Die Systemordnung n stimmt deshalb i. Allg. mit keinem Grad n_{ij} der Nennerpolynome von G_{ij} überein. Im Abschn. 3.5 wird gezeigt, dass es deshalb recht kompliziert ist, aus einer gegebenen Übertragungsfunktionsmatrix die Systemordnung zu erkennen.

Das bisher betrachtete Modell kann man ohne weiteres auf gestörte Systeme (2.2), (2.3) erweitern, für die

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s) + \mathbf{G}_{yd}(s)\mathbf{D}(s)$$

gilt. $\mathbf{G}_{yd}(s)$ lässt sich analog zu Gl. (2.12) aus dem Zustandsraummodell (2.2), (2.3) bestimmen:

$$\mathbf{G}_{yd}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{E} + \mathbf{F}.$$

Zusammenhang zwischen Übertragungsfunktionsmatrix und Gewichtsfunktionsmatrix. Wie bei Eingrößensystemen stehen die Übertragungsfunktion und die Gewichtsfunktion eines Mehrgrößensystems über die Laplacetransformation in Beziehung zueinander. Da beide Größen jetzt (r, m) -Matrizen sind, gilt diese Tatsache für alle Elemente einzeln:

$$G_{ij}(s) = \mathcal{L}\{g_{ij}(t)\}, \quad i = 1, 2, \dots, r; \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (2.13)$$

Dies soll abgekürzt durch

$$\mathbf{G}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{G}(t)\}$$

dargestellt werden, obwohl diese Schreibweise mathematisch nicht ganz korrekt ist, da die Laplacetransformation nur für einzelne Funktionen und nicht für Matrixfunktionen definiert ist.

Zusammenhang zwischen Frequenzbereichsbeschreibung und Zustandsraummodell. Die Beziehungen zwischen dem Zustandsraummodell

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

und der Frequenzbereichsdarstellung

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s) \mathbf{U}(s)$$

ist dieselbe wie bei Eingrößensystemen. Die Frequenzbereichsdarstellung erfasst nur das E/A-Verhalten und die Übertragungsfunktionsmatrix steht mit den Matrizen des Zustandsraummodells über Gl. (2.12) in Beziehung.

Um diesen Zusammenhang künftig in einfacher Weise darstellen zu können, wird die Schreibweise

$$\mathbf{G}(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right] \quad (2.14)$$

eingeführt, die besagt, dass die Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(s)$ zu einem System gehört, das durch ein Zustandsraummodell mit den Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ beschrieben werden kann (und umgekehrt). Diese Schreibweise kann man sich einfach dadurch merken, dass man das Zustandsraummodell in der Form

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{pmatrix}$$

schreibt, auf deren rechter Seite die angegebene Matrix vorkommt.

Erweiterung auf Totzeitsysteme. Die Frequenzbereichsdarstellung von Mehrgrößensystemen lässt sich wie im Eingrößenfall sehr einfach auf Totzeitsysteme erweitern. Jede einzelne Übertragungsfunktion $G_{ij}(s)$ kann durch einen Totzeiterterm $e^{-sT_{tij}}$ ergänzt werden, so dass

$$G_{ij}(s) = \hat{G}(s) e^{-sT_{tij}} \quad (2.15)$$

entsteht. Wenn alle Elemente dieselbe Totzeit T_t besitzen, kann dieser Term ausgeklammert werden, wodurch die Übertragungsfunktionsmatrix die Form

$$\mathbf{G}(s) = \hat{\mathbf{G}}(s) e^{-sT_t} \quad (2.16)$$

erhält.

2.2.2 Beschreibung des Übertragungsverhaltens mit Hilfe der ROSENBROCK-Systemmatrix

Die Systembeschreibung mit Hilfe der Übertragungsfunktion beruht auf der Voraussetzung, dass sich das System zur Zeit $t = 0$ in der Ruhelage $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ befindet. Mit der Beziehung

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s) \mathbf{U}(s)$$

wird deshalb nur das E/A-Verhalten erfasst. Man kann die Frequenzbereichsbetrachtungen jedoch auf die Eigenbewegung des Systems erweitern, wenn man bei der

Laplace-Transformation des Zustandsraummodells den von null verschiedenen Anfangszustand beachtet. Man erhält dann aus der Zustandsgleichung die Beziehung

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

und nach Umstellung

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) - \mathbf{B}\mathbf{U}(s) = \mathbf{x}_0.$$

Zusammen mit der transformierten Ausgangsgleichung

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s)$$

entsteht ein Gleichungssystem, das in der Form

$$\begin{pmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}(s) \\ \mathbf{U}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{Y}(s) \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

zusammengefasst werden kann. Die auf der linken Seite stehende Matrix wird Rosenbrocksystemmatrix genannt

ROSEN BROCK-Systemmatrix: $\mathbf{P}(s) = \begin{pmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}.$

(2.18)

Im Gegensatz zur Übertragungsfunktion beschreibt $\mathbf{P}(s)$ auch die innere Struktur des Systems, genauso wie es ein Zustandsraummodell macht. Dies wird an der Tatsache deutlich, dass mit Hilfe der Gl. (2.17) auch die Eigenbewegung des Systems berechnet werden kann. Es gilt in Erweiterung zu Gl. (2.11), die nur bei verschwindendem Anfangszustand anwendbar ist, hier die Beziehung

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s) + \mathbf{G}_0(s)\mathbf{x}_0, \quad (2.19)$$

wobei mit der Matrix

$$\mathbf{G}_0(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

und dem Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ die Eigenbewegung des Systems berechnet werden kann.

2.3 Strukturierte Beschreibungsformen

2.3.1 Reihen-, Parallel- und Rückführschaltungen

Ähnlich wie bei Eingrößensystemen kann auch für Mehrgrößensysteme die Übertragungsfunktion zusammenschalteter Teilsysteme aus den Übertragungsfunktionen

der einzelnen Teilsysteme berechnet werden. Während es jedoch bei der Reihenschaltung von Eingrößensystemen nicht darauf ankam, in welcher Reihenfolge die Übertragungsfunktionen miteinander multipliziert wurden, muss man bei Mehrgrößensystemen auf diese Reihenfolge achten. Reihenfolgefehler erkennt man häufig schon allein daran, dass die zu multiplizierenden Matrizen nicht verkettet sind, sich also aus Dimensionsgründen nicht in der gewünschten Weise zusammenfassen lassen.

Bei der Parallelschaltung zweier Teilsysteme ist die Übertragungsfunktionsmatrix der Zusammenschaltung gleich der Summe der Übertragungsfunktionen der Elemente:

$$\text{Parallelschaltung : } \mathbf{G}(s) = \mathbf{G}_1(s) + \mathbf{G}_2(s).$$

Die beiden Summanden haben gleiche Dimensionen.

Betrachtet man eine Reihenschaltung, bei der das Teilsystem

$$\mathbf{Y}_1(s) = \mathbf{G}_1(s) \mathbf{U}(s)$$

in Reihe mit dem System

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}_2(s) \mathbf{Y}_1(s)$$

liegt, so erhält man für die Reihenschaltung die Übertragungsfunktionsmatrix

$$\text{Reihenschaltung : } \mathbf{G}(s) = \mathbf{G}_2(s) \mathbf{G}_1(s).$$

Zu beachten ist, dass die beiden Übertragungsfunktionsmatrizen auf der rechten Seite der Gleichung entgegen der Signalrichtung angeordnet sind. Das Signal $\mathbf{U}(s)$ wird zunächst entsprechend $\mathbf{G}_1(s)$ und dann entsprechend $\mathbf{G}_2(s)$ verarbeitet. In dem Produkt steht, von links gelesen, aber zuerst $\mathbf{G}_2(s)$ und dann $\mathbf{G}_1(s)$!

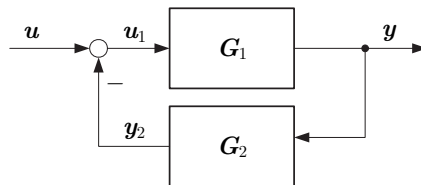


Abb. 2.2: Rückgekoppeltes Mehrgrößensystem

Wird eine Rückführschaltung mit dem Vorwärtszweig

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}_1(s) \mathbf{U}_1(s) = \mathbf{G}_1(s) (\mathbf{U}(s) - \mathbf{Y}_2(s))$$

und dem Rückwärtszweig

$$\mathbf{Y}_2(s) = \mathbf{G}_2(s) \mathbf{Y}(s)$$

betrachtet (Abb. 2.2), so erhält man für das Gesamtsystem aus den angegebenen Gleichungen zunächst

$$Y(s) = G_1(s)U(s) - G_1(s)G_2(s)Y(s)$$

und schließlich

$$Y(s) = (I + G_1(s)G_2(s))^{-1} G_1(s)U(s).$$

Die Übertragungsfunktionsmatrix der Rückführschaltung setzt sich also gemäß

Rückführschaltung: $G(s) = (I + G_1(s)G_2(s))^{-1} G_1(s)$
 $= G_1(s) (I + G_2(s)G_1(s))^{-1}$

aus den Übertragungsfunktionsmatrizen der beiden Teilsysteme zusammen, wobei die zweite Gleichheit sehr einfach durch Ausmultiplizieren überprüft werden kann. Auch bei diesen Formeln muss auf die richtige Reihenfolge der Übertragungsfunktionsmatrizen geachtet werden. G_1 und G_2 treten abwechselnd auf, wobei die Übertragungsfunktionsmatrix des Vorwärtszweiges auch außerhalb der zu invertierenden Matrix vorkommt.

Aufgabe 2.2 Übertragungsfunktionsmatrizen eines Regelkreises

Der Mehrgrößenregelkreis in Abb. 2.3 soll durch die Gleichung

$$Y(s) = G_w(s)W(s) + G_d(s)D(s)$$

beschrieben werden. Wie können die Übertragungsfunktionsmatrizen $G_w(s)$ und $G_d(s)$

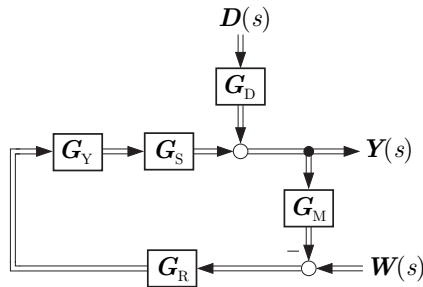


Abb. 2.3: Blockschaltbild eines Regelkreises

aus den Matrizen G_D , G_M , G_S , G_Y und G_R der Teilsysteme berechnet werden? □

2.3.2 Systeme in P- und V-kanonischer Struktur

In den E/A-Beschreibungen

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s) \mathbf{U}(s)$$

und

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{G} * \mathbf{u}$$

wird das gesamte Systemverhalten durch eine einzige Matrix $\mathbf{G}(s)$ bzw. $\mathbf{G}(t)$ beschrieben. Für die Lösung von Analyse- und Entwurfsaufgaben ist es aber mitunter wichtig zu wissen, aus welchen Teilsystemen sich das betrachtete Mehrgrößensystem zusammensetzt. Unter Verwendung dieser Strukturinformationen kann man beispielsweise interne Rückkopplungen in der Regelstrecke erkennen oder das Zusammenspiel mehrerer Regelkreise untersuchen.

Zwei wichtige Modellformen sind die P-kanonische und die V-kanonische Darstellung von Mehrgrößensystemen, die jetzt vorgestellt werden. Da es ein wichtiges Ziel der strukturierten Darstellung ist, zwischen Hauptkopplungen und Querkopplungen sowie zwischen den Eingangsgrößen u_i und den Ausgangsgrößen y_i zu unterscheiden, sind diese Strukturen vor allem für Systeme mit gleicher Anzahl von Eingangs- und Ausgangsgrößen sinnvoll, so dass sich die folgenden Betrachtungen auch auf derartige Systeme beziehen.

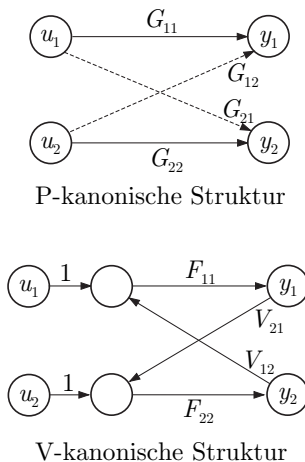


Abb. 2.4: P-kanonische und V-kanonische Darstellung von Mehrgrößensystemen

Systeme in P-kanonischer Struktur. Bei der P-kanonischen Darstellung verwendet man die angegebenen Gleichungen so, wie sie sind, und interpretiert die Hauptdiagonalelemente G_{ii} als Direktkopplungen oder Hauptkopplungen von u_i nach y_i .

Dies wird im Signalflussgraf deutlich, der für ein System mit zwei Eingängen und Ausgängen in Abb. 2.4 (oben) gezeigt ist. Die Elemente G_{ij} ($i \neq j$) beschreiben Querkopplungen.

Die P-kanonische Struktur ist die „natürliche“ Struktur, die man aus der Matrixdarstellung des Systems erhält. Deshalb wird sie im Folgenden überwiegend verwendet. Auch für die experimentelle Modellbildung ist diese Darstellung sehr gut geeignet. Die Elemente G_{ij} können getrennt voneinander identifiziert werden, wenn man beispielsweise die Übergangsfunktionen $h_{ij}(t)$ oder die Gewichtsfunktionen $g_{ij}(t)$ in Experimenten misst.

Die P-kanonische Struktur ist jedoch nicht „natürlich“ in dem Sinne, dass sie die physikalische Struktur adäquat wiedergibt. Die einzelnen Übertragungsglieder beschreiben i. Allg. keine voneinander getrennten physikalischen Vorgänge, sondern erfassen lediglich unterschiedliche Signalkopplungen innerhalb desselben Systems. Diese Tatsache erkennt man beispielsweise daran, dass bestimmte Systemparameter in mehreren Gewichtsfunktionen bzw. Übertragungsfunktionen gleichzeitig vorkommen.

Systeme in V-kanonischer Struktur. Die V-kanonische Darstellung von Mehrgrößensystemen ist die zweite Beschreibungsform, auf die hier kurz eingegangen werden soll, weil sie in vielen frühen Büchern über Mehrfachregelungen verwendet wurde. In der auf Matrixschreibweise orientierten modernen Theorie spielt diese Darstellungsform aber nur noch eine untergeordnete Rolle.

Mehrgrößensysteme können durch ein Modell der Form

$$\mathbf{Y}(s) = \text{diag } F_{ii}(s) (\mathbf{U}(s) + \mathbf{V}(s) \mathbf{Y}(s)) \quad (2.20)$$

beschrieben werden, wobei sämtliche Diagonalelemente der Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{V}(s)$ gleich null sind. Der Signalflussgraf zu dieser Modellform ist in Abb. 2.4 (unten) für ein System mit zwei Eingängen und zwei Ausgängen zu sehen. Für dieses System hat die Gl. (2.20) die Form

$$\begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11}(s) & 0 \\ 0 & F_{22}(s) \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & V_{12}(s) \\ V_{21}(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{pmatrix} \right).$$

Charakteristisch für die V-kanonische Darstellung ist, dass interne Rückwirkungen der Ausgangsgrößen als solche im Modell erfasst werden. Diese Rückwirkungen sind typisch für dynamische Systeme, denn, wie in der Matrix $\mathbf{A}$ des Zustandsraummodells zu sehen ist, sind bei den meisten praktischen Anwendungen viele wenn nicht sogar alle Zustandsvariablen untereinander verkoppelt. Treten nun einige dieser Zustandsvariablen auch als Ausgangsgröße auf, so gibt es in dem System offensichtlich eine Rückwirkung der Ausgangsgrößen auf andere Zustände. In der V-kanonischen Darstellung wird lediglich gefordert, dass diese Rückwirkung auf die Eingangsgrößen bezogen werden müssen, so dass die Eingangssignale der „Vorwärtsglieder“ $F_{ii}(s)$ aus der Summe der Systemeingänge $U_i(s)$ und der Rückwirkungen entstehen (vgl. Abb. 2.4).

Diese inneren Rückkopplungen können der Grund dafür sein, dass das betrachtete System instabil ist, obwohl jeder einzelne Übertragungsblock F_{ii} bzw. V_{ij} für sich stabil ist. Die V-kanonische Struktur kann verwendet werden, um die Ursache einer solchen Instabilität zu finden.

Beispiel 2.1 Beschreibung eines Rührkesselreaktors in V-kanonischer Struktur

Es soll das Verhalten des zylindrischen Reaktors in Abb. 2.5 bezüglich der beiden Ventilstellungen als Eingangsgrößen und des Füllstandes und der Durchflussmenge durch das Abflussventil als Ausgangsgrößen beschrieben werden. Dabei wird ein linearer Modellansatz gewählt, mit dem erfahrungsgemäß bei großen Behältern mit relativ geringen Durchflüssen durch die Ventile das Reaktorverhalten über einen großen Arbeitsbereich gut beschrieben werden kann.

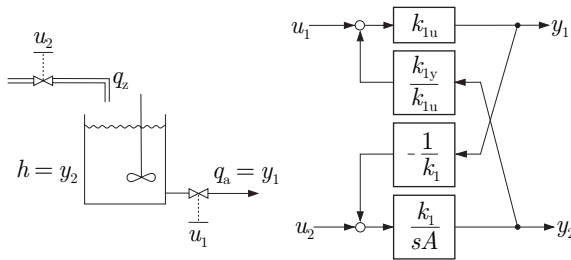


Abb. 2.5: Rührkesselreaktor

Der Ausfluss y_1 ist von der Ventilstellung und dem Füllstand abhängig, was bei der linearen Betrachtungsweise auf die Gleichung

$$y_1(t) = k_{1u}u_1(t) + k_{1y}y_2(t)$$

führt. k_{1u} und k_{1y} sind Parameter, die von der Geometrie des Reaktors abhängen. Der Zufluss ist linear von der Ventilstellung u_2 abhängig, so dass

$$q_z(t) = k_1 u_2(t)$$

gilt. Damit lässt sich der Füllstand y_2 durch

$$y_2(t) = \frac{1}{A} \int_0^t (k_1 u_2(\tau) - y_1(\tau)) d\tau$$

beschreiben, wobei A der Querschnitt des Reaktors ist. Transformiert man diese Gleichungen in den Frequenzbereich, so entsteht ein Modell in V-kanonischer Struktur:

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= k_{1u} \left(U_1(s) + \frac{k_{1y}}{k_{1u}} Y_2(s) \right) \\ Y_2(s) &= \frac{k_1}{sA} \left(U_2(s) - \frac{1}{k_1} Y_1(s) \right). \end{aligned}$$

Der Signalflussgraf ist in Abb. 2.5 (rechts) aufgezeichnet. □

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i(t) + \mathbf{E}_i \mathbf{s}_i(t), \quad \mathbf{x}_i(0) = \mathbf{x}_{i0} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{y}_i(t) = \mathbf{C}_i \mathbf{x}_i(t) \quad (2.22)$$

$$\mathbf{z}_i(t) = \mathbf{C}_{zi} \mathbf{x}_i(t) \quad (2.23)$$

beschrieben, wobei zur Vereinfachung des folgenden Rechenweges angenommen wird, dass die beiden Ausgabegleichungen keinen direkten Durchgriff von $\mathbf{u}_i$ und $\mathbf{s}_i$ auf $\mathbf{y}_i$ und $\mathbf{z}_i$ enthalten. Die Teilsysteme sind entsprechend der Gleichung

$$\mathbf{s}_i(t) = \sum_{j=1}^N \mathbf{L}_{ij} \mathbf{z}_j(t) \quad (2.24)$$

verkoppelt, wobei die Matrix $\mathbf{L}_{ij}$ angibt, wie das Teilsystem j direkt auf das Teilsystem i einwirkt. Zu dieser Darstellung der Teilsystemverkoppelungen als eine algebraische Gleichung kommt man, wenn man alle dynamischen Elemente des Gesamtsystems in die Teilsysteme steckt. Fasst man die Vektoren $\mathbf{s}_i$ und $\mathbf{z}_i$ der Koppelsignale aller Teilsysteme zu den Vektoren

$$\mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1(t) \\ \mathbf{s}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{s}_N(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1(t) \\ \mathbf{z}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{z}_N(t) \end{pmatrix}$$

zusammen, so wird Gl. (2.24) kompakt als

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{L} \mathbf{z}(t) \quad (2.25)$$

geschrieben, wobei sich die Matrix $\mathbf{L}$ aus den in Gl. (2.24) vorkommenden Teilmatrizen $\mathbf{L}_{ij}$ zusammensetzt.

Betrachtet man das System als Ganzes, so hat es offensichtlich den Eingangs- bzw. Ausgangsvektor

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1(t) \\ \mathbf{u}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_N(t) \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1(t) \\ \mathbf{y}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_N(t) \end{pmatrix}$$

und ist deshalb durch ein Zustandsraummodell der Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.26)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) \quad (2.27)$$

darstellbar. Im Folgenden soll untersucht werden, wie der Zustandsvektor $\mathbf{x}$ dieses Modells aus den Zustandsvektoren der Teilsysteme und wie die Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ aus den Matrizen $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{B}_i$, $\mathbf{C}_i$, $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{C}_{zi}$ sowie den Koppelmatrizen $\mathbf{L}_{ij}$ ($i, j = 1, \dots, N$) berechnet werden können.

Wenn sich die Zustandsvariablen der Teilsysteme untereinander unterscheiden, entsteht der Zustandsvektor $\mathbf{x}$ des Gesamtsystems durch Untereinandersetzen der Zustandsvektoren der Teilsysteme:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N(t) \end{pmatrix}.$$

Man sagt dann, dass die Teilsysteme disjunkte Zustandsräume haben. Dies ist in den meisten praktischen Anwendungen der Fall. Die Zustandsgleichung des Gesamtsystems erhält man dann durch Untereinanderschreiben der Zustandsgleichungen (2.21) der Teilsysteme:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{x}}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & & & \\ & \mathbf{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{B}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_N \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 & & & \\ & \mathbf{E}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{E}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{s}_N \end{pmatrix}.$$

Nach dem Einsetzen der Koppelbeziehung (2.24) und der Ausgabegleichung (2.23) für den Koppelausgang erhält man für den dritten Summanden auf der rechten Seite die Beziehung

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 & & & \\ & \mathbf{E}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{E}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{s}_N \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 & & & \\ & \mathbf{E}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{E}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{L}_{12} & \cdots & \mathbf{L}_{1N} \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} & \cdots & \mathbf{L}_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{L}_{N1} & \mathbf{L}_{N2} & \cdots & \mathbf{L}_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{z1} & & & \\ & \mathbf{C}_{z2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{C}_{zN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \mathbf{L}_{11} \mathbf{C}_{z1} & \mathbf{E}_1 \mathbf{L}_{12} \mathbf{C}_{z2} & \cdots & \mathbf{E}_1 \mathbf{L}_{1N} \mathbf{C}_{zN} \\ \mathbf{E}_2 \mathbf{L}_{21} \mathbf{C}_{z1} & \mathbf{E}_2 \mathbf{L}_{22} \mathbf{C}_{z2} & \cdots & \mathbf{E}_2 \mathbf{L}_{2N} \mathbf{C}_{zN} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{E}_N \mathbf{L}_{N1} \mathbf{C}_{z1} & \mathbf{E}_N \mathbf{L}_{N2} \mathbf{C}_{z2} & \cdots & \mathbf{E}_N \mathbf{L}_{NN} \mathbf{C}_{zN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix}$$

und damit die Zustandsgleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 + \mathbf{E}_1 \mathbf{L}_{11} \mathbf{C}_{z1} & \mathbf{E}_1 \mathbf{L}_{12} \mathbf{C}_{z2} & \cdots & \mathbf{E}_1 \mathbf{L}_{1N} \mathbf{C}_{zN} \\ \mathbf{E}_2 \mathbf{L}_{21} \mathbf{C}_{z1} & \mathbf{A}_2 + \mathbf{E}_2 \mathbf{L}_{22} \mathbf{C}_{z2} & \cdots & \mathbf{E}_2 \mathbf{L}_{2N} \mathbf{C}_{zN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{E}_N \mathbf{L}_{N1} \mathbf{C}_{z1} & \mathbf{E}_N \mathbf{L}_{N2} \mathbf{C}_{z2} & \cdots & \mathbf{A}_N + \mathbf{E}_N \mathbf{L}_{NN} \mathbf{C}_{zN} \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & & & \\ & \mathbf{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{B}_N \end{pmatrix} \mathbf{u}(t).$$

Für die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ des Gesamtsystems (2.26) bekommt man deshalb die Beziehungen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 + \mathbf{E}_1 \mathbf{L}_{11} \mathbf{C}_{z1} & \mathbf{E}_1 \mathbf{L}_{12} \mathbf{C}_{z2} & \cdots & \mathbf{E}_1 \mathbf{L}_{1N} \mathbf{C}_{zN} \\ \mathbf{E}_2 \mathbf{L}_{21} \mathbf{C}_{z1} & \mathbf{A}_2 + \mathbf{E}_2 \mathbf{L}_{22} \mathbf{C}_{z2} & \cdots & \mathbf{E}_2 \mathbf{L}_{2N} \mathbf{C}_{zN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{E}_N \mathbf{L}_{N1} \mathbf{C}_{z1} & \mathbf{E}_N \mathbf{L}_{N2} \mathbf{C}_{z2} & \cdots & \mathbf{A}_N + \mathbf{E}_N \mathbf{L}_{NN} \mathbf{C}_{zN} \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & & & \\ & \mathbf{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{B}_N \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Die Ausgangsgleichung (2.27) entsteht durch Untereinanderschreiben der Ausgangsgleichungen (2.22) der Teilsysteme

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_1(t) \\ \mathbf{y}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_N(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 & & & \\ & \mathbf{C}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{C}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N(t) \end{pmatrix},$$

so dass man für die Matrix $\mathbf{C}$ die Beziehung

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 & & & \\ & \mathbf{C}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{C}_N \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

erhält.

Gleichung (2.28) zeigt, wie sich die Systemmatrix $\mathbf{A}$ des Gesamtsystems aus den Matrizen der Teilsysteme zusammensetzt. In der Hauptdiagonale stehen die Systemmatrizen $\mathbf{A}_i$ der Teilsysteme, die nur dann durch einen zusätzlichen Summanden verändert werden, wenn der Koppelausgangsvektor $\mathbf{z}_i$ des i -ten Teilsystems direkt über die Koppelmatrix $\mathbf{L}_{ii} \neq \mathbf{O}$ auf den Koppelleingang $\mathbf{s}_i$ zurückwirkt. Gibt es diese direkten Rückwirkungen nicht (oder interpretiert sie als Bestandteil des Teilsystemmodells), dann bilden die Teilsystemmatrizen $\mathbf{A}_i$ die Hauptdiagonale von $\mathbf{A}$.

Alle anderen Elemente entstehen durch die Verkopplungen, wobei das Element

$$\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{E}_i \mathbf{L}_{ij} \mathbf{C}_{zj},$$

das die Einwirkung des Teilsystems j auf das Teilsystem i beschreibt, von null verschieden ist, wenn die Koppelmatrix $\mathbf{L}_{ij}$ nicht verschwindet.

Die Matrizen $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ sind Blockdiagonalmatrizen, deren Diagonalblöcke die entsprechenden Matrizen der Teilsysteme sind. Wenn man „Durchgriffe“ von $\mathbf{u}_i$ und $\mathbf{s}_i$ auf $\mathbf{y}_i$ bzw. $\mathbf{z}_i$ in den Ausgabegleichungen (2.22) und (2.23) zulässt, sind auch andere Elemente von $\mathbf{C}$ besetzt und die Ausgangsgröße $\mathbf{y}$ hängt gegebenenfalls auch direkt von der Eingangsgröße $\mathbf{u}$ ab.

Zerlegung großer Systeme. Bei der Modellbildung kann man auch den umgekehrten Weg gehen und ein gegebenes System in Teilsysteme zerlegen. Dabei ist es für die Zerlegungsmethode gleichgültig, ob dabei die physikalischen Teilsysteme des betrachteten Systems entstehen oder „künstliche“ Teilsysteme, die beispielsweise nur deshalb eine sehr zweckmäßige Zerlegung bedeuten, weil sie schwach gekoppelt sind.

Bei der Zerlegung macht man sich die Erkenntnisse der zuvor beschriebenen Komposition zunutze. Wenn man den Zustands-, Eingangs- und Ausgangsvektor in Teilvektoren zerlegt und diese als Zustände, Eingänge bzw. Ausgänge von Teilsystemen interpretiert, weiß man, dass die entsprechenden Zerlegungen der Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ auf die zugehörigen Teilsystemmatrizen und die Koppelmatrizen führen. Zur Vereinfachung der folgenden Gleichungen sei hier die Zerlegung eines Systems (2.26), (2.27) in lediglich zwei Teilsysteme betrachtet. Nach den angegebenen Zerlegungen der Signalvektoren erhält man die Beziehung

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1(t) \\ \mathbf{u}_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_1(t) \\ \mathbf{y}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{pmatrix}.$$

Wenn $\mathbf{B}_{12}$, $\mathbf{B}_{21}$, $\mathbf{C}_{12}$ und $\mathbf{C}_{21}$ Nullmatrizen sind, entstehen zwei Teilsysteme ohne Durchgriff in den Ausgabegleichungen. Andernfalls müssen entsprechende direkte Abhängigkeiten der Ausgangsgrößen der Teilsysteme von ihren Eingangsgrößen vorgesehen werden.

Die Matrizen A_{11} und A_{22} werden als Systemmatrizen der beiden Teilsysteme interpretiert, die Matrizen A_{12} und A_{21} als Koppelmatrizen.

Eine andere Zerlegung des Gesamtsystems bekommt man, wenn man nur die Zusammenhänge zwischen dem i -ten Eingang $u_i(t)$ und dem i -ten Ausgang $y_i(t)$ untersucht. Dafür erhält man aus dem Modell des Gesamtsystems die Beziehung

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_{si}u_i(t) \quad (2.31)$$

$$y_i(t) = C_{si}x(t), \quad (2.32)$$

wobei B_{si} die i -te Spalte der Matrix B (bei skalaren Eingangsgrößen u_i) bzw. die i -te Teilmatrix von B ist und C_{si} die i -te Teilmatrix (Zeile) von C . Dieses Modell wird beim Entwurf dezentraler Regler eingesetzt, bei dem die Teilregler getrennt voneinander entworfen werden (vgl. Gl. (4.39)).

Aufgabe 2.3 Modell eines Systems mit zwei Teilsystemen

Wenn ein gekoppeltes System nur aus zwei Teilsystemen besteht, so stellt man seine Struktur nicht wie in Abb. 2.6 dar, sondern vereinfacht wie in Abb. 2.7. Wie sieht die Koppelbeziehung (2.24) aus und auf welches Modell des Gesamtsystems führt diese Darstellung? $\square$

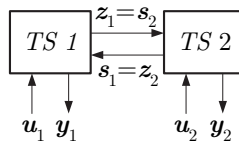


Abb. 2.7: Zwei verkoppelte Teilsysteme

Aufgabe 2.4 Spannungs-Blindleistungsverhalten eines Elektroenergienetzes

Die Knotenspannungsregelung in Elektroenergienetzen soll die Spannungen an den Einspeiseknoten der Kraftwerke auf vorgegebenen Sollwerten halten (Abb. 2.8). Die Sollwerte werden aus einer Lastflussberechnung so ermittelt, dass sich ein gewünschter Lastfluss innerhalb des Netzes einstellt. Die Regelgrößen y_i sind die Knotenspannungen, die Stellgrößen u_i die Sollwerte für die Klemmenspannungsregler der Kraftwerke.

Der Klemmenspannungsregler verändert die Erregung der Maschine und damit die Klemmenspannung und den Blindstrom in das Netz. Als Folge davon ändert sich die Spannung am Einspeiseknoten, der hinter dem Transformator liegt, mit dem die Klemmenspannung auf die Knotenspannung transformiert wird. Auf Grund des engen Zusammenhangs von Blindleistungsfluss und Spannung spricht man auch von der Spannungs-Blindleistungsregelung (UQ-Regelung).

$$\mathbf{c}'_{z1} = \mathbf{c}_{z2} = (2,55 \ 0 \ 0).$$

Die Kopplungen der Synchronmaschinen über das Netz und die Verbraucher wird durch die Gleichung

$$\begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix} = \mathbf{L} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

mit

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,193 \\ 0,193 & 0,72 \end{pmatrix}$$

beschrieben.

Stellen Sie das Modell der Regelstrecke auf. $\square$

2.4 Verhalten von Mehrgrößensystemen

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, welches Verhalten Mehrgrößensysteme mit dem Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ aufweisen, wenn sie durch eine gegebene Steuerung $\mathbf{u}(t)$ erregt werden. Die dabei erhaltenen Lösungen sind denen von Eingrößensystemen sehr ähnlich. In vielen Gleichungen müssen die Vektoren $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}'$ lediglich durch die Matrizen $\mathbf{B}$ bzw. $\mathbf{C}$ und der Skalar d durch die Matrix $\mathbf{D}$ ersetzt werden. Deshalb können diese Ergebnisse im Folgenden sehr kurz dargestellt werden.

2.4.1 Zeitverhalten

Die Lösung der Zustandsdifferenzialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

erfolgt genauso, wie es im Abschn. I-5.2 für Eingrößensysteme beschrieben wurde. An die Stelle des Produktes $\mathbf{b}u(t)$ tritt hier das Produkt $\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$. Für die Bewegungsgleichung erhält man die Beziehung

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau, \\ &= \Phi(t) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau) \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2.33)$$

wobei $\Phi(t)$ dieselbe Übergangsmatrix wie bei Eingrößensystemen bezeichnet:

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}. \quad (2.34)$$

Setzt man die Bewegungsgleichung in die Ausgangsgleichung

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

ein, so erhält man die

Bewegungsgleichung für den Ausgang:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{C} e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{D} \mathbf{u}(t).$$

(2.35)

Für das E/A-Verhalten entsteht daraus wegen $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ die Beziehung

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t \mathbf{C} e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{D} \mathbf{u}(t). \quad (2.36)$$

Übergangsfunktionsmatrix. Wird das System aus der Ruhelage $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ durch eine sprungförmige Eingangsgröße $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}\sigma(t)$ erregt, so erhält man aus Gl. (2.36) die Beziehung

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t \mathbf{C} e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \bar{\mathbf{u}} d\tau + \mathbf{D} \bar{\mathbf{u}},$$

die unter der Bedingung $\det \mathbf{A} \neq 0$ in

$$\mathbf{y}(t) = \left(\mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} - \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \right) \bar{\mathbf{u}}$$

überführt werden kann. Aus einem Vergleich mit Gl. (2.9) wird offensichtlich, dass der Ausdruck zwischen den Klammern die Übergangsfunktionsmatrix $\mathbf{H}(t)$ darstellt. Damit erhält man für $\mathbf{H}(t)$ die allgemeine Darstellung

Übergangsfunktionsmatrix:
$$\mathbf{H}(t) = \int_0^t \mathbf{C} e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} d\tau + \mathbf{D}$$

(2.37)

sowie die Beziehung

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} - \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad \text{für } \det \mathbf{A} \neq 0. \quad (2.38)$$

Das Element $h_{ij}(t)$ der Übergangsfunktionsmatrix $\mathbf{H}(t)$ beschreibt die Übergangsfunktion, die man bei einer sprungförmigen Veränderung der Eingangsgröße $u_j(t)$ am Ausgang $y_i(t)$ erhält.

Für $t = 0$ gilt die Gleichung

$$\mathbf{H}(0) = \mathbf{D},$$

die noch einmal deutlich macht, dass die von null verschiedenen Elemente der Matrix D angeben, bezüglich welcher Eingänge und Ausgänge das System sprungfähig ist.

Für asymptotisch stabile Systeme wird durch die Endwerte der Übergangsfunktionen das statische Übertragungsverhalten beschrieben. Dabei entsteht wiederum eine (r, m) -Matrix:

$$\text{Statikmatrix:} \quad K_s = \lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = D - CA^{-1}B. \quad (2.39)$$

Das Element k_{sij} von K_s beschreibt das statische Übertragungsverhalten von der j -ten Eingangsgröße auf die i -te Ausgangsgröße.

Gewichtsfunktionsmatrix. Wendet man Gl. (2.36) für eine impulsförmige Eingangsgröße $u(t) = \bar{u}\delta(t)$ an, so erhält man die Beziehung

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B \bar{u} \delta(\tau) d\tau + D \bar{u} \delta(t) \\ &= (C e^{At} B + D \delta(t)) \bar{u}. \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit Gl. (2.10) lässt erkennen, dass es sich bei dem zwischen den Klammern stehenden Ausdruck um die Gewichtsfunktionsmatrix handelt

$$\text{Gewichtsfunktionsmatrix:} \quad G(t) = C e^{At} B + D \delta(t). \quad (2.40)$$

Der Impulsanteil $D\delta(t)$ betrifft alle diejenigen Elemente $g_{ij}(t)$, für die das entsprechende Element d_{ij} der Matrix D von null verschieden ist. In einem sprungfähigen System, für das $D \neq O$ gilt, sind i. Allg. nur wenige Übertragungswege $u_j \mapsto y_i$ tatsächlich sprungfähig.

Die Gewichtsfunktion in kanonischer Darstellung erhält man durch Anwendung der Zustandstransformation (2.4) folgendermaßen:

$$\begin{aligned} G(t) &= C e^{At} B + D \delta(t) \\ &= C V V^{-1} e^{At} V V^{-1} B + D \delta(t) \\ &= \tilde{C} \text{diag } e^{\lambda_i t} \tilde{B} + D \delta(t). \end{aligned}$$

Vorausgesetzt wurde dabei, dass die Matrix A diagonalähnlich ist.

Bezeichnet man die Elemente der Matrizen $\tilde{C}$ aus Gl. (2.8) bzw. $\tilde{B}$ aus Gl. (2.7) mit $\tilde{c}_{ij}$ bzw. $\tilde{b}_{ij}$, so kann man das Element $g_{ij}(t)$ der Gewichtsfunktionsmatrix $G(t)$ in der Form

$$g_{ij}(t) = \sum_{l=1}^n \tilde{c}_{il} \tilde{b}_{lj} e^{\lambda_l t} + d_{ij} \delta(t) \quad (2.41)$$

schreiben. Das Element $g_{ij}(t)$ wird also nur von der i -ten Zeile von $\tilde{\mathbf{C}}$ und der j -ten Spalte von $\tilde{\mathbf{B}}$ bestimmt.

Der Term $e^{\lambda_i t}$ geht in g_{ij} nach Gl. (2.41) nicht ein, wenn

$$\tilde{c}_{il}\tilde{b}_{lj} = 0$$

gilt.

Wendet man die Gl. (2.41) für alle i und j an und ordnet die entstehenden Elemente wieder in der Matrix $\mathbf{G}(t)$ an, so erkennt man, dass $\mathbf{G}(t)$ in der Form

$$\mathbf{G}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{G}_i e^{\lambda_i t} + \mathbf{D}\delta(t) \quad (2.42)$$

dargestellt werden kann, wobei wieder der übliche Index i für die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ verwendet wurde. Die Matrizen $\mathbf{G}_i$ heißen

$$\mathbf{G}_i = \begin{pmatrix} \tilde{c}_{1i}\tilde{b}_{i1} & \tilde{c}_{1i}\tilde{b}_{i2} & \cdots & \tilde{c}_{1i}\tilde{b}_{im} \\ \tilde{c}_{2i}\tilde{b}_{i1} & \tilde{c}_{2i}\tilde{b}_{i2} & \cdots & \tilde{c}_{2i}\tilde{b}_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{c}_{ri}\tilde{b}_{i1} & \tilde{c}_{ri}\tilde{b}_{i2} & \cdots & \tilde{c}_{ri}\tilde{b}_{im} \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{c}}_i \tilde{\mathbf{b}}_i' \quad (2.43)$$

Dabei bezeichnen die Vektoren $\tilde{\mathbf{c}}_i$ und $\tilde{\mathbf{b}}_i'$ die i -te Spalte von $\tilde{\mathbf{C}}$ bzw. die i -te Zeile von $\tilde{\mathbf{B}}$. Der Term $e^{\lambda_i t}$ kommt in gar keinem Element von $\mathbf{G}(t)$ vor, wenn $\mathbf{G}_i = \mathbf{O}$ ist, also die Bedingung

$$\tilde{\mathbf{c}}_i \tilde{\mathbf{b}}_i' = \mathbf{O} \quad (2.44)$$

erfüllt ist. Diese Bedingung besagt, dass entweder in der i -ten Spalte von $\tilde{\mathbf{C}}$ oder in der i -ten Zeile von $\tilde{\mathbf{B}}$ nur Nullen stehen oder beides der Fall ist. Es wird im Kap. 3 gezeigt, dass dann der Eigenwert λ_i nicht beobachtbar bzw. nicht steuerbar ist.

Die bisherigen Betrachtungen gelten unter der Voraussetzung, dass die Matrix $\mathbf{A}$ diagonalähnlich ist. Sie können aber ohne weiteres auf nicht diagonalähnliche Matrizen erweitert werden. Als Verallgemeinerung von Gl. (I-5.101) erhält man eine Gewichtsfunktionsmatrix der Form

$$\mathbf{G}(t) = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \sum_{k=0}^{l_i - r_i} \mathbf{G}_{ik} t^k e^{\lambda_i t} + \mathbf{D}\delta(t), \quad (2.45)$$

in der l_i die Vielfachheit des Eigenwertes λ_i und r_i die Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren zu λ_i bezeichnen. $\bar{n}$ gibt die Anzahl der paarweise verschiedenen Eigenwerte an.

Beispiel 2.2 Verhalten eines Dampferzeugers

Ein Dampferzeuger mit dem Eingangsvektor

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} \text{Frischwassereinspeisung } \dot{Q}_w(t) \\ \text{Brennstoffzufuhr } \dot{Q}_{Br}(t) \end{pmatrix}$$

und den Regelgrößen

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \text{Dampfdruck } p(t) \\ \text{Dampftemperatur } \theta(t) \end{pmatrix}$$

ist durch folgendes Zustandsraummodell beschrieben:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -0,1 & & & & & \\ & -0,05 & & & & \\ & & -0,025 & & & \\ & & & -0,037 & & \\ & & & & -0,0385 & \\ & & & & & -0,0385 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u} \quad (2.46)$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -0,1286 & -0,0055 & 0 & 0,1286 & 0,0055 & 0 \\ 0,0163 & -0,0045 & 0,0045 & 0 & 0 & -0,0163 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (2.47)$$

Die Eingangsgröße $u_1(t) = \dot{Q}_w(t)$ wird in $\frac{\text{t}}{\text{h}}$ und die Eingangsgröße $u_2(t) = \dot{Q}_{Br}(t)$ in $\frac{1}{\text{min}}$ gemessen, weil die Brennstoffzufuhr von der Drehzahl der Kohlemühle abhängt, die als Stellsignal verwendet wird. Die Regelgrößen $y_1(t) = p(t)$ und $y_2(t) = \theta(t)$ haben die Maßeinheiten MPa bzw. K. Das Modell gilt in der Umgebung des Arbeitspunktes, bei dem der Dampferzeuger 100 $\frac{\text{t}}{\text{h}}$ Heißdampf mit einem Druck von 0,1 MPa erzeugt.

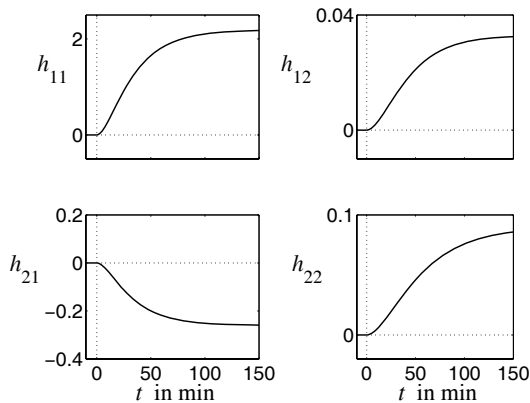


Abb. 2.9: Übergangsfunktionsmatrix des Dampferzeugers

Die entsprechend Gl. (2.37) berechnete Übergangsfunktionsmatrix $\mathbf{H}(t)$ ist in Abb. 2.9 dargestellt. Die Bilder der Übergangsfunktionen $h_{ij}(t)$ sind so angeordnet, wie sie in der Übergangsfunktionsmatrix $\mathbf{H}(t)$ stehen. Die linke Spalte zeigt den Verlauf des Dampfdruckes (oben) und der Dampftemperatur (unten) bei einer sprungförmigen Erhöhung der

Frischwassereinspeisung. In der rechten Spalten sind die beiden Ausgangsgrößen bei einer sprungförmigen Erhöhung der Brennstoffzufuhr zu sehen.

Die Abbildung verdeutlicht, wie schnell und in welche „Richtung“ sich der Dampferzeuger bei sprungförmiger Veränderung der Frischwassereinspeisung bzw. der Brennstoffzufuhr bewegt. Der negative Ausschlag des Elementes $h_{21}(t)$ besagt, dass bei einer Erhöhung der Frischwassereinspeisung u_1 die Dampftemperatur y_2 abnimmt, was physikalisch dadurch zu erklären ist, dass für $t > 0$ mit derselben Brennstoffmenge eine größere Wasser- und Dampfmenge zu erhitzen ist. Die Endwerte der Übergangsfunktionen sind die Elemente der Statikmatrix (2.39)

$$\mathbf{K}_s = \begin{pmatrix} 2,19 & 0,033 \\ -0,26 & 0,09 \end{pmatrix}.$$

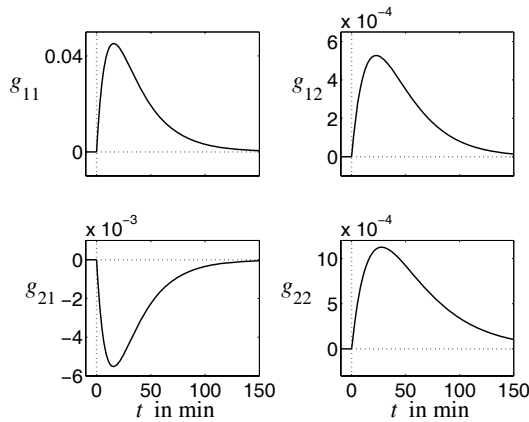


Abb. 2.10: Gewichtsfunktionsmatrix des Dampferzeugers

Die Gewichtsfunktionsmatrix ist in Abb. 2.10 zu sehen. Da kein Element von $\mathbf{G}(t)$ überschwingt, hat der Dampferzeuger verzögerndes Verhalten ohne Neigung zum Schwingen. Diese Eigenschaft ist auch aus den Übergangsfunktionen zu erkennen.

Das Modell (2.46), (2.47) hat bereits die kanonische Normalform. Da die Matrizen $\mathbf{G}_i$ nach Gl. (2.43) Nullelemente enthalten, kommen nicht alle Eigenvorgänge $e^{\lambda_i t}$ in allen Elementen der Gewichtsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(t)$ vor. Beispielsweise ist

$$\mathbf{G}_3 = \tilde{\mathbf{c}}_3 \tilde{\mathbf{b}}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,0045 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,0045 \end{pmatrix},$$

woraus zu erkennen ist, dass der Term $e^{0,025t}$ nur in das Element $g_{22}(t)$ der Gewichtsfunktionsmatrix eingeht. Dieser Term beeinflusst deshalb nur das Übertragungsverhalten

Brennstoffzufuhr $\longrightarrow$ Dampftemperatur

des Dampferzeugers. Folglich geht dieser Term auch nur in das Element $h_{22}(t)$ der Übergangsfunktionsmatrix ein.

Berechnet man alle Matrizen $\mathbf{G}_i$ ($i = 1, 2, \dots, 6$), so erhält man die Gewichtsfunktionsmatrix des Dampferzeugers in kanonischer Darstellung (2.42)

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}(t) = & \begin{pmatrix} -0,1286 & 0 \\ 0,0163 & 0 \end{pmatrix} e^{-0,1t} + \begin{pmatrix} 0 & -0,0055 \\ 0 & -0,0045 \end{pmatrix} e^{-0,05t} + \\
& + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,0045 \end{pmatrix} e^{-0,025t} + \begin{pmatrix} 0,1286 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-0,037t} + \\
& \begin{pmatrix} 0 & 0,0055 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-0,0385t} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0,0163 & 0 \end{pmatrix} e^{-0,0385t}. \quad (2.48)
\end{aligned}$$

Darstellung des E/A-Verhaltens durch Faltung. Sieht man sich den zweiten Summanden in Gl. (2.35) an, so erkennt man, dass unter dem Integral gerade die Gewichtsfunktionsmatrix mit dem Argument $t - \tau$ steht. Das von den Eingrößensystemen bekannte Faltungsintegral wird hier auf das Produkt einer Matrix und eines Vektors angewendet. Für $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ heißt die Faltungsdarstellung des E/A-Verhaltens von Mehrgrößensystemen:

E/A-Verhalten: $\mathbf{y}(t) = \mathbf{G} * \mathbf{u} = \int_0^t \mathbf{G}(t - \tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau.$

(2.49)

Verhalten bei impulsförmigen Störungen. Bei impulsförmigen Störungen $\mathbf{d}(t) = \bar{\mathbf{d}}\delta(t)$ ist am Ausgang des nicht sprunghafigen Systems

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{E}\mathbf{d}(t), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{0} \\
\mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)
\end{aligned}$$

die Gewichtsfunktion bezüglich des Störeinganges („Störgewichtsfunktion“) zu beobachten:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{E} \bar{\mathbf{d}}.$$

Dieses Verhalten kann auch dadurch nachgebildet werden, dass man annimmt, das System sei ungestört, aber zum Zeitpunkt $t = 0$ im Anfangszustand

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{E} \bar{\mathbf{d}}. \quad (2.50)$$

In diesem Fall ist die Ausgangsgröße durch die Eigenbewegung des Systems bestimmt, die denselben Verlauf wie die angegebene Störgewichtsfunktion hat.

Diese Tatsache hat eine wichtige Konsequenz. Man kann die Reaktion des Systems auf eine impulsförmige Störung dadurch analysieren, dass man die Eigenbewegung des Systems untersucht. Dabei ist zu beachten, dass nur diejenigen Anfangszustände die Wirkung einer impulsförmigen Störung repräsentieren, die in der Form (2.50) mit beliebigem $\bar{\mathbf{d}}$ dargestellt werden können, also eine Linearkombination der Spalten der Matrix $\mathbf{E}$ sind.

2.4.2 Verhalten im Frequenzbereich

Das E/A-Verhalten ist im Frequenzbereich durch die Gleichung

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s) \mathbf{U}(s)$$

beschrieben, wobei in Bezug zur Gl. (2.49) die Beziehungen

$$\mathbf{Y}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{y}(t)\} \quad \text{und} \quad \mathbf{U}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{u}(t)\}$$

gelten. Aus der kanonischen Darstellung (2.42) der Gewichtsfunktionsmatrix erhält man durch Laplacetransformation gemäß Gl. (2.13) die kanonische Darstellung der Übertragungsfunktionsmatrix

$$\mathbf{G}(s) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{s - \lambda_i} \mathbf{G}_i + \mathbf{D}, \quad (2.51)$$

die für diagonalähnliche Systemmatrizen $\mathbf{A}$ gilt.

Ob ein System sprunghfähig ist oder nicht, hängt von der Übertragungsfunktion bei sehr hohen Frequenzen s ab. Für alle technisch realisierbaren Systeme, bei denen der Zählergrad jedes Elementes $G_{ij}(s)$ der Übertragungsfunktionsmatrix den Nennergrad nicht übersteigt, ist $\mathbf{G}(\infty)$ endlich und wie für Eingrößensysteme von der Matrix $\mathbf{D}$ des Zustandsraummodells abhängig:

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \mathbf{G}(s) = \mathbf{D}.$$

Wenn $\mathbf{D} = \mathbf{O}$ gilt, also das System nicht sprunghfähig ist, so haben alle Elemente $G_{ij}(s)$ einen kleineren Zählergrad als Nennergrad. Man sagt dann, dass die Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(s)$ *streng proper* ist. Diese Bezeichnung wird in Ermangelung einer besseren deutschen Übersetzung des englischen Begriffes *strictly proper* verwendet.

Ist $\mathbf{D} \neq \mathbf{O}$, so hat mindestens ein Element $G_{ij}(s)$ denselben Zähler- und Nennergrad. Das System ist sprunghfähig, und zwar bezüglich der Wirkung des j -ten Eingangs auf den i -ten Ausgang. In diesem Falle ist die Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(s)$ *proper*.

Beispiel 2.2 (Forts.) Verhalten eines Dampferzeugers

Aus der kanonischen Darstellung (2.48) der Gewichtsfunktionsmatrix des Dampferzeugers erhält man die Übertragungsfunktionsmatrix

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(s) = & \frac{1}{s + 0,1} \begin{pmatrix} -0,1286 & 0 \\ 0,0163 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{s + 0,05} \begin{pmatrix} 0 & -0,0055 \\ 0 & -0,0045 \end{pmatrix} + \\ & + \frac{1}{s + 0,025} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,0045 \end{pmatrix} + \frac{1}{s + 0,037} \begin{pmatrix} 0,1286 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{s + 0,0385} \begin{pmatrix} 0 & 0,0055 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{s + 0,0385} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0,0163 & 0 \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} \frac{0,0081}{(s + 0,037)(s + 0,1)} & \frac{0,00006353}{(s + 0,0385)(s + 0,05)} \\ \frac{-0,001}{(s + 0,0385)(s + 0,1)} & \frac{0,0001125}{(s + 0,025)(s + 0,05)} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Diskussion. Im letzten Umformungsschritt werden die beiden letzten Summanden der kanonischen Darstellung zusammengefasst

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{s + 0,0385} \begin{pmatrix} 0 & 0,0055 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{s + 0,0385} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0,0163 & 0 \end{pmatrix} \\
& = \frac{1}{s + 0,0385} \begin{pmatrix} 0 & 0,0055 \\ -0,0163 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Diese Zusammenfassung betrifft Anteile, die die Bewegung unterschiedlicher Zustandsvariabler mit denselben Eigenwerten $\lambda_5 = \lambda_6 = -0,0385$ beschreiben. Diese Anteile werden in einen gemeinsamen Ausdruck geschrieben, so dass ihre Herkunft nicht mehr zu erkennen ist. Offensichtlich lässt sich diese Zusammenfassung nicht ohne weiteres rückgängig machen, wenn man auf dem umgekehrten Weg aus der Übertragungsfunktionsmatrix das Zustandsraummodell ableiten will. Auf dieses Problem wird im Abschn. 3.5 ausführlich eingegangen. In Aufgabe 3.18 ist aus der hier berechneten Übertragungsfunktionsmatrix das Zustandsraummodell zurückzugewinnen. $\square$

2.4.3 Übergangsverhalten und stationäres Verhalten

Das mit der Bewegungsgleichung (2.35) berechenbare Verhalten kann, wie im Abschn. I-5.6 für Eingrößensysteme eingeführt wurde, in die freie Bewegung, das stationäre Verhalten sowie das Übergangsverhalten unterteilt werden. Dafür wird das System unter dem Einfluss der Eingangsgröße

$$\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}} e^{\mu t}$$

untersucht, wobei vorausgesetzt wird, dass μ kein Eigenwert der Matrix $\mathbf{A}$ ist. Wie die Betrachtungen erweitert werden müssen, wenn dies doch der Fall ist, ist auch im Abschn. I-5.6 beschrieben.

Für die gegebene Eingangsgröße liefert Gl. (2.35) die Beziehung

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{C} e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \bar{\mathbf{u}} e^{\mu\tau} d\tau + \mathbf{D} \bar{\mathbf{u}} e^{\mu t} \\
&= \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \int_0^t e^{(\mu \mathbf{I} - \mathbf{A})\tau} d\tau \mathbf{B} \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{D} \bar{\mathbf{u}} e^{\mu t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C e^{At} x_0 + C e^{At} (\mu I - A)^{-1} B \bar{u} \Big|_0^t + D \bar{u} e^{\mu t} \\
&= \underbrace{C e^{At} x_0}_{\mathbf{y}_{\text{frei}}(t)} + \underbrace{(C(\mu I - A)^{-1} B + D) \bar{u} e^{\mu t}}_{\mathbf{y}_s(t)} - \underbrace{C e^{At} (\mu I - A)^{-1} B \bar{u}}_{\mathbf{y}_{\ddot{u}}(t)}.
\end{aligned}$$

Das Systemverhalten $\mathbf{y}(t)$ setzt sich aus der freien Bewegung

$$\mathbf{y}_{\text{frei}}(t) = C e^{At} x_0, \quad (2.52)$$

und der erzwungenen Bewegung zusammen, die ihrerseits in das stationäre Verhalten

$$\mathbf{y}_s(t) = (C(\mu I - A)^{-1} B + D) \bar{u} e^{\mu t} \quad (2.53)$$

und das Übergangsverhalten

$$\mathbf{y}_{\ddot{u}}(t) = -C e^{At} (\mu I - A)^{-1} B \bar{u} \quad (2.54)$$

aufgetrennt werden kann.

Diesen Komponenten kommt dieselbe Bedeutung zu wie bei Eingrößensystemen.

- Die freie Bewegung beschreibt den Anteil an $\mathbf{y}(t)$, der durch die Anfangsauslenkung x_0 hervorgerufen wird.
- Das Übergangsverhalten entsteht, weil die Eigenvorgänge des Systems durch die Eingangsgröße $u(t)$ angeregt werden. Wie die Eigenbewegung setzt es sich aus Summanden zusammen, deren Zeitverhalten durch die Terme $e^{\lambda_i t}$ bestimmt wird.
- Das stationäre Verhalten ist der Anteil, der direkt von der Eingangsgröße abhängt, dessen zeitliche Veränderung also durch $e^{\mu t}$ festgelegt ist.

Wenn das System asymptotisch stabil ist, so wird für große Zeiten das Systemverhalten nur noch vom stationären Anteil bestimmt:

$$\mathbf{y}(t) \rightarrow \mathbf{y}_s(t) \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Kanonische Darstellungen. Das stationäre Verhalten kann folgendermaßen in kanonische Darstellung überführt werden, wenn die Matrix A diagonalähnlich ist:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_s(t) &= (C V V^{-1} (\mu I - A)^{-1} V V^{-1} B + D) \bar{u} e^{\mu t} \\
&= (\tilde{C} (\mu I - V^{-1} A V)^{-1} \tilde{B} + D) \bar{u} e^{\mu t} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu - \lambda_i} \mathbf{G}_i + D \right) \bar{u} e^{\mu t}.
\end{aligned}$$

Wie man durch einen Vergleich mit Gl. (2.51) sieht, steht in der Klammer die Übertragungsfunktionsmatrix für $s = \mu$, die als „Verstärkungsfaktor“ für die Übertragung der Eingangsgröße $e^{\mu t}$ interpretiert werden kann:

$$\mathbf{y}_s(t) = \mathbf{G}(\mu) \bar{\mathbf{u}} e^{\mu t}.$$

Eine ähnliche Umformung des Übergangsverhaltens liefert

$$\mathbf{y}_{ii}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{G}_i \bar{\mathbf{u}} \frac{e^{\lambda_i t}}{\lambda_i - \mu}.$$

Eigenbewegung und Übergangsverhalten. Gleichung (2.54) zeigt, dass man das Übergangsverhalten $\mathbf{y}_{ii}$ einerseits dadurch erzeugen kann, dass man das autonome System ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$) mit der Anfangsbedingung $\mathbf{x}_0 = (\mu \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \bar{\mathbf{u}}$ betrachtet, andererseits dadurch, dass man das System aus der Ruhelage $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ mit einer Eingangsgröße $\mathbf{u}(t)$ erregt, für die $\mathbf{B} \mathbf{u}(t) = (\mu \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \bar{\mathbf{u}} \delta(t)$ gilt. Daraus ergibt sich eine für spätere Betrachtungen interessante Frage, ob es für eine gegebene Eingangsgröße $\bar{\mathbf{u}} e^{\mu t}$ durch geeignete Wahl des Anfangszustandes $\mathbf{x}_0$ möglich ist, das Übergangsverhalten durch die Eigenbewegung zu kompensieren, so dass

$$\mathbf{y}_{\text{frei}}(t) + \mathbf{y}_{ii}(t) \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$$

gilt. Mit den in den Gln. (2.52) und (2.54) stehenden Beziehungen erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{\text{frei}}(t) + \mathbf{y}_{ii}(t) &= \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 - \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} (\mu \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \bar{\mathbf{u}} \\ &= \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} (\mathbf{x}_0 - (\mu \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \bar{\mathbf{u}}). \end{aligned}$$

Diese Summe ist genau dann gleich null, wenn der Anfangszustand entsprechend

$$\mathbf{x}_0 = (\mu \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \bar{\mathbf{u}} \quad (2.55)$$

gewählt wird. Damit dieser Anfangszustand reell ist, muss μ reell sein. Man kann diese Betrachtung jedoch auf konjugiert komplexe Exponenten μ , μ^* erweitern, wenn man die Eingangsgröße entsprechend $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}} e^{\mu t} + \bar{\mathbf{u}}^* e^{\mu^* t}$ aus zwei konjugiert komplexen Summanden zusammensetzt. Das heißt, für jede beliebige Eingangsgröße der Form $\bar{\mathbf{u}} e^{\mu t}$ bzw. $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}} e^{\mu t} + \bar{\mathbf{u}}^* e^{\mu^* t}$, wobei μ kein Eigenwert der Matrix $\mathbf{A}$ ist, gibt es einen Anfangszustand des Systems, für den die Summe aus Eigenbewegung und Übergangsverhalten verschwindet. Das System führt dann nur noch das stationäre Verhalten aus

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_s(t).$$

Die Gleichung (2.55) gibt übrigens eine auch für Mehrgrößensysteme geltende Antwort auf die bereits im Beispiel I-5.7 und in der Aufgabe I-5.15 gestellte Frage nach einer Anfangsbedingung, für die das System sofort sein stationäres Verhalten annimmt.

2.5 Pole und Nullstellen

2.5.1 Pole

Die Pole eines Systems charakterisieren die Eigenvorgänge, die das System ausführt, wenn es durch eine Anfangsauslenkung oder eine Eingangsgröße angeregt wird. Von Eingrößensystemen ist bekannt, dass die Pole s_i die Nullstellen des Nennerpolynoms der Übertragungsfunktion $G(s)$ sind, dass also

$$|G(s_i)| = \infty$$

gilt. Alle Pole sind auch Eigenwerte der Matrix A im Zustandsraummodell, während es umgekehrt Eigenwerte geben kann, die nicht als Pole in der Übertragungsfunktion auftreten.

Die Erweiterung des Polbegriffes auf Mehrgrößensysteme bezieht sich direkt auf diesen Begriff für die Eingrößensysteme, wie die folgende Definition zeigt.

Definition 2.1 (Pole von Mehrgrößensystemen)

Eine komplexe Zahl s_i heißt Pol des durch die Übertragungsfunktionsmatrix $G(s)$ beschriebenen Systems, wenn mindestens ein Element $G_{ij}(s)$ von $G(s)$ einen Pol bei s_i besitzt.

Man kann die Menge der Pole also einfach dadurch berechnen, dass man die Pole aller skalaren Übertragungsfunktionen $G_{ij}(s)$ bestimmt und alle diese Pole zu einer gemeinsamen Menge zusammenfasst.

Wie man aus der kanonischen Darstellung (2.51) erkennen kann, stimmen die Pole von G wie im Eingrößenfall mit Eigenwerten der Matrix A überein. Es ist aber nicht jeder Eigenwert von A auch ein Pol von $G(s)$. Wenn nämlich für einen Index i die Matrix G_i verschwindet, so geht λ_i in kein Element von $G(s)$ ein und ist folglich auch kein Pol des Systems. Auch für Mehrgrößensysteme ist also die Menge der Eigenwerte von A eine Obermenge zur Menge der Pole von $G(s)$.

2.5.2 Übertragungsnullstellen

Bei Eingrößensystemen wurden Nullstellen als diejenigen Frequenzen s_{oi} definiert, für die die Übertragungsfunktion gleich null ist: $G(s_{oi}) = 0$. Im Zeitverhalten äußern sich die Nullstellen dadurch, dass das stationäre Verhalten des Systems bei einer Erregung durch $e^{s_{oi}t}$ verschwindet, die angegebene e-Funktion also nicht durch das System übertragen wird. Weitergehende Untersuchungen hatten gezeigt, dass Nullstellen bestimmen, ob das System minimalphasiges oder nichtminimalphasiges Verhalten aufweist. Durch Regler können Nullstellen nicht verändert werden.

Diese Eigenschaften der Nullstellen sollen erhalten bleiben, wenn der Nullstellenbegriff jetzt von Eingrößen- auf Mehrgrößensysteme erweitert wird. Eine geeignete Definition für Nullstellen zu finden war in der Tat nicht ganz einfach, wie eine

Reihe von Veröffentlichungen aus den siebziger Jahren, auf die am Ende dieses Kapitels hingewiesen wird, zeigt. Als besonders schwierig erwies sich die Suche nach einer Definition, die auch für Systeme mit unterschiedlicher Anzahl von Eingängen und Ausgängen die gewünschte regelungstechnische Bedeutung der Nullstellen sicherstellt. Bis heute sind mehrere Definitionen in Verwendung, von denen im Folgenden nur diejenigen behandelt werden, die in späteren Kapiteln bei der Systemanalyse und dem Reglerentwurf eine Rolle spielen.

Bei der Definition der Übertragungsnullstellen geht man von der Frage aus, ob es Frequenzen s_o gibt, die von einem System nicht übertragen werden. Man untersucht deshalb, für welche Werte von s_o es einen Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ gibt, so dass bei der Eingangsgröße

$$\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}} e^{s_o t} \quad (2.56)$$

der Ausgangsvektor verschwindet:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{0}.$$

Für die Beantwortung dieser Frage können die Untersuchungen aus dem Abschn. 2.4.3 herangezogen werden, wobei s_o anstelle von μ einzusetzen ist, um mit der für Nullstellen üblichen Bezeichnung zu arbeiten. Damit der Ausgang für alle Zeiten verschwindet, muss erstens die Summe aus Eigenbewegung und Übergangsverhalten gleich null sein und zweitens das stationäre Verhalten verschwinden. Für die erste Bedingung ist aus Gl. (2.55) bekannt, dass es für beliebige Werte von μ und $\bar{\mathbf{u}}$ einen Anfangszustand gibt, für den die Eigenbewegung gerade das Übergangsverhalten kompensiert. Um die zweite Bedingung zu erfüllen, muss entsprechend Gl. (2.53) die Beziehung

$$(C(s_o \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}) \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

gelten. Der linke Ausdruck stellt die Übertragungsfunktionsmatrix für die Frequenz $s = s_o$ dar, so dass die angegebene Bedingung auch in der Form

$$\mathbf{G}(s_o) \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (2.57)$$

geschrieben werden kann.

Diese Bedingung stellt ein lineares Gleichungssystem mit r Gleichungen und den m unbekannten Elementen $\bar{u}_i$ des Vektors $\bar{\mathbf{u}}$ dar. Es hat nur dann eine von null verschiedene Lösung, wenn der Rang der Matrix $\mathbf{G}(s_o)$ kleiner als m ist. Diese Bedingung ist für Systeme mit gleicher Anzahl von Eingangs- und Ausgangsgrößen ($m = r$) äquivalent der Forderung

$$\det \mathbf{G}(s_o) = 0. \quad (2.58)$$

Für Systeme mit unterschiedlicher Zahl von Ein- und Ausgängen bestimmt man zunächst den maximalen Rang, den die Übertragungsfunktionsmatrix für unterschiedliche Werte von s haben kann:

$$\rho = \max_s \text{Rang } \mathbf{G}(s).$$

Man kann zeigen, dass die Matrix $\mathbf{G}(s)$ nur an ausgewählten Frequenzen s einen kleineren Rang als ρ besitzt. ρ wird deshalb auch der Normalrang von $\mathbf{G}$ genannt. s_o ist eine Nullstelle von $\mathbf{G}$, wenn der Rang der Matrix für diese spezielle Frequenz kleiner als der Normalrang ist:

$$\text{Rang } \mathbf{G}(s_o) < \rho \quad (2.59)$$

Diese wichtigen Bedingungen sind in folgender Definition zusammengefasst. Sie sind eine Erweiterung der Nullstellendefinition (I-5.116) für Eingrößensysteme.

Definition 2.2 (Übertragungsnullstelle)

Die Übertragungsnullstellen des Systems sind Frequenzen s_o , für die die Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(s)$ eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\det \mathbf{G}(s_o) = 0 \quad \text{für } m = r \quad (2.60)$$

$$\text{Rang } \mathbf{G}(s_o) < \max_s \text{Rang } \mathbf{G}(s) \quad \text{für } m \neq r \quad (2.61)$$

In der Bedingung (2.61) bezeichnet die rechte Seite den für fast alle Werte von s geltenden maximalen Rang der rechteckigen Übertragungsfunktionsmatrix. Dieser kann niedriger sein als $\min(m, r)$, beispielsweise, wenn mehrere identische Teilsysteme mit demselben Eingangsvektor betrachtet werden und die Matrix $\mathbf{G}(s)$ folglich mehrere gleiche Zeilen hat.

Ist diese Bedingung für eine Frequenz s_o erfüllt, so kann man einen Vektor $\bar{u}$ bestimmen, der die Gl. (2.57) erfüllt. Man kann außerdem mit Gl. (2.55) einen Anfangszustand für das System so festlegen, dass für die Eingangsgröße (2.56) der Systemausgang y für alle Zeitpunkte gleich null ist.

Die Bedingung (2.60) kann übrigens in Abhängigkeit von der Rosenbrockssystemmatrix dargestellt werden. Wenn s_o nicht mit einem Eigenwert der Matrix $\mathbf{A}$ zusammenfällt, so gilt entsprechend Gl. (A2.66)

$$\det \mathbf{G}(s_o) = \det (\mathbf{C}(s_o \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}) = \frac{\det \mathbf{P}(s_o)}{\det (s_o \mathbf{I} - \mathbf{A})}. \quad (2.62)$$

Folglich ist die Bedingung (2.60) genau dann erfüllt, wenn s_o kein Eigenwert von $\mathbf{A}$ ist und wenn

$$\det \mathbf{P}(s_o) = 0 \quad (2.63)$$

gilt. Die Determinante von $\mathbf{P}(s)$, die eine gebrochen rationale Funktion ist, ist bei $s = s_o$ gleich null, was den Begriff „Nullstelle“ begründet.

Allgemeine Eigenschaften von Übertragungsnullstellen. Für die Übertragungsnullstellen gelten folgende Aussagen:

|| Die Übertragungsnullstellen der Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(s)$ stimmen i. Allg. *nicht* mit den Nullstellen der Elemente $G_{ij}(s)$ von $\mathbf{G}(s)$ überein.

Diese Tatsache zeigt einen wichtigen Unterschied zur Berechnung der Pole von $\mathbf{G}(s)$, die sich aus den Polen von $G_{ij}(s)$ zusammensetzen.

|| Übertragungsnullstellen von Mehrgrößensystemen können dieselben Werte wie Pole aufweisen.

Bei Eingrößensystemen führt die Gleichheit eines Poles und einer Nullstelle dazu, dass die betreffenden Linearfaktoren des Zählers und des Nenners gegeneinander gekürzt werden können, so dass die entsprechenden Pole und Nullstellen im gekürzten Ausdruck für $G(s)$ nicht mehr vorkommen. Bei Mehrgrößensystemen kann man eine derartige Pol/Nullstellen-Kürzung nicht immer vornehmen. Ein Beispiel ist die Übertragungsfunktionsmatrix

$$\mathbf{G}(s) = \begin{pmatrix} \frac{s+1}{s+2} & 1 \\ \frac{1}{s+2} & \frac{s+2}{s+1} \end{pmatrix},$$

die die Pole -1 und -2 und die Nullstelle -1 hat.

|| Nichtquadratische Übertragungsfunktionsmatrizen haben i. Allg. keine Übertragungsnullstellen.

Um diese Tatsache einzusehen, wird eine $(2, m)$ -Matrix

$$\mathbf{G}(s) = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1m} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2m} \end{pmatrix}$$

betrachtet, die den Normalrang 2 besitzt. Damit s_o eine Nullstelle ist, muss der Rang von $\mathbf{G}(s_o)$ gleich eins sein. Das heißt, dass die Spalten

$$\begin{pmatrix} G_{11}(s_o) \\ G_{21}(s_o) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} G_{12}(s_o) \\ G_{22}(s_o) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} G_{1m}(s_o) \\ G_{2m}(s_o) \end{pmatrix}$$

paarweise linear abhängig sein müssen, sich also nur um einen Faktor unterscheiden dürfen. Diese Forderung wird umso schärfer, je größer m ist, je mehr Spalten also für dieselbe Frequenz $s = s_o$ diese lineare Abhängigkeit aufweisen müssen. Da alle $G_{ij}(s)$ gebrochen rationale Funktionen in s sind, tritt die geforderte lineare Abhängigkeit zwar bei vielen in der Praxis auftretenden quadratischen Übertragungsfunktionsmatrizen an einzelnen Frequenzen s_o auf. Es ist aber ein reiner „Zufall“, wenn bei Systemen mit mehr Eingängen als Ausgängen bei derselben Frequenz s_o auch noch die durch die zusätzlichen Eingänge hinzukommenden Spalten paarweise linear abhängig sind.

Diese mathematische Erklärung wird durch die physikalische Überlegung gestützt, dass jede neu hinzukommende Eingangsgröße auch eine neue Eingriffsmöglichkeit in das System mit sich bringt, die nicht linear von den bereits vorhandenen

Beeinflussungsmöglichkeiten abhängt. Systeme mit mehr Eingängen als Ausgängen haben deshalb i. Allg. keine Übertragungsnullstellen.

|| Nichtsprungfähige Systeme mit derselben Zahl von Eingangs-, Zustands- und Ausgangsgrößen haben keine Übertragungsnullstellen.

Für $m = n = r$ gilt

$$\det \mathbf{G}(s) = \det (\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}) = \frac{\det \mathbf{C} \det \mathbf{B}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}.$$

Da im Zähler eine Konstante steht, kann die Determinante $\det \mathbf{G}(s)$ nicht verschwinden. Diese Überlegung zeigt, dass die Existenz von Übertragungsnullstellen mit der Tatsache verknüpft ist, dass dynamische Systeme i. Allg. mehr Zustandsvariable als Eingänge und Ausgänge haben und sich folglich im Inneren der Systeme dynamische Vorgänge abspielen, die nicht allein durch den aktuellen Wert $\mathbf{u}(t)$ der Eingangsgröße beeinflusst und nicht allein durch den aktuellen Wert $\mathbf{y}(t)$ der Ausgangsgröße beobachtet werden können. Diese Vorgänge können der Eingangsgröße so entgegen gerichtet sein, dass sich die Wirkungen der Eingangsgröße und dieser Vorgänge auf die Ausgangsgröße gegenseitig aufheben. Wie das Beispiel 6.4 gezeigt hat, ist bei einer Erregung des Systems mit der Frequenz der Nullstelle zwar die Ausgangsgröße gleich null. Das System bewegt sich jedoch in seinem Inneren, bei dem Beispiel sogar mit ständig steigender Amplitude.

Wie bei Eingrößensystemen gilt:

|| Das System $\mathbf{G}(s)$ ist minimalphasig, wenn sämtliche Übertragungsnullstellen s_{oi} negative Realteile haben:

$$\operatorname{Re}\{s_{oi}\} < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, q). \quad (2.64)$$

Andernfalls weist das System Allpassverhalten auf und wird nichtminimalphasig genannt.

2.5.3 Invariante Nullstellen

In der Definition 2.2 wurden die Übertragungsnullstellen als diejenigen Frequenzen s_0 definiert, für die der Rang der Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(s)$ kleiner als der Normalrang ist. Diese Begriffsbestimmung kann man nun in gleicher Weise auf die Rosenbrocksystemmatrix $\mathbf{P}(s)$ anwenden, wobei die dabei erhaltenen Frequenzen als invariante Nullstellen bezeichnet werden.

Definition 2.3 (Invariante Nullstelle)

Die invarianten Nullstellen des Systems sind Frequenzen s_o , für die die Rosenbrocksystemmatrix $P(s)$ eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\det P(s_o) = 0 \quad \text{für } m = r \quad (2.65)$$

$$\text{Rang } P(s_o) < \max_s \text{Rang } P(s) \quad \text{für } m \neq r \quad (2.66)$$

Den Zusammenhang zwischen den Übertragungsnullstellen und den invarianten Nullstellen kann man durch folgende Überlegung herstellen, die sich zunächst auf Systeme mit gleicher Anzahl von Eingangs- und Ausgangsgrößen bezieht. Damit die Rosenbrocksystemmatrix die Nullstellenbedingungen für einen gegebenen Wert für s_o erfüllt, müssen die Zeilen bzw. die Spalten dieser Matrix linear abhängig sein. Fällt ein solcher Wert von s_o nicht mit einem Eigenwert der Matrix A zusammen, so ist die Bedingung (2.65) mit Gl. (2.63) identisch. Das heißt, diese invariante Nullstelle s_o ist auch eine Übertragungsnullstelle.

Gilt die Bedingung (2.65) jedoch für einen Eigenwert von A , so kann der Rangabfall von

$$P(s_o) = \begin{pmatrix} s_o I - A & -B \\ C & D \end{pmatrix}$$

in der oberen Zeile eintreten, d. h., es kann gelten

$$\text{Rang}(s_o I - A - B) < n. \quad (2.67)$$

Wenn dies der Fall ist, so kann man zeigen, dass s_o dann zwar eine invariante Nullstelle, jedoch keine Übertragungsnullstelle ist. s_o wird dann auch als *Eingangsentkopplungsnullstelle* bezeichnet.

Der Rangabfall von $P(s_o)$ kann auch darauf zurückzuführen sein, dass die linke Spalte einen kleineren Rang als n aufweist:

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} s_o I - A \\ C \end{pmatrix} < n. \quad (2.68)$$

Die invariante Nullstelle wird in diesem Fall als *Ausgangsentkopplungsnullstelle* bezeichnet. Gelten die Gleichungen (2.67) und (2.68) gleichzeitig, so heißt s_o auch *Eingangs-Ausgangsentkopplungsnullstelle*.

Die physikalische Bedeutung der Entkopplungsnullstellen liegt darin, dass der Eigenvorgang $e^{s_o t}$ nicht durch den Systemeingang angeregt werden kann, wenn s_o eine Eingangsentkopplungsnullstelle ist, bzw. den Systemausgang nicht beeinflusst, wenn s_o eine Ausgangsentkopplungsnullstelle ist. Im Kap. 3 wird gezeigt, dass der betreffende Eigenvorgang nicht steuerbar bzw. nicht beobachtbar ist.

Die Entkopplungsnullstellen sind keine Übertragungsnullstellen. Sie können mit Hilfe der Übertragungsfunktionsmatrix $G(s)$ auch gar nicht berechnet werden, weil

sich sämtliche Linearfaktoren $(s - s_o)$ mit Entkopplungsnullstellen s_o in allen Elementen von $\mathbf{G}(s)$ gegen Linearfaktoren im Nenner kürzen lassen. Folglich beschreiben Entkopplungsnullstellen diejenigen Eigenwerte von $\mathbf{A}$, die nicht als Pole der Übertragungsfunktionsmatrix auftreten.

Zusammenhang von Übertragungsnullstellen und invarianten Nullstellen. Unter Verwendung von Gl. (2.62) lässt sich die Definitionsgleichung (2.65) für die invarianten Nullstellen in

$$\det \mathbf{P}(s_o) = \det(s_o \mathbf{I} - \mathbf{A}) \det \mathbf{G}(s_o) = 0 \quad (2.69)$$

umformen. Anhand dieser Gleichung kann der Zusammenhang von Übertragungsnullstellen und invarianten Nullstellen folgendermaßen zusammengefasst werden:

|| Die Menge der invarianten Nullstellen setzt sich aus der Menge der Übertragungsnullstellen und der Menge der Entkopplungsnullstellen zusammen (Abb. 2.11).

Dabei werden Eingangsentkopplungsnullstellen, Ausgangsentkopplungsnullstellen und Eingangs/Ausgangsentkopplungsnullstellen gemeinsam als Entkopplungsnullstellen bezeichnet.

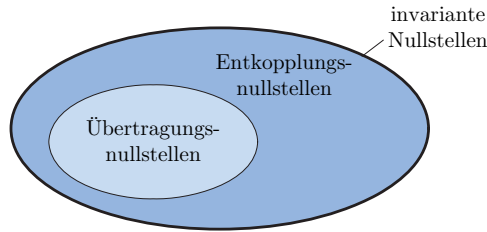


Abb. 2.11: Zerlegung der Menge der invarianten Nullstellen in die Menge der Übertragungsnullstellen und die Menge der Entkopplungsnullstellen

|| Wenn ein System vollständig steuerbar und beobachtbar ist (vgl. Kap. 3), so stimmen die Übertragungsnullstellen mit den invarianten Nullstellen überein und das System besitzt keine Entkopplungsnullstellen.

Dann ist es gleichgültig, ob die Nullstellen mit Hilfe der Übertragungsfunktionsmatrix oder der Rosenbrocksystemmatrix berechnet werden. In Gl. (2.69) ist $\det(s_o \mathbf{I} - \mathbf{A})$ vollständig gegen das Nennerpolynom $\det \mathbf{G}(s_o)$ gekürzt, so dass es keinen Eigenwert λ_i von $\mathbf{A}$ gibt, für den diese Gleichung mit $s_o = \lambda_i$ erfüllt ist.

|| Im Allgemeinen gibt es mehr invariante Nullstellen als Übertragungsnullstellen.

Die zusätzlichen Nullstellen sind Entkopplungsnullstellen, deren Linearfaktoren sich in allen Elementen der Übertragungsfunktionsmatrix $G(s)$ gegen Linearfaktoren des Nenners kürzen lassen. Die Entkopplungsnullstellen können deshalb nicht mit der Übertragungsfunktionsmatrix, sondern nur mit der Rosenbrocksystemmatrix berechnet werden. Gleichung (2.69) ist erfüllt, obwohl $\det G(s_o) \neq 0$ gilt, weil die Determinante $\det(s_o I - A)$ verschwindet.

Die Entkopplungsnullstellen sind nicht steuerbare und/oder nicht beobachtbare Eigenwerte der Systemmatrix A , die aus den Beziehungen (2.67) und (2.68) berechnet werden können (vgl. Kap. 3).

Beispiel 2.3 Übertragungsnullstellen und invariante Nullstellen

Das System

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= (1 \quad 1) x(t)\end{aligned}$$

hat die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{-1}{s+1}$$

und die Rosenbrocksystemmatrix

$$P(s) = \begin{pmatrix} s+1 & 0 & 1 \\ 0 & s+2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der Übertragungsfunktionsmatrix kann man sofort ablesen, dass das System keine Übertragungsnullstelle besitzt. Die Bedingung

$$\det P(s) = -(s+2) = 0$$

zeigt jedoch, dass das System eine invariante Nullstelle bei -2 besitzt. Diese invariante Nullstelle ist eine Eingangsentkopplungsnullstelle, denn für ihren Wert ist die zweite Zeile der Rosenbrocksystemmatrix eine Nullzeile, die Bedingung (2.67) also erfüllt. Der Wert dieser Entkopplungsnullstelle fällt mit dem Eigenwert -2 der Systemmatrix A zusammen. Die entsprechenden Linearfaktoren kürzen sich in der Übertragungsfunktion, so dass nur der Eigenwert -1 von A als Pol von $G(s)$ auftritt. $\square$

Aufgabe 2.5* Pole und Nullstellen eines Eingrößensystems

Gegeben ist das Zustandsraummodell

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= (3 \quad 1) x(t).\end{aligned}$$

1. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion dieses Systems.
2. Welche Pole und Nullstellen besitzt das System? Handelt es sich bei den Nullstellen um invariante Nullstellen oder Übertragungsnullstellen? Stimmen die Pole mit den Eigenwerten der Systemmatrix des Zustandsraummodells überein?
3. Unter welchen Bedingungen ist der Systemausgang gleich null, obwohl das System am Eingang erregt wird? $\square$

Aufgabe 2.6* Pole und Nullstellen eines Mehrgrößensystems

Gegeben ist das Zustandsraummodell

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}(t), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}(t).\end{aligned}$$

1. Stellen Sie die Übertragungsfunktionsmatrix auf.
2. Bestimmen Sie die Pole und Nullstellen des Systems. Stimmt die Anzahl der Pole der Übertragungsfunktionsmatrix mit der Anzahl der Eigenwerte der Systemmatrix des Zustandsraummodells überein? Betrachten Sie dabei sowohl das Gesamtsystem als auch die einzelnen Übertragungsfunktionen. Was fällt Ihnen in Bezug auf die Nullstellen des Systems auf?
3. Erklären Sie anhand des Signalflussgraphen des Systems, warum bestimmte Eigenwerte in einzelnen Elementen der Übertragungsfunktionsmatrix vorkommen bzw. nicht vorkommen. $\square$

Aufgabe 2.7** Pol-Nullstellen-Form der Übertragungsfunktion

In der Pol-Nullstellen-Form (I-6.86) geschrieben hat die Übertragungsfunktion eines Systems mit einem Eingang und einem Ausgang das folgende Aussehen

$$G(s) = k \frac{\prod_{i=1}^q (s - s_{0i})}{\prod_{i=1}^n (s - s_i)}.$$

In diesem Abschnitt wurde gezeigt, dass man die invarianten Nullstellen s_{0i} für Eingrößensysteme aus der Bedingung

$$\det \mathbf{P}(s_{0i}) = \det \begin{pmatrix} s_{0i} \mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{b} \\ \mathbf{c}' & d \end{pmatrix} = 0$$

und die Pole s_i aus der Bedingung

$$\det(s_i \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

erhält. Insofern ist es interessant zu wissen, dass man die Übertragungsfunktion in der Form

$$G(s) = \frac{\det \begin{pmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{b} \\ \mathbf{c}' & d \end{pmatrix}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \quad (2.70)$$

schreiben kann, wobei im Zähler die Rosenbrocksystemmatrix und im Nenner das charakteristische Polynom der Systemmatrix $\mathbf{A}$ steht. Beweisen Sie, dass diese Formel richtig ist. Wenden Sie die Formel auf das Zustandsraummodell aus Aufgabe 2.5 an und interpretieren Sie Ihr Ergebnis. $\square$

2.6 Stabilität von Mehrgrößensystemen

Viele der für Eingrößensysteme im Kap. I-8 beschriebenen Ergebnisse zur Stabilitätsanalyse linearer dynamischer Systeme sind ohne Erweiterungen auf Mehrgrößensysteme anwendbar. Darauf wird im Folgenden kurz eingegangen, wobei zunächst die Zustandsstabilität und anschließend die E/A-Stabilität betrachtet wird. Die Stabilitätsanalyse rückgekoppelter Systeme wird im Abschn. 4.3 behandelt.

Zustandsstabilität. Der Begriff der Zustandsstabilität wurde von LJAPUNOW wie in Definition I-8.1 angegeben eingeführt. Der Gleichgewichtszustand $\mathbf{x}_g = \mathbf{0}$ ist stabil, wenn es für jede beliebige Umgebung ε eine Umgebung um den Gleichgewichtspunkt mit dem Radius δ gibt, so dass aus $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ die Beziehung $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$ folgt. Für asymptotische Stabilität wird zusätzlich gefordert, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$ gilt.

Diese Definition hat keinen Bezug zur Anzahl der Eingangs- und Ausgangsgrößen des Systems und kann folglich ohne Veränderung auf Mehrgrößensysteme übernommen werden. Deshalb gilt Satz I-8.1 auch hier:

- Der Gleichgewichtszustand $\mathbf{x}_g = \mathbf{0}$ des Systems

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.71)$$

ist stabil, wenn die Matrix $\mathbf{A}$ diagonalähnlich ist und alle Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ die Bedingung

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i\} \leq 0$$

erfüllen.

- Der Gleichgewichtszustand $\mathbf{x}_g = \mathbf{0}$ des Systems (2.71) ist genau dann asymptotisch stabil, wenn die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ die Bedingung

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0$$

erfüllen.

Die Stabilitätsprüfung kann anhand des charakteristischen Polynoms mit Hilfe des Hurwitz- oder des Routhkriteriums geprüft werden (Sätze I-8.5 und I-8.6).

Eingangs-Ausgangs-Stabilität. Die Eingangs-Ausgangs-Stabilität (E/A-Stabilität) des Mehrgrößensystems

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0} \quad (2.72)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (2.73)$$

kann ähnlich wie für Eingrößensysteme definiert werden, wenn die Betragsbildung der Signale in Definition I-8.2 durch (beliebige) Vektornormen $\|\cdot\|$ ersetzt wird.

Definition 2.4 (Eingangs-Ausgangs-Stabilität)

Ein lineares System (2.72), (2.73) heißt *eingangs-ausgangs-stabil* (E/A-stabil), wenn für verschwindende Anfangsauslenkungen $\mathbf{x}_o = \mathbf{0}$ und ein beliebiges beschränktes Eingangssignal

$$\|\mathbf{u}(t)\| < u_{\max} \quad \text{für alle } t > 0$$

das Ausgangssignal beschränkt bleibt:

$$\|\mathbf{y}(t)\| < y_{\max} \quad \text{für alle } t > 0. \quad (2.74)$$

Verfolgt man die für Eingrößensysteme im Abschn. I-8.2.2 gegebenen Ableitungen, so wird offensichtlich, dass die Stabilitätskriterien für E/A-Stabilität mit geringfügiger Änderung übernommen werden können. Wiederum ist lediglich anstelle der Betragsbildung die Norm einzusetzen:

- Das System (2.72), (2.73) ist genau dann E/A-stabil, wenn seine Gewichtsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(t)$ die Bedingung

$$\int_0^\infty \|\mathbf{G}(t)\| dt < \infty \quad (2.75)$$

erfüllt.

- Das System (2.72), (2.73) ist genau dann E/A-stabil, wenn sämtliche Pole s_i seiner Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(s)$ die Bedingung

$$\operatorname{Re}\{s_i\} < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.76)$$

erfüllen.

Beide Bedingungen sind äquivalent, d. h., wenn eine Bedingung erfüllt ist, so ist auch die andere Bedingung erfüllt.

Da alle Pole der Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(s)$ auch Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ sind, gilt wie bei Eingrößensystemen:

$\parallel$ Ist das System asymptotisch stabil, so ist es auch E/A-stabil.

2.7 MATLAB-Funktionen für die Analyse von Mehrgrößensystemen

Die meisten der im Abschn. I-5.9 angegebenen MATLAB-Funktionen können ohne Änderung für die Analyse von Mehrgrößensystemen übernommen werden, weil sie mit denselben Bezeichnungen auch für die erweiterten Modellformen aufgerufen werden können. Für alle Funktionen wird wie bisher nur die Grundform angegeben. Erweiterungen können dem MATLAB-Handbuch entnommen werden.

Systemanalyse mit Hilfe des Zustandsraummodells. Wenn man mit dem Zustandsraummodell arbeitet, weist man die Modellparameter den Variablen A, B, C und D zu und bildet das Systemobjekt `System` durch

```
» System = ss(A, B, C, D);
```

Die Übergangsfunktionsmatrix erhält man durch den Aufruf

```
» step(System);
```

wobei alle Elemente von $\mathbf{H}(t)$ auf dem Bildschirm grafisch dargestellt werden. Um die Gewichtsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(t)$ zu erhalten, schreibt man

```
» impulse(System);
```

Die Eigenbewegung erhält man mit der Anweisung

```
» initial(System, x0);
```

wobei im Vektor `x0` der Anfangszustand gespeichert sein muss.

Will man die Ausgangsgröße $\mathbf{y}(t)$ für eine beliebig vorgegebene Eingangsgröße $\mathbf{u}(t)$ berechnen, so müssen zunächst die Matrix `U` und der Vektor `t` mit derselben Zeilenzahl mit den Werten des Eingangsvektors und mit äquidistanten Zeitpunkten belegt werden. Jeder Spalte von `U` entspricht der Verlauf einer skalaren Eingangsgröße. Die Lösung der Bewegungsgleichung erhält man dann mit dem Funktionsaufruf

```
» lsim(System, U, t, x0);
```

grafisch auf dem Bildschirm dargestellt.

Die Statikmatrix $\mathbf{K}_s$ kann man entsprechend Gl. (2.39) für stabile Systeme mit der Funktion

```
» Ks = dcgain(System);
```

berechnen.

Systemanalyse mit der E/A-Beschreibung im Frequenzbereich. Bei Mehrgrößensystemen wird die Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(s)$ spaltenweise durch Felder (*cell arrays*) `Z` und `N` für die Zähler und Nenner beschrieben. Das heißt, die Übertragungsfunktionsmatrix

$$\mathbf{G}(s) = \begin{pmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1m}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{r1}(s) & G_{r2}(s) & \cdots & G_{rm}(s) \end{pmatrix}$$

mit

$$G_{ij}(s) = \frac{Z_{ij}(s)}{N_{ij}(s)}$$

wird durch die ij -ten Elemente $Z\{i, j\}$ von Z bzw. $N\{i, j\}$ von N beschrieben. Sämtliche Polynome werden durch die Polynomkoeffizienten, die in Richtung fallendem Exponenten geordnet sind, dargestellt. Für das System wird dann mit der Funktion `tf` das Objekt

```
>> System = tf(Z, N);
```

definiert.

Um diese Funktionen zu nutzen, definiert man für das Eingrößensystem

$$G(s) = \frac{2}{3s + 1}$$

zunächst das Zählerpolynom

```
>> z = [2];
```

und das Nennerpolynom

```
>> n = [3 1];
```

und erhält dann mit der Funktion `tf` das Objekt `System`:

```
>> System=tf(z, n)
```

Transfer function:

$$\frac{2}{3s + 1}$$

Für das Mehrgrößensystem mit der Übertragungsfunktionsmatrix

$$\mathbf{G}(s) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3s+1} & \frac{2s+1}{4s^2+1} \\ \frac{4,5}{7s+2} & \frac{27}{s^2+2s+1} \end{pmatrix}$$

erzeugt man zunächst die Felder `Z` und `N`

```

» Z{1,1} = [2];
» Z{1,2} = [2, 1];
» Z{2,1} = [4.5];
» Z{2,2} = [27];
» N{1,1} = [3, 1];
» N{1,2} = [4, 1];
» N{2,1} = [7, 2];
» N{2,2} = [1, 2, 1];

```

und bildet dann das Objekt System:

```
» System=tf(Z, N)
```

Transfer function from input 1 to output...

```

      2
#1:  -----
      3 s + 1

```

```

      4.5
#2:  -----
      7 s + 2

```

Transfer function from input 2 to output...

```

      2 s + 1
#1:  -----
      4 s + 1

```

```

      27
#2:  -----
      s^2 + 2 s + 1

```

Die Funktionen `step`, `impulse` und `lsim` können für skalare Übertragungsfunktionen oder Übertragungsfunktionsmatrizen aufgerufen werden, indem man diese Funktionen auf das Objekt `System` angewendet, wie es für Zustandsraummodelle beschrieben wurde. Man kann auch das Bodediagramm oder die Ortskurve zeichnen:

```

» bode(System);
» nyquist(System);

```

Umrechnung von Zustandsraum- in Frequenzbereichsdarstellung und umgekehrt. MATLAB nimmt eine Konvertierung der Modellformen aus dem Zeitbereich in den Frequenzbereich und umgekehrt selbstständig vor, wenn dies erforderlich ist. Wenn man ein `System` mit der Funktion `ss` im Zustandsraum definiert hat, so kann man mit der Funktion `tfdata` die Übertragungsfunktion ausgeben:

```
» [Z, N] = tfdata(System);
```

Dabei entstehen Felder der o. a. Form. Für Eingrößensysteme sind nach dem Funktionsaufruf

```
» [Z, N] = tfdata(System, 'v');
```

Z und N Vektoren mit den Koeffizienten des Zählerpolynoms bzw. Nennerpolynoms. Das Zustandsraummodell erhält man durch den Funktionsaufruf

```
» [A, B, C, D] = ssdata(System);
```

unabhängig davon, ob das Objekt `System` als Zustandsraummodell mit Hilfe der Funktion `ss` oder als Übertragungsfunktionsmatrix mit der Funktion `tf` definiert wurde.

Literaturhinweise

Die Zustandsraumdarstellung wurde Ende der fünfziger Jahre eingeführt, wobei die Veröffentlichungen von KALMAN [46] und NERODE [88] als erste grundlegende Arbeiten zu diesem Thema gelten.

Die Behandlung von Mehrgrößensystemen im Frequenzbereich wurde in den siebziger Jahren u. a. durch ROSENBROCK angeregt. Die nach ihm benannte Systemmatrix $P(s)$ ist in seinem 1974 erschienenen Buch [107] ausführlich behandelt.

Um zweckmäßige Definitionen von Nullstellen eines Mehrgrößensystems hat es in den siebziger Jahren eine lange Diskussion gegeben, bei der einerseits mathematisch motivierte Definitionen, die sich auf die Smith-McMillan-Normalform [79] von $G(s)$ bzw. $P(s)$ beziehen, und andererseits regelungstechnisch motivierte Definitionen entstanden, die die Existenz von Nullstellen als eine das Übertragungsverhalten blockierende Eigenschaft in den Mittelpunkt stellten. Eine ausführliche Diskussion dieser unterschiedlichen Herangehensweisen kann in [78] nachgelesen werden. Eine gute Übersicht gibt auch [102].

Die P-kanonische und V-kanonische Darstellung von Mehrgrößensystemen wurde von MESAROVIC in seinem 1960 erschienenen Buch [83] eingeführt. Dieses Buch ist eine der ersten Monografien, die sich mit Mehrgrößensystemen befassen.

Eine hier nicht verwendete Darstellungsform linearer Systeme im Frequenzbereich beruht auf der Verwendung von Polynommatrizen. Diese Darstellung umgeht die Schwierigkeit, mit Matrizen zu rechnen, deren Elemente gebrochen rationale Ausdrücke sind. Wesentlichen Anteil an der Entwicklung dieser Darstellungsform hat WOLOVICH, dessen 1974 erschienenes Buch [117] auch heute noch als Standardwerk zitiert wird und in dem interessierte Leser diese Darstellungsform nachlesen können.

Viele Aussagen über lineare Systeme sind unabhängig vom Koordinatensystem, das für den Zustandsraum zu Grunde gelegt wird. Diese Tatsache ist beispielsweise daran ersichtlich, dass die Eigenwerte und folglich wichtige dynamische Eigenschaften unabhängig von einer Zustandstransformation $\tilde{x}(t) = T^{-1}x(t)$ sind. Der „geometrische Zugang“ zur Systemtheorie verfolgt deshalb das Ziel, Aussagen über lineare Systeme ohne Bezug zu einer speziellen Auswahl von Zustandsvariablen zu formulieren. Diese Theorie wurde entscheidend durch WONHAM initiiert und entwickelt. Als Standardwerk gilt sein 1974 erschienenes Buch [118].

3

Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit sind grundlegende Eigenschaften dynamischer Systeme, die die Lösbarkeit von Regelungsaufgaben entscheidend beeinflussen. Beide Eigenschaften werden in diesem Kapitel ausführlich behandelt. Wie eine grafentheoretische Analyse zeigt, werden sie hauptsächlich durch die Struktur des betrachteten Systems bestimmt.

3.1 Steuerbarkeit

3.1.1 Problemstellung und Definition der Steuerbarkeit

Bei der Lösung jeder Regelungsaufgabe steht die Frage, ob das gegebene System durch die Eingangsgröße $u(t)$ in einer vorgegebenen Weise beeinflusst werden kann. Was „vorgegebene Weise“ heißt, kann in einzelnen Anwendungsfällen sehr unterschiedlich sein. Erfüllbar sind die meisten Güteforderungen jedoch nur dann, wenn das System durch eine entsprechende Wahl der Eingangsgröße $u(t)$ im Zustandsraum von einem beliebigen Anfangszustand x_0 in einen beliebigen Endzustand x_e gebracht werden kann. Ein System, bei dem dies gelingt, wird *vollständig steuerbar* genannt. Dieser Abschnitt ist einer eingehenden Analyse dieser wichtigen regelungstechnischen Eigenschaft gewidmet.

Zunächst muss die soeben skizzierte Eigenschaft noch etwas genauer beschrieben werden. Da sich der Systemzustand in Abhängigkeit vom Verlauf der Eingangsgröße über ein bestimmtes Zeitintervall ändert und da außerdem die genannte Zu-

standsüberführung in endlicher Zeit abgeschlossen sein soll, wird im Folgenden das Systemverhalten über das Zeitintervall

$$0 \leq t \leq t_e \quad \text{bzw.} \quad t \in [0, t_e]$$

betrachtet und die dabei verwendete Eingangsgröße mit $\mathbf{u}_{[0, t_e]}$ bezeichnet. Mit dem Symbol $\mathbf{u}_{[0, t_e]}$ soll hervorgehoben werden, dass jetzt nicht der Wert des Eingangsvektors zu einem bestimmten Zeitpunkt t , sondern der Verlauf über ein gegebenes Zeitintervall von Interesse ist.

Da im Folgenden die Wirkung der Eingangsgröße auf den Systemzustand betrachtet wird, ist nur die Zustandsgleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.1)$$

maßgebend. Das System kann deshalb auch durch die Angabe der beiden Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$, also entsprechend der bereits verwendeten Schreibweise durch $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ abgekürzt werden.

Definition 3.1 (Steuerbarkeit)

Ein System (3.1) heißt vollständig steuerbar, wenn es in endlicher Zeit t_e von jedem beliebigen Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ durch eine geeignet gewählte Eingangsgröße $\mathbf{u}_{[0, t_e]}$ in einen beliebig vorgegebenen Endzustand $\mathbf{x}(t_e)$ überführt werden kann.

Man sagt dann auch, dass das Paar $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ vollständig steuerbar ist.

Steuerbarkeit in den Nullzustand. Um die Eigenschaft der vollständigen Steuerbarkeit zu prüfen, muss entsprechend der Definition die Zustandsüberführung zwischen beliebigen Zustandspaaren $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ und $\mathbf{x}(t_e) = \mathbf{x}_e$ untersucht werden. Aus der Bewegungsgleichung (2.35), die hier für $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ und $\mathbf{D} = \mathbf{O}$ verwendet wird, erhält man

$$\mathbf{x}_e = e^{\mathbf{A}t_e} \mathbf{x}_0 + \int_0^{t_e} e^{\mathbf{A}(t_e - \tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

und nach Umstellung

$$\int_0^{t_e} e^{\mathbf{A}(t_e - \tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau = \mathbf{x}_e - \mathbf{x}_a \quad (3.2)$$

mit

$$\mathbf{x}_a = e^{\mathbf{A}t_e} \mathbf{x}_0.$$

Da $\mathbf{x}_0$ ein beliebiger Vektor sein kann und $e^{\mathbf{A}t_e}$ eine reguläre Matrix ist, ist auch $\mathbf{x}_a$ ein beliebiger n -dimensionaler Vektor. Das System ist also genau dann vollständig

steuerbar, wenn das Integral auf der linken Seite von Gl. (3.2) durch eine geeignete Wahl von $u_{[0,t_e]}$ einen beliebig vorgegebenen Vektor $x_e - x_a = x_b$ darstellt. Genau diese Forderung ist aber bereits dann zu erfüllen, wenn nicht jede beliebige Überführung von x_0 nach x_e , sondern lediglich die Überführbarkeit des Systems von einem beliebigen Anfangszustand x_0 in den Nullzustand $x_e = 0$ untersucht wird, weil auch damit beliebige Vektoren

$$x_b = x_e - x_a = -e^{At_e} x_0$$

dargestellt werden können. Die folgenden Betrachtungen können sich also ohne Einschränkung der Allgemeinheit auf den Fall $x_e = 0$ beschränken.

Umgekehrt kann die Analyse des Systems auch auf die Frage beschränkt werden, ob das System vom Ruhezustand $x_0 = 0$ in einen beliebigen Endzustand x_e überführt werden kann. Wenn dies möglich ist, ist das System vollständig steuerbar.

Steuerbarkeit und vollständige Steuerbarkeit. In der Definition 3.1 wird nicht nur die Eigenschaft der Steuerbarkeit, sondern die der *vollständigen* Steuerbarkeit erklärt. Das Attribut „vollständig“ bezieht sich dabei auf die Tatsache, dass das System zwischen *beliebigen* Anfangs- und Endzuständen umgesteuert werden kann.

Wenn das System nicht vollständig steuerbar ist, so erhebt sich die Frage, ob es dann wenigstens zwischen ausgewählten Zuständen x_0 und x_e umgesteuert werden kann. Auf diese Frage wird im Abschn. 3.1.5 ausführlich eingegangen. Es wird dort gezeigt, dass x_0 und x_e in einem Unterraum des Zustandsraumes liegen müssen.

Wenn es keine Verwechslungen geben kann, wird im Folgenden an Stelle von „vollständig steuerbar“ häufig nur von „steuerbar“ gesprochen.

Steuerbarkeit und Erreichbarkeit. In der Literatur wird häufig zwischen der Steuerbarkeit und der Erreichbarkeit unterschieden. Während man für die Steuerbarkeit fordert, dass das System von einem beliebigen Anfangszustand aus in den Nullzustand überführt werden kann, ist mit der Eigenschaft der Erreichbarkeit die Möglichkeit verbunden, das System vom Nullzustand in einen vorgegebenen Endzustand zu steuern. Beide Eigenschaften fallen bei den hier betrachteten linearen zeitinvarianten Systemen offenbar zusammen, denn in beiden Fällen muss das Integral in Gl. (3.2) einen beliebigen Vektor annehmen können.

Sobald aber das System zeitveränderlich oder gar nichtlinear ist, unterscheiden sich beide Eigenschaften.

3.1.2 Steuerbarkeitskriterium von KALMAN

Die vollständige Steuerbarkeit eines Systems kann mit dem von KALMAN¹ vorgeschlagenen Kriterium geprüft werden. Dieses Kriterium bezieht sich auf die Steuerbarkeitsmatrix

¹ RUDOLF EMIL KALMAN (*1930), amerikanischer Mathematiker, leistete bedeutende Beiträge zur mathematischen Systemtheorie und entwickelte zusammen mit RICHARD BUCY das sogen. Kalmanfilter

$$S_S = (B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B), \quad (3.3)$$

die eine $(n, n \cdot m)$ -Matrix ist. Wenn das System nur eine Eingangsgröße hat, ist die Matrix S_S quadratisch.

Satz 3.1 (Steuerbarkeitskriterium von KALMAN)

Das System (A, B) ist genau dann vollständig steuerbar, wenn die Steuerbarkeitsmatrix S_S den Rang n hat:

$$\text{Rang } S_S = n. \quad (3.4)$$

Beweis. Im Folgenden wird dieses Kriterium bewiesen, wobei beim Nachweis der Notwendigkeit der angegebenen Bedingung offensichtlich wird, warum die Steuerbarkeit durch den Rang der angegebenen Matrix bestimmt wird. Anschließend wird eine Steuerung $u_{[0, t_e]}$ angegeben, mit der das System von x_0 nach x_e umgesteuert werden kann, womit gleichzeitig die Hinlänglichkeit des Kriteriums nachgewiesen wird.

Notwendigkeit der Bedingung (3.4). Damit das System vollständig steuerbar ist, muss es eine Steuerung $u_{[0, t_e]}$ geben, durch die das Integral in Gl. (3.2) einen beliebig vorgegebenen Vektor $x_e - x_a$ darstellt. Gilt insbesondere $x_e = 0$, so muss der Eingangsvektor die Bedingung

$$\int_0^{t_e} e^{A(t_e - \tau)} B u(\tau) d\tau = -e^{A t_e} x_0$$

erfüllen. Diese Gleichung kann folgendermaßen umgeformt werden:

$$\begin{aligned} -e^{A t_e} x_0 &= \int_0^{t_e} e^{A(t_e - \tau)} B u(\tau) d\tau \\ &= e^{A t_e} \int_0^{t_e} e^{-A \tau} B u(\tau) d\tau \\ -x_0 &= \int_0^{t_e} e^{-A \tau} B u(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Die weitere Umformung verwendet die Definitionsgleichung (I-5.12) für die Matrixexponentialfunktion. Man erhält

$$\begin{aligned}
-x_0 &= B \int_0^{t_e} u(\tau) d\tau - AB \int_0^{t_e} \tau u(\tau) d\tau + A^2 B \int_0^{t_e} \frac{\tau^2}{2!} u(\tau) d\tau \\
&\quad - A^3 B \int_0^{t_e} \frac{\tau^3}{3!} u(\tau) d\tau + \dots \\
&= Bu_0 + ABu_1 + A^2 Bu_2 + \dots + A^n Bu_n + A^{n+1} Bu_{n+1} + \dots \quad (3.5)
\end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$u_i = (-1)^i \int_0^{t_e} \frac{\tau^i}{i!} u(\tau) d\tau \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Die Summe (3.5) stellt eine Linearkombination der Spalten von B , AB , $A^2 B$ usw. dar, deren Koeffizienten die Elemente der Vektoren u_i sind und die folglich durch die Funktion $u_{[0,t_e]}$ bestimmt werden. Ein beliebiger Vektor x_0 kann nur dann durch geeignete Wahl von $u_{[0,t_e]}$ durch diese Summe erzeugt werden, wenn die Spalten der angegebenen Matrizen den n -dimensionalen Raum aufspannen. Mit anderen Worten, die durch die angegebenen Matrizen gebildete Matrix

$$(B \ AB \ A^2 B \ \dots \ A^{n-1} B \ A^n B \ A^{n+1} B \ \dots)$$

muss den Rang n besitzen.

Dass in die Steuerbarkeitsmatrix S_S nach Gl. (3.3) nur die ersten n Matrizen eingehen, ist durch das Cayley-Hamilton-Theorem (A2.45) begründet. Demnach können A^n und alle höheren Potenzen von A als Linearkombinationen der niedrigeren Potenzen dargestellt werden. Die Matrizen $A^n B$, $A^{n+1} B$ usw. liefern also keine von den Spalten der niedrigeren Potenzen $A^i B$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) linear unabhängigen Spalten. Damit ist erklärt, warum die Bedingung (3.4) notwendig für die vollständige Steuerbarkeit des Systems (A, B) ist.

Bestimmung von $u_{[0,t_e]}$. Wenn die Bedingung (3.4) erfüllt ist, so kann man das System durch die Steuerung

Umsteuerung des Zustandes von $x(0) = x_0$ nach $x(t_e) = x_e$

$$u_{[0,t_e]}(t) = -B'e^{A'(t_e-t)} W_S^{-1} (e^{A t_e} x_0 - x_e)$$

(3.6)

mit

$$W_S = \int_0^{t_e} e^{A t} B B' e^{A' t} dt \quad (3.7)$$

von einem beliebigen Anfangszustand x_0 in einen beliebigen Endzustand x_e überführen. Dass dies so ist, erkennt man sofort, wenn man die angegebene Steuerung in die

Bewegungsgleichung einsetzt. Damit ist auch die Hinlänglichkeit der Steuerbarkeitsbedingung (3.4) gezeigt.

Steuerbarkeitsanalyse mit Hilfe der Gramschen Matrix. Die in Gl. (3.7) definierte Matrix $\mathbf{W}_S$ heißt GRAMsche Matrix oder Gramsche Steuerbarkeitsmatrix. Man kann mit einer ähnlichen Argumentation wie bei Gl. (3.5) zeigen, dass diese Matrix für eine beliebige Endzeit $t_e > 0$ genau dann positiv definit und folglich regulär ist, wenn das Kalmankriterium (3.4) erfüllt ist.

Für $t_e = \infty$ kann die Matrix

$$\mathbf{W}_{S\infty} = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{B}' e^{\mathbf{A}'t} dt$$

aus der Gleichung

$$\mathbf{A} \mathbf{W}_{S\infty} + \mathbf{W}_{S\infty} \mathbf{A}' = -\mathbf{B} \mathbf{B}' \quad (3.8)$$

berechnet werden. Dies ist eine Ljapunowgleichung, die beim Optimalreglerentwurf eine große Rolle spielt und für die es deshalb gut entwickelte Lösungsalgorithmen gibt (vgl. Gl. (7.16) auf S. 288).

Wenn das System vollständig steuerbar ist, so kann man viele verschiedene Steuerungen $\mathbf{u}_{[0,t_e]}$ angeben, mit der die betrachtete Umsteuerungsaufgabe gelöst wird. Die angegebene Steuerung (3.6) ist eine besonders gute Lösung dieses Problems, denn sie bewirkt die Umsteuerung mit minimaler Energie

$$J(\mathbf{u}_{[0,t_e]}) = \int_0^{t_e} \mathbf{u}'(t) \mathbf{u}(t) dt.$$

Deshalb weist diese Steuerung auf einige Aspekte der Steuerbarkeit linearer Systeme hin:

- Wenn ein System vollständig steuerbar ist, so kann die Umsteuerung von einem beliebigen Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ in einen beliebigen Endzustand $\mathbf{x}_e$ in beliebig kurzer Zeit t_e vorgenommen werden.
- Je kleiner die zur Verfügung stehende Zeit t_e ist, umso größere Stellamplituden sind notwendig, denn umso kleiner sind die Elemente der Matrix $\mathbf{W}_S$ und umso größer folglich die Elemente von $\mathbf{W}_S^{-1}$.

Beispiel 3.1 Steuerbarkeit gekoppelter Rührkesselreaktoren

Es soll untersucht werden, ob die gekoppelten Rührkessel aus Aufgabe I-5.5 vollständig steuerbar sind. Das Zustandsraummodell für die Regelstrecke lautet

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{F}{V_1} & 0 \\ \frac{F}{V_2} & -\frac{F}{V_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{F}{V_1} \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

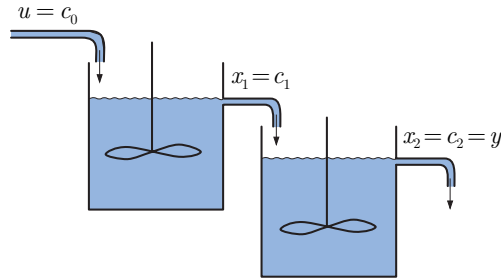


Abb. 3.1: Zwei gekoppelte Rührkessel

(vgl. S. I-573). Eingangsgröße ist die Konzentration c_0 des Stoffes A im Zulauf des ersten Reaktors. Die beiden Zustandsvariablen stellen die Konzentrationen des Stoffes A in den beiden Reaktoren dar (Abb. 3.1). F bezeichnet den konstanten Volumenstrom durch beide Reaktoren, V_1 und V_2 das Volumen der Reaktoren.

Die Steuerbarkeitsmatrix heißt

$$S_S = \begin{pmatrix} \frac{F}{V_1} & -\frac{F^2}{V_1^2} \\ 0 & \frac{F^2}{V_1 V_2} \end{pmatrix}.$$

Sie ist für beliebige positive Parameter F , V_1 und V_2 regulär, d. h., die Rührkesselreaktoren sind vollständig steuerbar. Nur für $F = 0$ ist die Steuerbarkeit nicht gewährleistet. Dies ist physikalisch dadurch begründet, dass in diesem Fall keine Flüssigkeit durch die Reaktoren fließt und sich die Konzentrationen folglich nicht verändern können.

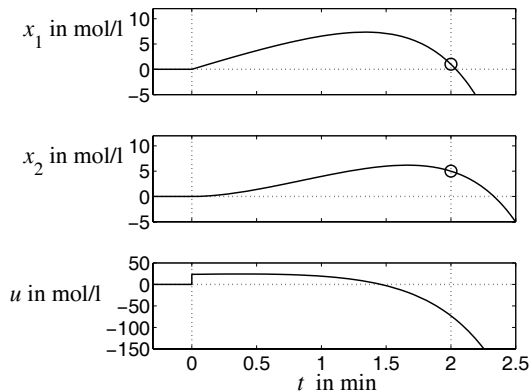


Abb. 3.2: Steuerung der Rührkesselreaktoren in den vorgegebenen Zustand

Für die Parameter $F = 2 \frac{1}{\text{min}}$, $V_1 = 6 \text{ l}$ und $V_2 = 1 \text{ l}$ ist die Steuerung nach Gl. (3.6)

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{[0,2]}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{F}{V_1} & 0 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} -\frac{F}{V_1} & \frac{F}{V_2} \\ 0 & -\frac{F}{V_2} \end{pmatrix} (2-t)} \mathbf{W}_S^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \\
&= (0,333 \ 0) e^{\begin{pmatrix} -0,333 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} (2-t)} \begin{pmatrix} 47,47 & -53,23 \\ -53,23 & 72,05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \\
&= (0,171 \ 0,198) e^{-\begin{pmatrix} -0,333 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} t} \begin{pmatrix} -218,7 \\ 307 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

in Abb. 3.2 zusammen mit dem Konzentrationsverlauf in beiden Reaktoren für den Fall dargestellt, dass $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ gilt und als Zielzustand $\mathbf{x}_e = \mathbf{x}(2) = (1 \frac{\text{mol}}{\text{l}} \ 5 \frac{\text{mol}}{\text{l}})'$ vorgegeben ist. Alle Konzentrationen werden in $\frac{\text{mol}}{\text{l}}$ gemessen. Erwartungsgemäß erreicht das System zur Zeit $t = t_e = 2 \text{ min}$ den vorgegebenen Zustand $\mathbf{x}_e$. Das Beispiel zeigt jedoch auch, dass der durch den vorgegebenen Endzustand festgelegte relativ große Konzentrationsunterschied zwischen $x_1 = 1 \frac{\text{mol}}{\text{l}}$ und $x_2 = 5 \frac{\text{mol}}{\text{l}}$ nur mit einer sehr großen Stellgröße erreicht werden kann. Der Zufluss muss mit betragsmäßig großen Konzentrationen und mit großen Konzentrationsänderungen beaufschlagt werden.

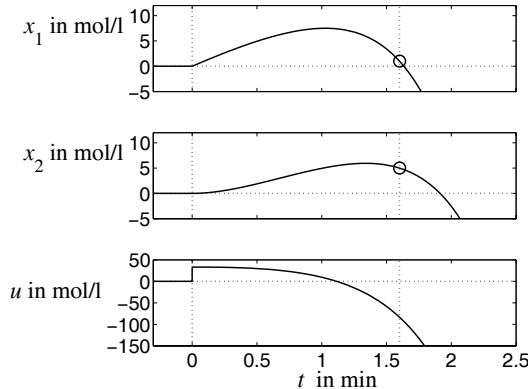


Abb. 3.3: Steuerung der Rührkesselreaktoren in den vorgegebenen Zustand

Wenn ein System vollständig steuerbar ist, so kann es in beliebig kurzer Zeit in den gewünschten Endzustand überführt werden. Abbildung 3.3 zeigt, dass es möglich ist, durch eine geeignete Wahl der Stellgröße den hier betrachteten Endzustand auch zur Zeit $t_e = 1,6 \text{ min}$ zu erreichen. Allerdings vergrößert sich bei einer Verkürzung der Umsteuerzeit die Stellgröße.

Diskussion. Das Beispiel der Rührkesselreaktoren zeigt sehr anschaulich, was die Steuerbarkeit nach Definition 3.1 bedeutet und auch was sie nicht bedeutet. Wollte man vom Standpunkt praktischer Regelungsprobleme definieren, was Steuerbarkeit bedeutet, so würde man sicherlich von einem steuerbaren System fordern, dass es durch geeignete Wahl der

Stellgröße in einen vorgeschriebenen Zustand geführt werden kann und dann dort verbleibt, so wie es in Regelungsaufgaben typischerweise gefordert ist. Die Eigenschaft der Steuerbarkeit nach Definition 3.1 gewährleistet, dass das System die erste Forderung erfüllt: Steuerbare Systeme können durch geeignete Wahl der Stellgrößen zwischen zwei beliebigen Punkten x_0 und x_e im Zustandsraum „hin- und hergefahren“ werden.

Die zweite Forderung ist jedoch i. Allg. nicht erfüllt. Mit der Steuerbarkeit ist nicht die Möglichkeit verbunden, das System im vorgegebenen Endwert x_e festzuhalten. In Abb. 3.2 ist zu sehen, dass das System den Zustand x_e nicht beibehält. Auch wenn man die Steuerung $u(t)$ für $t > 2 \text{ min}$ anders festlegt als durch Gl. (3.6), verlässt das System den vorgegebenen Endzustand wieder. Um in den gekoppelten Rührkesselreaktoren ein Konzentrationsgefälle, wie es durch $x_e = (1 \frac{\text{mol}}{\text{l}} \quad 5 \frac{\text{mol}}{\text{l}})'$ vorgeschrieben ist, über längere Zeit aufrechterhalten zu können, ist mehr als die eine Stellgröße notwendig, die hier zur Verfügung steht.

Diese Beobachtung gilt allgemein. Bei einem über eine Eingangsgröße u vollständig steuerbaren System reicht tatsächlich diese eine Stellgröße u aus, um das System in einen beliebigen Punkt des n -dimensionalen Zustandsraumes zu überführen. Die Steuerbarkeit sichert jedoch nicht, dass das System dort durch geeignete Wahl von u gehalten werden kann. Um dies zu ermöglichen, wären n Stellgrößen notwendig.

Auf einen zweiten Aspekt soll am Beispiel der Rührkesselreaktoren hingewiesen werden. Die Möglichkeit, ein steuerbares System zwischen beliebigen Zuständen und in beliebig kurzer Zeit umzusteuern, ist durch die Linearität des Modells begründet. Sobald man die Stellgrößenbeschränkungen berücksichtigt, wird die Menge der erreichbaren Zustände eingeschränkt. So kann man bei den Rührkesselreaktoren keine negativen Konzentrationen einstellen. Da u andererseits Abweichungen von einem Arbeitspunkt $\bar{u}$ beschreibt, ist für die Rührkesselreaktoren die angegebene Eingangsgröße nur dann realisierbar, wenn die Konzentration im Arbeitspunkt $\bar{u}$ so hoch liegt, dass die negativen Werte von u immer noch positiven Konzentrationswerten im Zulauf entsprechen. Wird die Endzeit vergrößert und liegen die Konzentrationen im Endzustand nicht zu weit auseinander, so kann der gewünschte Endzustand auch mit wesentlich kleineren Stellamplituden erreicht werden. Die mit dem linearen Modell erhaltenen Aussagen sind dann auch unter Berücksichtigung der durch die Stellgrößenbeschränkungen entstehenden, jedoch nicht aktiven Nichtlinearitäten gültig. $\square$

Umsteuerung mit stückweise konstanter Stellgröße. Die Definition der Steuerbarkeit bezieht sich auf die *Existenz* einer Funktion $u_{[0,t_e]}$, durch die das System vom Zustand x_0 in einen vorgegebenen Endzustand x_e überführt wird, sagt aber nichts darüber aus, wie man eine solche Funktion finden kann. Mit Gl. (3.6) wurde zwar bereits eine derartige Funktion angegeben, aber diese Gleichung ist schwer interpretierbar und gibt keine intuitiv verständliche Antwort auf die Frage, wie der Stellgrößenverlauf für die gestellte Umsteuerungsaufgabe gewählt werden muss.

Die folgenden Untersuchungen sollen diese Frage beantworten. Für das System

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad x(0) = x_0$$

mit einer Eingangsgröße $u(t)$ wird gezeigt, wie die Amplituden einer stückweise konstanten Stellgröße zu wählen sind, damit das System den Endzustand $x(t_e) = x_e$ annimmt. Entsprechend Abb. 3.4 gelten für den hier betrachteten Stellgrößenverlauf die Beziehungen

$$u(t) = u_i \quad \text{für } t_i \leq t < t_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Die Amplituden $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ sind so zu bestimmen, dass sich das System zum Zeitpunkt t_e im gewünschten Endzustand befindet.

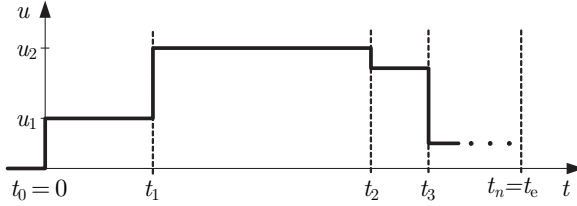


Abb. 3.4: Stückweise konstante Stellgröße

Für die stückweise konstante Stellgröße erhält man den Zustand zur Zeit t_e aus der Gleichung

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_e) = & e^{\mathbf{A}t_e} \mathbf{x}_0 + \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_e - \tau)} \mathbf{b} d\tau u_0}_{\mathbf{p}_0} + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} e^{\mathbf{A}(t_e - \tau)} \mathbf{b} d\tau u_1}_{\mathbf{p}_1} \\ & + \dots + \underbrace{\int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{\mathbf{A}(t_e - \tau)} \mathbf{b} d\tau u_{n-1}}_{\mathbf{p}_{n-1}}. \end{aligned}$$

Die Forderung $\mathbf{x}(t_e) \stackrel{!}{=} \mathbf{x}_e$ führt damit auf die Beziehung

$$\mathbf{x}_e - e^{\mathbf{A}t_e} \mathbf{x}_0 = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{p}_i u_i = (\mathbf{p}_0 \ \mathbf{p}_1 \ \dots \ \mathbf{p}_{n-1}) \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Wenn die aus den Vektoren $\mathbf{p}_i$ zusammengesetzte Matrix invertierbar ist, erhält man die gesuchten Amplituden der Stellgröße wie folgt:

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = (\mathbf{p}_0 \ \mathbf{p}_1 \ \dots \ \mathbf{p}_{n-1})^{-1} (\mathbf{x}_e - e^{\mathbf{A}t_e} \mathbf{x}_0). \quad (3.12)$$

Mit einer ähnlichen Argumentation wie bei Gl. (3.5) kann man zeigen, dass es für alle Systeme, die das Kalmankriterium (3.4) erfüllen, möglich ist, Zeitpunkte t_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) so festzulegen, dass die inverse Matrix existiert. Folglich gilt:

|| Ein vollständig steuerbares System kann mit einer geeignet gewählten, stückweise konstanten Eingangsgröße in einen beliebigen Endzustand $\mathbf{x}_e$ überführt werden.

Gleichung (3.11) zeigt, wie der Stellgrößenverlauf zu wählen ist. Der auf der linken Seite stehende Vektor

$$\mathbf{p} = \mathbf{x}_e - e^{A t_e} \mathbf{x}_0 \quad (3.13)$$

beschreibt die Differenz zwischen dem gewünschten Endzustand und dem Zustand, den das System aufgrund seiner Eigenbewegung zur Zeit t_e annimmt. Durch die Wahl der Stellgröße muss die erzwungene Bewegung zur Zeit t_e den Wert dieser Differenz annehmen. Dies ist dann der Fall, wenn der Vektor $\mathbf{p}$ eine Linearkombination der Vektoren $\mathbf{p}_i$ darstellt. Damit dies für beliebige Zustände $\mathbf{x}_0$ und $\mathbf{x}_e$ möglich ist, müssen die Vektoren $\mathbf{p}_i$ den n -dimensionalen Raum aufspannen. Dies wird bei vollständig steuerbaren Systemen durch die Wahl der Umschaltzeitpunkte t_i der stückweise konstanten Eingangsgröße gesichert. Die Stellamplituden u_i sind dann gerade die Faktoren in der auf der rechten Seite von Gl. (3.11) stehenden Linearkombination.

Die Wahl der Stellgröße dient also dem Ziel, das System in n Zeitintervallen $[t_i, t_{i+1}]$, ($i = 0, 1, \dots, n-1$) entlang der Vektoren $\mathbf{p}_i$ so zu bewegen, dass die gesamte Bewegung zum Zeitpunkt t_e gerade dem Vektor $\mathbf{p}$ entspricht. Dabei geben die Amplituden u_i der Stellgröße die „Länge“ der Bewegung an.

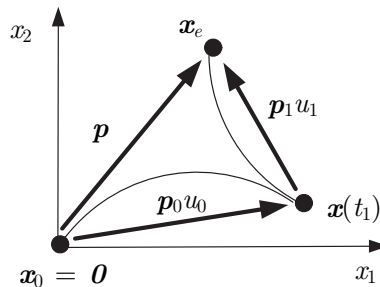


Abb. 3.5: Überführung eines Systems zweiter Ordnung in den Zustand $\mathbf{x}_e$

Abbildung 3.5 zeigt dies für ein System zweiter Ordnung mit $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Die durchgezogene Linie stellt die Bewegung des Systems im Zustandsraum dar. Zur Zeit t_1 befindet sich das System im Zustand $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{p}_0 u_0$. Um vom Anfangszustand zum Endzustand $\mathbf{x}_e$ zu kommen, wird das System entlang der beiden Vektoren $\mathbf{p}_0$ und $\mathbf{p}_1$ bewegt. Wenn diese beiden Vektoren linear unabhängig sind, kann durch eine geeignete Wahl von u_0 und u_1 jeder beliebige Punkt im zweidimensionalen Zustandsraum angesteuert werden.

Beispiel 3.1 (Forts.) Steuerbarkeit gekoppelter Rührkesselreaktoren

Für die gekoppelten Rührkesselreaktoren wird wie bisher mit $t_e = 1,6$ min sowie mit der willkürlich gewählten Zeit $t_1 = 1$ min gearbeitet. Durch eine geeignete Festlegung von u_0 und u_1 soll der Zustand $\mathbf{x}_e = (1 \frac{\text{mol}}{\text{l}} \quad 5 \frac{\text{mol}}{\text{l}})'$ vom Nullzustand aus erreicht werden.

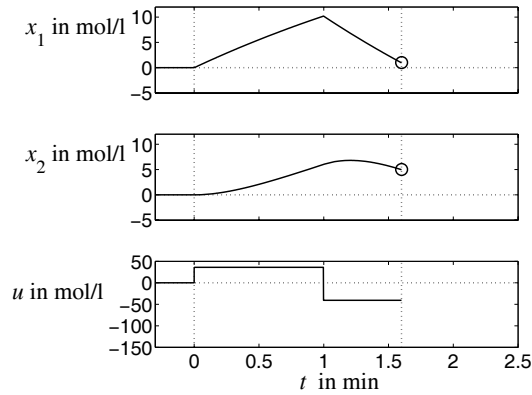


Abb. 3.6: Umsteuerung der Rührkesselreaktoren mit stückweise konstanter Eingangsgröße

Mit den angegebenen Parametern erhält man die Vektoren

$$p_0 = \begin{pmatrix} 0,232 \\ 0,226 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p_1 = \begin{pmatrix} 0,181 \\ 0,078 \end{pmatrix},$$

die linear unabhängig sind. Folglich kann jeder beliebige Endzustand durch eine geeignete Wahl von u_0 und u_1 erzeugt werden. Für den hier gewählten Zustand x_e erhält man aus Gl. (3.11) die Werte

$$u_0 = 36,03 \quad \text{und} \quad u_1 = -40,62.$$

Das Verhalten der Reaktoren unter dem Einfluss dieser Steuerung ist in Abb. 3.6 dargestellt.

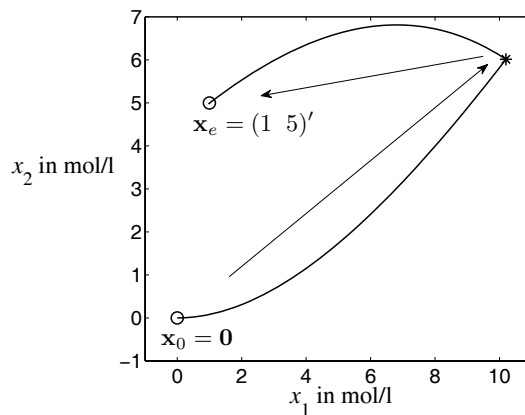


Abb. 3.7: Darstellung der Umsteuerung im Zustandsraum

Abbildung 3.7 zeigt, wie sich das System mit der stückweise konstanten Stellgröße bewegt. Die angegebenen Pfeile entsprechen den Vektoren $p_0 u_0$ und $p_1 u_1$ aus Abb. 3.5.

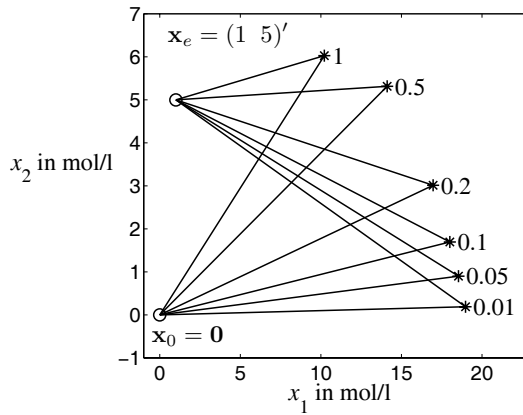


Abb. 3.8: Umsteuerung bei unterschiedlicher Wahl des Zeitpunktes t_1 (in Minuten)

Während der Vektor p aus Gl. (3.13) nur von der gewählten Endzeit t_e abhängt und für das hier behandelte Beispiel wegen des verschwindenden Anfangszustandes mit dem Endzustand übereinstimmt ($p = x_e$), beeinflusst die Wahl des Zeitpunktes t_1 die Vektoren p_0 und p_1 . Diese Vektoren sind für unterschiedliche Werte von t_1 in Abb. 3.8 dargestellt, wobei die Linien vom Anfangszustand x_0 zu dem durch einen Stern gekennzeichneten Zustand $x(t_1)$ die Vektoren $p_0 u_0$ und die Linien vom Stern zum Endzustand x_e die Vektoren $p_1 u_1$ repräsentieren. Die über den mit $t_1 = 1$ min gekennzeichneten Stern führenden Linien entsprechen den Pfeilen aus Abb. 3.7. Offensichtlich sind alle hier gezeigten Vektorpaare linear unabhängig. Das heißt, dass die Umsteuerung für alle hier betrachteten Zeiten t_1 mit einer stückweise konstanten Eingangsgröße möglich ist. $\square$

Anwendung des Kalmankriteriums. Das Kriterium kann bei Systemen mit einem Eingang durch Berechnung der Determinante überprüft werden, wobei

$$\det S_S \neq 0$$

gelten muss. Für Systeme mit mehreren Eingängen ist die Rangbestimmung nicht ganz so einfach. Man kann hier ausnutzen, dass der Rang einer rechteckigen Matrix S gleich der Anzahl der von null verschiedenen Singulärwerte $\sigma_i(S)$ ist (vgl. Gl. (A2.58)). Damit die Matrix S_S den Rang n hat, muss also die (n, n) -Matrix $S_S S'_S$ vollen Rang haben, was auf die Bedingung

$$\det S_S S'_S \neq 0$$

führt.

Steuerbarkeitsindizes. Das Kalmankriterium fordert, dass es in der Steuerbarkeitsmatrix S_S n linear unabhängige Spalten gibt. Für Systeme mit einem Eingang werden diese Spalten durch b und die Produkte $Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b$ gebildet. Bei Mehrgrößensystemen braucht man außer der Matrix B u. U. gar nicht alle Produkte $AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B$, um diese n linear unabhängigen Spalten zu finden. Es reicht möglicherweise, wenn in die Steuerbarkeitsmatrix S_S nur ν Teilmatrizen geschrieben werden, das Kalmankriterium also auf

$$S_S(\nu) = (B \ AB \ \dots \ A^{\nu-1}B)$$

angewendet wird. Die kleinste Zahl ν , für die

$$\text{Rang } S_S(\nu) = n$$

gilt, wird als *Steuerbarkeitsindex* bezeichnet.

Man kann diese Untersuchungen noch etwas verfeinern, indem man den Beitrag betrachtet, den die einzelnen Spalten b_i der Matrix B zum Rang der Steuerbarkeitsmatrix leisten. Dafür kann man zunächst die Spalten der Steuerbarkeitsmatrix S_S so umordnen, dass zuerst alle mit b_1 gebildeten Spalten stehen, dahinter die mit b_2 gebildeten usw.

$$\tilde{S}_S = (b_1 \ Ab_1 \ \dots \ A^{n-1}b_1 \ b_2 \ Ab_2 \ \dots \ A^{n-1}b_2 \ \dots \ b_m \ Ab_m \ \dots \ A^{n-1}b_m).$$

Diese Umformung ändert nichts am Rang der Matrix, so dass das Kalmankriterium auch auf die neu entstandene Matrix angewendet werden kann.

Ist der Rang der Matrix $\tilde{S}_S$ gleich n , so gibt es eine Menge von n linear unabhängigen Spalten dieser Matrix. Man kann diese Spalten auf unterschiedliche Weise auswählen. Wieviele Spalten davon zum Eingang u_i gehören, hängt davon ab, wieviele der Produkte $A^j b_i$ ($j = 0, 1, \dots, n-1$) untereinander linear unabhängig sind. Die Zahl dieser linear unabhängigen Spalten wird als **KRONECKER-Index** ν_i des i -ten Eingangs bezeichnet. ν_i ist also die kleinste Zahl, für die der Vektor $A^{\nu_i} b_i$ von den Vektoren $b_i, Ab_i, A^2b_i, \dots, A^{\nu_i-1}b_i$ linear abhängig ist, während diese ν_i Vektoren untereinander linear unabhängig sind.

Man kann nun insgesamt n linear unabhängige Spalten der Matrix $\tilde{S}_S$ auf folgende Weise auswählen. Zuerst wählt man r_1 unabhängige Spalten, die zum Eingang 1 gehören ($r_1 \leq \nu_1$). Dann verwendet man b_2 sowie weitere zum Eingang 2 gehörenden Spalten, solange diese von den bereits ausgewählten Spalten linear unabhängig sind. Wenn noch weitere Spalten notwendig sind, so verwendet man nun die zum Eingang 3 gehörigen usw. Die entstehende Matrix hat die Form

$$\hat{S}_S = (b_1 \ Ab_1 \ \dots \ A^{r_1}b_1 \ b_2 \ Ab_2 \ \dots \ A^{r_2}b_2 \ \dots \ b_m \ Ab_m \ \dots \ A^{r_m}b_m),$$

wobei gilt

$$\sum_{i=1}^m r_i = n$$

und

$$\text{Rang } \hat{S}_S = n.$$

Es gibt i. Allg. mehrere Matrizen $\hat{S}_S$, denn je nachdem, wie man die Eingänge nummeriert, verändert sich die Anzahl r_i der vom i -ten Eingang verwendeten Spalten.

3.1.3 Steuerbarkeit der kanonischen Normalform

Die Steuerbarkeit wird im Folgenden mit Hilfe der kanonischen Normalform des Zustandsraummodells untersucht, um die Steuerbarkeit in Bezug zu den einzelnen Eigenvorgängen des Systems zu setzen. Unter der Voraussetzung, dass die Matrix A diagonalisierbar ist, kann das Modell (3.1) bekanntlich mit Hilfe der Transformation

$$\tilde{x}(t) = V^{-1}x(t) \quad (3.14)$$

in die Form (2.5)

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \text{diag } \lambda_i \tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t), \quad \tilde{x}(0) = V^{-1}x_0 \quad (3.15)$$

mit

$$\tilde{B} = V^{-1}B$$

überführt werden.

Da sich die kanonischen Zustandsvariablen nicht gegenseitig beeinflussen, kann man die Betrachtungen zunächst auf die i -te Zeile der Gl. (3.15) beschränken

$$\frac{d\tilde{x}_i(t)}{dt} = \lambda_i \tilde{x}_i(t) + \tilde{b}'_i u(t), \quad \tilde{x}_i(0) = \tilde{x}_{i0},$$

wobei $\tilde{b}'_i$ die i -te Zeile der Matrix $\tilde{B}$ ist. Wenn $\tilde{b}'_i$ eine Nullzeile ist, so kann die i -te Zustandsvariable durch den Eingang u nicht beeinflusst werden und $\tilde{x}_i(t)$ bewegt sich entsprechend der Beziehung

$$\tilde{x}_i(t) = e^{\lambda_i t} \tilde{x}_i(0).$$

Folglich gilt für $\tilde{x}_i(0) = 0$

$$\tilde{x}_i(t) = 0 \quad \text{für alle } t$$

und es kann *kein* beliebiger Endzustand $\tilde{x}(t_e)$ angesteuert werden. Sobald die Matrix $\tilde{B}$ eine Nullzeile besitzt, kann also das System nicht vom Nullzustand zu einem beliebigen Endzustand überführt werden. Es ist nicht vollständig steuerbar.

Der Umkehrschluss, dass das System vollständig steuerbar ist, wenn $\tilde{B}$ keine Nullzeile besitzt, gilt nur unter einer zusätzlichen Voraussetzung an die Eigenwerte der Matrix A . Dies wird zunächst für ein System mit einem Eingang untersucht.

Systeme mit einem Eingang. Die Steuerbarkeitsmatrix des Paares $(\text{diag } \lambda_i, \tilde{\mathbf{b}})$ heißt

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_S &= \left(\tilde{\mathbf{b}} \quad \text{diag } \lambda_i \tilde{\mathbf{b}} \quad \text{diag } \lambda_i^2 \tilde{\mathbf{b}} \dots \text{diag } \lambda_i^{n-1} \tilde{\mathbf{b}} \right) \\ &= \text{diag } \tilde{b}_i \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{b}_i$ die Elemente des Vektors $\tilde{\mathbf{b}}$ sind und $\text{diag } \tilde{b}_i$ eine Diagonalmatrix mit den Hauptdiagonalelementen $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n$ ist. Das Produkt dieser beiden Matrizen ist regulär, wenn außer $\tilde{b}_i \neq 0$ für $i = 1, 2, \dots, n$ auch noch

$$\lambda_i \neq \lambda_j \quad \text{für alle } i \neq j \quad (3.16)$$

gilt, denn die zweite Matrix ist eine vandermondesche Matrix, deren Determinante sich entsprechend der Beziehung (A2.69) berechnet:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Das heißt, das System ist genau dann vollständig steuerbar, wenn $\tilde{\mathbf{b}}$ kein Nullelement enthält und wenn alle Eigenwerte einfach sind.

Die Bedingung (3.16) kann man folgendermaßen interpretieren. Es wird angenommen, dass die Eigenwerte λ_1 und λ_2 entgegen der Bedingung (3.16) gleich sind ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$). Wenn die Matrix $\mathbf{A}$, wie vorausgesetzt wurde, diagonalisierbar ist, so gibt es zu diesen Eigenwerten zwei linear unabhängige Eigenvektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$. Für diese Eigenvektoren gelte $\mathbf{v}_1' \mathbf{b} = \tilde{b}_1 \neq 0$ und $\mathbf{v}_2' \mathbf{b} = \tilde{b}_2 \neq 0$, denn ansonsten wäre das System ohnehin nicht vollständig steuerbar. Die zugehörigen kanonischen Zustandsvariablen genügen den Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{x}_1(t) &= \lambda \tilde{x}_1(t) + \tilde{b}_1 u(t) \\ \frac{d}{dt} \tilde{x}_2(t) &= \lambda \tilde{x}_2(t) + \tilde{b}_2 u(t). \end{aligned}$$

Wenn sich das System zur Zeit $t = 0$ in der Ruhelage befindet, gilt für eine beliebige Steuerung $u(t)$ zwischen den beiden Zustandsvariablen die Beziehung

$$\tilde{x}_1(t) = \frac{\tilde{b}_1}{\tilde{b}_2} \tilde{x}_2(t). \quad (3.17)$$

Das System kann also in keinen Endzustand $\tilde{x}_e$ gesteuert werden, für den diese Beziehung nicht gilt. Es ist nicht vollständig steuerbar.

Aus dieser Betrachtung erhält man die folgenden Regeln bezüglich der Steuerbarkeit von Systemen mit einer Eingangsgröße, die für einfache Anwendungen sehr nützlich sind:

- Wenn die Systemmatrix diagonalisierbar ist und mindestens einen mehrfachen Eigenwert besitzt, so ist das System mit einer Eingangsgröße nicht vollständig steuerbar.
- Wenn die Systemmatrix diagonalisierbar ist und das System mit einer Eingangsgröße vollständig steuerbar ist, so hat es keine mehrfachen Eigenwerte.

Man sollte jedoch beachten, dass bei einer nicht diagonalähnlichen Systemmatrix mehrfache Eigenwerte auftreten können, ohne dass dadurch sofort auf die Steuerbarkeitseigenschaften geschlossen werden kann.

Systeme mit m Eingängen. Um die Steuerbarkeit eines Systems mit mehrfachen Eigenwerten und diagonalähnlicher Systemmatrix zu sichern, müssen die einzelnen Eingangsvariablen in unterschiedlicher Weise in die Zustandsgleichungen derjenigen kanonischen Zustandsvariablen eingehen, die zu denselben Eigenwerten gehören. Wenn

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = \lambda$$

gilt, so sind die ersten p Zustandsgleichungen für diese Steuerbarkeitsanalyse von Bedeutung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{x}_1(t) &= \lambda\tilde{x}_1(t) + \tilde{\mathbf{b}}'_1\mathbf{u}(t) \\ \frac{d}{dt}\tilde{x}_2(t) &= \lambda\tilde{x}_2(t) + \tilde{\mathbf{b}}'_2\mathbf{u}(t) \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt}\tilde{x}_p(t) &= \lambda\tilde{x}_p(t) + \tilde{\mathbf{b}}'_p\mathbf{u}(t). \end{aligned}$$

Das System ist vollständig steuerbar, wenn die p Zeilenvektoren

$$\mathbf{v}'_i\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{b}}'_i$$

untereinander linear unabhängig sind. Da $\tilde{\mathbf{b}}'_i$ m -dimensional ist, folgt als notwendige Bedingung daraus, dass die Eigenwerte eines Systems mit m Eingangsgrößen und diagonalähnlicher Systemmatrix höchstens m -fach auftreten können.

Diese Untersuchungen sind in dem folgenden Steuerbarkeitskriterium zusammengefasst.

Satz 3.2 (Steuerbarkeitskriterium von GILBERT)

Das System $(\text{diag } \lambda_i, \tilde{B})$, dessen Zustandsraummodell in kanonischer Normalform vorliegt, ist genau dann vollständig steuerbar, wenn die Matrix $\tilde{B}$ keine Nullzeile besitzt und wenn die p Zeilen $\tilde{b}_i'$ der Matrix $\tilde{B}$, die zu den kanonischen Zustandsgrößen eines p -fachen Eigenwertes gehören, linear unabhängig sind.

Steuerbarkeit der Eigenvorgänge. Die Steuerbarkeit ist in Definition 3.1 als eine Eigenschaft des gesamten Systems (A, B) definiert worden. Bei der Steuerbarkeitsanalyse hat man deshalb nur zu entscheiden, ob das System als Ganzes vollständig steuerbar ist oder nicht.

Die mit dem Zustandsraummodell in kanonischer Normalform durchgeführten Untersuchungen haben nun aber gezeigt, dass die vollständige Steuerbarkeit bedeutet, dass alle kanonischen Zustandsvariablen unabhängig voneinander durch die Eingangsgrößen beeinflusst werden können. Wenn das System nicht vollständig steuerbar ist, so liegt dies daran, dass eine oder mehrere kanonische Zustandsvariablen nicht oder nicht unabhängig voneinander beeinflusst werden können.

Aus diesem Grunde bezieht man häufig die Steuerbarkeit auf die Eigenvorgänge $e^{\lambda_i t}$ bzw. sogar auf die Eigenwerte λ_i der Matrix A und bezeichnet den Eigenvorgang bzw. den Eigenwert als steuerbar oder nicht steuerbar. Sind alle Eigenvorgänge bzw. Eigenwerte steuerbar, so ist das System vollständig steuerbar entsprechend Definition 3.1. Ist das System nicht vollständig steuerbar, so gibt es mindestens einen Eigenvorgang bzw. Eigenwert, der nicht steuerbar ist.

Diese Sprachregelung ist zwar für Systeme mit mehrfachen Eigenwerten problematisch, weil es Systeme geben kann, bei denen ein „Exemplar“ eines mehrfachen Eigenwertes steuerbar ist, während ein anderes nicht steuerbar ist. Für die hier behandelten Anwendungen spielen diese Schwierigkeiten jedoch keine Rolle.

Vorteilhaft ist der Bezug der Steuerbarkeitseigenschaft zu den Eigenwerten vor allem bei nicht vollständig steuerbaren Systemen. Man kann dann überprüfen, welche Ursachen das Fehlen der vollständigen Steuerbarkeit hat und welche Auswirkungen auf das Regelkreisverhalten daraus abgeleitet werden können. Gegebenenfalls weiß man auch, wie man die fehlende Steuerbarkeit durch Veränderung der Eingriffsmöglichkeiten in das System beheben kann.

Man sollte jedoch darauf achten, dass zu Eigenvorgängen und Eigenwerten Bezug genommen wird. Nur im Falle kanonischer Zustandsvariablen kann man auch von der Steuerbarkeit einzelner Zustandsvariablen $\tilde{x}_i$ sprechen.

Aufgabe 3.1 Steuerbarkeit von Systemen mit mehrfachen Eigenwerten

Betrachten Sie ein System mit m Eingängen, das einen p -fachen Eigenwert λ besitzt. Beweisen Sie, dass folgende Aussagen richtig sind:

- Das System kann nur dann vollständig steuerbar sein und gleichzeitig eine diagonal-ähnliche Systemmatrix A besitzen, wenn die Vielfachheit des Eigenwertes die Zahl der Eingänge nicht übersteigt ($p \leq m$).
- Wenn die Vielfachheit des Eigenwertes die Zahl der Eingänge übersteigt ($p > m$), so ist das System entweder nicht vollständig steuerbar oder es hat keine diagonalähnliche Systemmatrix.

Untersuchen Sie anhand dieser Aussagen die Steuerbarkeit der Reihenschaltung und der Parallelschaltung zweier PT_1 -Glieder mit gleichen Zeitkonstanten. $\square$

3.1.4 Steuerbarkeitskriterium von HAUTUS

In diesem Abschnitt wird das von HAUTUS vorgeschlagene Steuerbarkeitskriterium abgeleitet. Es ermöglicht nicht nur den Test, *ob* das System vollständig steuerbar ist, sondern es gibt gegebenenfalls auch an, welche Eigenwerte nicht steuerbar sind. Das Kriterium ist äquivalent dem Kalmankriterium, wie folgende Überlegung zeigt.

Wenn das System nicht vollständig steuerbar ist, so sind die n Zeilen der Steuerbarkeitsmatrix S_S linear abhängig und es gibt einen n -dimensionalen Zeilenvektor q' , für den das Produkt

$$q' S_S = q' (B \ AB \ \dots \ A^{n-1} B) = 0'$$

einen $n \cdot m$ -dimensionalen Nullvektor darstellt. Dabei gilt insbesondere

$$q' B = 0', \quad (3.18)$$

wobei $0'$ ein m -dimensionaler Nullvektor ist. Da die ersten n Potenzen von A linear unabhängig sind, stellen die Produkte $q' A^i$ linear unabhängige Zeilenvektoren dar. Damit das Produkt $q' S_S$ tatsächlich verschwindet, muss q' ein Linkseigenvektor von A sein. Es muss also

$$q' A = \lambda q'$$

bzw.

$$q'(\lambda I - A) = 0'$$

gelten. λ stellt dabei einen beliebigen Eigenwert von A dar.

Damit das System vollständig steuerbar ist und deshalb die angegebenen Bedingungen nicht erfüllt sind, darf also für keinen Eigenvektor von A die Beziehung (3.18) gelten. Dieser Sachverhalt wird im Steuerbarkeitskriterium von Hautus gefordert: Das System (A, B) ist genau dann vollständig steuerbar, wenn die Bedingung

$$\text{Rang}(\lambda I - A \ B) = n \quad (3.19)$$

für alle komplexen Werte λ erfüllt ist. In der zum Test herangezogenen Matrix $(\lambda I - A \ B)$ stehen die Matrizen $\lambda I - A$ und B nebeneinander, so dass es sich hierbei um eine $(n, n + m)$ -Matrix handelt.

Man kann dieses Kriterium vereinfachen, weil die Rangbedingung (3.19) für alle Werte von λ , die nicht mit Eigenwerten von $\mathbf{A}$ übereinstimmen, erfüllt ist, denn für diese λ hat bereits die links stehende Matrix $\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}$ den geforderten Rang n . Die angegebene Bedingung muss deshalb nur für die n Eigenwerte $\lambda_i \{ \mathbf{A} \}$ geprüft werden.

Satz 3.3 (Steuerbarkeitskriterium von HAUTUS)

Das System $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ ist genau dann vollständig steuerbar, wenn die Bedingung

$$\text{Rang}(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A} \quad \mathbf{B}) = n \quad (3.20)$$

für alle Eigenwerte λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) der Matrix $\mathbf{A}$ erfüllt ist.

Vergleicht man das Kalmankriterium mit dem Hautuskriterium, so wird offensichtlich, dass bei Anwendung der Bedingung (3.4) der Rang einer $(n, n \cdot m)$ -Matrix bestimmt werden muss, während die Bedingung (3.20) die Überprüfung des Ranges von n Matrizen der Dimension $(n, n + m)$ erfordert, wobei zuvor die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ zu bestimmen sind. Trotz dieses vergleichsweise großen Aufwandes, den das Hautuskriterium mit sich bringt, ist dieses Kriterium aus zwei Gründen häufig das zweckmäßigere. Erstens kann man das Hautuskriterium meist auch dann anwenden, wenn die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ Parametersymbole enthalten, die Elemente dieser Matrizen also nicht zahlenmäßig, sondern bezüglich ihrer Abhängigkeit von bestimmten Systemparametern vorgegeben sind. Zweitens zeigt das Hautuskriterium, welche Eigenwerte gegebenenfalls nicht steuerbar sind.

Das Hautuskriterium zeigt außerdem, dass die nicht steuerbaren Eigenwerte auch Eingangsentkopplungsnullstellen des Systems sind. Beide Bezeichnungen können synonym verwendet werden. Sie wurden getrennt voneinander eingeführt, wobei die Entkopplungsnullstellen im Abschnitt 2.5.3 als diejenigen Frequenzen definiert wurden, die die Rangbedingung (2.67) auf S. 53 erfüllen. Die Beziehung (2.67) hat keine direkte systemtheoretische Interpretation. Diese Interpretation wird jetzt nachgeliefert: Die Eingangsentkopplungsnullstellen sind diejenigen Frequenzen λ_i , deren zugehörige Eigenvorgänge $e^{\lambda_i t}$ nicht durch die Eingangsgröße $u(t)$ beeinflusst werden können. Die nicht steuerbaren Eigenwerte λ_i kommen deshalb nicht als Pole in der Übertragungsfunktionsmatrix $G(s)$ des betrachteten Systems vor.

3.1.5 Nicht vollständig steuerbare Systeme

Welche Gründe kann es geben, dass ein System nicht vollständig steuerbar ist? Drei wichtige Beispiele sollen im Folgenden diskutiert werden, um diese Frage zu beantworten.

|| Eigenvorgänge, die nicht mit dem Eingang verbunden sind, sind nicht steuerbar.

Dieser Fall wurde anhand des Zustandsraummodells in kanonischer Normalform schon verdeutlicht. Wenn die i -te Zeile $\tilde{b}_i$ der Matrix $\tilde{B}$ eine Nullzeile ist, so wirkt der Eingang u nicht auf die Bewegung der Zustandsvariablen $\tilde{x}_i$.

|| Zwei parallele Teilsysteme mit denselben dynamischen Eigenschaften sind nicht vollständig steuerbar.

Beispiel 3.2 Nicht steuerbare Eigenvorgänge in einer Parallelschaltung

Ein Beispiel ist in Abb. 3.9 angegeben. Zwei PT₁-Glieder mit den Zustandsvariablen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ und denselben Zeitkonstanten $T = -\frac{1}{\lambda}$ führen auf das Zustandsraummodell

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} u(t) \quad (3.21)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

für das die im Satz 3.2 angegebene Bedingung nicht gilt, denn die Elemente b_1 und b_2 können nicht gleichzeitig von null verschieden und linear unabhängig sein. Das System ist nicht vollständig steuerbar.

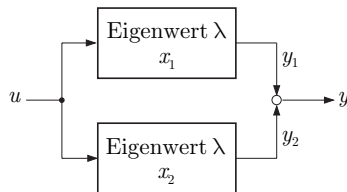


Abb. 3.9: Nicht vollständig steuerbare Parallelschaltung

Der Grund liegt in der Tatsache, dass beide Teilsysteme für sich genommen durch die Steuerung in beliebige Zustände gebracht werden können, es jedoch nicht möglich ist, beide Teilsysteme mit derselben Eingangsgröße in unabhängig voneinander vorgegebene Endwerte $x_1(t_e)$ und $x_2(t_e)$ zu steuern (vgl. Gl. (3.17)). Da sich beide Teilsysteme in gleicher Geschwindigkeit bewegen, kann das eine Teilsystem beispielsweise nicht in einen Zustand mit negativem Vorzeichen gebracht werden, während der andere Zustand positive Werte annimmt.

Diese Tatsache lässt sich auf die Parallelschaltung von Teilsystemen höherer Ordnung mit identischen dynamischen Eigenschaften verallgemeinern, wie in Aufgabe 3.6 nachgewiesen werden soll. □

|| Lassen sich in der Übertragungsfunktion eines Eingrößensystems ein oder mehrere Pole gegen Nullstellen kürzen, so kann man die mit den Polen verbundenen Eigenvorgänge nicht steuern (oder, wie später gezeigt wird, nicht beobachten).

Beispiel 3.3 Nicht vollständig steuerbare Reihenschaltung

Ein Beispiel ist die Reihenschaltung des Systems

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= (\lambda_1 + 1)x_1(t) + u(t) \\ y_1(t) &= x_1(t) + u(t)\end{aligned}$$

mit dem System

$$\begin{aligned}\dot{x}_2(t) &= \lambda_1 x_2(t) + y_1(t) \\ y(t) &= x_2(t),\end{aligned}$$

die in Abb. 3.10 dargestellt ist. Das Zustandsraummodell dieser Reihenschaltung lautet

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 + 1 & 0 \\ 1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= (0 \ 1) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Aus der Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathbf{S}_S = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 + 1 \\ 1 & \lambda_1 + 1 \end{pmatrix}$$

folgt, dass die Reihenschaltung nicht vollständig steuerbar ist. Mit dem Hautuskriterium kann man nachprüfen, dass λ_1 der nichtsteuerbare Eigenwert ist, denn es gilt

$$\text{Rang} \left(\lambda_1 \mathbf{I} - \begin{pmatrix} \lambda_1 + 1 & 0 \\ 1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 1.$$

Demgegenüber ist der Eigenwert $\lambda_1 + 1$ steuerbar.

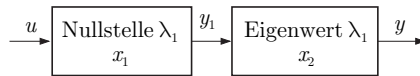


Abb. 3.10: Nicht vollständig steuerbare Reihenschaltung

Der Grund für die Nichtsteuerbarkeit des Eigenwertes λ_1 liegt darin, dass das erste Teilsystem der Reihenschaltung eine Nullstelle bei λ_1 besitzt, die gleichzeitig eine Entkopplungsnullstelle der Reihenschaltung ist. In der E/A-Beschreibung treten weder die Entkopplungsnullstelle noch der Eigenwert λ_1 auf. Die Übertragungsfunktion der Reihenschaltung heißt

$$G(s) = \frac{s - \lambda_1}{s - (\lambda_1 + 1)} \frac{1}{s - \lambda_1} = \frac{1}{s - (\lambda_1 + 1)}.$$

In ihr kürzen sich die Linearfaktoren der Entkopplungsnullstelle und des Eigenwertes des zweiten Teilsystems heraus, so dass die Reihenschaltung nur einen Pol bei $\lambda_1 + 1$ besitzt.

□

Steuerbarer Unterraum. Wohin kann man das System steuern, wenn es nicht vollständig steuerbar ist? Diese Frage kann unter Nutzung der Überlegungen aus dem Abschn. 3.1.2 beantwortet werden. Dort wurde in Gl. (3.5) gezeigt, dass nur solche Zielzustände erreicht werden können, die sich als Linearkombinationen der Spalten der Steuerbarkeitsmatrix S_S darstellen lassen. Die Menge dieser Zustände stellt einen Unterraum des Zustandsraumes $\mathbb{R}^n$ dar. Man spricht deshalb vom *steuerbaren Unterraum* des Systems (A, B) .

Für Systeme mit einem Eingang kann das System aus der Ruhelage $x_0 = \mathbf{0}$ also in alle diejenigen Zustände x_e gesteuert werden, die in der Form

$$x_e = c_0 b + c_1 A b + \dots + c_{n-1} A^{n-1} b \quad (3.23)$$

mit reellen Koeffizienten c_i geschrieben werden können. Ist die Steuerbarkeitsmatrix regulär, so sind alle Vektoren $A^i b$ linear unabhängig und jedes beliebige $x_e \in \mathbb{R}^n$ lässt sich in der angegebenen Form darstellen. Hat die Matrix S_S jedoch nur den Rang $p < n$, so sind nur p Vektoren linear unabhängig und x_e muss in einem p -dimensionalen Unterraum von $\mathbb{R}^n$ liegen, um in der angegebenen Weise darstellbar zu sein.

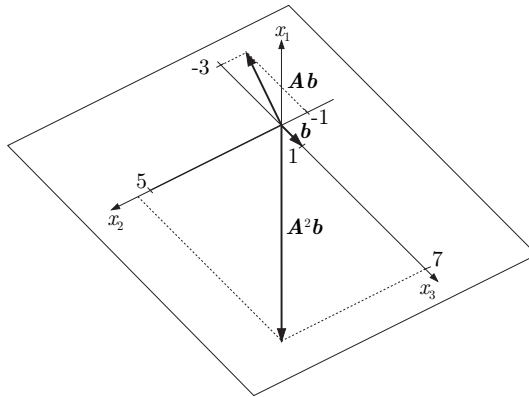


Abb. 3.11: Darstellung der Spalten der Steuerbarkeitsmatrix im dreidimensionalen Zustandsraum

Beispiel 3.4 Steuerbarer Unterraum eines Systems dritter Ordnung

Dieser Sachverhalt ist in Abb. 3.11 für das System

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

dargestellt. Die Vektoren

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

liegen in der x_2/x_3 -Ebene. Folglich können nur die in dieser Ebene liegenden Zustände aus der Ruhelage des Systems durch eine geeignet ausgewählte Steuerung $u_{[0,t_e]}$ erreicht werden. $\square$

Betrachtet man das System in kanonischer Normalform, so führt bekanntlich jede Nullzeile von $\tilde{\mathbf{B}}$ dazu, dass eine kanonische Zustandsvariable $\tilde{x}_i$ nicht steuerbar ist. Der steuerbare Teilraum ist dann gerade durch alle steuerbaren kanonischen Zustandsvariablen bestimmt.

Beispiel 3.5 Steuerbarkeit eines Systems in kanonischer Normalform

Ist die erste kanonische Zustandsvariable nicht steuerbar, weil die erste Zeile $\tilde{\mathbf{b}}'_1$ der Matrix $\tilde{\mathbf{B}}$ eine Nullzeile ist, so gilt für diese Zustandsvariable die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}_1(t) = \lambda_1\tilde{x}_1(t), \quad \tilde{x}_1(0) = \tilde{x}_{01}.$$

Das heißt, diese Zustandsvariable bewegt sich unbeeinflusst vom Eingang entsprechend der Beziehung

$$\tilde{x}_1(t) = e^{\lambda_1 t} \tilde{x}_{01}.$$

Wenn alle anderen Zustandsvariablen steuerbar sind, so können sie durch eine geeignete Steuerung $u_{[0,t_e]}$ zur Zeit t_e auf vorgegebene Werte $\tilde{x}_{e2}, \tilde{x}_{e3}, \dots, \tilde{x}_{en}$ gebracht werden. Der zur Zeit t_e erreichte Zustand ist dann

$$\tilde{\mathbf{x}}(t_e) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t_e} \tilde{x}_{01} \\ \tilde{x}_{e2} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{en} \end{pmatrix}.$$

Seine erste Komponente hängt von dem durch die Steuerung nicht beeinflussbaren Anfangswert $\tilde{x}_{01}$ ab, während alle anderen Komponenten vorgegeben werden können. Der steuerbare Unterraum ist der durch die kanonischen Zustandsvariablen $\tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \dots, \tilde{x}_n$ aufgespannte $(n-1)$ -dimensionale Raum. $\square$

Betrachtet man das Steuerbarkeitsproblem in umgekehrter Weise, bei der das System aus einem von null verschiedenen Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ in den Nullzustand $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ gebracht werden soll, so gelten die bisherigen Überlegungen sinngemäß für die Menge derjenigen Anfangszustände, für die diese Umsteuerung möglich ist.

Ganz allgemein kann man also die Bewegung $\mathbf{x}(t)$, die das System vom Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ unter der Einwirkung der Steuerung $\mathbf{u}(t)$ ausführt, in einen steuerbaren und einen nicht steuerbaren Anteil zerlegen:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\text{stb}}(t) + \mathbf{x}_{\text{nstb}}(t). \quad (3.24)$$

Verwendet man kanonische Zustandsvariablen, so ist diese Trennung sehr einfach vorzunehmen. Die Zustandsvariablen sind in Abhängigkeit davon, ob sie steuerbar sind oder nicht, den beiden Teilvektoren zuzuordnen. Für das im Beispiel 3.4 angegebene dreidimensionale System gilt

$$\mathbf{x}_{\text{stb}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_{\text{nstb}}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d. h., der steuerbare Zustand liegt in dem durch $\tilde{x}_2$ und $\tilde{x}_3$ aufgespannten Unterraum, während der nicht steuerbare Anteil in dem durch $\tilde{x}_1$ beschriebenen Unterraum liegt. Der Endzustand kann deshalb in der $\tilde{x}_2/\tilde{x}_3$ -Ebene beliebig gewählt werden. Hat das System einen Anfangszustand mit nicht verschwindender Komponente $\tilde{x}_1(0)$, so bewegt es sich in $\tilde{x}_1$ -Richtung unbeeinflusst von der Eingangsgröße.

Für allgemeine Zustandskoordinaten ist diese Aufteilung insofern schwieriger, als dass die Zustände keine Basisvektoren für die betreffenden Teilräume mehr sind, sondern, wie erläutert, die linear unabhängigen Spalten der Steuerbarkeitsmatrix als eine Basis des steuerbaren Unterraumes dienen.

Beispiel 3.6 Steuerbarer Unterraum eines Systems zweiter Ordnung

Das System

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u(t), \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist offensichtlich nicht vollständig steuerbar, denn die Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathbf{S}_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

hat den Rang eins. Wendet man das Hautuskriterium für die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = -4$ und $\lambda_2 = 1$ an, so sieht man, dass der stabile Eigenwert λ_1 nicht steuerbar ist, während λ_2 steuerbar ist.

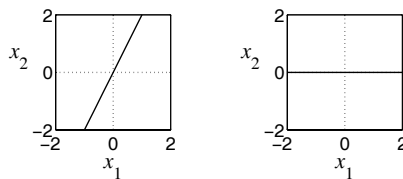


Abb. 3.12: Steuerbarer Unterraum für das Beispiel in allgemeiner (links) und in kanonischer Zustandsraumdarstellung (rechts)

Vom Nullzustand ausgehend kann das System nur Zustände $\mathbf{x}_e$ erreichen, die sich in der Form (3.23)

$$\mathbf{x}_e = \begin{pmatrix} x_1(t_e) \\ x_2(t_e) \end{pmatrix} = c_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

darstellen lassen, wobei hier nur ein Summand auftritt, da die zweite Spalte der Steuerbarkeitsmatrix von der ersten linear abhängig ist. Diese Zustände bilden eine Gerade im Zustandsraum $\mathbb{R}^2$, die durch die Richtung des Vektors $\mathbf{b}$ festgelegt ist (Abb. 3.12 (links)).

Transformiert man das System durch

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,34 & 0,45 \\ -1,26 & 0,63 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

in seine kanonische Normalform, so erhält man die Darstellung

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2,24 \\ 0 \end{pmatrix} u(t).$$

Der steuerbare Unterraum liegt jetzt gerade in Richtung der kanonischen Zustandsvariablen $\tilde{x}_1$, wie in Abb. 3.12 rechts zu sehen ist.

Für verschwindenden Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ wird das System durch die Eingangsgröße u entlang der $\tilde{x}_1$ -Achse gesteuert und kann dort auf einen bestimmten Endwert

$$\tilde{\mathbf{x}}_e = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{e1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

gebracht werden. Hat das System eine Anfangsauslenkung $\tilde{\mathbf{x}}(0) = (\tilde{x}_{01}, \tilde{x}_{02})'$, so bewegt es sich von diesem Anfangszustand ausgehend, wobei die Bewegung der zweiten Komponente

$$\tilde{x}_2(t) = e^{-4t} \tilde{x}_{02}$$

nicht von der Steuerung beeinflusst ist, während die erste Komponente durch die Steuerung zielgerichtet beeinflusst werden kann. Der zu einem vorgegebenen Zeitpunkt t_e erreichbare Zustand kann nur in der ersten Komponente festgelegt werden, was durch die Schreibweise

$$\mathbf{x}_e = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{e1} \\ * \end{pmatrix}$$

ausgedrückt wird, in der der Stern einen von der Steuerung unabhängigen Wert darstellt. Diese Endzustände liegen nicht auf der in Abb. 3.12 markierten Geraden, sondern auf einer Parallelen zu dieser Geraden, die durch den Punkt $\tilde{x}_2(t_e) = *$ verläuft. $\square$

Zerlegung eines Systems in ein steuerbares und ein nicht steuerbares Teilsystem. Die vorherigen Betrachtungen haben gezeigt, dass man bei einem nicht vollständig steuerbaren System zwischen den steuerbaren und den nicht steuerbaren Vorgängen unterscheiden kann, wobei diese Vorgänge in disjunkten Teilräumen des Zustandsraumes liegen. Man kann deshalb das gegebene System in ein vollständig steuerbares und ein nicht steuerbares Teilsystem zerlegen, wobei das steuerbare Teilsystem das Steuerbarkeitskriterium (Satz 3.1) erfüllt, während das nicht steuerbare Teilsystem gar nicht vom Eingang u beeinflusst wird (Abb. 3.13).

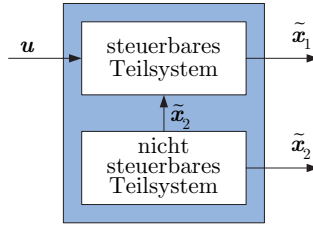


Abb. 3.13: Zerlegung eines nicht steuerbaren Systems in zwei Teilsysteme

Die Zerlegung erfolgt durch eine Zustandstransformation

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}\mathbf{x}(t),$$

wobei die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ so gewählt wird, dass nach einer Zerlegung des neuen Zustandsvektors $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ in zwei Teilvektoren $\tilde{\mathbf{x}}_1(t)$ und $\tilde{\mathbf{x}}_2(t)$ ein Zustandsraummodell der Form

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= (\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2) \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}_2(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.25)$$

entsteht. Hat die Steuerbarkeitsmatrix den Rang n_S

$$\text{Rang } \mathbf{S}_S = n_S < n,$$

dann haben die quadratische Matrix $\mathbf{A}_{11}$ und die Matrix $\mathbf{B}_1$ n_S Zeilen und der Vektor $\tilde{\mathbf{x}}_1(t)$ ist n_S -dimensional. Außerdem ist das Paar $(\mathbf{A}_{11}, \mathbf{B}_1)$ vollständig steuerbar. Gleichung (3.25) beschreibt ein aus zwei Teilsystemen zerlegbares System, bei dem das Teilsystem mit dem Zustandsvektor $\tilde{\mathbf{x}}_1(t)$ vollständig steuerbar und das andere Teilsystem überhaupt nicht vom Eingangsvektor $\mathbf{u}(t)$ beeinflusst wird (Abb. 3.13).

Es gibt mehrere Wege, die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ so zu wählen, dass das System in der angegebenen Weise zerlegt wird. Bei diagonalähnlichen Matrizen besteht eine Möglichkeit darin, die Transformationsmatrix entsprechend

$$\mathbf{T} = \mathbf{V}^{-1}$$

zu wählen, wobei $\mathbf{V}$ die Matrix der n Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{A}$ ist. Dann ist $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ der Vektor der kanonischen Zustandsvariablen und das System zerfällt nach einer Umordnung der Zustandsvariablen in der gewünschten Weise (wobei sogar $\mathbf{A}_{12} = \mathbf{O}$ gilt). Andererseits kann man die Matrix $\mathbf{T}$ aus den n_S linear unabhängigen Spalten der Steuerbarkeitsmatrix $\mathbf{S}_S$ bilden, wenn man diese Vektoren durch $n - n_S$ weitere linear unabhängige Vektoren ergänzt und alle diese Vektoren als Spalten von $\mathbf{T}$ verwendet.

Da der Zustandsvektor $\tilde{x}_2(t)$ nicht steuerbar ist, spielt er für die Übertragungseigenschaften des Systems keine Rolle. Für die Übertragungsfunktionsmatrix des Systems gilt deshalb

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = C_1(sI - A_{11})^{-1}B_1. \quad (3.26)$$

3.1.6 Erweiterungen

Ausgangssteuerbarkeit. Die bisherigen Überlegungen kann man auf das Problem übertragen, den Ausgang des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

vom Anfangswert $y(0)$ in einen gegebenen Endwert $y_e = y(t_e)$ zu überführen. Diese Eigenschaft wird Ausgangssteuerbarkeit genannt, während man die bisherige Steuerbarkeit genauer als Zustandssteuerbarkeit bezeichnet.

Bedingungen, unter denen das System vollständig ausgangssteuerbar ist, können in derselben Weise hergeleitet werden, wie dies für die Zustandssteuerbarkeit getan wurde. Insbesondere folgt aus der Bewegungsgleichung für den Ausgang eine Erweiterung der Gl. (3.5), die zeigt, dass der Ausgangsvektor alle diejenigen Werte annehmen kann, die sich als Linearkombination der Spalten von CB , CA^iB und D darstellen lassen. Das System (A, B, C, D) ist genau dann vollständig ausgangssteuerbar, wenn der Rang der Matrix

$$S_{AS} = (CB \quad CAB \quad CA^2B \quad \dots \quad CA^{n-1}B \quad D)$$

mit der Zahl der Ausgangsgrößen übereinstimmt:

Bedingung für Ausgangssteuerbarkeit: Rang $S_{AS} = r$.	(3.27)

Da, wie immer, vorausgesetzt wird, dass Rang $C = r$ gilt, ist jedes zustandssteuerbare System auch ausgangssteuerbar. Die Umkehrung gilt jedoch nicht. Das heißt, die Ausgangssteuerbarkeit ist eine schwächere Eigenschaft als die der Zustandssteuerbarkeit.

Steuerbarkeit in einem Unterraum. Eng verbunden mit der Ausgangssteuerbarkeit ist die Frage, ob man das System in dem durch

$$z(t) = Hx(t)$$

beschriebenen Teilraumes des Zustandsraums $\mathbb{R}^n$ in jeden beliebigen Punkt $z(t_e)$ steuern kann. Für die Dimension (r, n) der Matrix H gelte $r < n$. Als notwendige und hinreichende Bedingung für die vollständige Steuerbarkeit im Raum $\mathbb{R}^r$ der Vektoren z muss die Testmatrix

$$S_{SH} = HS_S = (HB \ HAB \ HA^2B \ \dots \ HA^{n-1}B)$$

vollen Rang haben. Die für die Ausgangssteuerbarkeit maßgebende Matrix S_{AS} erhält man für nicht sprungfähige Systeme ($D = O$) aus dieser Beziehung mit $C = H$.

Steuerbarkeitsmaße. Bisher wurde bezüglich der Steuerbarkeit die Frage gestellt, ob das System in beliebig vorgegebene Zustände gesteuert werden kann. Wenn man diese Umsteuerung praktisch ausführen will, so ist es auch interessant zu wissen, wie gut das System steuerbar ist, wie groß also die Stellamplituden für diese Umsteuerung sein müssen. Im Beispiel 3.1 wurde dargestellt, weshalb man an kleinen Stellamplituden interessiert ist.

Häufig steht bei der Frage nach dem Grad der Steuerbarkeit ein Vergleich der Steuerbarkeit der einzelnen Eigenvorgänge untereinander im Mittelpunkt. Wenn man das System stabilisieren will, ist es beispielsweise problematisch, wenn die bereits stabilen Eigenvorgänge gut steuerbar, die instabilen Vorgänge jedoch schlecht steuerbar sind, denn dann muss man mit großen Stellamplituden arbeiten, um die instabilen Vorgänge zu stabilisieren und erregt dabei auch die stabilen Vorgänge sehr stark.

In der Literatur sind viele unterschiedliche Bewertungsmaße vorgeschlagen worden. Beispielsweise drücken modale Bewertungsmaße aus, wie gut der Eingang u über die Zeile $\tilde{b}'_i$ der Matrix $\tilde{B}$ auf den i -ten Eigenvorgang zugreift. Man definiert deshalb als modales Steuerbarkeitsmaß für den i -ten Eigenvorgang

$$s_i = \tilde{b}'_i \tilde{b}_i.$$

Je größer s_i ist, umso kleiner kann die Amplitude von u sein, mit der das System den vorgegebenen Zustand erreicht.

Die Steuerbarkeitsmaße haben den Mangel, dass aus ihnen nicht auf die Größenordnung der Reglerparameter geschlossen werden kann bzw. dass aus diesen die für eine bestimmte Regelungsaufgabe notwendigen (maximalen) Stellamplituden berechnet werden können. Obwohl die Idee, die Steuerbarkeit quantitativ auszudrücken, dem Wunsch des Ingenieurs nach Beantwortung dieser praktischen Fragen Rechnung trägt, ist für die quantitative Bewertung der Steuerbarkeit bisher keine befriedigende Lösung gefunden worden.

Aufgabe 3.2** Steuerbarkeit und Übertragungsverhalten

Gegeben ist das System

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), & x(0) &= x_0. \\ y(t) &= x(t) \end{aligned}$$

1. Untersuchen Sie, welcher Eigenwert nicht steuerbar ist. Ist das System ausgangssteuerbar?

2. Stellen Sie die Übertragungsfunktionsmatrix auf und vergleichen Sie deren Pole mit den Eigenwerten der Systemmatrix des Zustandsraummodells.
3. In welche Zustände $x(t_e) = y(t_e)$ kann das System aus der Ruhelage $x_0 = \mathbf{0}$ gesteuert werden?
4. Wie verändert sich der Systemausgang, wenn das System nicht aus der Ruhelage, sondern vom Anfangszustand $x_0 = (1 \ 1)'$ aus mit derselben Eingangsgröße erregt wird?
□

Aufgabe 3.3** Systeme mit Polen und Nullstellen, die sich „fast“ kürzen

Wenn ein Eigenwert λ der Matrix A zugleich Eingangsentkopplungsnullstelle ist, so ist er nicht steuerbar und erscheint nicht in der Gewichtsfunktionsmatrix bzw. der Übertragungsfunktionsmatrix. Was passiert, wenn sich die Eingangsentkopplungsnullstelle um ε von λ unterscheidet? Untersuchen Sie diese Fragestellung anhand eines Systems zweiter Ordnung in kanonischer Normalform, indem Sie die Übergangsfunktion in Abhängigkeit von ε berechnen. Zeigen Sie, dass der Eigenvorgang $e^{\lambda t}$ umso weniger angeregt wird, je kleiner ε ist. □

3.2 Beobachtbarkeit

3.2.1 Problemstellung und Definition der Beobachtbarkeit

Bei den meisten technischen Systemen sind nicht alle Zustandsvariablen messbar. Statt dessen kann nur der Ausgangsvektor $y(t)$ messtechnisch erfasst werden. Da die Dimension von y kleiner als die von x ist, ist es schon aus Dimensionsgründen nicht möglich, aus dem aktuellen Wert $y(t)$ des Ausgangsvektors den aktuellen Wert $x(t)$ des Zustandsvektors zu berechnen.

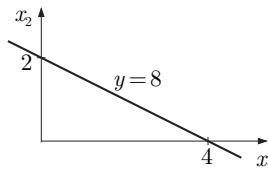


Abb. 3.14: Zustände, die dieselbe Ausgangsgröße erzeugen

Wenn beispielsweise die Ausgabegleichung eines Systems zweiter Ordnung

$$y(t) = (2 \ 4) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

lautet und zum Zeitpunkt t_1 der Wert

$$y(t_1) = 8$$

gemessen wird, so kann sich das System in jedem Zustand $\mathbf{x}(t_1)$ befinden, für den die Beziehung

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t_1) \\ x_2(t_1) \end{pmatrix} = 8$$

gilt. Dies sind alle diejenigen Zustände, die auf der Geraden

$$x_1 = 4 - 2x_2$$

liegen (Abb. 3.14).

Dem Beobachtungsproblem liegt nun die Überlegung zu Grunde, dass man über den Zustand des Systems mehr erfahren kann, wenn man die Bewegung des Systems nicht nur in einem Zeitpunkt t_1 , sondern über ein bestimmtes Zeitintervall beobachtet und aus der Trajektorie $y(t)$ ($0 \leq t \leq t_e$) mit Hilfe des Modells den aktuellen Systemzustand rekonstruiert. Wenn das System durch eine Steuerung $\mathbf{u}(t)$ von außen in seiner Bewegung beeinflusst wird, so muss man diese Steuerung kennen und in die Rekonstruktion des Zustandes einfließen lassen. Man nennt ein System beobachtbar, wenn man den Zustand auf diese Weise berechnen kann.

Da es auch hier wie bei der Steuerbarkeit auf den zeitlichen Verlauf der Eingangs- und Ausgangsgrößen ankommt, wird im Folgenden anstelle von $\mathbf{u}$ und $\mathbf{y}$ mit den Bezeichnungen $\mathbf{u}_{[0,t_e]}$ und $\mathbf{y}_{[0,t_e]}$ gearbeitet, die diesen Sachverhalt hervorheben. Das Modell hat die gewohnte Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.28)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (3.29)$$

wobei im Folgenden nicht sprungfähige Systeme betrachtet werden.

Definition 3.2 (Beobachtbarkeit)

Ein System (3.28), (3.29) heißt vollständig beobachtbar, wenn der Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ aus dem über einem endlichen Intervall $[0, t_e]$ bekannten Verlauf der Eingangsgröße $\mathbf{u}_{[0,t_e]}$ und der Ausgangsgröße $\mathbf{y}_{[0,t_e]}$ bestimmt werden kann.

Beobachtbarkeit des ungestörten Systems. In der Bewegungsgleichung des Systems

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

stehen die freie Bewegung

$$\mathbf{y}_{\text{frei}}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0$$

und die erzwungene Bewegung

$$\mathbf{y}_{\text{erzw}}(t) = \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau.$$

Da der Anfangszustand nur in die freie Bewegung eingeht, kann er auch nur aus dieser Bewegung berechnet werden. Weil andererseits die freie Bewegung mit Hilfe des Modells aus der gegebenen Eingangsgröße $\mathbf{u}_{[0,t_e]}$ bestimmt werden kann

$$\mathbf{y}_{\text{frei}}(t) = \mathbf{y}(t) - \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau,$$

wird im Folgenden nur das ungestörte System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

betrachtet. Ist dieses System beobachtbar, so ist auch das gestörte System beobachtbar. Folglich hängt die Beobachtbarkeit nur von den Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{C}$ ab, weshalb man auch von der Beobachtbarkeit des Paares $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ spricht.

Beobachtbarkeit und vollständige Beobachtbarkeit. Wie bei der Steuerbarkeitsdefinition fordert die Beobachtbarkeitsdefinition, dass jeder beliebige Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ aus den Eingangs- und Ausgangsgrößen bestimmbar sein soll. Deshalb spricht man genauer von *vollständiger* Beobachtbarkeit, auch wenn im Folgenden dieses Attribut häufig weggelassen wird.

Wenn das System nicht vollständig beobachtbar ist, so ist die Beobachtbarkeitseigenschaft an eine eingeschränkte Menge von Anfangszuständen geknüpft. Wie bei der Steuerbarkeit ist diese Menge ein Unterraum des Zustandsraumes $\mathbb{R}^n$.

Beobachtbarkeit und Rekonstruierbarkeit. Bei dem geschilderten Beobachtungsproblem kann man sich einerseits für die Bestimmung des Anfangszustandes $\mathbf{x}(0)$ interessieren, wie es in der Definition 3.2 getan wird. Man kann aber auch an dem am Ende des Beobachtungsintervalls angenommenen Zustand $\mathbf{x}(t_e)$ interessiert sein, wobei auch hier als Informationen für die Bestimmung von $\mathbf{x}(t_e)$ die Verläufe $\mathbf{u}_{[0,t_e]}$ und $\mathbf{y}_{[0,t_e]}$ der Eingangs- und Ausgangsgrößen zur Verfügung stehen. Wenn $\mathbf{x}(t_e)$ aus diesen Informationen bestimmbar ist, so wird das System vollständig *rekonstruierbar* genannt. Bei den hier behandelten zeitinvarianten linearen Systemen sind beide Eigenschaften äquivalent.

Bestimmung der Zustandstrajektorie. Die Beobachtbarkeit wird entsprechend Definition 3.2 auf den Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ bezogen. Technisch interessant ist jedoch der aktuelle Zustand $\mathbf{x}(t_e)$, der am Ende des Beobachtungszeitraumes auftritt,

oder der gesamte Verlauf $\mathbf{x}_{[0,t_e]}$ des Zustandsvektors. Die Beobachtbarkeitsdefinition muss auf diese erweiterte Fragestellung keine Rücksicht nehmen, denn wenn es möglich ist, den Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ zu bestimmen, so kann auch der gesamte Verlauf $\mathbf{x}_{[0,t_e]}$ mit Hilfe des Modells und der bekannten Eingangsgröße berechnet werden. Wenn im Folgenden die Berechnung von $\mathbf{x}_0$ im Mittelpunkt steht, so wird dies nur getan, weil sich dafür die Untersuchungen besonders einfach darstellen lassen und weil alle weiterführenden Fragen zur Zustandstrajektorie aus der Kenntnis von $\mathbf{x}_0$ mit Hilfe des Modells beantwortet werden können.

3.2.2 Beobachtbarkeitskriterium von KALMAN

In diesem und den nachfolgenden Abschnitten werden Beobachtbarkeitskriterien angegeben, die den Steuerbarkeitskriterien sehr ähnlich sind. Es wird deshalb in ähnlicher Weise wie in den Abschnitten 3.1.2 - 3.1.5 vorgegangen und zunächst das auf KALMAN zurückgehende Kriterium angegeben und erläutert. Dabei wird offensichtlich werden, dass die Beobachtbarkeit eine zur Steuerbarkeit duale Eigenschaft ist, so dass die nachfolgenden Untersuchungen dann wesentlich kürzer gefasst werden können.

Das Kalmankriterium bezieht sich auf die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{S}_B = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

die eine $(r \cdot n, n)$ -Matrix ist. Sie ist quadratisch, wenn das System nur eine Ausgangsgröße besitzt.

Satz 3.4 (Beobachtbarkeitskriterium von KALMAN)

Das System $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathbf{S}_B$ den Rang n hat:

$$\text{Rang } \mathbf{S}_B = n. \quad (3.31)$$

Notwendigkeit der Bedingung (3.31). Das Beobachtbarkeitsproblem ist lösbar, wenn die Gleichung

$$\mathbf{y}_{\text{frei}}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$$

nach $\mathbf{x}_0$ auflösbar ist. Schreibt man diese Vektorgleichung ausführlich, so erhält man r Gleichungen für die n Unbekannten im Vektor $\mathbf{x}_0$, die wegen $r < n$ nicht nach $\mathbf{x}_0$ auflösbar sind. Da $\mathbf{y}(t)$ aber für das Zeitintervall $[0, t_e]$ bekannt ist, kann diese

Gleichung im Prinzip unendlich oft, nämlich für alle Zeitpunkte des angegebenen Intervalls, hingeschrieben werden. Es müssen die Fragen untersucht werden, wieviele Gleichungen notwendig sind und ob das Gleichungssystem eindeutig auflösbar ist.

Diese Fragen sollen zunächst für ein System mit nur einem Ausgang beantwortet werden. Schreibt man die freie Bewegung für n Zeitpunkte untereinander, so erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_{\text{frei}}(t_1) &= \mathbf{c}' e^{\mathbf{A}t_1} \mathbf{x}_0 \\ y_{\text{frei}}(t_2) &= \mathbf{c}' e^{\mathbf{A}t_2} \mathbf{x}_0 \\ &\vdots \\ y_{\text{frei}}(t_n) &= \mathbf{c}' e^{\mathbf{A}t_n} \mathbf{x}_0, \end{aligned}$$

das als Vektorgleichung

$$\begin{pmatrix} y_{\text{frei}}(t_1) \\ y_{\text{frei}}(t_2) \\ \vdots \\ y_{\text{frei}}(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}' e^{\mathbf{A}t_1} \\ \mathbf{c}' e^{\mathbf{A}t_2} \\ \vdots \\ \mathbf{c}' e^{\mathbf{A}t_n} \end{pmatrix} \mathbf{x}_0$$

zusammengefasst werden kann. Dieses Gleichungssystem ist genau dann nach $\mathbf{x}_0$ auflösbar, wenn die auf der rechten Seite stehende (n, n) -Matrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}' e^{\mathbf{A}t_1} \\ \mathbf{c}' e^{\mathbf{A}t_2} \\ \vdots \\ \mathbf{c}' e^{\mathbf{A}t_n} \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

invertierbar ist

$$\text{Rang } \mathbf{M} = n, \quad (3.33)$$

denn dann erhält man den Anfangszustand aus

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} y_{\text{frei}}(t_1) \\ y_{\text{frei}}(t_2) \\ \vdots \\ y_{\text{frei}}(t_n) \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Die Frage ist, unter welcher Bedingung die n Zeitpunkte t_i so festgelegt werden können, dass die Matrix $\mathbf{M}$ invertierbar ist.

Jede Zeile von $\mathbf{M}$ hat die Form $\mathbf{c}' e^{\mathbf{A}t_i}$, die sich mit Hilfe der Definitionsgleichung (I-5.12) für die Matrixexponentialfunktion und dem Cayley-Hamilton-Theorem (A2.45) folgendermaßen umformen lässt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}' e^{\mathbf{A}t_i} &= \mathbf{c}' + \mathbf{c}' \mathbf{A} t_i + \mathbf{c}' \mathbf{A}^2 \frac{t_i^2}{2!} + \mathbf{c}' \mathbf{A}^3 \frac{t_i^3}{3!} + \dots \\
&= c_0(t_i) \mathbf{c}' + c_1(t_i) \mathbf{c}' \mathbf{A} + c_2(t_i) \mathbf{c}' \mathbf{A}^2 + \dots + c_{n-1}(t_i) \mathbf{c}' \mathbf{A}^{n-1}.
\end{aligned}$$

Dabei sind die eingeführten Koeffizienten $c_j(t_i)$ ($j = 0, 1, \dots, n-1$) Funktionen der Zeit t_i . Aus dieser Gleichung geht hervor, dass die i -te Zeile der Matrix $\mathbf{M}$ eine Linearkombination der Zeilenvektoren

$$\mathbf{c}', \mathbf{c}' \mathbf{A}, \mathbf{c}' \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{c}' \mathbf{A}^{n-1}$$

ist. Diese Darstellung von $\mathbf{M}$ zeigt, dass der Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ nur dann aus n Messwerten des Ausgangs bestimmt werden kann, wenn die angegebenen Zeilenvektoren linear unabhängig sind. Damit ist die Notwendigkeit der Bedingung (3.31) für Systeme mit einem Ausgang nachgewiesen.

Für Systeme mit r Ausgängen hat die Matrix $\mathbf{M}$ die Dimension (rn, n) . Die Auflösbarkeitsbedingung (3.33) bleibt dieselbe, denn unter dieser Bedingung kann $\mathbf{x}_0$ entsprechend

$$\mathbf{x}_0 = (\mathbf{M}' \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}' \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{\text{frei}}(t_1) \\ \mathbf{y}_{\text{frei}}(t_2) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{\text{frei}}(t_n) \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

aus den Messwerten bestimmt werden. In Analogie zu den bisherigen Überlegungen kann man sehen, dass die Zeilen von $\mathbf{M}$ Linearkombinationen der Vektoren

$$\mathbf{c}'_i, \mathbf{c}'_i \mathbf{A}, \mathbf{c}'_i \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{c}'_i \mathbf{A}^{n-1} \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

sind, wobei $\mathbf{c}'_i$ die i -te Zeile der Matrix $\mathbf{C}$ darstellt. Die Matrix $\mathbf{M}$ kann bei geeigneter Wahl der Zeitpunkte t_i genau dann den Rang n haben, wenn es unter allen diesen Zeilen n linear unabhängige gibt. Dieser Sachverhalt wird mit der Bedingung (3.31) ausgedrückt, die damit auch für Systeme mit mehreren Ausgangsgrößen notwendig ist.

Bestimmung von $\mathbf{x}_0$. Es wird nun angenommen, dass die Beobachtbarkeitsbedingung (3.31) erfüllt ist. Für die Bestimmung von $\mathbf{x}_0$ gibt es dann u. a. die folgenden beiden Wege. Beim ersten Weg setzt man die Gln. (3.34) und (3.35) für die Bestimmung von $\mathbf{x}_0$ ein, wobei man die Zeitpunkte t_i so auswählt, dass die Matrix $\mathbf{M}$ den Rang n hat. Dies gelingt häufig dadurch, dass man einfach n beliebige, untereinander verschiedene Zeitpunkte aus dem Intervall $[0, t_e]$ herausgreift. Sollte die Matrix $\mathbf{M}$ nicht den vollen Rang haben, so wird die Rangbedingung i. Allg. schon nach geringfügiger Veränderung der ausgewählten Zeitpunkte t_i erfüllt.

Der zweite Weg ist dem bei der Steuerbarkeitsuntersuchung verwendeten sehr ähnlich. Wenn die Bedingung (3.31) erfüllt ist, so ist die gramsche Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{W}_B = \int_0^{t_e} e^{\mathbf{A}'t} \mathbf{C}' \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} dt \quad (3.36)$$

für eine beliebige Endzeit t_e positiv definit und folglich invertierbar. Der Anfangszustand kann dann aus der Beziehung

$$\text{Bestimmung von } \mathbf{x}_0 : \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{W}_B^{-1} \int_0^{t_e} e^{\mathbf{A}'t} \mathbf{C}' \mathbf{y}_{\text{frei}}(t) dt \quad (3.37)$$

ermittelt werden, wie man durch Einsetzen der Eigenbewegung

$$\mathbf{y}_{\text{frei}}(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0$$

leicht nachweisen kann. Zur Berechnung von $\mathbf{W}_B$ für $t_e = \infty$ kann man Gl. (3.8) mit veränderter rechter Seite anwenden:

$$\mathbf{A}' \mathbf{W}_{B\infty} + \mathbf{W}_{B\infty} \mathbf{A} = -\mathbf{C}' \mathbf{C}. \quad (3.38)$$

Beispiel 3.7 Beobachtbarkeit gekoppelter Rührkesselreaktoren

Bei den im Beispiel 3.1 betrachteten Rührkesselreaktoren kann nur die Konzentration im zweiten Behälter gemessen werden. Es ist zu untersuchen, ob die Konzentration im ersten Behälter aus dem Verlauf der Eingangs- und Ausgangsgröße rekonstruiert werden kann.

Aus dem auf S. 68 angegebenen Modell (3.9), (3.10) erhält man die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{S}_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{F}{V_2} & -\frac{F}{V_2} \end{pmatrix},$$

die offenbar den Rang 2 besitzt. Also kann man die Konzentration x_1 des ersten Behälters aus den Messwerten bestimmen. Voraussetzung ist lediglich, dass die Reaktoren tatsächlich durchflossen werden, also $F \neq 0$ gilt. Andernfalls wären beide Reaktoren entkoppelt, so dass die Beobachtungsaufgabe aus offensichtlichen Gründen nicht lösbar wäre.

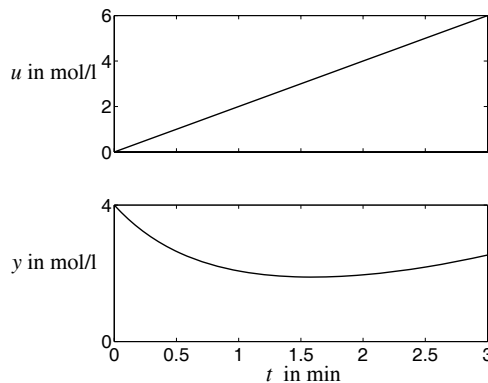


Abb. 3.15: Verhalten der gekoppelten Rührkesselreaktoren

Wie aus den Messgrößen der Anfangszustand berechnet werden kann, wird im Folgenden für die Rührkesselreaktoren mit den im Beispiel 3.1 angegebenen Parametern erläutert, für die das Zustandsraummodell

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,333 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,333 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix}$$

$$y(t) = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

entsteht. Das System wird von einem unbekannten Anfangszustand ausgehend durch die Steuerung

$$u(t) = 2t \quad 0 \leq t \leq 3$$

erregt, wobei die in Abb. 3.15 (unten) dargestellte Messkurve entsteht. Diese Kurve beschreibt die Überlagerung von erzwungener und freier Bewegung. Um daraus die freie Bewegung bestimmen zu können, wird von dieser Messkurve die erzwungene Bewegung

$$y_{\text{erzw}}(t) = 2 \int_0^t (0 \quad 1) e^{\begin{pmatrix} -0,333 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} (t-\tau)} \begin{pmatrix} 0,33 \\ 0 \end{pmatrix} \tau d\tau$$

subtrahiert, wodurch die in Abb. 3.16 gezeichnete Kurve entsteht.

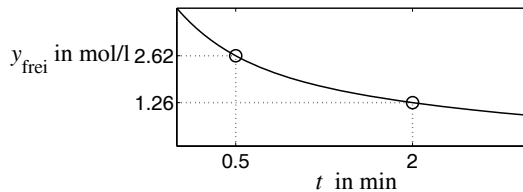


Abb. 3.16: Eigenbewegung der Reaktoren

Aus dieser Kurve werden nun zwei Messpunkte entnommen, die hier bei $t_1 = 0,5$ min und $t_2 = 2$ min liegen. Dabei erhält man den Vektor

$$\begin{pmatrix} y_{\text{frei}}(0,5) \\ y_{\text{frei}}(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,62 \\ 1,26 \end{pmatrix}.$$

In der Matrix M nach Gl. (3.32) steht als erste Zeile

$$c'e^{At_1} = (0 \quad 1) e^{\begin{pmatrix} -0,333 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} 0,5} = (0,574 \quad 0,368).$$

Nach Berechnung der zweiten Zeile erhält man

$$M = \begin{pmatrix} 0,574 & 0,368 \\ 0,594 & 0,0183 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist regulär. Als Anfangszustand folgt aus Gl. (3.34)

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,998 \\ 4,003 \end{pmatrix}.$$

Von diesem Anfangszustand aus hat das System seine Bewegung begonnen. Die vollständige Zustandstrajektorie kann mit Hilfe des Modells und dieser Anfangsbedingung berechnet werden.

Diskussion. Bei der Simulation wurde mit dem Anfangszustand $x_0 = (2 \frac{\text{mol}}{\text{l}} \quad 4 \frac{\text{mol}}{\text{l}})'$ gearbeitet. Der Rechenfehler ist nicht durch numerische Ungenauigkeiten, sondern vor allem durch die begrenzte Genauigkeit beim Ablesen der Messpunkte $y(t_i)$ verursacht. In der praktischen Anwendung führen Messungenauigkeiten zu erheblich größeren Abweichungen als hier.

Bei diesem Beispiel stimmt die Ausgangsgröße mit der zweiten Zustandsvariablen überein. Der Messwert $y(0)$ gibt deshalb den Anfangswert von x_2 an. Das Beobachtungsproblem beinhaltet also nur die Bestimmung des Anfangswertes von x_1 . Deshalb könnte man die Berechnung gegenüber dem allgemeinen Lösungsweg in diesem Beispiel etwas vereinfachen. $\square$

Folgerungen aus dem Kalmankriterium. Ähnlich wie bei der Analyse der Steuerbarkeit können aus dem Kalmankriterium der Beobachtbarkeit folgende Schlussfolgerungen gezogen werden:

- Wenn das System vollständig beobachtbar ist, so kann der Anfangszustand x_0 aus einem beliebig kurzen Ausschnitt des Verlaufes der Eingangs- und Ausgangsgrößen berechnet werden, d. h., t_e kann beliebig klein sein.

Die Untersuchungen dieses Kapitels betreffen nur die Frage, *ob* der Zustand aus den Eingangs- und Ausgangsgrößen bestimmt werden kann. Wie man dies unter den in der Praxis auftretenden Bedingungen, die insbesondere Messfehler und Störungen auf das System einschließen, tatsächlich macht, wird im Kap. 8 behandelt.

- In Analogie zu den Steuerbarkeitsindizes können Beobachtbarkeitsindizes definiert werden. Sie zeigen, wieviele unterschiedliche Messpunkte $y(t_i)$ tatsächlich notwendig sind, um x_0 zu berechnen.

Aufgabe 3.4 Beobachtbarkeit heißt Unterscheidbarkeit von Ausgangstrajektorien

Alternativ zu Definition 3.2 kann man die Beobachtbarkeit als die Eigenschaft definieren, dass die von unterschiedlichen Anfangszuständen x_0^1 und x_0^2 ausgehenden Zustandstrajektorien zu unterscheidbaren Ausgangstrajektorien führen. Bezeichnet man die Ausgangsgröße, die das System mit den beiden Anfangszuständen erzeugt, mit $y(t, x_0^1)$ bzw. $y(t, x_0^2)$, so nennt man das System beobachtbar, wenn es für beliebige Anfangszustände, die die Bedingung $x_0^1 \neq x_0^2$ erfüllen, mindestens einen Zeitpunkt t gibt, für den die Relation $y(t, x_0^1) \neq y(t, x_0^2)$ gilt.

Man kann diese Eigenschaft testen, indem man die Ausgangsgröße zusammen mit ihren ersten $n - 1$ Ableitungen in Abhängigkeit vom Anfangszustand darstellt und untersucht, unter welchen Bedingungen der Vektor dieser Werte für zwei unterschiedliche Anfangsbedingungen nicht gleich sein kann.

Zeigen Sie, dass diese Betrachtungen auf denselben Beobachtbarkeitstest wie im Satz 3.4 führen und folglich die beiden Beobachtbarkeitsdefinitionen dieselbe Systemeigenschaft beschreiben. $\square$

3.2.3 Dualität von Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Die Kalmankriterien für Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit zeigen, dass die Steuerbarkeit des Paares (A, B) in sehr ähnlicher Weise wie die Beobachtbarkeit des Paares (A, C) nachgewiesen werden kann. Verwendet man nämlich das Steuerbarkeitskriterium mit A' anstelle von A und C' anstelle von B , so geht es in das Beobachtbarkeitskriterium über. Man sagt deshalb, dass beide Eigenschaften *dual* zueinander sind.

Um diesen Sachverhalt noch etwas genauer auszuführen, werden die beiden Systeme

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\dot{x}_T(t) &= A'x_T(t) + C'u_T(t), & x_T(0) &= x_{T_0} \\ y_T(t) &= B'x_T(t)\end{aligned} \quad (3.39)$$

betrachtet. Die Matrizen des zweiten Systems sind gerade die transponierten Matrizen des Originalsystems (A, B, C) , wobei gleichzeitig die Eingangsmatrix und die Ausgangsmatrix vertauscht wurden. Man bezeichnet das System (A, B, C) auch als das primale System und das System (A', C', B') als das duale System².

Die Dualität von Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit äußert sich nun folgendermaßen:

Das duale System ist genau dann vollständig steuerbar bzw. vollständig beobachtbar, wenn das primäre System vollständig beobachtbar bzw. vollständig steuerbar ist.

Diese Eigenschaft kann im Folgenden ausgenutzt werden, um die für die Steuerbarkeit abgeleiteten Kriterien ohne Beweis in Kriterien für die Beobachtbarkeit zu überführen.

3.2.4 Weitere Beobachtbarkeitskriterien

Beobachtbarkeit der kanonischen Normalform. Wenn das Modell mit Hilfe der Transformation (3.14) in die kanonische Normalform transformiert ist und, zur Vereinfachung der Darstellung, $u = 0$ angenommen wird, so erhält man die Modellgleichungen

² Primales System – das erste System, duales System – das zweite System

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \text{diag } \lambda_i \tilde{\mathbf{x}}(t), \quad \tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{x}_0 \quad (3.40)$$

$$\mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{x}}(t) \quad (3.41)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{V}. \quad (3.42)$$

Da der Anfangszustand $\tilde{\mathbf{x}}_0$ nur dann aus $\mathbf{y}$ berechnet werden kann, wenn alle Eigenvorgänge in $\mathbf{y}$ eingehen, ist eine notwendige Bedingung für die Steuerbarkeit, dass die Matrix $\tilde{\mathbf{C}}$ keine Nullspalten besitzt. Diese Bedingung ist auch hinreichend, wenn alle Eigenwerte einfach auftreten. Andernfalls gelten ähnliche Zusatzbedingungen, wie sie für die Steuerbarkeit abgeleitet wurden und im folgenden Kriterium aufgeführt sind.

Satz 3.5 (Beobachtbarkeitskriterium von GILBERT)

Das System $(\text{diag } \lambda_i, \tilde{\mathbf{C}})$, dessen Zustandsraummodell in kanonischer Normalform vorliegt, ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn die Matrix $\tilde{\mathbf{C}}$ keine Nullspalte besitzt und wenn die p Spalten $\tilde{\mathbf{c}}_i$ der Matrix $\tilde{\mathbf{C}}$, die zu den kanonischen Zustandsvariablen eines p -fachen Eigenwertes gehören, linear unabhängig sind.

Diese Betrachtungen ermöglichen es, die Beobachtbarkeit auf einzelne Eigenvorgänge bzw. Eigenwerte zu beziehen. Wenn das System nicht vollständig beobachtbar ist, so kann man mit dem Gilbertkriterium ermitteln, welche kanonischen Zustandsvariablen und folglich welche Eigenwerte nicht beobachtbar sind.

Beobachtbarkeitskriterium von HAUTUS. Wendet man die Dualität von Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit auf das Hautuskriterium für die Steuerbarkeit an, so erhält man das folgende Beobachtbarkeitskriterium.

Satz 3.6 (Beobachtbarkeitskriterium von HAUTUS)

Das System $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn die Bedingung

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} = n \quad (3.43)$$

für alle Eigenwerte λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) der Matrix $\mathbf{A}$ erfüllt ist.

Ist die angegebene Bedingung für ein oder mehrere Eigenwerte λ_i nicht erfüllt, so weiß man nicht nur, dass das System nicht vollständig beobachtbar ist, sondern kennt auch die Eigenvorgänge, die nicht beobachtet werden können.

Das Hautuskriterium zeigt auch, dass die nicht beobachtbaren Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ mit den Ausgangsentkopplungsnullstellen des Systems $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ übereinstimmen. Während im Abschn. 2.5.3 die Ausgangsentkopplungsnullstellen für

Frequenzen eingeführt wurde, die die Rangbedingung (2.68) erfüllen, erhält man hier eine Interpretation dieser Nullstellen: Es sind diejenigen Eigenwerte, für die man die zugehörigen Eigenvorgänge $e^{\lambda_i t}$ nicht über den Ausgang y beobachten kann. Die nicht beobachtbaren Eigenwerte λ_i kommen nicht als Pole in der Übertragungsfunktionsmatrix $G(s)$ des Systems (A, B, C, D) vor.

3.2.5 Nicht vollständig beobachtbare Systeme

Wichtige Gründe dafür, dass ein System nicht vollständig beobachtbar ist, sind im Folgenden aufgeführt.

|| Eigenvorgänge, die nicht mit dem Ausgang verbunden sind, sind nicht beobachtbar.

In der kanonischen Normalform des Zustandsraummodells macht sich dieser Grund für nicht beobachtbare Eigenvorgänge in Nullspalten der Matrix $\tilde{C}$ bemerkbar. Wenn das betrachtete System aus mehreren Teilsystemen besteht, muss man das Modell meist gar nicht in die kanonische Normalform transformieren, weil aus der Zusammenschaltung der Teilsysteme bestimmte Strukturen für die Matrizen A und C folgen und Nullspalten durch die Struktur des Gesamtsystems begründet sind.

Beispiel 3.8 Nicht beobachtbare Zustände einer Reihenschaltung

Das in Abb. 3.17 angegebene System ist nicht vollständig beobachtbar. Die Reihenschaltung der beiden Teilsysteme führt auf ein Modell der Form

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & O \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

Wenn man nur den Ausgang y_1 zur Verfügung hat, so kann man den Zustand x_2 nicht

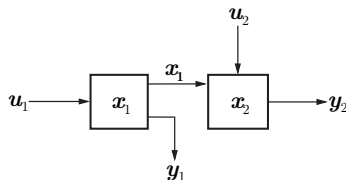


Abb. 3.17: Reihenschaltung zweier Teilsysteme

beobachten, weil dieser Ausgang gar keine Informationen über den Zustand x_2 des Teilsystems 2 erhält, was sich in der Nullmatrix in der Ausgabebeziehung niederschlägt. $\square$

|| Zwei parallele Teilsysteme mit denselben dynamischen Eigenschaften sind nicht vollständig beobachtbar.

Als Beispiel kann wieder die auf S. 83 angegebene Parallelschaltung zweier Übertragungsglieder erster Ordnung herangezogen werden. Wendet man das Hautuskriterium auf das System (3.21), (3.22) an, so sieht man, dass ein Eigenwert nicht beobachtbar ist. Der Grund liegt darin, dass zwar beide Zustandsvariablen den Ausgang beeinflussen, aus der Summe beider jedoch nicht die beiden Anfangswerte berechnet werden können, da sich beide Zustandsvariablen in derselben Geschwindigkeit bewegen.

|| Lassen sich in der Übertragungsfunktion eines Eingrößensystems Pole gegen Nullstellen kürzen, so kann man die mit den Polen verbundenen Eigenvorgänge nicht beobachten (bzw. nicht steuern).

Der Grund dafür ist, dass nicht beobachtbare Eigenwerte Ausgangsentkopplungsnullstellen sind, deren Linearfaktoren in der Übertragungsfunktion gegen Linearfaktoren von Polen gleicher Größe gekürzt werden. Dasselbe war ja schon für die nicht steuerbaren Eigenwerte, die Eingangsentkopplungsnullstellen darstellen, erklärt worden.

Beobachtbarer Unterraum. Wenn das System nicht vollständig beobachtbar ist, so ist nur die Bewegung innerhalb eines Unterraumes des Zustandsraumes $\mathbb{R}^n$ beobachtbar. Dieser Unterraum wird durch die Zeilen der Beobachtbarkeitsmatrix S_B festgelegt. Der nicht beobachtbare Teilraum umfasst alle diejenigen Vektoren x , für die die Beziehung

$$S_B x(t) = 0$$

erfüllt ist. Mathematisch gesehen bilden alle diese Vektoren den Nullraum der Matrix S_B

$$\mathcal{N}(S_B) = \{x : S_B x = 0\}$$

(siehe Gl. (A2.33)). Fügt man zu einem gegebenen Vektor $x_1(t)$, der auf die Ausgangsgröße

$$y(t) = Cx_1(t)$$

führt, einen Vektor $x(t) \in \mathcal{N}(S_B)$ hinzu, so ändert sich der Wert der Ausgangsgröße nicht:

$$y(t) = Cx_1(t) + Cx(t) = Cx_1(t).$$

Das System kann sich also beliebig in $\mathcal{N}(S_B)$ bewegen, ohne dass dies am Ausgang erkennbar wird.

Ähnlich wie bei der Steuerbarkeit kann die Bewegung des Systems dann in den beobachtbaren und den nicht beobachtbaren Anteil zerlegt werden:

$$x(t) = x_{\text{beob}}(t) + x_{\text{nbeob}}(t). \quad (3.46)$$

Verwendet man kanonische Zustandsvariablen, so ist diese Aufteilung wieder leicht zu übersehen, denn jede Zustandsvariable $\tilde{x}_i$ tritt nur in einem der beiden Vektoren auf.

Zerlegung eines Systems in ein beobachtbares und ein nicht beobachtbares Teilsystem. In ähnlicher Weise, wie man ein nicht vollständig steuerbares System in ein steuerbares und ein nicht steuerbares Teilsystem zerlegen kann, kann man auch ein nicht vollständig beobachtbares System in ein vollständig beobachtbares Teilsystem und ein Teilsystem zerlegen, das den Ausgang y überhaupt nicht beeinflusst (Abb. 3.18).

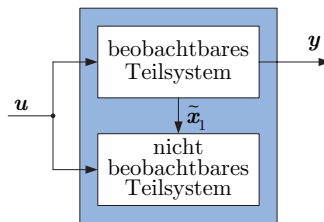


Abb. 3.18: Zerlegung eines nicht beobachtbaren Systems in zwei Teilsysteme

Die Zerlegung erfolgt wieder durch eine Zustandstransformation

$$\tilde{x}(t) = T x(t),$$

bei der die Transformationsmatrix T so gewählt wird, dass ein Zustandsraummodell der Form

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u(t) \quad (3.47)$$

$$y(t) = (C_1 \quad O) \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

entsteht. Hat die Beobachtbarkeitsmatrix den Rang n_B

$$\text{Rang } S_B = n_B < n,$$

dann haben die quadratische Matrix A_{11} und die Matrix C_1 n_B Spalten und der Vektor $\tilde{x}_1(t)$ ist n_B -dimensional. Das Paar (A_{11}, C_1) ist vollständig steuerbar. Gleichung (3.47) beschreibt ein in zwei Teilsysteme zerlegtes System, bei dem das Teilsystem mit dem Zustandsvektor $\tilde{x}_1(t)$ vollständig beobachtbar ist und das andere Teilsystem den Ausgangsvektor y überhaupt nicht beeinflusst.

Wie bei der Zerlegung eines nicht steuerbaren Systems gibt es mehrere Wege, eine geeignete Transformationsmatrix T zu finden. Wenn man das System in die kanonische Normalform transformiert und die Zustandsvariablen geeignet umsortiert,

entsteht die gewünschte Zerlegung. Andererseits kann man n_B linear unabhängige Zeilen aus der Beobachtbarkeitsmatrix S_B um $n - n_B$ weitere linear unabhängige Zeilen zur Matrix T ergänzen.

Da der Zustandsvektor $\tilde{x}_2(t)$ den Ausgang y nicht beeinflusst, spielt er für das E/A-Verhalten des Systems keine Rolle, so dass für die Übertragungsfunktionsmatrix die folgende Beziehung gilt:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = C_1(sI - A_{11})^{-1}B_1. \quad (3.49)$$

Aufgabe 3.5 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit von Mehrgrößensystemen

Untersuchen Sie, ob das System

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u(t) \end{aligned}$$

vollständig steuerbar, ausgangssteuerbar bzw. vollständig beobachtbar ist. $\square$

Aufgabe 3.6* Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit zusammenschalteter Systeme

1. Untersuchen Sie, ob die Reihenschaltung und die Parallelschaltung zweier Integratoren vollständig steuerbar ist.
2. Gegeben ist die Parallelschaltung zweier Teilsysteme mit identischen dynamischen Eigenschaften. Ist das Gesamtsystem vollständig steuerbar, ausgangssteuerbar bzw. vollständig beobachtbar? $\square$

Aufgabe 3.7* Übertragungsfunktion nicht vollständig steuerbarer Systeme

Gegeben ist das System

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) \end{aligned}$$

1. Untersuchen Sie, ob das System steuerbar und beobachtbar ist.
2. Bestimmen Sie die Nullstellen des Systems.
3. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion und vergleichen Sie die Ordnung der Übertragungsfunktion sowie deren Pole mit der Systemordnung bzw. den Eigenwerten der Systemmatrix.
4. Ist das System zustandsstabil und E/A-stabil? $\square$

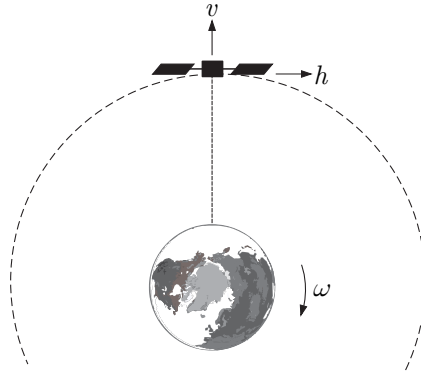


Abb. 3.19: Satellit über der Beobachtungsstation

Aufgabe 3.8* Beobachtbarkeit der Satellitenbewegung

Ein Satellit bewegt sich geostationär über einer Beobachtungsstation am Äquator, wie es in Abb. 3.19 gezeigt ist. Es wird angenommen, dass vom Boden aus nur die Positionsabweichung in Richtung h gemessen werden kann. Diese Abweichung hat aber i. Allg. auch Abweichungen in radialer Richtung v zur Folge. Kann der Zustand des Satelliten aus der Messgröße beobachtet werden?

Die Bewegung des Satelliten ist durch die Gleichungen

$$\ddot{v}(t) - 2\omega\dot{h}(t) - 3\omega^2 v(t) = 0 \quad (3.50)$$

$$\ddot{h}(t) + 2\omega\dot{v}(t) = u(t) \quad (3.51)$$

beschrieben, wobei $\omega = \frac{2\pi}{360 \cdot 24} \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ die Winkelgeschwindigkeit der Erde und des Satelliten um den Erdmittelpunkt ist und u die Beschleunigung des Satelliten durch seine Steuerröten in h -Richtung bezeichnet. $\square$

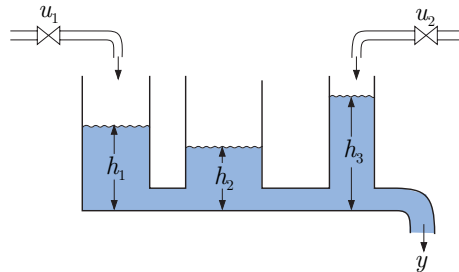


Abb. 3.20: Behältersystem

Aufgabe 3.9** Beobachtbarkeit der Füllstände eines Behältersystems

Stellen Sie für das in Abb. 3.20 gezeigte Behältersystem das Zustandsraummodell auf und untersuchen Sie, ob die Füllstände der drei Behälter aus der Kenntnis der Zuflüsse u_1 und u_2 und des Ausflusses y beobachtet werden können. $\square$

3.3 KALMAN-Zerlegung des Zustandsraummodells

Wie die vorangegangenen Untersuchungen gezeigt haben, können in einem System sowohl steuerbare als auch nicht steuerbare sowie beobachtbare und nicht beobachtbare Eigenvorgänge bzw. kanonische Zustandsvariablen auftreten. Außerdem wurde gezeigt, dass ein nicht vollständig steuerbares bzw. beobachtbares System in Teilsysteme zerlegt werden kann, von denen eines das Steuerbarkeits- bzw. Beobachtbarkeitskriterium erfüllt. Dies legt nahe, dass man in Bezug zu beiden Eigenschaften ein gegebenes System in vier Teilsysteme zerlegen kann, die die beiden Eigenschaften in den vier möglichen Kombinationen besitzen oder nicht besitzen.

Die Zerlegung erfolgt durch eine Transformation des Zustandsvektors $\mathbf{x}$

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x}(t)$$

wobei der neu entstehende Vektor $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ in vier Teilvektoren zerlegt werden kann

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \\ \tilde{x}_3(t) \\ \tilde{x}_4(t) \end{pmatrix},$$

so dass

- $\tilde{x}_1(t)$ die steuerbaren, aber nicht beobachtbaren Zustandsvariablen,
- $\tilde{x}_2(t)$ die steuerbaren und beobachtbaren Zustandsvariablen,
- $\tilde{x}_3(t)$ die nicht steuerbaren und nicht beobachtbaren Zustandsvariablen,
- $\tilde{x}_4(t)$ die nicht steuerbaren, aber beobachtbaren Zustandsvariablen

enthält. Diese Transformation führt auf ein Zustandsraummodell, das die folgende Struktur besitzt:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \\ \tilde{x}_3(t) \\ \tilde{x}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} & \tilde{\mathbf{A}}_{12} & \tilde{\mathbf{A}}_{13} & \tilde{\mathbf{A}}_{14} \\ \mathbf{O} & \tilde{\mathbf{A}}_{22} & \mathbf{O} & \tilde{\mathbf{A}}_{24} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \tilde{\mathbf{A}}_{33} & \tilde{\mathbf{A}}_{34} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \tilde{\mathbf{A}}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \\ \tilde{x}_3(t) \\ \tilde{x}_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1 \\ \tilde{\mathbf{B}}_2 \\ \mathbf{O} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (3.52)$$

$$\mathbf{y}(t) = (\mathbf{O} \quad \tilde{\mathbf{C}}_2 \quad \mathbf{O} \quad \tilde{\mathbf{C}}_4) \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \\ \tilde{x}_3(t) \\ \tilde{x}_4(t) \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

Wenn der Vektor $x(t)$ in der angegebenen Weise zerlegt wurde, sind die Paare $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)$ und $(\tilde{A}_{22}, \tilde{B}_2)$ vollständig steuerbar und die Paare $(\tilde{A}_{22}, \tilde{C}_2)$ und $(\tilde{A}_{44}, \tilde{C}_4)$ vollständig beobachtbar. Die im transformierten Zustandsraummodell angegebenen Nullmatrizen sichern, dass sich die Steuerbarkeit bzw. Beobachtbarkeit der Teilsysteme nicht auf andere Teilsysteme überträgt, was die angestrebte Dekomposition zerstören würde. Die oberhalb der Diagonale stehenden Matrizen $\tilde{A}_{12}$, $\tilde{A}_{13}$, $\tilde{A}_{14}$, $\tilde{A}_{24}$ und $\tilde{A}_{34}$ können beliebig besetzt sein. Sie haben keinen Einfluss auf die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des Gesamtsystems. Dieses Modell kombiniert die in den Gln. (3.25) und (3.47) angegebenen Zerlegungen bezüglich der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit.

Das System (3.52), (3.53) kann als Blockschaltbild wie in Abb. 3.21 angegeben dargestellt werden. Man spricht von der KALMAN-Zerlegung des Systems.

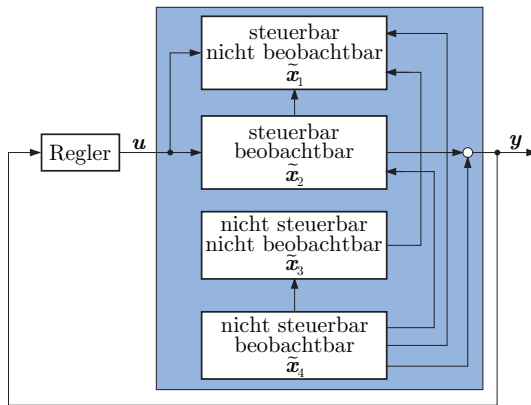


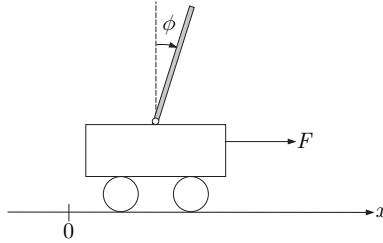
Abb. 3.21: Kalmanzerlegung des Zustandsraummodells

Die Eigenwerte der Systemmatrix lassen sich aus den getrennten Eigenwertproblemen für die in der Diagonale stehenden Matrizen $\tilde{A}_{ii}$ berechnen.

Für ein gegebenes System ist es u. U. nicht ganz einfach, die Transformationsmatrix T zu finden, für die das transformierte Zustandsraummodell in der angegebenen Weise zerlegt ist. Man kann sich in jedem Falle damit behelfen, dass man das Modell in die kanonische Normalform überführt und die kanonischen Zustandsvariablen entsprechend ihrer Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit sortiert. Bei vielen Systemen kann man aber die angestrebte Zerlegung bereits durch Umordnen von Teilvektoren erreichen, weil die Gründe für Nichtsteuerbarkeit und Nichtbeobachtbarkeit häufig darin liegen, dass bestimmte Informationskopplungen nicht vorhanden sind, also die Nullen in den Systemmatrizen bereits vorhanden sind und die Zustandsvariablen lediglich geordnet werden müssen.

Beispiel 3.9 Kalmanzerlegung des Zustandsraummodells des invertierten Pendels

Das Verhalten des invertierten Pendels in Abb. 3.22 ist durch die Wagenposition $x(t)$ und den Winkel $\phi(t)$ beschrieben, die beide einschließlich ihrer ersten Ableitungen als Zustandsvariable im Modell erscheinen. Gemessen werde in diesem Beispiel nur der Pendelwinkel. Eingangsgröße ist die den Wagen beschleunigende Kraft, die durch einen Elektromotor mit der Eingangsspannung $u(t)$ erzeugt wird.

**Abb. 3.22:** Invertiertes Pendel

Für das Zustandsraummodell gilt

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \phi(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{\phi}(t) \end{pmatrix} \text{ mit den Maßeinheiten } \begin{pmatrix} \text{m} \\ \text{rad} \\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{pmatrix}$$

$$u(t) \quad \text{mit der Maßeinheit N}$$

$$\mathbf{y}(t) = \phi(t) \quad \text{mit der Maßeinheit rad}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0,88 & -1,9 & 0,0056 \\ 0 & 21,5 & 3,9 & -0,14 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,3 \\ -0,62 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c}' = (0 \ 1 \ 0 \ 0), \quad d = 0.$$

Man kann sich mit dem Hautuskriterium davon überzeugen, dass ein Eigenwert $\lambda = 0$ nicht beobachtbar ist, denn die Matrix

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{A} \\ \mathbf{c}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,88 & 1,9 & -0,0056 \\ 0 & -21,5 & -3,9 & 0,14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat nur den Rang drei. Sieht man sich die Modellgleichungen genauer an, so erkennt man, dass sie bereits in der dekomponierten Form vorliegen, wenn man

$$\tilde{\mathbf{x}}_1(t) = x(t), \quad \tilde{\mathbf{x}}_2(t) = \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{\phi}(t) \end{pmatrix}$$

setzt. Misst man nur den Winkel ϕ des Pendels, so kann man daraus zwar die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ und die Wagenschwindigkeit $\dot{x}$ bestimmen, nicht jedoch die aktuelle Position x . Da das System vollständig steuerbar ist, gibt es die Komponenten $\tilde{x}_3$ und $\tilde{x}_4$ nicht. Das Zustandsraummodell hat die Form

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0,88 & -1,9 & 0,0056 \\ 0 & 21,5 & 3,9 & -0,14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ - \\ 0 \\ 0,3 \\ -0,62 \end{pmatrix} u(t) \quad (3.54)$$

$$y(t) = (0 \mid 1 \mid 0 \mid 0) \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix},$$

in der die Zerlegung der einzelnen Matrizen eingetragen ist. $\square$

E/A-Verhalten nicht vollständig steuerbarer und beobachtbarer Systeme. Die Eigenschaften der Steuerbarkeit und der Beobachtbarkeit betreffen die unabhängigen Fragen, inwieweit der Eingang $u(t)$ den Systemzustand beeinflusst ($u(t) \mapsto x(t)$) bzw. wie der Zustand $x(t)$ in den Ausgang $y(t)$ eingeht ($x(t) \mapsto y(t)$). Für das E/A-Verhalten spielen beide Eigenschaften gemeinsam eine entscheidende Rolle, denn das Übertragungsverhalten wird durch die Wirkungskette $u(t) \mapsto x(t) \mapsto y(t)$ bestimmt. Wie man aus der Abb. 3.21 erkennen kann, hängt es nur vom steuerbaren und beobachtbaren Teil des Systems ab. Die anderen Teile werden entweder nicht angeregt, oder ihr Verhalten schlägt sich nicht im Systemausgang $y(t)$ nieder. Dies hat zur Folge, dass sowohl in die Gewichtsfunktionsmatrix $G(t)$ als auch in die Übertragungsfunktionsmatrix $G(s)$ nur diejenigen Eigenvorgänge eingehen, die zur Matrix A_{22} gehören, also steuerbar und beobachtbar sind. Es gilt deshalb

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = C_2(sI - A_{22})^{-1}B_2. \quad (3.55)$$

Die Modelle für das E/A-Verhalten haben also eine kleinere dynamische Ordnung als das Zustandsraummodell. Um diesen Sachverhalt aus Abb. 3.21 erkennen zu können, muss man beachten, dass bei der Betrachtung des E/A-Verhaltens vorausgesetzt wird, dass sich das System zur Zeit $t = 0$ in der Ruhelage befindet.

Gleichung (3.55) zeigt, dass nicht alle Eigenwerte der Matrix A auch Pole der Übertragungsfunktion sind bzw. in die Gewichtsfunktionsmatrix eingehen. Darauf ist bereits an mehreren Stellen hingewiesen worden. Jetzt wird offensichtlich, dass die fehlende Steuerbarkeit oder Beobachtbarkeit die Ursache dafür ist. Die für Zustandsraummodelle in kanonischer Normalform abgeleiteten Bedingungen (I-5.100) sowie die für Mehrgrößensysteme erhaltenen Bedingung (2.44)

$$\tilde{c}_i \tilde{b}'_i = 0,$$

unter denen der Eigenwert λ_i nicht in $G(t)$ und folglich auch nicht in $G(s)$ vorkommt, sind genau dann erfüllt, wenn entweder $\tilde{c}_i$ eine Nullspalte von $\tilde{C}$ oder $\tilde{b}'_i$ eine Nullzeile von $\tilde{B}$ ist, der Eigenwert also nicht beobachtbar oder nicht steuerbar

ist. Dabei ist es gleichgültig, ob der Signalweg $u(t) \mapsto x(t) \mapsto y$ durch eine Eingangsentkopplungsnullstelle ($\tilde{c}_i = \mathbf{O}$) oder eine Ausgangsentkopplungsnullstelle ($\tilde{b}_i = \mathbf{O}$) blockiert wird.

Beispiel 3.10 E/A-Verhalten zweier Systeme mit Entkopplungsnullstellen

Sieht man sich die in Abb. 3.23 dargestellten Systeme an, so erkennt man, dass beide Reihenschaltungen dieselbe Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Z_1(s)Z_2(s)}{N_1(s)N_2(s)}$$

haben, in die der Eigenwert $-\lambda$ nicht eingeht. Mathematisch gesehen kürzt sich der Linearfaktor $(s + \lambda)$ im Nenner gegen denselben Linearfaktor im Zähler. Technisch gesehen sind jedoch die Ursachen dafür, dass λ kein Pol der Übertragungsfunktion ist, verschieden.

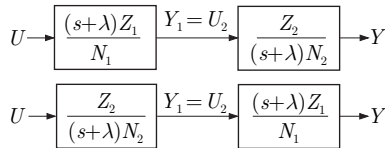


Abb. 3.23: Nicht steuerbare und beobachtbare Systeme

Im ersten Beispiel ist $-\lambda$ ein Pol des rechten Übertragungsgliedes. Die Übertragungsnullstelle des linken Übertragungsgliedes bei $-\lambda$ wird in der Reihenschaltung beider Übertragungsglieder zu einer Eingangsentkopplungsnullstelle, aufgrund derer der aus dem zweiten Übertragungsglied stammende Eigenwert nicht steuerbar ist und deshalb nicht in der Übertragungsfunktion vorkommt.

Im zweiten Beispiel ist $-\lambda$ ein Pol des linken Übertragungsgliedes. Der zugehörige Eigenvorgang kann durch u angeregt werden. Da jedoch das rechte Übertragungsglied eine Nullstelle bei $-\lambda$ besitzt, wird der Term $e^{-\lambda t}$, der in y_1 und folglich am Eingang des zweiten Übertragungsgliedes erscheint, nicht zum Ausgang y übertragen.

Beiden Beispielen ist gemeinsam, dass auf dem Signalweg von u nach y eine Nullstelle bei $-\lambda$ liegt, die die Übertragung blockiert. Für die Übertragungsfunktion ist dabei gleichgültig, ob diese Blockierung die Anregung des Eigenvorganges $e^{-\lambda t}$ oder dessen Übertragung an den Ausgang betrifft. $\square$

Diese Überlegungen führen auf zwei wichtige Folgerungen, auf die man achten sollte, wenn man bei der Behandlung von Regelungssystemen häufig zwischen Zeitbereichs- und Frequenzbereichsbetrachtungen wechselt und die Modellgleichungen so transformiert, dass man die wichtigsten Eigenschaften besonders gut erkennen kann.

- Transformationen des Zustandsraumes ändern nichts an den Eigenschaften der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit.
- Über die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit kann nicht anhand der Übertragungsfunktion oder der Gewichtsfunktion entschieden werden, denn diese E/A-Beschreibungen geben nur den vollständig steuerbaren und beobachtbaren Teil des Systems wieder.

Konsequenzen für den Regelkreis. Die Zerlegung des Modells der Regelstrecke entsprechend der Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitseigenschaften in die angegebenen vier Komponenten hat wichtige Konsequenzen für die Eigenschaften des Regelkreises und insbesondere für die Möglichkeiten, die Regelkreiseigenschaften durch geeignete Wahl eines Reglers zu beeinflussen.

Wie in Abb. 3.21 zu sehen ist, liegt nur der steuerbare und beobachtbare Teil der Regelstrecke in dem über den Regler geschlossenen Kreis. Folglich kann der Regler nur diesen Teil der Regelstrecke in seinem Verhalten beeinflussen. Diese Tatsache kann man sich anhand einer proportionalen Ausgangsrückführung

$$u(t) = -K_y y(t)$$

schnell klarmachen. Für den geschlossenen Kreis erhält man damit das Modell

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \\ \tilde{x}_3(t) \\ \tilde{x}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} - \tilde{B}_1 K_y \tilde{C}_2 & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14} - \tilde{B}_1 K_y \tilde{C}_4 \\ O & \tilde{A}_{22} - \tilde{B}_2 K_y \tilde{C}_2 & O & \tilde{A}_{24} - \tilde{B}_2 K_y \tilde{C}_4 \\ O & O & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{34} \\ O & O & O & \tilde{A}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \\ \tilde{x}_3(t) \\ \tilde{x}_4(t) \end{pmatrix},$$

aus dem hervorgeht, dass nur die zur Matrix $\tilde{A}_{22}$, also zum steuerbaren und beobachtbaren Teil gehörenden Eigenwerte durch den Regler verändert worden sind. Sämtliche anderen Eigenwerte sind vom Regler unabhängig.

Dieser Sachverhalt wird im Kap. 6 noch ausführlich untersucht, wobei auch gezeigt wird, dass sich nichts ändert, wenn anstelle der proportionalen Rückführung ein beliebiger dynamischer Regler verwendet wird. Da dieser Sachverhalt die Möglichkeiten, das Regelkreisverhalten durch geeignete Wahl des Reglers zu verändern, prinzipiell beschneidet, soll er hier im Vorgriff auf eine spätere detaillierte Begründung bereits erwähnt werden:

- Ein instabiles System kann genau dann durch einen Regler stabilisiert werden, wenn sämtliche instabilen Eigenwerte zum steuerbaren und beobachtbaren Teil der Regelstrecke gehören.
- Durch geeignete Wahl des Reglers können sämtliche Eigenwerte der Regelstrecke genau dann zielgerichtet verändert werden, wenn die Regelstrecke vollständig steuerbar und beobachtbar ist.

Bezüglich der Stabilität ist hierbei die Zustandsstabilität gemeint, denn in der E/A-Stabilität spielen die nicht steuerbaren oder nicht beobachtbaren Systemkomponenten keine Rolle.

Auf Grund dieser Tatsachen sind außer den Eigenschaften der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit weitere Begriffe eingeführt worden, die sich auf die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit der instabilen Eigenwerte beziehen. Ein System wird *stabilisierbar* genannt, wenn alle instabilen Eigenwerte steuerbar sind. Es wird *ermittelbar*³ genannt, wenn alle instabilen Eigenwerte beobachtbar sind.

Beispiel 3.9 (Forts.) Kalmanzerlegung des invertierten Pendels

Die Kalmanzerlegung (3.54) des invertierten Pendels zeigt, dass der instabile Eigenwert $\lambda_1 = 0$, der in der „oberen linken Ecke“ der Systemmatrix steht, durch keine Regelung verändert werden kann. Folglich ist das invertierte Pendel für eine beliebige Regelung instabil (bzw. genauer gesagt: grenzstabil). Für einen P-Regler

$$u(t) = -k_P y(t)$$

erhält man für das geregelte Pendel die Zustandsgleichung

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & | & -0,88 - 0,3k_P & -1,9 & 0,0056 \\ 0 & | & 21,5 + 0,62k_P & 3,9 & -0,14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix},$$

aus der hervorgeht, dass das geregelte Pendel für beliebige Reglerverstärkung k_P den Eigenwert $\lambda_1 = 0$ hat. Dieselbe Aussage erhält man, wenn man einen dynamischen Regler beliebiger Ordnung verwendet. Der Grund dafür liegt in der Tatsache, dass der zum Eigenwert λ_1 gehörige Eigenvorgang nicht beobachtbar ist und deshalb, wie Abb. 3.21 zeigt, nicht im Regelkreis liegt. Damit gibt es keinen Regler, für den das geregelte Pendel aus einer beliebigen Anfangsauslenkung x_0 in die Ruhelage $x = 0$ zurückkehrt. $\square$

Nutzung der Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitseigenschaften. Die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit wurde bisher ausschließlich bezüglich der Stellgröße u und der Regelgröße y untersucht. Genau dieselben Untersuchungen können jedoch auch für andere Eingangs- oder Ausgangssignale durchgeführt werden, wobei man – im Gegensatz zu den bisherigen Untersuchungen – häufig gar nicht an einer vollständigen Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit interessiert ist. Die folgenden Beispiele sollen dies deutlich machen.

- Betrachtet man die Steuerbarkeit eines Systems bezüglich der Störeingänge, so wird die Regelungsaufgabe vereinfacht, wenn sich zeigt, dass nur ein Teil der Regelstrecke durch die Störung steuerbar ist. Dies bedeutet nämlich, dass der nicht steuerbare Teil dem Störeinfluss gar nicht unterliegt und folglich auch nicht geregelt werden muss (soweit die Regelung der Störunterdrückung dient).

³ An Stelle von *ermittelbar* spricht man in der deutschsprachigen Literatur auch von *entdeckbar*. Beides sind Übersetzungen der englischen Bezeichnung *detectable*. Damit ist gemeint, dass instabile Eigenvorgänge im Ausgangsvektor erkennbar sind.

Andererseits kann es vorkommen, dass ein durch die Stellgröße nicht steuerbarer Teil durch die Störung steuerbar ist. Das heißt, dass eine Regelung, die mit dieser Stellgröße arbeitet, den Störeinfluss in dem nicht steuerbaren Teil nicht kompensieren kann.

- Eine Reihe von Regelungsverfahren nutzen die Nichtsteuerbarkeit aus. So beruht die Störkopplung darauf, dass durch eine geeignete Wahl des Reglers erreicht wird, dass die Regelgröße nicht mehr von der Störgröße abhängt, also die Eigenvorgänge des Regelkreises nicht gleichzeitig von der Störgröße steuerbar und durch die Regelgröße beobachtbar sind.

Bei einigen sequenziellen Verfahren für die Polverschiebung werden nacheinander mehrere Regler entworfen, wobei mit jedem Regler ein Teil der Eigenwerte auf vorgegebene Werte platziert wird. Dabei wird die Reglermatrix so gewählt, dass die zuvor bereits verschobenen Eigenwerte nicht mehr steuerbar oder nicht beobachtbar sind und der Regler folglich nur die restlichen Eigenwerte beeinflussen kann.

- Betrachtet man gekoppelte Systeme, bei denen mehrere Teilsysteme über Koppelsignale miteinander in Beziehung stehen, so ist es interessant zu untersuchen, welche Eigenvorgänge der Teilsysteme durch die Koppelsignale steuerbar und beobachtbar sind. Nur diese Eigenvorgänge werden nämlich durch die anderen Teilsysteme beeinflusst. Die über die Koppelsignale nicht steuerbaren oder nicht beobachtbaren Eigenwerte sind im entkoppelten Teilsystem dieselben wie im verkoppelten Gesamtsystem.

Aufgabe 3.10 Kalmanzerlegung eines Elektroenergieverbundsystems

Betrachten Sie das in Abb. 6.10 auf S. 265 gezeigte Elektroenergieverbundsystem ohne Sekundärregler in den drei Netzen mit dem Eingang u_1 und dem Ausgang $y_1 = f$.

1. Wie sieht die Kalmanzerlegung des Netzes aus?
2. Grundlastkraftwerke beteiligen sich nicht an der Frequenzhaltung des Netzes. Für sie gilt $p_{\text{GSoll}} = 0$. Wenn also das Kraftwerk 3 ein Grundlastkraftwerk ist, so ist $k_{s3} = k_{p3} = 0$. Wie verändert sich die Kalmanzerlegung des Netzes, wenn Grundlastkraftwerke in allen drei Netzen in die Betrachtungen eingezogen werden? $\square$

Aufgabe 3.11 Kalmanzerlegung eines Dampferzeugers

Untersuchen Sie die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des im Beispiel 2.2 auf S. 41 beschriebenen Dampferzeugers anhand des Modells (2.46), (2.47). Ändern sich diese Eigenschaften, wenn nur jeweils eine der beiden Eingangs- bzw. Ausgangsgrößen zur Verfügung steht?

Geben Sie die Kalmanzerlegung für den Fall an, dass nur die Heißdampftemperatur $y_2(t)$ gemessen und die Brennstoffzufuhr $u_2(t)$ als Stellgröße zur Verfügung steht. $\square$

3.4 Strukturelle Analyse linearer Systeme

3.4.1 Struktur dynamischer Systeme

Die bisher behandelten Beispiele haben gezeigt, dass die Gründe für das Fehlen der vollständigen Steuerbarkeit oder Beobachtbarkeit häufig nicht in einzelnen Parameterwerten zu suchen sind, sondern auf das Nichtvorhandensein von Signalkopplungen zurückgeführt werden können. So ist der Zustand x_2 in der in Abb. 3.17 auf S. 103 dargestellten Reihenschaltung nicht von y_1 aus beobachtbar, weil es gar keinen Signalweg von x_2 nach y_1 gibt. Derselbe Grund führt dazu, dass der Zustand x_1 nicht durch u_2 steuerbar ist.

Diese Tatsache legt es nahe zu untersuchen, inwieweit die Eigenschaften der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit von den innerhalb des betrachteten Systems auftretenden Signalkopplungen bestimmt werden und damit weitgehend von den konkreten Parameterwerten unabhängig sind. Diese Untersuchungen werden auch als „strukturelle Analyse“ bezeichnet, weil sie sich nur auf die durch die Struktur des Systems gegebenen Signalkopplungen beziehen und die erhaltenen Ergebnisse von Parameterschwankungen weitgehend unabhängig sind.

Strukturmatrizen dynamischer Systeme. Die Struktur dynamischer Systeme

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (3.56)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (3.57)$$

wird durch die Lage der von null verschiedenen Elemente in den Matrizen A , B und C beschrieben. Man klassifiziert deshalb die Elemente in solche, die für sämtliche Parameterwerte des Systems verschwinden, und solche, die einen von null verschiedenen Wert haben können. Während man die erste Gruppe durch Nullen kennzeichnet, trägt man für die zweite Gruppe Sterne in die Matrix ein, die kennzeichnen, dass an den betreffenden Stellen „irgendwelche“ Werte stehen. Indem man die Matrixelemente in dieser Weise durch Nullen und Sterne ersetzt, geht man von den gegebenen (numerischen) Matrizen A , B und C zu den Strukturmatrizen $[A]$, $[B]$ bzw. $[C]$ über. Die durch die eckigen Klammern beschriebene Operation ordnet jedem Matrixelement eine Null oder einen Stern zu.

Beispielsweise kann man die Systemmatrix der im Beispiel 3.1 auf S. 68 betrachteten Rührkesselreaktoren in Abhängigkeit von den physikalischen Parametern des Systems in der Form

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{F}{V_1} & 0 \\ \frac{F}{V_2} & -\frac{F}{V_2} \end{pmatrix}$$

schreiben. Dabei wird offensichtlich, dass in der oberen rechten Ecke dieser Matrix für beliebige Parameterwerte eine Null steht, während alle anderen Elemente von null verschieden sind. Die zugehörige Strukturmatrix ist also

$$[A] = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}.$$

An diesem Beispiel wird offenkundig, dass man Strukturmatrizen auch dann aufstellen kann, wenn man die genauen Systemparameter nicht kennt. Die strukturelle Analyse des Systems kommt also dem Umstand entgegen, dass Systeme häufig für ungenau bekannte Parameter analysiert werden müssen, wie es für die Projektierungsphase der Regelung typisch ist.

Ganz allgemein wird im Folgenden immer von einer Strukturmatrix gesprochen, wenn diese Matrix als Elemente nur 0 oder * enthält. Diese Matrizen werden mit S bezeichnet, wobei ein zusätzlicher Index auf diejenige Matrix verweist, deren Struktur durch S beschrieben wird.

Durch Strukturmatrizen werden Klassen numerischer Matrizen beschrieben. So beschreibt

$$\mathcal{S}(S_A) = \{A : [A] = S_A\}$$

die Menge aller derjenigen Matrizen A , in denen an den durch S_A vorgegebenen Stellen Nullen stehen. Wenn man ausdrücken will, dass eine Matrix A zu dieser Klasse gehört, so verwendet man an Stelle der ausführlichen Schreibweise $A \in \mathcal{S}(S_A)$ häufig die abgekürzte Darstellung $A \in S_A$.

Diese Tatsache weist daraufhin, dass es bei der strukturellen Analyse dynamischer Systeme stets um die Analyse einer ganzen Klasse von Systemen geht, nämlich all derjenigen Systeme, deren Matrizen dieselbe Struktur haben. Diese Klasse wird durch die Strukturmatrizen S_A , S_B und S_C festgelegt und mit

$$\mathcal{S}(S_A, S_B, S_C) = \{(A, B, C) : [A] = S_A, [B] = S_B, [C] = S_C\} \quad (3.58)$$

bezeichnet. Alle im Folgenden abgeleiteten Ergebnisse sind in dem Sinne struktureller Art, dass sie stets für eine solche Klasse von Systemen zutreffen.

Grafentheoretische Interpretation der Systemstruktur. Auf eine anschauliche grafentheoretische Interpretation der Systemstruktur kommt man, wenn man für jede Eingangsvariable, Zustandsvariable und Ausgangsvariable einen Knoten aufzeichnet und zwischen diesen Knoten gerichtete Kanten einträgt, wenn das zugehörige Element der Strukturmatrizen S_A , S_B und S_C ein Stern ist.

Etwas mehr formalisiert heißt das, dass die Knotenmenge des Strukturgraphen $\mathcal{G}$ aus Knotenmengen für die Zustände, die Eingänge und die Ausgänge besteht. Diese Knotenmengen werden mit $\mathcal{X}$, $\mathcal{U}$ und $\mathcal{Y}$ und ihre Elemente als Zustands-, Eingangs- bzw. Ausgangsknoten bezeichnet. Da jeder Zustand durch genau einen Knoten repräsentiert wird, wird nicht zwischen dem Namen der Zustandsvariablen und des zugehörigen Knotens unterschieden und beides mit x_i bezeichnet. Dasselbe wird für die Eingangs- und Ausgangsvariablen getan.

Die Adjazenzmatrix Q_0 des Strukturgraphen bildet man entsprechend

$$Q_0 = \begin{pmatrix} S_A & S_B & O \\ O & O & O \\ S_C & O & O \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{U} \\ \mathcal{Y} \end{matrix}$$

aus den gegebenen Strukturmatrizen des Systems, wobei man, streng genommen, die Sterne durch Einsen ersetzen muss, weil in Adjazenzmatrizen keine Sterne, sondern

Einsen stehen. Man kann sich den Aufbau der Matrix Q_0 am einfachsten dadurch veranschaulichen, dass man die Modellgleichungen in der Form

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ u(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & O \\ O & O & O \\ C & O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

untereinander schreibt. Die Anordnung der Matrizen im Modell und die Anordnung der zugehörigen Strukturmatrizen in Q_0 sind gleich. In der mittleren Zeile, die die Beziehung $u(t) = 0$ ausdrückt, wird später der Regler eingetragen (vgl. Gl. (3.63)). Die Matrix Q_0 hat die Dimension $(n + r + m, n + r + m)$, der Graf $\mathcal{G}(Q_0)$ folglich $n + r + m$ Knoten.

Für das Zeichnen des Strukturgraphen ist es häufig einfacher, sich anstelle der Adjazenzmatrix folgende Regeln zu merken:

- Vom Knoten u_j gibt es genau dann eine Kante zum Knoten x_i , wenn das Element in der i -ten Zeile und j -ten Spalte der Strukturmatrix S_B ein Stern ist ($b_{ij} \neq 0$).
- Vom Knoten x_j gibt es genau dann eine Kante zum Knoten x_i , wenn das Element in der i -ten Zeile und j -ten Spalte der Strukturmatrix S_A ein Stern ist ($a_{ij} \neq 0$).
- Vom Knoten x_j gibt es genau dann eine Kante zum Knoten y_i , wenn das Element in der i -ten Zeile und j -ten Spalte der Strukturmatrix S_C ein Stern ist ($c_{ij} \neq 0$).

Der Graf $\mathcal{G}(Q_0)$ beschreibt, wie die Signale innerhalb der zur Klasse $\mathcal{S}(S_A, S_B, S_C)$ gehörenden Systeme verkoppelt sind.

Beispiel 3.11 Strukturelle Analyse eines Systems dritter Ordnung

Es wird ein System betrachtet, dessen Zustandsraummodell die Form

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_{32} \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{23} \end{pmatrix} x(t) \end{aligned}$$

hat. In den Matrizen wird zwischen den Elementen unterschieden, die von den Systemparametern abhängig sind, und denen, die unabhängig von den Systemparametern gleich null sind. Deshalb kann man aus diesen Matrizen sofort die zugehörigen Strukturmatrizen ablesen:

$$S_A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \quad S_B = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}, \quad S_C = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Aus diesen Strukturmatrizen kann man die Adjazenzmatrix Q_0 des zu zeichnenden Grafen bestimmen:

$$Q_0 = \begin{pmatrix} * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Graf $\mathcal{G}(Q_0)$ ist in Abb. 3.24 zu sehen.

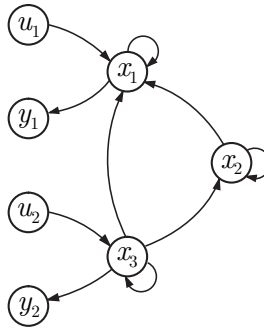


Abb. 3.24: Strukturgraph des Beispielsystems

Die Bildung der Adjazenzmatrix erscheint etwas umständlich, weil diese Matrix so viele Nullen enthält. Man kann auf diese Matrix verzichten, wenn man sich für die Bildung des Grafen die o. a. Regeln merkt. $\square$

3.4.2 Strukturelle Steuerbarkeit und strukturelle Beobachtbarkeit

Mit der strukturellen Analyse einer Klasse $\mathcal{S}(S_A, S_B, S_C)$ von Systemen will man entscheiden, ob die durch die Strukturmatrizen beschriebenen internen Signalkopplungen ausreichen, damit die Systeme dieser Klasse steuerbar und beobachtbar sein können. Von diesem Untersuchungsziel ist die folgende Definition abgeleitet.

Definition 3.3 (Strukturelle Steuerbarkeit und strukturelle Beobachtbarkeit)

Eine Klasse von Systemen $\mathcal{S}(S_A, S_B, S_C)$ heißt strukturell steuerbar bzw. strukturell beobachtbar, wenn es mindestens ein System $(A, B, C) \in \mathcal{S}$ gibt, das vollständig steuerbar bzw. vollständig beobachtbar ist.

Das heißt, dass die strukturelle Steuerbarkeit eine *notwendige* Bedingung für die vollständige Steuerbarkeit ist. Wenn also mit Hilfe der im Folgenden behandelten Verfahren anhand des Strukturgraphen festgestellt wird, dass die betrachtete Systemklasse nicht strukturell steuerbar ist, dann bedeutet das, dass kein System $(A, B, C) \in \mathcal{S}$ vollständig steuerbar ist. Dasselbe gilt für die strukturelle Beobachtbarkeit.

Obwohl die Definition 3.3 nur die Existenz eines einzigen vollständig steuerbaren und beobachtbaren Systems in der betrachteten Klasse fordert, sind die strukturellen Eigenschaften den numerischen sehr ähnlich. Man kann nämlich zeigen, dass in einer Klasse strukturell steuerbarer und beobachtbarer Systeme „fast alle“ Systeme vollständig steuerbar und beobachtbar sind. Mathematisch gesprochen heißt das, dass die Parametervektoren der nicht steuerbaren oder nicht beobachtbaren Systeme im Raum der Systemparameter auf einer Hyperebene liegen (siehe Beispiel 3.12).

Kriterien für die strukturelle Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit. Die Prüfung der strukturellen Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit erfordert zwei Schritte. Erstens muss geprüft werden, ob die Zustandsknoten mit den Eingangs- bzw. Ausgangsknoten über einen Pfad verbunden sind. Zweitens muss eine Bedingung an die Strukturmatrizen überprüft werden. Auf beide Schritte wird jetzt eingegangen.

Man nennt eine Systemklasse $\mathcal{S}$ *eingangsverbunden*, wenn es im Strukturgraphen $\mathcal{G}$ zu jedem Zustandsknoten x_i mindestens einen Pfad gibt, der einen Eingangsknoten u_j mit dem Zustandsknoten x_i verbindet. Es muss nicht eine direkte Kante $u_j \rightarrow x_i$ geben, aber einen Pfad, der über beliebig viele andere Zustandsknoten führen kann. Die Systemklasse $\mathcal{S}$ heißt *ausgangsverbunden*, wenn es von jedem Zustandsknoten zu mindestens einem Ausgangsknoten y_i einen Pfad gibt.

Man kann sich leicht vorstellen, dass eine Systemklasse eingangs- und ausgangsverbunden sein muss, wenn sie strukturell steuerbar und beobachtbar sein soll, denn andernfalls gibt es gar keine Signalwege, auf denen die Eingangsgrößen alle Zustandsvariablen beeinflussen bzw. alle Zustandsvariablen in die Ausgangsgrößen eingehen könnten. Tatsächlich kann man nachweisen, dass „fast alle“ Systeme einer eingangs- und ausgangsverbundenen Systemklasse das Hautuskriterium für $\lambda \neq 0$ erfüllen, dass also für fast alle diese Systeme die Bedingungen

$$\text{Rang}(\lambda I - A \ B) = n$$

und

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \lambda I - A \\ C \end{pmatrix} = n$$

für $\lambda \neq 0$ erfüllt sind.

Die Systemklasse muss noch eine zweite Bedingung erfüllen, die sichert, dass das Hautuskriterium auch für $\lambda = 0$ für mindestens ein System erfüllt ist. Man muss prüfen, dass der strukturelle Rang der Matrizen

$$(S_A \ S_B) \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} S_A \\ S_C \end{pmatrix}$$

gleich n ist. Unter dem strukturellen Rang (s-Rang) einer Strukturmatrix versteht man die maximale Anzahl von $*$ -Elementen, die man so auswählen kann, dass sie in getrennten Zeilen und Spalten stehen. Wenn der strukturelle Rang einer Strukturmatrix gleich n ist, so haben fast alle Matrizen dieser Klasse den Rang n . Der strukturelle Rang wird mit s-Rang abgekürzt.

Satz 3.7 (Kriterium für strukturelle Steuerbarkeit und strukturelle Beobachtbarkeit)

Eine Klasse $\mathcal{S}(S_A, S_B, S_C)$ von Systemen ist genau dann strukturell steuerbar, wenn

1. S eingangsverbunden ist,
2. die Bedingung

$$\text{s-Rang } (S_A \ S_B) = n \quad (3.60)$$

erfüllt ist.

Die Klasse $\mathcal{S}$ ist genau dann strukturell beobachtbar, wenn

1. S ausgangsverbunden ist,
2. die Bedingung

$$\text{s-Rang } \begin{pmatrix} S_A \\ S_C \end{pmatrix} = n \quad (3.61)$$

erfüllt ist.

Beispiel 3.11 (Forts.) Strukturelle Analyse eines Systems dritter Ordnung

Wie man aus dem Grafen in Abb. 3.24 sofort sehen kann, ist die betrachtete Systemklasse eingangs- und ausgangsverbunden. Für die Überprüfung der Rangbedingungen werden die Strukturmatrizen aufgestellt und es werden $*$ -Elemente gesucht, die in unterschiedlichen Zeilen und Spalten stehen. Dabei muss man versuchen, so viele derartige Elemente wie möglich zu finden. Die folgenden Strukturmatrizen zeigen, dass der strukturelle Rang gleich drei ist und die betrachtete Systemklasse folglich strukturell steuerbar und beobachtbar ist. Die für die Rangbestimmung verwendeten Elemente sind durch $\bullet$ gekennzeichnet:

$$\text{s-Rang } \left(\begin{array}{ccc|cc} \bullet & * & * & * & 0 \\ 0 & * & \bullet & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & \bullet \end{array} \right) = 3$$

$$\text{s-Rang } \left(\begin{array}{ccc} \bullet & * & * \\ 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & * \\ - & - & - \\ * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bullet \end{array} \right) = 3.$$

In diesem Beispiel gibt es mehrere Möglichkeiten, drei $\bullet$ -Elemente auszuwählen.

Das Ergebnis bedeutet, dass innerhalb der angegebenen Systemklasse fast alle Systeme vollständig steuerbar und beobachtbar sind. $\square$

Das Beispiel zeigt, dass die grafische Analyse sehr anschaulich ist. Dieser Vorteil macht sich insbesondere dann bemerkbar, wenn man feststellt, dass die betrachtete Systemklasse *nicht* strukturell steuerbar oder beobachtbar ist. In diesem Fall gibt es ja kein System in $\mathcal{S}$, das vollständig steuerbar und beobachtbar ist. Man kann die Steuerbarkeit bzw. Beobachtbarkeit dann nur erreichen, indem man neue Stellgrößen bzw. neue Messgrößen einführt oder gegen vorhandene austauscht. Anhand des Strukturgraphen kann man dabei erkennen, wo die neuen Stellglieder angreifen müssen bzw. wo man zusätzlich messen muss.

Beispiel 3.12 Strukturelle Steuerbarkeit paralleler Integratoren

In der Aufgabe 3.6 wurde ermittelt, dass die Parallelschaltung zweier Integratoren nicht vollständig steuerbar und beobachtbar ist. Es soll jetzt untersucht werden, ob dieses Ergebnis strukturelle Ursachen hat.

Das Zustandsraummodell der parallel geschalteten Integratoren heißt

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{T_{I1}} \\ \frac{1}{T_{I2}} \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= (1 \ 1) \mathbf{x}(t).\end{aligned}$$

Die Systemklasse $\mathcal{S}$, zu der dieses System gehört, kann man ermitteln, indem man die Struktur der in diesem Zustandsraummodell vorkommenden Matrizen ermittelt:

$$\mathbf{S}_A = [\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_B = [\mathbf{b}] = \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_C = [\mathbf{c}'] = (* \ *).$$

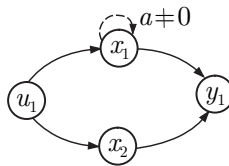


Abb. 3.25: Strukturgraph der parallelen Integratoren

Der Strukturgraph der betrachteten Systemklasse ist in Abb. 3.25 aufgezeichnet (ohne die gestrichelte Kante). Es ist sofort zu sehen, dass die Systemklasse eingangs- und ausgangsverbunden ist. Bei der Prüfung der Rangbedingungen

$$\text{s-Rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & | & * \\ 0 & 0 & | & * \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \text{s-Rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ - & - & - \\ * & * \end{pmatrix}$$

sieht man, dass es keine zwei $*$ -Elemente gibt, die in diesen Matrizen in unterschiedlichen Zeilen und Spalten stehen. Die Tatsache, dass die parallelen Integratoren nicht steuerbar und beobachtbar sind, hat also strukturelle Gründe.

Diskussion. Abhilfe schafft die Einführung neuer Mess- und Stellgrößen. Wenn beispielsweise ein zusätzlicher Eingang u_2 eingeführt wird, der nur den ersten Integrator beeinflusst, so hat die neue Eingangsmatrix B die Struktur

$$[B] = \begin{pmatrix} * & * \\ * & 0 \end{pmatrix}.$$

Da die neue Spalte auch die für den strukturellen Rang maßgebende Matrix erweitert, ist die Rangbedingung jetzt erfüllt:

$$\text{s-Rang} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & * & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & 0 \end{array} \right) = 2.$$

Schaltet man andererseits nicht zwei Integratoren, sondern zwei PT_1 -Glieder parallel, so hat die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} \end{pmatrix}$$

die Struktur

$$[A] = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Auch hier ist die Rangbedingung erfüllt. Die Parallelschaltung zweier PT_1 -Glieder ist also strukturell steuerbar und beobachtbar. Untersucht man diese Parallelschaltung mit dem Kalmankriterium, so sieht man, dass sie nur dann nicht steuerbar ist, wenn die Zeitkonstanten der beiden Übertragungsglieder exakt gleich groß sind. Die Beziehung $T_1 = T_2$ beschreibt dann gerade die Hyperebene im Raum der Parameter T_1 und T_2 , für die das System zwar strukturell, aber nicht numerisch steuerbar ist. Für alle anderen, also für "fast alle" parallelgeschalteten PT_1 -Glieder, folgt aus der strukturellen auch die numerische Steuerbarkeit.

Wie der Strukturgraph in Abb. 3.25 zeigt, genügt es bereits, einen der beiden Integratoren mit einer Rückführung zu versehen, so dass das Zustandsraummodell in

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{T_{11}} \\ \frac{1}{T_{12}} \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= (1 \ 1) \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

übergeht. Wenn a von null verschiedene Werte annehmen kann, ist die Strukturmatrix von A jetzt durch

$$S_A = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben, wodurch eine neue Kante in den Strukturgraph eingeführt wird (in Abb. 3.25 gestrichelt eingetragen). Das System ist strukturell steuerbar und beobachtbar. Nur für den speziellen Parameterwert $a = 0$ besitzt es diese Eigenschaften nicht. $\square$

Dualität von struktureller Steuerbarkeit und struktureller Beobachtbarkeit.

Die im Abschn. 3.2.3 eingeführte Dualität von Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit überträgt sich auch auf die beiden strukturellen Eigenschaften. Dies sieht man aus einer strukturellen Analyse des primären Systems

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

und des dualen Systems

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_T(t) &= \mathbf{A}'\mathbf{x}_T(t) + \mathbf{C}'\mathbf{u}_T(t), & \mathbf{x}_T(0) &= \mathbf{x}_{T_0} \\ \mathbf{y}_T(t) &= \mathbf{B}'\mathbf{x}_T(t).\end{aligned}$$

Genau dann, wenn die Systemklasse $\mathcal{S}([\mathbf{A}], [\mathbf{B}], [\mathbf{C}])$, zu der das primäre System gehört, die Bedingungen aus Satz 3.7 für die strukturelle Steuerbarkeit erfüllt, erfüllt die Systemklasse $\mathcal{S}([\mathbf{A}'], [\mathbf{C}'], [\mathbf{B}'])$, zu der das duale System gehört, die Bedingungen für die strukturelle Beobachtbarkeit und umgekehrt.

Zeichnet man die zugehörigen Strukturgraphen auf, so sieht man, dass der Strukturgraph des dualen Systems aus dem Strukturgraphen des primären System durch eine Umkehrung der Kantenrichtungen entsteht. Dies wird dadurch hervorgerufen, dass die Adjazenzmatrix $\mathbf{Q}_0$ des dualen Systems gerade die transponierte Adjazenzmatrix des primären Systems ist. Interessanterweise stimmt diese Art der Dualität, die sich auf den Vergleich der Eigenschaften der Steuerbarkeit und der Beobachtbarkeit bezieht, mit der in der Graphentheorie definierten Dualität überein, derzufolge zwei Graphen dual zueinander genannt werden, wenn ihre Adjazenzmatrizen durch Transposition ineinander übergehen.

Beispiel 3.13 Dualität von struktureller Steuerbarkeit und struktureller Beobachtbarkeit

Es werden das im Beispiel 3.11 auf S. 118 angegebene System sowie das dazu duale System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_T(t) &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \mathbf{x}_T(t) + \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & c_{23} \end{pmatrix} \mathbf{u}_T(t) \\ \mathbf{y}_T(t) &= \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{32} \end{pmatrix} \mathbf{x}_T(t)\end{aligned}$$

betrachtet. Der Strukturgraph des dualen Systems ist in Abb. 3.26 gezeigt. Er unterscheidet sich offensichtlich von dem in Abb. 3.24 auf S. 119 gezeigten Graphen nur um die Richtung der Kanten.

Damit wird an diesem Beispiel sichtbar, dass das duale System genau dann eingangsverbunden ist, wenn das primale System ausgangsverbunden ist und umgekehrt. An den Strukturmatrizen erkennt man auch, dass die im Satz 3.7 angegebenen Rangbedingungen in diesem Sinne dual sind, wenn man bedenkt, dass

$$\text{Rang}([\mathbf{A}'] \ [\mathbf{C}']) = \text{Rang} \begin{pmatrix} [\mathbf{A}] \\ [\mathbf{C}] \end{pmatrix}$$

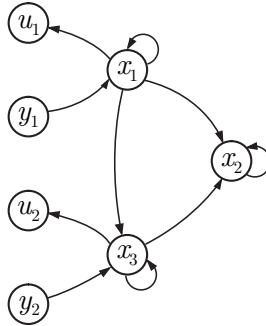


Abb. 3.26: Strukturgraph des dualen Systems

gilt. Die für das duale System aufgestellt Adjazenzmatrix heißt

$$Q_0 = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & * \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sie entsteht aus der im Beispiel 3.11 angegebenen Matrix durch Transposition. $\square$

Aufgabe 3.12* Beobachtbarkeit eines Gleichstrommotors

Im Beispiel I-5.2 wurde für einen Gleichstrommotor die folgende Zustandsgleichung abgeleitet:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{R_A}{L_A} & -\frac{k_M}{L_A} \\ \frac{k_T}{J} & -\frac{k_V}{J} \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{L_A} \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} i_A(0) \\ \dot{\phi}(0) \end{pmatrix}, \quad (3.62)$$

wobei sich der Zustandsvektor

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} i_A(t) \\ \dot{\phi}(t) \end{pmatrix}$$

aus dem Ankerstrom $i_A(t)$ und der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}(t)$ zusammensetzt. Die Eingangsgröße $u(t)$ ist die an die Klemmen des Motors angelegte Gleichspannung.

Der Motor wird jetzt durch einen Sensor für die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}(t)$ erweitert, der als PT_1 -Glied modelliert wird und dessen Sensorsignal die Ausgangsgröße $y(t)$ des Motors ist.

1. Stellen Sie das Zustandsraummodell des Motors einschließlich des Sensors auf.
2. Überprüfen Sie die Steuerbarkeit und die Beobachtbarkeit des Motors.
3. Gelten Ihre Ergebnisse auch strukturell?

4. Wenn der Motor als Stellmotor für ein Ventil eingesetzt wird, ist die Ventilstellung proportional zum Drehwinkel $\phi(t)$. Den Drehwinkel $\phi(t)$ kann man aus der gemessenen Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}(t)$ durch Integration berechnen, so dass zu vermuten ist, dass $\phi(t)$ aus der Messgröße $y(t)$ beobachtbar ist. Stimmt diese Vermutung? Leiten Sie Ihr Ergebnis aus dem Strukturgraphen ab und interpretieren Sie es. $\square$

3.4.3 Strukturell feste Eigenwerte

Eigenwerte, die nicht steuerbar oder nicht beobachtbar sind, werden auch als *feste Eigenwerte* bezeichnet, denn sie lassen sich durch keinen Regler verändern. Dieser Begriff lässt sich auf den der strukturell festen Eigenwerte einer Systemklasse $\mathcal{S}(S_A, S_B, S_C)$ erweitern. Die Systemklasse $\mathcal{S}$ hat strukturell feste Eigenwerte, wenn *alle* Systeme $(A, B, C) \in \mathcal{S}$ feste Eigenwerte haben, d. h., wenn alle betrachteten Systeme nicht vollständig steuerbar und beobachtbar sind.

Man muss beachten, dass entsprechend der gegebenen Begriffsbestimmung sämtliche Systeme $(A, B, C) \in \mathcal{S}$ feste Eigenwerte haben, wenn $\mathcal{S}$ strukturell feste Eigenwerte besitzt. Das bedeutet aber nicht, dass alle Systeme zahlenmäßig dieselben festen Eigenwerte haben.

Die Überprüfung der Systemklasse auf strukturell feste Eigenwerte ist prinzipiell sehr einfach, denn sobald eine der Bedingungen aus Satz 3.7 verletzt ist, ist die Systemklasse nicht strukturell steuerbar und beobachtbar und hat strukturell feste Eigenwerte. Es gilt also:

|| Eine Systemklasse $\mathcal{S}(S_A, S_B, S_C)$ hat genau dann strukturell feste Eigenwerte, wenn mindestens eine der Bedingungen von Satz 3.7 nicht erfüllt ist.

Diese Eigenschaft hat eine interessante grafische Interpretation, auf die im Folgenden eingegangen werden soll. Dabei betrachtet man das gegebene System unter dem Einfluss einer Rückführung des Ausgangs y auf den Eingang u , die durch

$$u(t) = -K_y y(t)$$

beschrieben ist. Da die Matrix K_y keiner Beschränkung unterliegt, hat die Strukturmatrix $[K_y]$ keine Nullelemente.

Bezieht man die Rückführung in den Strukturgraphen ein, so muss man den bisherigen Graphen um Kanten von allen Ausgangsvariablen y_i auf alle Eingangsgrößen u_j erweitern. Formal geschieht das dadurch, dass für das jetzt betrachtete Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ u(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & O \\ O & O & -K_y \\ C & O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

die neue Adjazenzmatrix

$$Q_E = \begin{pmatrix} S_A & S_B & O \\ O & O & E \\ S_C & O & O \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{U} \\ \mathcal{Y} \end{matrix}$$

aufgestellt wird, in der die Rückführung durch die (m, r) -Matrix

$$E = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

repräsentiert wird. Gleichung (3.63) unterscheidet sich von Gl. (3.59) durch den Regler. Die Erweiterung des Strukturgraphen ist in Abb. 3.27 für das Beispiel aus Abb. 3.24 veranschaulicht.

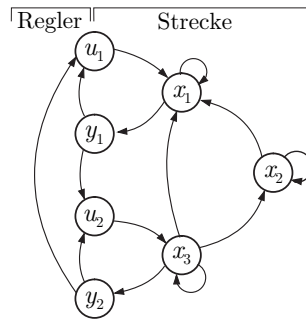


Abb. 3.27: Strukturgraph für das Beispielsystem mit Ausgangsrückführung

Da die Eigenwerte der Regelstrecke nur dann durch den Regler beeinflusst werden können, wenn sie in einer Rückführschleife mit dem Regler liegen, gibt es strukturell feste Eigenwerte, wenn es für einen oder mehrere Zustandsknoten keine derartige Schleife gibt. Der Grund dafür kann nur in der Tatsache liegen, dass die Regelstrecke nicht eingangs- oder nicht ausgangsverbunden ist. Strukturell feste Eigenwerte, die aus diesem Grunde vorhanden sind, werden auch als *strukturell feste Eigenwerte des Typs I* bezeichnet.

Die zweiten Bedingungen im Satz 3.7 können ebenfalls grafisch interpretiert werden, wenn man den Begriff der Schleifenfamilie einführt. Unter einer Schleifenfamilie versteht man eine Menge von geschlossenen Pfaden (Schleifen) in einem gegebenen Grafen, die keine gemeinsamen Knoten enthalten. Zählt man die Zustandsknoten in der Schleifenfamilie, so erhält man deren Weite. Die zweiten Bedingungen im Satz 3.7 sind nun gerade dann erfüllt, wenn es im Grafen $\mathcal{G}(Q_E)$ eine Schleifenfamilie der Weite n gibt. Wenn strukturell feste Eigenwerte existieren, weil diese Bedingung nicht erfüllt ist, obwohl die Systemklasse eingangs- und ausgangsverbunden ist, so spricht man auch von *strukturell festen Eigenwerten des Typs II*.

Damit erhält man für die Existenz strukturell fester Eigenwerte folgende Aussagen:

Satz 3.8 (Existenz strukturell fester Eigenwerte)

Eine Klasse $\mathcal{S}(\mathbf{S}_A, \mathbf{S}_B, \mathbf{S}_C)$ von Systemen hat genau dann strukturell feste Eigenwerte, wenn mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. S ist entweder nicht eingangsverbunden oder nicht ausgangsverbunden (oder beides).
2. Im Strukturgraphen $\mathcal{G}(\mathbf{Q}_E)$ gibt es keine Schleifenfamilie der Weite n .

Beispiel 3.11 (Forts.) Strukturelle Analyse eines Systems dritter Ordnung

Wie bereits untersucht wurde, ist die als Beispiel betrachtete Systemklasse strukturell steuerbar und beobachtbar. Folglich besitzt sie keine strukturell festen Eigenwerte. Mit Hilfe von Satz 3.8 kann man nun auf anderem Wege zu diesem Ergebnis kommen.

Man betrachtet den in Abb. 3.27 gezeigten Strukturgraphen $\mathcal{G}(\mathbf{Q}_E)$. Die Systemklasse ist, wie schon untersucht wurde, eingangs- und ausgangsverbunden. Man kann nun eine Schleifenfamilie der Weite drei finden und damit zeigen, dass die Systemklasse keine strukturell festen Eigenwerte hat. Beispielsweise enthält die Schleife $u_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1 \rightarrow y_1 \rightarrow u_2$ alle drei Zustandsknoten und stellt folglich eine derartige Schleifenfamilie dar. Ein anderes Beispiel ist durch die drei Schleifen $u_2 \rightarrow x_3 \rightarrow y_2 \rightarrow u_2$, $u_1 \rightarrow x_1 \rightarrow y_1 \rightarrow u_1$ und $x_2 \rightarrow x_2$ gegeben, die ebenfalls alle drei Zustandsknoten enthalten und folglich die Weite drei besitzen. $\square$

Strukturbeschränkte Regler. Unter einem strukturbeschränkten Regler versteht man einen Mehrgrößenregler

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_y \mathbf{y}(t),$$

für den vorgeschrieben ist, dass bestimmte Elemente der Reglermatrix $\mathbf{K}_y$ gleich null sein müssen. Will man beispielsweise zwischen der Regelgröße y_1 und der Stellgröße u_2 eines Zweigrößensystems keine Informationskopplung herstellen, so unterliegt der Regler der Beschränkung $k_{y_2 1} = 0$. Im Extremfall kann man auch zwei einschleifige Regler als einen strukturbeschränkten Mehrgrößenregler auffassen.

Der Begriff der Strukturbeschränkung ist sehr anschaulich, denn die betrachteten Strukturbeschränkungen äußern sich in Nullen in der Strukturmatrix $\mathbf{S}_K$ des Reglers. Für die als Beispiele genannten Strukturbeschränkungen gilt

$$\mathbf{S}_K = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{S}_K = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Die Existenz strukturell fester Eigenwerte hängt offensichtlich von Strukturbeschränkungen des Reglers ab. Erwartungsgemäß gibt es umso mehr feste Eigenwerte,

je schärfer die Strukturbeschränkungen für den Regler sind, d. h., je mehr Nullen in S_K stehen.

Die Aussagen des Satzes 3.8 können nun ohne weiteres auf strukturbeschränkte Regler angewendet werden, wenn man in der Adjazenzmatrix Q_E anstelle der vollbesetzten Matrix E die Strukturmatrix S_K des Reglers einsetzt. Das heißt, im Strukturgraphen werden nur noch Kanten $y_j \rightarrow u_i$ eingetragen, wenn die durch sie repräsentierten Rückkopplungen auch unter den vorhandenen Strukturbeschränkungen möglich sind. Der Wegfall derjenigen Kanten, für die jetzt Nullen in S_K stehen, schränkt natürlich die Möglichkeit ein, Schleifenfamilien zu bilden. Nur wenn es trotz der eingeführten Strukturbeschränkungen noch eine Schleifenfamilie der Weite n gibt, stellt der Regler diejenigen Informationskopplungen her, die für die Beeinflussung aller Eigenwerte strukturell notwendig sind.

Aufgabe 3.13 Strukturell feste Eigenwerte

Gegeben ist die Systemklasse, die durch den Grafen in Abb. 3.28 beschrieben ist.

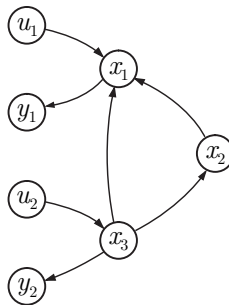


Abb. 3.28: Strukturgraf

Untersuchen Sie, ob diese Systemklasse für nicht strukturbeschränkte Mehrgrößenregler und für dezentrale Regler strukturell feste Eigenwerte besitzt. Was bedeutet Ihr Ergebnis für die Stabilität des Regelkreises und die erreichbare Regelgüte? □

Aufgabe 3.14* Strukturelle Steuerbarkeit eines elektrischen Rotationsantriebs

Ein elektromechanisches System bestehend aus einem Elektromotor, der über ein Getriebe und eine Welle zwei Schwungmassen antreibt, kann durch das in Abb. 3.29 dargestellte elektromechanische Ersatzsystem beschrieben werden. Das elastische Verhalten der auf Torsion beanspruchten Welle wird durch eine Drehfeder modelliert. Eingangsgröße ist die elektrische Spannung ($u(t) = U_A(t)$), Ausgangsgröße der Drehwinkel der rechten Scheibe ($y(t) = \varphi_2(t)$). Folgende Bezeichnungen sind in Abb. 3.29 verwendet:

Ψ	Magnetfluss	$u_i(t)$	induzierte Gegenspannung
R_A	Widerstand	L_A	Induktivität
Θ_i	Trägheitsmomente der Scheiben	d_i	Dämpfung
$M(t)$	Antriebsmoment des Motors	$\ddot{u}$	Untersetzungsverhältnis
η	mechanischer Wirkungsgrad	$\varphi_i(t)$	Drehwinkel der Scheiben
c_t	Torsionsfederkonstante		

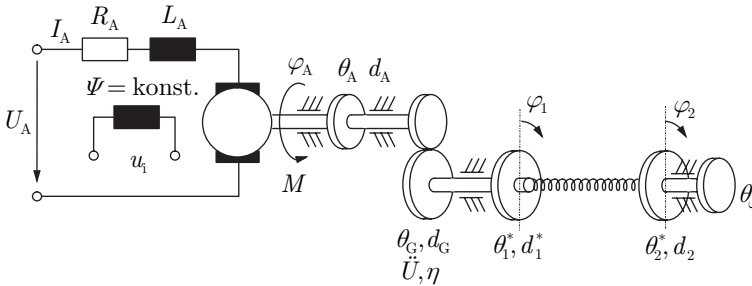


Abb. 3.29: Elektromechanisches Ersatzsystem für einen Rotationsantrieb

Unter einigen vereinfachenden Annahmen (z. B. der Vernachlässigung von Reibungseffekten) und nach Definition des Zustandsvektors

$$\mathbf{x}(t)' = (x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)) = (\varphi_1(t) \ \dot{\varphi}_1(t) \ \varphi_2(t) \ \dot{\varphi}_2(t))$$

erhält man das Zustandsraummodell

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{c_t}{\Theta_1} & -\frac{d_1}{\Theta_1} & \frac{c_t}{\Theta_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{c_t}{\Theta_2} & 0 & -\frac{c_t}{\Theta_2} & -\frac{d_2}{\Theta_2} \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\Psi \ddot{u} \eta}{R_A \Theta_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t),$$

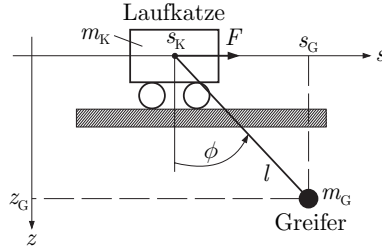
$$\mathbf{y}(t) = (0 \ 0 \ 1 \ 0) \mathbf{x}(t).$$

1. Zeichnen Sie den Strukturgraphen des Systems.
2. Ist das System strukturell steuerbar und strukturell beobachtbar?
3. Ändern sich diese Eigenschaften, wenn anstelle des Drehwinkels φ_2 der zweiten Scheibe der Drehwinkel φ_1 der ersten Scheibe gemessen wird? Erklären Sie das Ergebnis physikalisch anhand des Ersatzsystems aus Abb. 3.29. $\square$

Aufgabe 3.15* Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit einer Verladebrücke

Für die Verladebrücke in Abb. 3.30 werden folgende Zustandsgrößen eingeführt:

$x_1(t)$	$= s_K(t)$	Position der Laufkatze
$x_2(t)$	$= \dot{s}_K(t)$	Geschwindigkeit der Laufkatze
$x_3(t)$	$= \phi(t)$	Seilwinkel ($\phi = 0$: Seil hängt senkrecht nach unten.)
$x_4(t)$	$= \dot{\phi}(t)$	Winkelgeschwindigkeit.

**Abb. 3.30:** Verladebrücke

Eingangsgröße $u(t)$ ist die auf die Laufkatze wirkende Kraft. Parameter des Systems sind:

m_K	Masse der Laufkatze
m_G	Masse von Greifer und Last (Das Seil wird als masselos betrachtet.)
l	Seillänge
g	Erdbeschleunigung.

Nach Linearisierung um die Ruhelage erhält man das Zustandsraummodell

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \end{pmatrix} u(t) \quad (3.64)$$

mit

$$a_{23} = \frac{m_G}{m_K} g \quad (3.65)$$

$$a_{43} = -\frac{m_G + m_K}{m_K} \frac{g}{l} \quad (3.66)$$

$$b_2 = \frac{1}{m_K} \quad (3.67)$$

$$b_4 = -\frac{1}{m_K l}. \quad (3.68)$$

Wird der Seilwinkel ϕ gemessen, so lautet die Ausgangsgleichung

$$y(t) = (0 \ 0 \ 1 \ 0) \mathbf{x}(t).$$

1. Prüfen Sie, ob das System vollständig steuerbar und beobachtbar ist und geben Sie gegebenenfalls an, welche Eigenwerte nicht steuerbar bzw. beobachtbar sind.
2. Prüfen Sie anhand des Strukturgraphen des Systems, ob Ihre Ergebnisse auch strukturell gelten.
3. Wie verändern sich Ihre Ergebnisse, wenn anstelle des Seilwinkels die Position der Laufkatze gemessen wird? ☐

Aufgabe 3.16* Steuerbarkeit eines Systems in Regelungsnormform

Betrachten Sie ein System, dessen Zustandsraummodell in Regelungsnormform

$$\dot{\mathbf{x}}_R(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \mathbf{x}_R(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \quad \mathbf{x}_R(0) = \mathbf{x}_0$$

$$y(t) = (b_0 \ b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_{n-1}) \mathbf{x}_R(t)$$

gegeben ist. Prüfen Sie die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit dieses Systems. Gelten Ihre Ergebnisse auch strukturell? $\square$

3.5 Realisierbarkeit und Realisierung von Mehrgrößensystemen

Ein lineares System kann sowohl durch ein Zustandsraummodell

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0} \quad (3.69)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t) \quad (3.70)$$

als auch durch ein E/A-Modell im Frequenzbereich

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s) \mathbf{U}(s) \quad (3.71)$$

beschrieben werden, wobei beide Modelle dasselbe Übertragungsverhalten aufweisen, wenn die Beziehung

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{D} + \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (3.72)$$

erfüllt ist. Als Abkürzung für diesen Zusammenhang wurde

$$\mathbf{G}(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right]$$

eingeführt.

Die Beziehung (3.72) kann ohne Probleme angewendet werden, wenn man mit ihr den Schritt vom Zustandsraummodell zur Frequenzbereichsdarstellung, also in der Gleichung von rechts nach links, gehen will. Problematischer ist es, aus einer gegebenen Übertragungsfunktionsmatrix das dazugehörige Zustandsraummodell zu finden, denn aus $\mathbf{G}(s)$ kann nicht ohne weiteres abgelesen werden, welche dynamische Ordnung das Modell haben muss. Mit diesem Problem befasst sich dieser Abschnitt.

Wenn die Beziehung (3.72) erfüllt ist, so sagt man, dass das Zustandsraummodell (3.69), (3.70) eine *Realisierung* der gegebenen Übertragungsfunktionsmatrix ist.

Der Begriff der Realisierung stammt aus der Zeit, als man das Zustandsraummodell mit einer Analogrechnerschaltung oder einer Operationsverstärkerschaltung in Verbindung brachte, die das gegebene Übertragungsverhalten realisieren sollte. Die Überführung der Übertragungsfunktionsmatrix in das Zustandsraummodell war also eine wichtige Voraussetzung für die Nachbildung eines durch eine Übertragungsfunktion gegebenen Systems.

Für Eingrößensysteme wurde das Problem der Realisierung im Abschnitt I-6.5.2 im Zusammenhang mit der Berechnung einer Übertragungsfunktion aus einem Zustandsraummodell bzw. aus einer Differenzialgleichung erwähnt. Da die Übertragungsfunktion $G(s)$ eine gebrochene rationale Funktion ist, stimmen die Koeffizienten ihres Zähler- und Nennerpolynoms mit den Koeffizienten der Differenzialgleichung bzw. den Parametern der Regelungsnormform des Zustandsraummodells überein. Die Lösung des Realisierungsproblems bereitet also keine Schwierigkeiten.

Bei Mehrgrößensystemen ist die Suche nach einer Realisierung schwieriger. Wie im Abschn. 2.5 erläutert wurde, stimmt zwar die Menge der Pole aller Elemente $G_{ij}(s)$ der Übertragungsfunktionsmatrix mit der Menge der Eigenwerte, die in der zu berechnenden Matrix A vorkommen muss, überein. Um die dynamische Ordnung festlegen zu können, muss man jedoch auch die Vielfachheit der Eigenwerte kennen.

Auch haben die Abschnitte 3.1.5, 3.2.5 und 3.3 gezeigt, dass bei nicht vollständig steuerbaren bzw. nicht vollständig beobachtbaren Systemen die Übertragungsfunktionsmatrix nicht alle Eigenwerte als Pole enthält. Bei der Anwendung von Gl. (3.72) von rechts nach links fallen diese Eigenwerte durch Kürzen der entstehenden gebrochen rationalen Ausdrücke heraus. Aber wie oft sind steuerbare und beobachtbare Eigenwerte im Zustandsraummodell enthalten?

Man könnte nun so vorgehen, dass man jedes Element der Übertragungsfunktionsmatrix $G(s)$ in der für Eingrößensysteme bekannten Weise in ein Zustandsraummodell überführt und aus den erhaltenen Teilmodellen das Gesamtmodell zusammensetzt. Dabei entsteht tatsächlich eine Realisierung von $G(s)$. Dieser Weg führt jedoch i. Allg. auf ein Modell, in dem Eigenvorgänge des Systems mehrfach nachgebildet sind. Tritt nämlich ein Eigenvorgang in mehreren Elementen $G_{ij}(s)$ der Übertragungsfunktionsmatrix auf, so wird für ihn in der Realisierung jedes dieser Elemente eine gesonderte Zustandsvariable eingeführt.

Man sucht i. Allg. aber nicht nur irgendeine Realisierung von $G(s)$, sondern eine mit kleinstmöglicher dynamischer Ordnung. Diese wird als *minimale Realisierung* bezeichnet. Ein Weg, eine minimale Realisierung zu finden, wird im Folgenden beschrieben.

GILBERT-Realisierung. Bei dem von GILBERT angegebenen Weg, eine minimale Realisierung aufzustellen, wird vorausgesetzt, dass die Pole der Übertragungsfunktionsmatrix einfach sind. Auf Grund dieser Voraussetzung ist bekannt, dass die Systemmatrix A des aufzustellenden Zustandsraummodells diagonalähnlich ist. Diese Voraussetzung bedeutet aber nicht, dass auch die Eigenwerte von A einfach sind.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass kein Element von $G(s)$ sprunghaft ist. Andernfalls müsste man eine konstante Matrix,

die die sprungfähigen Anteile enthält, als Summand abspalten. Diese Matrix wäre gleich der Durchgangsmatrix D des Zustandsraummodells.

Das Verfahren beginnt damit, dass alle Elemente der gegebenen (r, m) -Übertragungsfunktionsmatrix $G(s)$ in Partialbrüche zerlegt werden, $G(s)$ also in der Form

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \frac{R_i}{s - s_i} \quad (3.73)$$

geschrieben wird. Dabei ist

$$N(s) = \prod_{i=1}^{\bar{n}} (s - s_i)$$

das gemeinsame Nennerpolynom aller Elemente von $G(s)$. Die (r, m) -Matrizen R_i erhält man als Residuen von s_i :

$$R_i = \lim_{s \rightarrow s_i} (s - s_i) G(s). \quad (3.74)$$

Sie werden nun in ein Produkt

$$R_i = C_i B_i$$

zerlegt, wobei C_i eine (r, n_i) -Matrix und B_i eine (n_i, m) -Matrix ist. Die Spalten- bzw. Zeilenzahl n_i ergibt sich aus dem Rang von R_i :

$$n_i = \text{Rang } R_i.$$

Damit erhält man als Gilbertrealisierung der Übertragungsfunktionsmatrix $G(s)$ das Zustandsraummodell (3.69), (3.70) mit

$$A = \text{diag } s_i I_{n_i} = \begin{pmatrix} s_1 I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & s_{\bar{n}} I_{n_{\bar{n}}} \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \dots \\ B_{\bar{n}} \end{pmatrix} \quad (3.76)$$

$$C = (C_1 \dots C_{\bar{n}}) \quad (3.77)$$

$$D = O.$$

Die Matrix A ist eine Blockdiagonalmatrix mit $\bar{n}$ Hauptdiagonalblöcken $s_i I_{n_i}$, in denen I_{n_i} Einheitsmatrizen der Dimension (n_i, n_i) und s_i die Pole der Übertragungsfunktionsmatrix bezeichnen. Die Matrizen B und C entstehen durch Untereinander- bzw. Nebeneinanderschreiben der Matrizen B_i bzw. C_i ($i = 1, \dots, \bar{n}$).

Der Pol s_i der Übertragungsfunktionsmatrix kommt n_i -mal als Eigenwert der Matrix A vor. Da die Matrix A diagonalähnlich ist, besitzt das System damit n_i verschiedene Eigenvorgänge $v_i e^{s_i t}$. Diese Eigenvorgänge haben denselben Exponenten, jedoch verschiedene Vektoren v_i , die bekanntlich die Eigenvektoren der Matrix A zum Eigenwert s_i sind.

Die dynamische Ordnung der angegebenen Realisierung erhält man aus der Beziehung

$$n = \sum_{i=1}^{\bar{n}} n_i.$$

n ist also i. Allg. größer als die Zahl $\bar{n}$ der Partialbrüche von $G(s)$. Sie wird durch den Rang n_i der Matrizen R_i bestimmt, der die Anzahl verschiedener Eigenvorgänge mit demselben Pol s_i angibt.

Beispiel 3.14 Gilbertrealisierung eines (2, 2)-Systems

Gegeben sei die Übertragungsfunktionsmatrix

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{2}{s+3} & \frac{2}{(s+1)(s+3)} \\ \frac{2}{s+1} & \frac{3}{s+1} \end{pmatrix}.$$

Bevor die Gilbertrealisierung angegeben wird, wird zunächst die „direkte“ Realisierung bestimmt, bei der jedes Element der Übertragungsfunktionsmatrix einzeln durch ein Zustandsraummodell dargestellt wird. Die Pole der Übertragungsfunktionsmatrix liegen bei -1 und -3 . Drei der Elemente sind PT_1 -Glieder, die durch ein Zustandsraummodell erster Ordnung beschrieben werden können. Das verbleibende Element ist ein PT_2 -Glieder, dessen Zustandsraummodell die Ordnung zwei hat. Man erhält damit das Modell

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} -3 & \vdots & & & \\ \dots & & & & \\ & \vdots & -1 & 0 & \vdots \\ & \vdots & 1 & -3 & \vdots \\ & \dots & & & \\ & & \vdots & -1 & \vdots \\ & & \dots & & \\ & & & \vdots & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 2 & \vdots & & & \\ \dots & & & & \\ & \vdots & 2 & & \\ & \vdots & 0 & & \\ \dots & & & & \\ & 2 & \vdots & & \\ \dots & & & & \\ & \vdots & 3 \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \begin{pmatrix} 1 & \vdots & 0 & 1 & \vdots & \vdots \\ \dots & & & & & \\ \vdots & & & & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

mit der dynamischen Ordnung fünf. Die nicht angegebenen Matrizenzelemente sind Nullen.

Zerlegt man nun jedoch die Übertragungsfunktionsmatrix entsprechend Gl. (3.73) in der Form

$$G(s) = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}{s+1} + \frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{s+3},$$

so wird offensichtlich, dass nur zwei Partialbrüche zu betrachten sind, wobei der Rang der ersten Matrix gleich zwei und der Rang der zweiten Matrix gleich eins ist. Es existiert deshalb ein Zustandsraummodell dritter Ordnung, das die angegebene Übertragungsfunktionsmatrix realisiert.

Die Residuen kann man in die Produkte

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \mathbf{I} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (2 \quad -1),$$

zerlegen, so dass man das Modell

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & \vdots & 0 \\ \dots\dots\dots & & & \\ 0 & 0 & \vdots & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 1 \\ 2 & \vdots & 3 \\ \dots\dots\dots & & \\ 2 & \vdots & -1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$$

erhält. Dieses Modell ist eine minimale Realisierung der gegebenen Übertragungsfunktionsmatrix.

Es fällt auf, dass der Eigenwert -1 nicht nur einmal, sondern zweimal auftritt. Der Grund liegt darin, dass das System zwei Modi mit diesem Eigenwert, jedoch unterschiedlichen Eigenvektoren besitzt. Dass dies so ist, kann man nicht auf den ersten Blick aus der Übertragungsfunktionsmatrix erkennen. Mit dem beschriebenen Entwurfsverfahren erhält man diese Tatsache als Nebenergebnis.

Verglichen mit dem ersten angegebenen Modell hat die minimale Realisierung eine wesentlich kleinere dynamische Ordnung. Bei der getrennten Realisierung aller Elemente G_{ij} von $\mathbf{G}(s)$ trat der Eigenwert -1 dreimal und der Eigenwert -3 zweimal auf. Das E/A-Verhalten beider Modelle ist dasselbe. $\square$

Existenz minimaler Realisierungen. Die beschriebene Vorgehensweise zur Bestimmung einer minimalen Realisierung lässt sich auf Systeme mit nicht diagonal-ähnlichen Matrizen $\mathbf{A}$ bzw. mehrfachen Polen der Übertragungsfunktionsmatrix erweitern. Da man dann mit der Jordan-Normalform der Systemmatrix arbeiten muss, ist die Darstellung dieser Verallgemeinerung jedoch so aufwändig, dass sie hier übergangen wird. Es soll statt dessen die Frage beantwortet werden, woran man eine minimale Realisierung erkennen kann. Die Antwort darauf enthält der folgende Satz:

Satz 3.9 (Minimale Realisierung)

Ein Zustandsraummodell (A, B, C) ist genau dann eine minimale Realisierung der Übertragungsfunktionsmatrix $G(s)$, wenn

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

gilt und (A, B) vollständig steuerbar und (A, C) vollständig beobachtbar ist.

Dieser Satz, der hier ohne Beweis angegeben wird, ist plausibel, wenn man sich noch einmal verdeutlicht, dass das Realisierungsproblem nur das E/A-Verhalten eines Systems betrifft. Modi des Systems, die entweder nicht steuerbar oder nicht beobachtbar sind, können in einem Zustandsraummodell zwar für die Beschreibung der Eigenbewegung des Systems notwendig sein, sind für das E/A-Verhalten aber überflüssig. Streicht man sie heraus (was, wie bereits behandelt, nicht ganz einfach ist!), so verringert sich die dynamische Ordnung, doch das E/A-Verhalten bleibt unverändert.

Der angegebene Satz macht folgende Eigenschaften minimaler Realisierungen deutlich:

|| Alle minimalen Realisierungen einer gegebenen Übertragungsfunktionsmatrix lassen sich durch eine Transformation des Zustandsraumes ineinander überführen.

Wenn man also vergleichen will, ob zwei Systeme identisches E/A-Verhalten aufweisen, so überführt man beide Zustandsraummodelle beispielsweise in die kanonische Normalform. Die Systeme sind genau dann identisch, wenn die Parameter der erhaltenen Modelle übereinstimmen.

Da die Matrizen

$$CB, CAB, CA^2B, \dots, CA^{n-1}B, \quad (3.78)$$

die man auch als MARKOV-Parameter eines Systems bezeichnet, unabhängig von einer Transformation des Zustandsraumes sind und nur den steuerbaren und beobachtbaren Teil des Systems beschreiben, kann man auch diese Parameter für beide Systeme berechnen und miteinander vergleichen.

|| Aus einer beliebigen Realisierung erhält man eine minimale Realisierung, indem man aus der Kalmanzerlegung den steuerbaren und beobachtbaren Teil „herausnimmt“.

Aufgabe 3.17* Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit der Gilbertrealisierung

Beweisen Sie, dass die Gilbertrealisierung (3.75) – (3.77) minimal ist. $\square$

Aufgabe 3.18* Minimale Realisierung eines Dampferzeugers

Ein Dampferzeuger mit dem Eingangsvektor

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} \text{Frischwassereinspeisung } \dot{Q}_w \\ \text{Brennstoffzufuhr } \dot{Q}_{Br} \end{pmatrix}$$

und den Regelgrößen

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \text{Dampfdruck } p \\ \text{Dampftemperatur } \vartheta \end{pmatrix}$$

ist durch folgende Übertragungsfunktionsmatrix beschrieben:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{pmatrix} \frac{0,0081}{(s + 0,037)(s + 0,1)} & \frac{0,00006353}{(s + 0,0385)(s + 0,05)} \\ \frac{-0,001}{(s + 0,0385)(s + 0,1)} & \frac{0,0001125}{(s + 0,025)(s + 0,05)} \end{pmatrix}$$

Ermitteln Sie für diesen Dampferzeuger ein Zustandsraummodell minimaler dynamischer Ordnung. $\square$

3.6 MATLAB-Funktionen zur Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsanalyse

Für die Bildung der Steuerbarkeitsmatrix $\mathbf{S}_S$ und der Beobachtbarkeitsmatrix $\mathbf{S}_B$ von System gibt es die Funktionen

```
>> SS = ctrb(System);
>> SB = obsv(System);
```

deren Namen man sich an den englischen Begriffen *controllability* bzw. *observability* leicht merken kann. Für den Steuerbarkeits- bzw. Beobachtbarkeitstest nach Kalman braucht man dann nur den Rang dieser Matrizen zu bestimmen und mit der Systemordnung zu vergleichen:

```
>> rank(ctrb(System))
>> rank(obsv(System))
```

Da dieser Weg zu numerischen Problemen führen kann, wenn die Systemparameter sich um Größenordnungen unterscheiden, kann man auch die gramsche Steuerbarkeits- bzw. Beobachtbarkeitsmatrix bilden und deren Rang bestimmen. Die Funktionsaufrufe

```
» WS = gram(System, 'c');
» WB = gram(System, 'o');
```

liefern die Matrizen $W_{S\infty}$ bzw. $W_{B\infty}$ nach Gln. (3.8) bzw. (3.38). Wenn diese Matrizen den Rang n haben, ist das System steuerbar bzw. beobachtbar.

Die Funktion

```
» minRealSystem = minreal(System);
```

berechnet für System eine minimale Realisierung, d. h., sie eliminiert die nicht steuerbaren oder nicht beobachtbaren kanonischen Zustandsvariablen.

Aufgabe 3.19** Steuerbarkeitskriterium von HAUTUS

Welche Folge von Funktionsaufrufen ist notwendig, um mit dem Steuerbarkeitskriterium von HAUTUS die nicht steuerbaren Eigenwerte des Systems (A, B) zu ermitteln? $\square$

Literaturhinweise

Der Begriff der Steuerbarkeit wurde von KALMAN 1960 im Zusammenhang mit Untersuchungen zur optimalen Steuerung dynamischer Systeme in [46] eingeführt. Dort ist auch das Kalmarkriterium angegeben. Die Steuerbarkeitsuntersuchungen von GILBERT, die sich im Wesentlichen auf die kanonische Normalform des Zustandsraummodells beziehen, sind in [33] veröffentlicht. Das Kriterium von HAUTUS entstand wesentlich später [38]. Die Ausgangssteuerbarkeit wurde in [53] untersucht.

Dass die Zahl der steuerbaren und beobachtbaren Eigenwerte invariant gegenüber einer Transformation des Zustandsraumes ist, ist seit langem bekannt und wurde beispielsweise 1972 in [119] ausführlich diskutiert. Eine Übersicht über Steuerbarkeitsmaße kann in [62] nachgelesen werden.

Die Dekomposition eines Systems in steuerbare, beobachtbare bzw. nicht steuerbare und nicht beobachtbare Anteile wurde von KALMAN 1963 in [47] veröffentlicht.

Die Aufgabe 3.8 ist [28] entnommen.

Die Erweiterung der Regelungsnormalform des Zustandsraummodells auf Mehrgrößensysteme wurde von LUENBERGER in dem 1967 erschienenen Aufsatz [64] vorgeschlagen.

Trotz ihrer Anschaulichkeit haben strukturelle Betrachtungen zur Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit noch keinen Eingang in Lehrbücher gefunden. Für dieses Thema wird auf die Monografien [101] und [116] verwiesen. Die hier verwendeten Beispiele stammen aus [72]. Aufgabe 3.14 ist [116] entnommen. Der erwähnte Dualitätsbegriff der Grafentheorie ist z. B. in [58] angegeben.

Der Realisierung dynamischer Systeme wird in der Literatur zur Systemtheorie ausführlich behandelt. Das hier behandelte Verfahren wurde von GILBERT in dessen grundlegender Arbeit [33] zur Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit linearer Systeme 1963 angegeben.

4

Struktur und Eigenschaften von Mehrgrößenregelkreisen

Es werden wichtige Mehrgrößenreglerstrukturen eingeführt sowie die Stabilität von Mehrgrößenregelkreisen und das Innere-Modell-Prinzip behandelt.

4.1 Struktur von Mehrgrößenreglern

4.1.1 Zustands- und Ausgangsrückführungen

In diesem Abschnitt werden Standardregelkreise betrachtet, auf die sich die später behandelten Analyse- und Entwurfsverfahren beziehen. Die Regelstrecke wird durch ein Zustandsraummodell

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}d(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (4.2)$$

oder durch ein E/A-Modell im Frequenzbereich

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s) + \mathbf{G}_{\text{yd}}\mathbf{D}(s) \quad (4.3)$$

dargestellt. Bei den meisten Untersuchungen wird davon ausgegangen, dass die Strecke nicht sprungfähig ist. Andernfalls kann mit der erweiterten Ausgangsgleichung

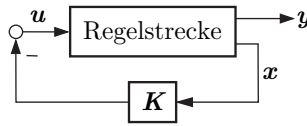


Abb. 4.1: Zustandsrückführung

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{F}\mathbf{d}(t) \quad (4.4)$$

gearbeitet werden.

Zustandsrückführung. Durch eine Zustandsrückführung

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (4.5)$$

wird der Zustandsvektor $\mathbf{x}$ auf die Stellgröße $\mathbf{u}$ zurückgeführt (Abb. 4.1). Der Regler hat proportionales Verhalten, denn die zur Zeit t im Regler berechnete Stellgröße $\mathbf{u}(t)$ ist nur vom Systemzustand $\mathbf{x}(t)$ zur selben Zeit abhängig.

Die Reglermatrix $\mathbf{K}$ hat die Dimension (m, n) . Die Zustandsrückführung stellt selbst dann einen Mehrgrößenregler dar, wenn nur eine einzige Stellgröße zur Verfügung steht. An Stelle der Matrix $\mathbf{K}$ steht dann der Zeilenvektor $\mathbf{k}'$:

$$u(t) = -\mathbf{k}'\mathbf{x}(t).$$

Die Zustandsrückführung spielt vor allem eine wichtige Rolle, wenn untersucht werden soll, inwieweit sich das Verhalten der Regelstrecke durch eine Rückführung verändern lässt. Wollte man jedoch eine Zustandsrückführung technisch realisieren, so müsste man sämtliche Zustandsvariablen messen. Diese Voraussetzung ist nur bei sehr wenigen Systemen erfüllt. Es wird deshalb später untersucht, wie man entweder aus den gemessenen Ausgangsgrößen den Systemzustand rekonstruieren kann, um mit den dabei erhaltenen Näherungswerten eine Zustandsrückführung zu realisieren, bzw. wie man die Zustandsrückführung durch eine Ausgangsrückführung, die ähnliche Regelkreiseigenschaften erzeugt, ersetzen kann.

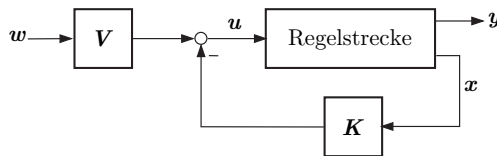


Abb. 4.2: Zustandsrückführung mit Vorfilter

Für Betrachtungen des Führungsverhaltens wird die Zustandsrückführung um ein Vorfilter $\mathbf{V}$ erweitert, so dass das Reglergesetz die Form

Zustandsrückführung: $u(t) = -Kx(t) + Vw(t)$

(4.6)

erhält (Abb. 4.2). Damit allen Regelgrößen unabhängige Sollwerte zugewiesen werden können, muss die Matrix V die Bedingung

$$\text{Rang } V = r$$

erfüllen, was im Folgenden stets vorausgesetzt wird. Bemerkenswerterweise tritt bei diesem Regler die Regelabweichung $w(t) - y(t)$ nicht explizit auf, sondern $x(t)$ und $w(t)$ werden auf die Stellgröße $u(t)$ zurückgeführt.

Der mit einer Zustandsrückführung (4.6) geschlossene Regelkreis ist durch das Zustandsraummodell

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + BVw(t) + Ed(t), \quad x(0) = x_0 \quad (4.7)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (4.8)$$

beschrieben. Für $x_0 = 0$ kann man daraus die E/A-Beschreibung

$$Y(s) = G_w(s)W(s) + G_d(s)D(s) \quad (4.9)$$

mit der Führungsübertragungsfunktionsmatrix

$$G_w(s) = C(sI - A + BK)^{-1}BV \quad (4.10)$$

und der Störübertragungsfunktionsmatrix

$$G_d(s) = C(sI - A + BK)^{-1}E \quad (4.11)$$

ableiten. Man könnte dieses Modell übrigens nicht aus dem E/A-Modell (4.3) der Regelstrecke gewinnen, weil dort die Zustandsgrößen nicht explizit dargestellt sind. Diesen Rechenweg kann man nur dann gehen, wenn man zunächst die Modellgleichungen

$$X(s) = G_{xu}(s)U(s) + G_{xd}(s)D(s)$$

$$Y(s) = G(s)U(s) + G_{yd}(s)D(s)$$

aufstellt und dann mit dem Regler

$$U(s) = -KX(s) + VW(s)$$

verknüpft. Dabei erhält man zunächst

$$U(s) = -KG_{xu}(s)U(s) - KG_{xd}(s)D(s) + VW(s)$$

und

$$U(s) = (I + KG_{xu}(s))^{-1}VW(s) - (I + KG_{xu}(s))^{-1}KG_{xd}(s)D(s).$$

Das Einsetzen in das Streckenmodell ergibt dann die Beziehung

$$Y(s) = G(s) (I + KG_{xu}(s))^{-1} VW(s) + (G_{yd}(s) - G(s) (I + KG_{xu}(s))^{-1} KG_{xd}(s)) D(s),$$

die die Form (4.9) mit

$$\begin{aligned} G_w(s) &= G(s) (I + KG_{xu}(s))^{-1} V \\ G_d(s) &= G_{yd}(s) - G(s) (I + KG_{xu}(s))^{-1} KG_{xd}(s) \end{aligned} \quad (4.12)$$

hat. Für die Zustandsrückführung wird die Frequenzbereichsdarstellung allerdings wenig verwendet.

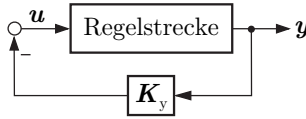


Abb. 4.3: Ausgangsrückführung

Ausgangsrückführung. Bei der Ausgangsrückführung wird der messbare Ausgangsvektor y auf die Stellgröße zurückgeführt

$$u(t) = -K_y y(t), \quad (4.13)$$

wobei die Reglermatrix die Dimension (m, r) hat. Wenn nur eine Ausgangsgröße und eine Stellgröße zur Verfügung stehen, so ist die Ausgangsrückführung dasselbe wie ein P-Regler in einem einschleifigen Regelkreis. Im Folgenden sind jedoch Ausgangsrückführungen mit mehreren Stell- und mehreren Regelgrößen von Interesse. Die dafür erhaltenen Ergebnisse können aber auch für den einschleifigen Regelkreis angewendet werden, obwohl die meisten Untersuchungen den Mehrgrößencharakter des Regelkreises in den Mittelpunkt stellen und deshalb für den einschleifigen Kreis keine wesentlich neuen Erkenntnisse liefern.

Wie bei der Zustandsrückführung kann der Regler um einen Term mit dem Führungssignal erweitert werden

Ausgangsrückführung: $u(t) = -K_y y(t) + V w(t).$

(4.14)

Auch hier wird nicht die Regelabweichung $w(t) - y(t)$ gebildet und als Reglereingang verwendet, sondern eine allgemeinere Aufschaltung des Führungssignals und des Ausgangssignals auf die Stellgröße vorgenommen. Der Regelkreis hat deshalb zwei Freiheitsgrade, was nach den Erläuterungen im Abschn. I-7.2.1 bedeutet, dass die Regelkreisdynamik und das Störverhalten einerseits und das Führungsverhalten

andererseits getrennt voneinander durch die Wahl geeigneter Reglerparameter K_y bzw. V gestaltet werden können.

Ein großer Teil der Analyse- und Entwurfsverfahren befasst sich mit der Gestaltung der Regelkreisdynamik, wobei die Führungsgröße gleich null gesetzt und mit dem Regler (4.13) gearbeitet wird. Wenn man sich für das Führungsverhalten interessiert, so kann man später den Term $+Vw(t)$ ergänzen.

Der geschlossene Kreis (4.1), (4.2), (4.14) hat das Zustandsraummodell

$$\dot{x}(t) = (A - BK_y C)x(t) + BVw(t) + Ed(t), \quad x(0) = x_0 \quad (4.15)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (4.16)$$

und die E/A-Beschreibung (4.9) mit

$$\begin{aligned} G_w(s) &= C(sI - A + BK_y C)^{-1} BV \\ &= G(s)(I + K_y G(s))^{-1} V \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$= (I + G(s)K_y)^{-1} G(s)V \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} G_d(s) &= C(sI - A + BK_y C)^{-1} E \\ &= (I + G(s)K_y)^{-1} G_{yd}(s). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Die Beziehungen (4.17) und (4.18) zeigen zwei Darstellungsformen, die je nach Untersuchungsziel eingesetzt werden können. Die Beziehung (4.19) ist wesentlich einfacher als die entsprechende Gleichung (4.12) für die Zustandsrückführung.

Ausgangsrückführung bei sprunghfähigen Systemen. Die meisten Analyse- und Entwurfsverfahren gehen davon aus, dass die Regelstrecke nicht sprunghfähig ist. Im Folgenden soll deshalb kurz darauf hingewiesen werden, dass man die bei sprunghfähigen Systemen auftretende direkte Abhängigkeit der Regelgröße von der Eingangsgröße durchaus während des Entwurfes vernachlässigen kann, wenn man anschließend den erhaltenen Regler für das sprunghfähige System umrechnet.

Für den Regelkreis, der aus der sprunghfähigen Regelstrecke

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

und der Ausgangsrückführung

$$u(t) = -K_y y(t)$$

besteht, erhält man für die Stellgröße die Beziehung

$$u(t) = -K_y Cx(t) - K_y Du(t),$$

in der u auf beiden Seiten vorkommt. Die umgestellte Gleichung

$$(I + K_y D)u(t) = -K_y Cx(t)$$

kann nur dann nach u aufgelöst werden, wenn die Matrix $I + K_y D$ invertierbar ist. Diese Bedingung muss durch geeignete Wahl von K_y erfüllt werden, damit das System ein eindeutig definiertes Verhalten besitzt. Man erhält dann für den Regler die Beziehung

$$u(t) = -(I + K_y D)^{-1} K_y C x(t)$$

und für den geschlossenen Kreis das Zustandsraummodell

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A - B(I + K_y D)^{-1} K_y C) x(t), & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= (I + D K_y)^{-1} C x(t), \end{aligned}$$

wobei man bei der Aufstellung der Ausgabegleichung die Beziehung (A2.38)

$$(I + K_y D)^{-1} K_y = K_y (I + D K_y)^{-1}$$

verwenden muss. Führt man nun die neue Reglermatrix

$$\tilde{K}_y = (I + K_y D)^{-1} K_y \quad (4.20)$$

ein, so erhält man für den Regelkreis das Modell

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A - B \tilde{K}_y C) x(t), & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= (I - D \tilde{K}_y)^{-1} C x(t). \end{aligned}$$

Die Systemmatrix

$$\bar{A} = A - B \tilde{K}_y C$$

hat dieselbe Gestalt wie die eines nicht sprungfähigen Systems mit Ausgangsrückführung, wie ein Vergleich mit Gl. (4.15) zeigt. Wenn es also, wie bei den im Kap. 6 behandelten Verfahren, um die zielgerichtete Platzierung der Eigenwerte der Matrix $\bar{A}$ geht, so kann man das System zunächst ohne Durchgriff ($D = O$) betrachten, dafür die Ausgangsrückführung $\tilde{K}_y$ ausrechnen und schließlich aus der Beziehung

$$K_y = (I - \tilde{K}_y D)^{-1} \tilde{K}_y, \quad (4.21)$$

die man durch Umstellung von Gl. (4.20) erhält, die Ausgangsrückführung des sprungfähigen Systems ermitteln. Diese Ausgangsrückführung erzeugt im Regelkreis dieselben Eigenwerte wie die unter Vernachlässigung des Durchgriffs berechnete.

Bemerkungen zu diesen Reglerstrukturen. Viele der im Folgenden erläuterten Analyse- und Entwurfsverfahren beschäftigen sich mit der Zustandsrückführung oder der Ausgangsrückführung, obwohl beides proportionale Regler sind, die bekanntlich für sprungförmige Führungs- und Störsignale keine Sollwertfolge garantieren können. Dass dieses Vorgehen keine Einschränkung des Anwendungsgebietes der betrachteten Methoden zur Folge hat, liegt in der Tatsache, dass dynamische

Regler wie beispielsweise PI-Regler auf Zustands- bzw. Ausgangsrückführungen reduziert werden können, wenn man die dynamischen Regleranteile beim Entwurf zur Regelstrecke hinzurechnet (vgl. Gl. (4.35) - (4.38)).

Die Zustandsrückführung ist unter den proportionalen Reglern der „bestmögliche“ Regler in dem Sinne, dass die Kenntnis des gesamten Zustandsvektors $\mathbf{x}(t)$ eine weitgehende Gestaltung der Regelkreisdynamik ermöglicht. Die Ausgangsrückführung kann demgegenüber als der beste technisch realisierbare P-Regler betrachtet werden, denn diese Rückführung verwendet nur die tatsächlich messbaren Ausgangsgrößen als Informationen über den aktuellen Streckenzustand. Wenn man das Problem untersucht, inwieweit eine gegebene Zustandsrückführung auf eine Ausgangsrückführung reduziert werden kann, so wird offensichtlich, welche Einschränkungen man bezüglich der Gestaltung der Regelkreisdynamik in Kauf nehmen muss, wenn man den praktischen Gegebenheiten entsprechend nur einen Teil der im Zustandsvektor steckenden Informationen tatsächlich für die Regelung zur Verfügung hat (vgl. Abschn. 6.4.2).

4.1.2 Dynamische Mehrgrößenregler

Die Rückführung der Ausgangsgröße $\mathbf{y}(t)$ auf die Stellgröße $\mathbf{u}(t)$ ist nicht auf proportionale Kopplungen beschränkt, sondern kann im Prinzip über ein beliebiges dynamisches System erfolgen. Der Regler kann dann entweder durch ein Zustandsraummodell

$$\dot{\mathbf{x}}_r(t) = \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{B}_r \mathbf{y}(t) + \mathbf{E}_r \mathbf{w}(t), \quad \mathbf{x}_r(t) = \mathbf{x}_{r0} \quad (4.22)$$

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_x \mathbf{x}_r(t) - \mathbf{K}_y \mathbf{y}(t) + \mathbf{V} \mathbf{w}(t) \quad (4.23)$$

oder eine E/A-Beschreibung

$$\mathbf{U}(s) = -\mathbf{K}(s) \mathbf{Y}(s) + \mathbf{V}(s) \mathbf{W}(s) \quad (4.24)$$

dargestellt werden. Seine dynamische Ordnung wird mit n_r bezeichnet. Wie man an diesen Modellgleichungen sieht, ist die Darstellung dynamischer Regler im Frequenzbereich viel kompakter als im Zeitbereich. Deshalb wird die Frequenzbereichsdarstellung bevorzugt, wenn mit einem Regler beliebiger dynamischer Ordnung gerechnet werden soll.

Das Zustandsraummodell des geschlossenen Kreises hat die dynamische Ordnung $n + n_r$. Die Gln. (4.1), (4.2), (4.22) und (4.23) führen auf

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}_y \mathbf{C} & -\mathbf{B} \mathbf{K}_x \\ \mathbf{B}_r \mathbf{C} & \mathbf{A}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B} \mathbf{V} \\ \mathbf{E}_r \end{pmatrix} \mathbf{w} + \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} d \quad (4.25)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{x}_r(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_{r0} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t) = (\mathbf{C} \quad \mathbf{O}) \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_r(t) \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Dieses Zustandsraummodell wird häufig durch die Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\bar{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{w}(t) + \bar{\mathbf{E}}d(t), \quad \bar{\mathbf{x}}(0) = \bar{\mathbf{x}}_0 \quad (4.27)$$

$$\mathbf{y}(t) = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}(t) \quad (4.28)$$

abgekürzt, wobei die Bedeutung der mit einem Querstrich versehenen Vektoren und Matrizen aus einem Vergleich mit den zuvor angegebenen Gleichungen offensichtlich ist. Der Querstrich wird hier und später zur Kennzeichnung der Größen des Regelkreises verwendet. Im Frequenzbereich gelten die Gln. (4.9), (4.18) und (4.19) auch für dynamische Regler $\mathbf{K}_y = \mathbf{K}(s)$.

Regelkreis mit Einheitsrückführung. Eine Reihe von Analyseverfahren wie z. B. die Stabilitätsanalyse untersuchen den Zusammenhang zwischen den Regelkreiseigenschaften und den Eigenschaften der zugehörigen offenen Kette. Dabei wird in der offenen Kette nicht mehr zwischen dem Regler und der Regelstrecke unterschieden.

Diese Überlegung ist nicht neu. Beim Nyquistkriterium für den einschleifigen Regelkreis wurde die Übertragungsfunktion $G_0(s)$ der offenen Kette betrachtet, ohne dabei zwischen dem Regler und der Strecke zu unterscheiden, denn entscheidend für die Stabilität ist die Reihenschaltung beider Elemente.

Genauso kann man bei Mehrgrößensystemen vorgehen, nur dass die offene Kette jetzt durch eine Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}_0(s)$ beschrieben ist, die, wenn man den Regelkreis wie üblich im Rückführzweig aufschneidet, aus den Übertragungsfunktionsmatrizen $\mathbf{K}(s)$ und $\mathbf{G}(s)$ des Reglers und der Strecke entsprechend

$$\mathbf{G}_0(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)$$

berechnet wird. Die Dimension von $\mathbf{G}_0$ hängt davon ab, wo der Regelkreis aufgeschnitten wurde. Besitzt die Regelstrecke nur eine Stellgröße u und schneidet man den Regelkreis dort auf, so gilt für die offene Kette die Beziehung

$$G_0(s) = \mathbf{K}(s)\mathbf{G}(s),$$

in der $G_0(s)$ eine skalare Übertragungsfunktion ist, die aus dem r -dimensionalen Zeilenvektor $\mathbf{K}(s)$ und dem r -dimensionalen Spaltenvektor $\mathbf{G}(s)$ entsteht.

Für die Führungsübertragungsfunktionsmatrix erhält man zwei äquivalente Darstellungen

$$\mathbf{G}_w(s) = \mathbf{G}\mathbf{K}(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{K})^{-1} = (\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{G}\mathbf{K}. \quad (4.29)$$

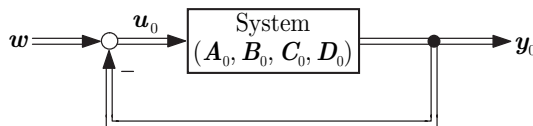


Abb. 4.4: System mit Einheitsrückführung

Wenn man nicht mehr zwischen Regler und Strecke unterscheidet, entsteht der Regelkreis durch die Rückführung des Systemausgangs an den Eingang, wie dies in Abb. 4.4 dargestellt ist. Da die Rückführung die Verstärkung eins besitzt, spricht man auch von Einheitsrückführung (nach der englischen Bezeichnung *unity feedback*).

Bei der Zustandsraumbetrachtung fasst man die Modelle des Reglers und der Strecke zu einem Modell zusammen, das die Form

$$\dot{\mathbf{x}}_o(t) = \mathbf{A}_o \mathbf{x}_o(t) + \mathbf{B}_o \mathbf{u}_o(t), \quad \mathbf{x}_o(0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.30)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_o \mathbf{x}_o(t) \quad (4.31)$$

hat. Die Einheitsrückführung heißt dann

$$\mathbf{u}_o(t) = \mathbf{w}(t) - \mathbf{y}(t).$$

Die offene Kette ist nur dann sprungfähig, wenn sowohl die Regelstrecke als auch der Regler sprungfähig sind und wenn außerdem

$$D\mathbf{K}_y \neq \mathbf{O}$$

gilt. In diesem Falle hat die offene Kette $(\mathbf{A}_o, \mathbf{B}_o, \mathbf{C}_o, D_o)$ ein um den sprungfähigen Anteil erweitertes Zustandsraummodell.

Zu beachten ist, dass Regler mit P-Anteil sprungfähig sind. Da aber für die Regelstrecke $D = \mathbf{O}$ vorausgesetzt wird, handelt es sich im Folgenden meist um nicht sprungfähige offene Ketten.

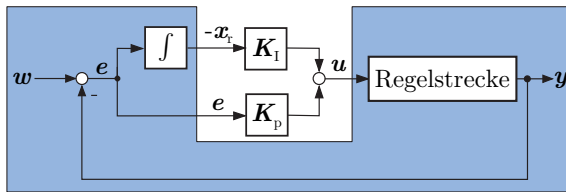


Abb. 4.5: Mehrgrößenregelkreis mit PI-Regler

PI-Mehrgrößenregler. Wie im Eingrößenfall spielen auch bei Mehrgrößensystemen Regler mit PI-Verhalten eine wichtige Rolle. Da jetzt die Regelabweichung

$$e(t) = \mathbf{w}(t) - \mathbf{y}(t)$$

ein r -dimensionaler Vektor ist, enthält der Regler r Integratoren, die im Zustandsraum durch die Gleichung

$$\dot{\mathbf{x}}_r(t) = -e(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{w}(t)$$

dargestellt sind. Die PI-Rückführung greift auf die integrierte Regelabweichung

$$e_I(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau = -x_r(t) \quad \text{für } x_r(0) = \mathbf{0} \quad (4.32)$$

sowie auf die Regelabweichung $e(t)$ zurück, so dass für den Regler das folgende Zustandsraummodell entsteht (Abb. 4.5)

$$\begin{aligned} \text{PI-Regler:} \quad \dot{x}_r(t) &= y(t) - w(t), & x_r(0) &= x_{r0} \\ u(t) &= -K_I x_r(t) - K_P (y(t) - w(t)). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Der durch die Zustandsgleichung dargestellte Integrator integriert nicht die Regelabweichung, sondern die negative Regelabweichung, damit in der Ausgabegleichung vor allen Termen ein Minuszeichen steht, wie es auch bei einer Zustands- oder Ausgangsrückführung der Fall ist.

Im Frequenzbereich ist das Reglergesetz eine direkte Erweiterung der für Eingrößensysteme verwendeten Beziehung

$$K_{PI}(s) = k_P + \frac{k_I}{s},$$

in der die Parameter jetzt (m, r) -Matrizen sind:

$$K_{PI}(s) = K_P + \frac{1}{s} K_I. \quad (4.34)$$

I-erweiterte Regelstrecke. Da sich die Entwurfsverfahren im Zeitbereich vorrangig mit der Berechnung proportionaler Rückführungen befassen, wird der PI-Regelkreis häufig so zerlegt, dass die Rückführung keine eigene Dynamik besitzt. Die Integratoren werden zur Regelstrecke hinzugerechnet, wodurch die I-erweiterte Regelstrecke entsteht, für die der Regler dann eine proportionale Ausgangsrückführung darstellt (Abb. 4.6).

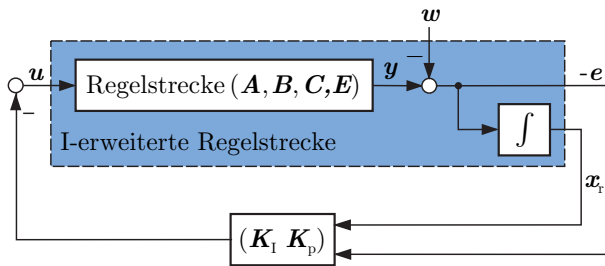


Abb. 4.6: Regelkreis bestehend aus I-erweiterter Strecke und Ausgangsrückführung

Das heißt, die Zustandsgleichung des Reglers wird zur Strecke (4.1), (4.2) hinzugenommen, wodurch die Gleichungen

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_r(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_r(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} \mathbf{d}(t) + \begin{pmatrix} \mathbf{O} \\ -\mathbf{I} \end{pmatrix} \mathbf{w}(t) \quad (4.35)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{x}_r(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_{r0} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t) = (\mathbf{C} \quad \mathbf{O}) \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_r(t) \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{e}(t) \\ \mathbf{x}_r(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_r(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mathbf{I} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} \mathbf{w}(t) \quad (4.37)$$

für die I-erweiterte Strecke entstehen. Die zusätzliche Ausgangsgleichung (4.37) ist notwendig, um den Regler als statische Rückführung des dort beschriebenen neuen Ausgangsvektors darstellen zu können:

$$\mathbf{u}(t) = -(\mathbf{K}_P \quad \mathbf{K}_I) \begin{pmatrix} -\mathbf{e}(t) \\ \mathbf{x}_r(t) \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

4.1.3 Dezentrale Regelung

Bei großen Systemen, die aus mehreren Teilsystemen bestehen, ist es häufig nicht möglich oder nicht erwünscht, dass der Regler sämtliche Ausgangsgrößen auf sämtliche Eingangsgrößen zurückführt. Statt dessen wird eine dezentrale Regelung verwendet, die aus mehreren Teilreglern besteht, von denen jeder nur die zu einem Teilsystem gehörigen Ausgangsgrößen mit den an diesem Teilsystem angreifenden Stellgrößen verkoppelt. Abbildung 4.7 zeigt die dezentrale Regelung der Regelstrecke aus Abb. 2.7 auf S. 35, die aus zwei Teilsystemen besteht.

Bei der Beschreibung des Regelkreises muss man auf die Tatsache Rücksicht nehmen, dass der Eingangsvektor $\mathbf{u}$ und der Ausgangsvektor $\mathbf{y}$ in mehrere Teilvektoren zerlegt sind, die zu den N Teilsystemen gehören:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1(t) \\ \mathbf{u}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_N(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1(t) \\ \mathbf{y}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_N(t) \end{pmatrix}.$$

In der Beschreibung der Regelstrecke stehen dann die Teilvektoren $\mathbf{u}_i$ und $\mathbf{y}_i$:

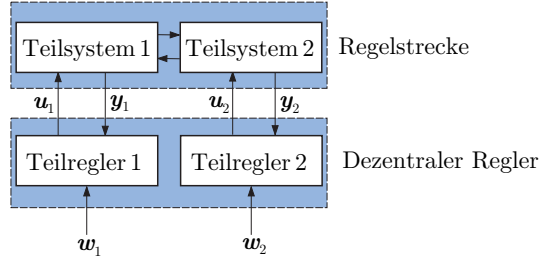


Abb. 4.7: Grundstruktur einer dezentralen Regelung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^N \mathbf{B}_{si} \mathbf{u}_i(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.39)$$

$$\mathbf{y}_i(t) = \mathbf{C}_{si} \mathbf{x}(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (4.40)$$

Aus dem üblicherweise verwendeten Modell erhält man die hier auftretenden Matrizen $\mathbf{B}_{si}$ und $\mathbf{C}_{si}$ durch Zerlegung der Matrizen $\mathbf{B}$ bzw. $\mathbf{C}$ entsprechend

$$\mathbf{B} = (\mathbf{B}_{s1} \quad \mathbf{B}_{s2} \quad \dots \quad \mathbf{B}_{sN}), \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{s1} \\ \mathbf{C}_{s2} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{sN} \end{pmatrix}.$$

Eine dezentrale Regelung führt $\mathbf{y}_i$ auf $\mathbf{u}_i$ zurück. Bei der dezentralen Zustandsrückführung geht man davon aus, dass auch die Zustandsvariablen den Teilsystemen zugeordnet werden können und folglich der Zustandsvektor entsprechend

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N(t) \end{pmatrix}$$

zerlegt werden kann. Die dezentrale Zustandsrückführung hat das Reglergesetz

Dezentrale Zustandsrückführung: $\mathbf{u}_i(t) = -\mathbf{K}_i \mathbf{x}_i(t) \quad (i = 1, \dots, N).$

(4.41)

Fasst man alle dezentralen Teilregler zusammen, so erhält man die Beziehung

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1(t) \\ \mathbf{u}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_N(t) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{K}_2 & \cdots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{K}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N(t) \end{pmatrix}, \quad (4.42)$$

die einen Regler für das Gesamtsystem beschreibt. Die dezentrale Struktur des Reglers kommt in der Tatsache zum Ausdruck, dass die Reglermatrix eine Blockdiagonalmatrix ist. Die Beschränkung, dass der Regler den zum i -ten Teilsystem gehörenden Zustandsvektor $\mathbf{x}_i$ nur auf den Eingang desselben Teilsystems zurückführen darf, schreibt die in der Reglermatrix stehenden Nullmatrizen vor. Die dezentrale Regelung ist deshalb eine strukturbeschränkte Regelung, wie sie im Abschn. 3.4.3 eingeführt wurde.

Für die

$$\begin{array}{l} \text{Dezentrale Ausgangsrückführung:} \\ \mathbf{u}_i(t) = -\mathbf{K}_{yi}\mathbf{y}_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \end{array} \quad (4.43)$$

gelten dieselben Überlegungen. Dynamische dezentrale Regler werden zweckmäßigerweise im Frequenzbereich beschrieben. Sie haben das Reglergesetz

$$\mathbf{U}(s) = - \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1(s) & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{K}_2(s) & \cdots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{K}_N(s) \end{pmatrix} \mathbf{Y}(s) \quad (4.44)$$

mit den Teilreglern

$$\mathbf{U}_i(s) = -\mathbf{K}_i(s)\mathbf{Y}_i(s) \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (4.45)$$

Diese Reglergesetze können um Terme mit den Führungsgrößen $\mathbf{w}_i(t)$ erweitert werden.

Aufgabe 4.1 Modell des dezentralen PI-Reglers

Wie wird ein dezentraler PI-Regler im Zustandsraum bzw. im Frequenzbereich beschrieben?
□

Aufgabe 4.2 Stellgröße des PI-Reglers

Betrachten Sie den Mehrgrößenregelkreis aus Abb. 4.8 mit einem PI-Regler (4.33).

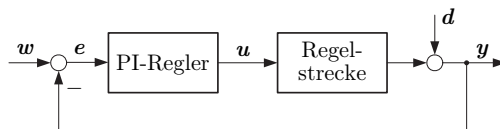


Abb. 4.8: Mehrgrößenregelkreis mit PI-Regler

1. Zeigen Sie, dass sich die Stellgröße $u(t)$ bei einer sprungförmigen Veränderung des Sollwertes $w(t) = \bar{w}\sigma(t)$ im ungestörten Regelkreis dem Wert $u(\infty) = K_s^{-1}\bar{w}$ nähert und dass dieser Wert unabhängig von den Reglerparametern ist (unter der Voraussetzung, dass der Regelkreis stabil ist).
2. Zeichnen Sie qualitativ den Verlauf der Stellgrößen auf, wenn der Regler sehr kleine Reglerparameter besitzt.
3. Welchen statischen Endwert nimmt die Eingangsgröße u bei einer sprungförmigen Störung $d(t) = \bar{d}\sigma(t)$ an? Ist dieser Wert unabhängig von den Reglerparametern? $\square$

4.2 Grundlegende Eigenschaften von Mehrgrößenregelkreisen

4.2.1 Pole und Nullstellen des Führungsverhaltens

Wie bei der Regelstrecke sind auch beim Regelkreis die Pole und Nullstellen wichtige Kenngrößen für das Übertragungsverhalten. Da der Regelkreis mit dem Führungssignal w und dem Störsignal d sowie gegebenenfalls mit dem Messrauschen r mehrere Eingangsgrößen besitzt und bei der Analyse neben der Regelgröße y oft auch die Stellgröße u betrachtet, u also als zusätzliche Ausgangsgröße interpretiert wird, gibt es mehrere Mengen von Polen und Nullstellen, je nachdem, welches Eingangs-Ausgangs-Paar gerade untersucht wird. Für alle diese Paare gilt:

- Die Pole sind die Eigenwerte des vollständig steuerbaren und vollständig beobachtbaren Teiles des Regelkreises. Sie beschreiben diejenigen Eigenvorgänge, die durch die jeweils betrachtete Eingangsgröße angeregt werden und das Übertragungsverhalten zur jeweils betrachteten Ausgangsgröße erzeugen.
- In die Eigenbewegung gehen alle durch den Anfangszustand x_0 angeregten und durch den betrachteten Ausgang beobachtbaren Eigenvorgänge ein.
- Die Übertragungsnullstellen charakterisieren diejenigen Eingangsgrößen, die durch den Regelkreis nicht übertragen werden.

Im vorangegangenen Abschnitt wurde offensichtlich, dass die Eigenwerte der Systemmatrix A des geschlossenen Kreises durch den Regler beeinflusst werden. Wie jetzt gezeigt wird, sind die Nullstellen des Führungsverhaltens jedoch nicht vom Regler abhängig.

Nullstellen des Führungsverhaltens. Es wird ein Regelkreis betrachtet, der aus der Regelstrecke

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= Cx(t).\end{aligned}$$

und der Ausgangsrückführung

$$u(t) = -K_y y(t) + Vw(t)$$

besteht und folglich durch das Zustandsraummodell

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= (\mathbf{A} - \mathbf{BK}_y\mathbf{C})\mathbf{x}(t) + \mathbf{BV}\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

beschrieben ist. Es wird vorausgesetzt, dass die Zahl der Stellgrößen mit denen der Regelgrößen übereinstimmt ($m = r$). Die invarianten Nullstellen der Regelstrecke können bekanntlich aus der Beziehung (2.65)

$$\det \begin{pmatrix} s_o\mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{O} \end{pmatrix} = 0$$

berechnet werden. Für den Regelkreis erhält man die invarianten Nullstellen aus

$$\det \begin{pmatrix} s_o\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}_y\mathbf{C} & -\mathbf{BV} \\ \mathbf{C} & \mathbf{O} \end{pmatrix} = 0.$$

Ein für die Gestaltung der Regelkreisdynamik wichtiges Ergebnis enthält der folgende Satz.

Satz 4.1 (Nullstellen im Führungsverhalten)

Das Führungsverhalten eines Regelkreises mit Ausgangsrückführung hat dieselben invarianten Nullstellen wie die Regelstrecke.

Handelt es sich bei den invarianten Nullstellen um Entkopplungsnullstellen, die nicht steuerbare oder nicht beobachtbare Eigenwerte hervorrufen, so besagt dieser Satz, dass diese Eigenwerte auch im Regelkreis nicht steuerbar bzw. nicht beobachtbar sind. Dies geht auch aus der Kalmanzerlegung der Regelstrecke hervor. Die nicht steuerbaren oder nicht beobachtbaren Anteile der Regelstrecke können nicht durch den Regler steuerbar oder beobachtbar gemacht werden.

Handelt es sich andererseits bei den invarianten Nullstellen um Übertragungsnullstellen der Regelstrecke, so „blockieren“ diese die Signalübertragung nicht nur in der Regelstrecke, sondern auch im Regelkreis. Dies ist plausibel, denn die Regelstrecke liegt im Vorwärtszweig des Regelkreises.

Der Satz 4.1 gilt auch, wenn die Regelstrecke sprunghaft ist.

Für nichtminimalphasige Systeme, die Nullstellen mit positivem Realteil haben, bedeutet der Satz, dass die Nichtminimalphasigkeit nicht durch eine Ausgangsrückführung beseitigt werden kann. Dies kann nur dadurch geschehen, dass man andere Stellgrößen oder gegebenenfalls andere Regelgrößen verwendet.

Beweis. Zum Beweis des Satzes wird die Bestimmungsgleichung für die Nullstellen des Regelkreises folgendermaßen umgeformt:

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} s_o I - A + BK_y C & -BV \\ C & O \end{pmatrix} &= \det \left(\begin{pmatrix} s_o I - A & -B \\ C & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O \\ -K_y C & V \end{pmatrix} \right) \\
&= \det \begin{pmatrix} s_o I - A & -B \\ C & O \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} I & O \\ -K_y C & V \end{pmatrix} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Da

$$\det \begin{pmatrix} I & O \\ -K_y C & V \end{pmatrix} \neq 0$$

gilt, sieht man, dass

$$\det \begin{pmatrix} s_o I - A + BK_y C & -BV \\ C & O \end{pmatrix} = 0$$

genau dann erfüllt ist, wenn auch

$$\det \begin{pmatrix} s_o I - A & -B \\ C & O \end{pmatrix} = 0$$

gilt, womit der Satz bewiesen ist. $\square$

Die Aussage von Satz 4.1 gilt auch für dynamische Regler mit dem Zusatz, dass diese Regler neue Nullstellen in die offene Kette und damit in den Regelkreis einbringen können. Die Menge der invarianten Nullstellen für das Führungsverhalten des Regelkreises ist dann die Vereinigungsmenge der invarianten Nullstellen der Strecke und des Reglers. Wenn in der Reihenschaltung von Regler und Strecke keine Nullstellen des einen Systems gegen Pole des anderen gekürzt werden können und beide Systeme vollständig steuerbar und beobachtbar sind, so sind alle diese Nullstellen Übertragungsnullstellen, die die Übertragung des Führungssignals auf die Regelgröße blockieren.

Für Eingrößensysteme ist diese Tatsache übrigens sehr schnell anhand der Übertragungsfunktionen der Regelstrecke

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

und des Reglers

$$K(s) = \frac{Z_K(s)}{N_K(s)}$$

nachzuweisen. Die Führungsübertragungsfunktion heißt

$$G_w(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} = \frac{Z(s)Z_K(s)}{N(s)N_K(s) + Z(s)Z_K(s)}. \quad (4.46)$$

Ihr Zählerpolynom setzt sich aus den Zählerpolynomen der Strecke und des Reglers zusammen. Wenn sich nichts kürzen lässt, so setzen sich die Nullstellen des Regelkreises aus denen der Regelstrecke und denen des Reglers zusammen. Wenn sich Linearfaktoren kürzen lassen, so sind die entsprechenden Nullstellen Entkopplungsnullstellen.

Unerwünschte Eigenschaften des Zählers der Übertragungsfunktion der Regelstrecke wie z. B. Allpassverhalten können in einschleifigen Regelkreisen nicht beseitigt werden. Es kann lediglich dafür gesorgt werden, dass die Auswirkungen dieser Eigenschaften auf das Führungsverhalten möglichst klein sind. Wie Satz 4.1 gezeigt hat, gilt diese Aussage auch für Mehrgrößensysteme mit Ausgangsrückführung.

Übertragungsnullstellen bezüglich unterschiedlicher Eingangs- und Ausgangsgrößen. Satz 4.1 beschreibt die Nullstellen des Regelkreises ohne Rücksicht darauf, in welchen E/A-Paaren eines Mehrgrößenregelkreises diese Nullstellen wirken. Wie im Folgenden gezeigt wird, kann man in Mehrgrößensystemen die Nullstellen einzelner Signalkopplungen beeinflussen. Diese in Eingrößensystemen (4.46) nicht vorhandene Möglichkeit resultiert aus den größeren Freiheiten, die eine Mehrgrößenregelung mit sich bringt.

Zur Vereinfachung der Darstellung wird im Folgenden mit dem Frequenzbereichsmodell gearbeitet, wodurch allerdings die Betrachtungen auf die Übertragungsnullstellen beschränkt werden.

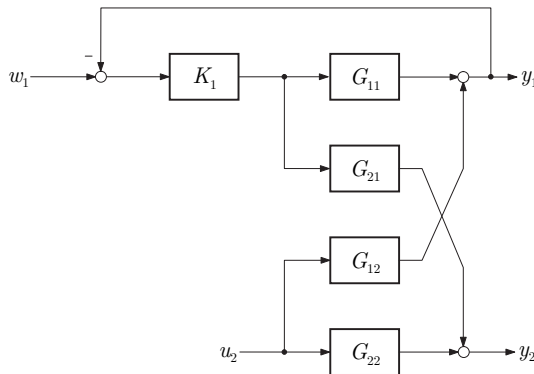


Abb. 4.9: Mehrgrößensystem mit einem Regler

Abbildung 4.9 zeigt eine Strecke in P-kanonischer Struktur sowie einen einschleifigen Regelkreis. Es soll untersucht werden, wie die Nullstellen der Strecke bezüglich des Einganges u_2 und des Ausgangs y_2 durch den Regler K_1 verändert werden können.

Die Übertragungsfunktionen werden als Brüche dargestellt

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{N(s)} \begin{pmatrix} Z_{11}(s) & Z_{12}(s) \\ Z_{21}(s) & Z_{22}(s) \end{pmatrix}$$

$$K_1(s) = \frac{Z_K(s)}{N_K(s)},$$

wobei $N(s)$ der gemeinsame Nenner aller Elemente der Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(s)$ der Strecke ist. Für das Verhalten des Systems bezüglich u_2 und y_2 erhält man die Beziehung

$$Y_2(s) = \bar{G}_{22}(s) U_2(s)$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{G}_{22}(s) &= G_{22} - G_{21}G_{12} \frac{K_1}{1 + K_1G_{11}} \\ &= \frac{Z_{22}}{N} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{N^2} \frac{\frac{Z_K}{N_K}}{1 + \frac{Z_K Z_{11}}{N_K N}} \\ &= \frac{Z_{22}N_K N + Z_K(Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21})}{N(NN_K + Z_{11}Z_K)}. \end{aligned}$$

In diesem Quotienten steht ein „neues“ Zählerpolynom, das nicht wie im Eingrößensystem (4.46) einfach das Produkt der Zählerpolynome des Reglers und der Strecke ist. Durch die Wahl des Reglers K_1 können also die Nullstellen des Übertragungsverhaltens des Systems bezüglich der *anderen* Ein- und Ausgänge beeinflusst werden.

Diese Tatsache kann nun sowohl zu erwünschten als auch zu unerwünschten Wirkungen führen. Durch den Regler K_1 kann Allpassverhalten zwischen u_2 und y_2 beseitigt, es kann dieses Verhalten jedoch auch unerwünschterweise eingeführt werden. Betrachtet man das in Abb. 1.4 auf S. 6 gezeigte Beispiel, so kann der Autopilot die Eigenschaften des Flugzeuges für den Piloten sowohl verbessern als auch verschlechtern bzw. der Pilot kann die Eigenschaften des Flugzeuges aus der Sicht des Autopiloten günstig oder ungünstig verändern.

Wenn u_2 keine Stellgröße, sondern eine Störgröße ist, so gelten die aufgestellten Beziehungen mit einer anderen Interpretation. Die Übertragungsfunktion $\bar{G}_{22}(s)$ beschreibt dann, wie sich die Störung auf y_2 auswirkt. Führt man gezielt Nullstellen in das Zählerpolynom ein, so kann man y_2 für bestimmte Frequenzen vom Störeingang u_2 entkoppeln.

4.2.2 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des Regelkreises

Es wird jetzt untersucht, inwieweit der Regelkreis mit der Ausgangsrückführung

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_y \mathbf{y}(t) + \tilde{\mathbf{u}}(t)$$

bezüglich $\tilde{\mathbf{u}}$ steuerbar und bezüglich $\mathbf{y}$ beobachtbar ist. Für den Regelkreis erhält man das Modell

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= (\mathbf{A} - \mathbf{BK}_y\mathbf{C})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t).\end{aligned}$$

Aus dem Hautuskriterium entsteht für die Steuerbarkeit des Systems die Forderung

$$\begin{aligned}\text{Rang } (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}_y\mathbf{C} \quad \mathbf{B}) &= \text{Rang } \left((\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} \quad \mathbf{B}) \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{K}_y\mathbf{C} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Rang } (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} \quad \mathbf{B}) \\ &= n.\end{aligned}$$

Folglich ist der Regelkreis für beliebige Ausgangsrückführungen über $\tilde{\mathbf{u}}$ vollständig steuerbar, wenn die Regelstrecke vollständig steuerbar ist. Wenn die Regelstrecke nicht vollständig steuerbar ist, so sind im Regelkreis gerade diejenigen Eigenvorgänge steuerbar, die es auch in der Regelstrecke sind. Wie man leicht sieht, gelten diese Aussagen auch für die Zustandsrückführung.

Für die Beobachtbarkeit über $\mathbf{y}$ erhält man für den Regelkreis mit Ausgangsrückführung die Beziehung

$$\begin{aligned}\text{Rang } \begin{pmatrix} \lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}_y\mathbf{C} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} &= \text{Rang } \left(\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{BK}_y \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Rang } \begin{pmatrix} \lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

aus der hervorgeht, dass alle in der Regelstrecke beobachtbaren Eigenvorgänge auch im Regelkreis beobachtbar sind.

Diese Aussage lässt sich nicht auf die Zustandsrückführung übertragen. Dort gilt die angegebene Zerlegung nämlich nicht. Eine Zustandsrückführung kann – zielgerichtet oder versehentlich – Eigenvorgänge unbeobachtbar machen. Dies geschieht, wenn Eigenwerte des Regelkreises auf Nullstellen der Regelstrecke platziert werden. Andererseits können durch eine Zustandsrückführung nicht beobachtbare Eigenvorgänge beobachtbar gemacht werden. Dass dies möglich ist, liegt daran, dass die Zustandsrückführung auf den vollständigen Zustandsvektor $\mathbf{x}$, also auf mehr Informationen zurückgreift, als am Ausgang $\mathbf{y}$ vorhanden sind. Da diese Informationen der Ausgangsrückführung nicht zur Verfügung stehen, kann ein nicht beobachtbarer Eigenvorgang durch eine Ausgangsrückführung nicht zu einem beobachtbaren gemacht werden.

Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit von Regelkreisen

- Ausgangsrückführungen ändern nichts an der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit der Eigenvorgänge.
- Zustandsrückführungen ändern nichts an der Steuerbarkeit, beeinflussen jedoch die Beobachtbarkeit von Eigenvorgängen.

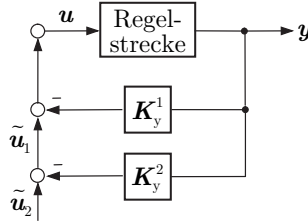


Abb. 4.10: Überlagerung zweier Ausgangsrückführungen

Diese Tatsachen haben mehrere interessante Konsequenzen. Erstens erhält man aus einer minimalen Realisierung (A, B, C) der Regelstrecke stets eine minimale Realisierung $(A - BK_y C, B, C)$ des Regelkreises mit Ausgangsrückführung, während man bei Verwendung einer Zustandsrückführung untersuchen muss, ob die minimale Realisierung gegebenenfalls von kleinerer Ordnung als das Modell $(A - BK, B, C)$ ist. Zweitens kann man die Erkenntnisse über die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit von Regelkreisen nutzen, um den Regler sequenziell zu entwerfen, wobei man die erste Rückführung

$$u(t) = -K_y^1 y(t) + \tilde{u}^1(t)$$

mit einer weiteren Rückführung

$$\tilde{u}^1(t) = -K_y^2 y(t) + \tilde{u}^2(t)$$

überlagert (Abb. 4.10). Dabei weiß man, dass die erste Ausgangsrückführung nichts an der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit verändert hat. Verwendet man eine Zustandsrückführung, so kann man andererseits zielgerichtet Eigenvorgänge unbeobachtbar machen, so dass diese durch eine anschließend entworfene Zustands- oder Ausgangsrückführung, die der bereits vorhandenen Rückführung überlagert wird, nicht verändert werden können.

Drittens folgt aus der Steuerbarkeit der betrachteten Regelkreise, dass die Regelkreise über die Eingangsgröße $\tilde{u}$ in einen beliebigen Zustand $x_e = x(t_e)$ überführt werden können.

4.3 Stabilität von Mehrgrößenregelkreisen

4.3.1 Stabilitätsanalyse anhand der Pole des Regelkreises

Die Überprüfung von Regelkreisen anhand der Pole bzw. Eigenwerte unterscheidet sich nicht von einschleifigen Regelkreisen. Liegt vom Regelkreis ein Zustandsraummodell der Form (4.27), (4.28) vor

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{x}(t) &= \bar{A} \bar{x}(t) + \bar{B} w(t) + \bar{E} d(t), & \bar{x}(0) &= \bar{x}_0 \\ y(t) &= \bar{C} \bar{x}(t), \end{aligned}$$

so kann die Zustandsstabilität anhand der charakteristischen Gleichung des Regelkreises

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}) = 0$$

überprüft werden. Die Eigenwerte des Regelkreises, die man als Nullstellen dieser Gleichung erhält, werden wieder mit einem Querstrich versehen: $\bar{\lambda}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Zur Stabilitätsprüfung kann man entweder diese Eigenwerte ausrechnen und überprüfen, ob alle Realteile negativ sind, oder man verwendet, genauso wie bei einschleifigen Regelkreisen, das Hurwitz- bzw. Routhkriterium.

Liegt hingegen eine E/A-Beschreibung der Form

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}_w(s) \mathbf{W}(s)$$

vor, so muss zum Nachweis der E/A-Stabilität überprüft werden, dass alle Pole $\bar{s}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) der Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}_w(s)$ negativen Realteil haben. Die Pole dieser Übertragungsfunktionsmatrix erhält man gemäß Definition 2.1, indem man die Pole aller Elemente dieser Matrix bestimmt. Wenn die Elemente in Pol-Nullstellen-Form gegeben sind, kann man die Stabilität aus den Linearfaktoren der Nennerpolynome ablesen. Andernfalls muss man die Pole als Nullstellen der Nennerpolynome ausrechnen.

Sind die Übertragungsfunktionsmatrizen $\mathbf{G}(s)$ der Strecke und $\mathbf{K}(s)$ des Reglers gegeben, so erkennt man an der Darstellung (4.29) der Führungsübertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}_w(s)$ in Abhängigkeit von diesen Matrizen

$$\mathbf{G}_w(s) = \mathbf{G}(s) \mathbf{K}(s) (\mathbf{I} + \mathbf{G}(s) \mathbf{K}(s))^{-1},$$

dass die Pole $\bar{s}_i$ des Regelkreises durch die Nullstellen von $\det(\mathbf{I} + \mathbf{G}(s) \mathbf{K}(s))$ bestimmt werden. Diese Determinante tritt bekanntermaßen als gemeinsamer Nenner aller Elemente von $\mathbf{G}_w(s)$ auf (bevor einzelne Linearfaktoren in den einzelnen Elementen gegen Nullstellen gekürzt werden). Folglich erhält man die Pole $\bar{s}_i$ als Lösungen von

Charakteristische Gleichung des Regelkreises: $\det(\mathbf{I} + \mathbf{G}_0(s)) = 0,$

 (4.47)

wobei

$$\mathbf{G}_0(s) = \mathbf{G}(s) \mathbf{K}(s)$$

die Übertragungsfunktionsmatrix der offenen Kette darstellt. Der geschlossene Kreis ist genau dann E/A-stabil, wenn alle Pole negativen Realteil haben:

$$\operatorname{Re}\{\bar{s}_i\} < 0 \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.48)$$

4.3.2 HSU-CHEN-Theorem

Rückführdifferenzmatrix. Bei einschleifigen Regelkreisen hat sich herausgestellt, dass die Rückführdifferenzfunktion

$$F(s) = 1 + G_0(s)$$

eine wichtige Rolle in der Stabilitätsanalyse spielt, denn aus ihr kann einerseits das Regelkreisverhalten berechnet werden. Andererseits geht die Reglerübertragungsfunktion linear in $F(s)$ ein, so dass man eine gut durchschaubare Abhängigkeit der Regelkreiseigenschaften von den Reglerparametern erhält.

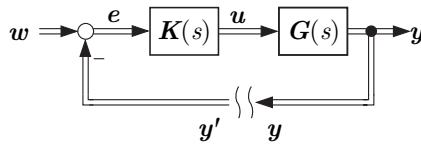


Abb. 4.11: Mehrgrößenregelkreis

Die Rückführdifferenzfunktion soll jetzt für den in Abb. 4.11 gezeigten Mehrgrößenregelkreis verallgemeinert werden. Für $W(s) = O$ erhält man für die in der Abbildung gekennzeichneten Signale $Y'(s)$ und $Y(s)$ die Beziehungen

$$Y(s) = -G(s)K(s)Y'(s) = -G_0(s)Y'(s)$$

und

$$Y'(s) - Y(s) = \underbrace{(I + G_0(s))}_{F(s)} Y'(s),$$

wobei

$$G_0(s) = G(s)K(s)$$

die Übertragungsfunktionsmatrix der offenen Kette ist. Die Differenz $Y'(s) - Y(s)$ zwischen dem „eingespeisten“ Signal $Y'(s)$ und dem dadurch erzeugten Ausgangssignal $Y(s)$ hängt über die

Rückführdifferenzmatrix: $F(s) = I + G_0(s)$	(4.49)

von $Y'(s)$ ab. $F(s)$ wird deshalb als *Rückführdifferenzmatrix* bezeichnet. Wie sich im Laufe der weiteren Untersuchungen zeigen wird, spielt diese Matrix dieselbe Rolle bei der Analyse des Regelkreises wie die Rückführdifferenzfunktion bei einschleifigen Regelkreisen.

Schneidet man den Regelkreis nicht bei Y , sondern bei U auf, so erhält man auf demselben Weg die Beziehung

$$U'(s) - U(s) = (I + K(s)G(s)) U'(s),$$

so dass in der dabei erhaltenen Rückführdifferenzmatrix

$$F(s) = I + K(s)G(s)$$

die Matrizen $K(s)$ und $G(s)$ in anderer Reihenfolge miteinander multipliziert werden als in Gl. (4.49) (Abb. 4.11). Während man bei Eingrößensystemen die Multiplikationsreihenfolge umdrehen kann und dadurch dieselbe Rückführdifferenzfunktion erhält, hängt bei Mehrgrößensystemen die Rückführdifferenzmatrix von der gewählten Schnittstelle im Regelkreis ab. Da im Folgenden jedoch die Determinante von $F(s)$ betrachtet wird

$$\det F(s) = \det(G(s) \cdot K(s)) = \det(K(s) \cdot G(s)),$$

hat dies keine Auswirkung auf das Analyseergebnis.

Ableitung des HSU-CHEN-Theorems. Die in Gl. (I-8.34) abgeleitete Beziehung zwischen der Rückführdifferenzfunktion $F(s)$ und den charakteristischen Polynomen der offenen Kette und des geschlossenen Kreises wird im Folgenden auf Mehrgrößensysteme erweitert. Wie die folgenden Umformungen zeigen werden, ist die Determinante der Rückführdifferenzmatrix proportional zum Quotienten dieser beiden charakteristischen Polynome

$$\det F(s) \sim \frac{\text{charakteristisches Polynom des geschlossenen Kreises}}{\text{charakteristisches Polynom der offenen Kette}},$$

wobei

$$\det(I + D_0) = \det(I + G_0(j\infty))$$

als Proportionalitätsfaktor auftritt. Wenn das System nicht sprungfähig ist, so ist dieser Faktor gleich eins.

Berechnung der Determinante der Rückführdifferenzmatrix. Es wird vorausgesetzt, dass Regler und Regelstrecke zur offenen Kette

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= A_0 x_0(t) + B_0 u_0(t), & x_0(0) &= x_0 \\ y_0(t) &= C_0 x_0(t) + D_0 u_0(t) \end{aligned}$$

zusammengefasst sind, so dass der Regelkreis durch eine Einheitsrückführung

$$u_0(t) = w(t) - y_0(t)$$

geschlossen wird. Die Übertragungsfunktionsmatrix der offenen Kette heißt

$$G_0(s) = C_0 (sI - A_0)^{-1} B_0 + D_0.$$

Für den Regelkreis erhält man das Modell

$$\dot{x}_0 = (A_0 - B_0(I + D_0)^{-1}C_0)x_0(t) + B_0(I + D_0)^{-1}w(t),$$

und daraus für das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} & \det(sI - A_0 + B_0(I + D_0)^{-1}C_0) \\ &= \det((sI - A_0)(I + (sI - A_0)^{-1}B_0(I + D_0)^{-1}C_0)) \\ &= \det(sI - A_0) \det(I + (sI - A_0)^{-1}B_0(I + D_0)^{-1}C_0) \\ &= \det(sI - A_0) \det(I + (I + D_0)^{-1}C_0(sI - A_0)^{-1}B_0) \\ &= \det(sI - A_0) \det(I + D_0)^{-1} \det(I + D_0 + C_0(sI - A_0)^{-1}B_0) \\ &= \det(sI - A_0) \det(I + D_0)^{-1} \det(I + G_0(s)), \end{aligned}$$

wobei das Vertauschen der Matrizen von der dritten zur vierten Zeile wegen Gl. (A2.65) möglich ist. In der letzten Zeile steht rechts die Determinante der Rückführdifferenzmatrix, nach der die Gleichung aufgelöst werden kann:

$$\det F(s) = \det(I + D_0) \frac{\det(sI - A_0 + B_0(I + D_0)^{-1}C_0)}{\det(sI - A_0)}.$$

Der erste Faktor ist eine Konstante, der zweite Faktor hat im Zähler das charakteristische Polynom des Regelkreises und im Nenner das charakteristische Polynom der offenen Kette.

□

Wenn keine Eigenwerte des geschlossenen Kreises und der offenen Kette dieselben Werte haben, wofür die vollständige Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit der Regelstrecke eine notwendige Bedingung darstellt, so kann dieses wichtige Ergebnis in Abhängigkeit von den Polen $\bar{s}_i$ des geschlossenen Kreises und den Polen s_i der offenen Kette aufgeschrieben werden:

HSU-CHEN-Theorem: $\det F(s) = k \frac{\prod_{i=1}^n (s - \bar{s}_i)}{\prod_{i=1}^n (s - s_i)}.$

(4.50)

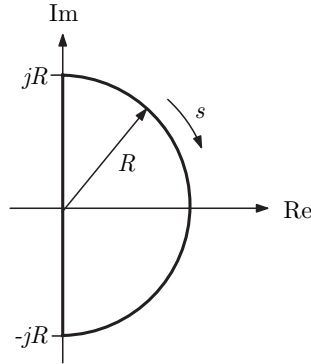
4.3.3 Nyquistkriterium für Mehrgrößensysteme

Auf Grund der sehr einfachen Erweiterung des Hsu-Chen-Theorems für den Mehrgrößenfall können die Überlegungen, die im Kap. I-8 zum Nyquistkriterium geführt haben, hier ohne große Änderungen übernommen werden. Es muss nur anstelle der Rückführdifferenzfunktion $F(s)$ jetzt die Determinante der Rückführdifferenzmatrix $F(s)$ eingesetzt werden.

Das Nyquistkriterium wird im Folgenden unter zwei Voraussetzungen aufgestellt:

- Die offene Kette ist nicht sprunghaft, d. h., die Übertragungsfunktionsmatrix G_0 ist proper:

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} G_0(s) = O.$$

Abb. 4.12: Nyquistkurve $\mathcal{D}$ für die Stabilitätsanalyse

- Die offene Kette hat keine Pole auf der Imaginärachse.

Es wird nun die Abbildung der Nyquistkurve $\mathcal{D}$ durch die Determinante der Rückführdifferenzmatrix $\mathbf{F}(s)$ betrachtet. Da dafür dieselben Überlegungen wie im Kap. I-8 angestellt werden können, kann das dort erhaltene Ergebnis hier sinngemäß übernommen werden.

Satz 4.2 (Verallgemeinertes Nyquistkriterium)

Eine offene Kette mit der Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}_0(s)$ führt genau dann auf einen stabilen Regelkreis, wenn

$$\Delta \arg \det \mathbf{F}(s) = -2n^+ \pi$$

gilt, d. h., wenn die Abbildung $\det \mathbf{F}(s) = \det(\mathbf{I} + \mathbf{G}_0(s))$ der Nyquistkurve den Ursprung der komplexen Ebene $-n^+$ -mal im Uhrzeigersinn umschließt. Dabei bezeichnet n^+ die Zahl der Pole von $\mathbf{G}_0(s)$ mit positivem Realteil.

Für eine stabile offene Kette ergibt sich daraus folgende Stabilitätsbedingung:

|| Ist die offene Kette stabil, so ist der Regelkreis genau dann stabil, wenn $\det \mathbf{F}(s)$ für $s \in \mathcal{D}$ den Ursprung der komplexen Ebene nicht umschließt.

Im Unterschied zu einschleifigen Regelkreisen liegt jetzt der „kritische Punkt“ bei null (und nicht bei -1). Die Umformung, aufgrund derer man das Nyquistkriterium bei Eingrößensystemen in Abhängigkeit von der Ortskurve der offenen Kette und dem Prüfpunkt -1 formulieren konnte, ist bei Mehrgrößensystemen nicht möglich. Hier muss stets die Rückführdifferenzmatrix betrachtet werden, wobei der Ursprung der komplexen Ebene als Prüfpunkt dient.

Da die offene Kette nach Voraussetzung nicht sprunghaft ist, gilt für s entlang des Halbkreises der Nyquistkurve

$$\det \mathbf{F}(s) = 1,$$

d. h., die Abbildung dieses ganzen Halbkreises erfolgt in den Punkt 1. Für den Verlauf von $\det \mathbf{F}(s)$ ist deshalb nur die Abbildung der Imaginärachse wichtig, wobei der für $s = j0 \dots j\infty$ entstehende Teil konjugiert komplex zu dem für $s = j0 \dots -j\infty$ berechneten Teil ist. In der grafischen Darstellung gehen beide Teile durch Spiegelung an der reellen Achse ineinander über. Für die Berechnung ist also nur $\mathbf{F}(j\omega)$ notwendig, was die Kenntnis der Frequenzgangsmatrix $\mathbf{G}_0(j\omega)$ (anstelle der Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}_0(s)$) erfordert.

Das Nyquistkriterium gilt für die E/A-Stabilität, denn es bezieht sich auf die E/A-Beschreibung des Regelkreises mit Hilfe der Übertragungsfunktionsmatrizen des Reglers und der Strecke. Wenn der Regelkreis vollständig steuerbar und beobachtbar ist, so wird mit dem Nyquistkriterium gleichzeitig die asymptotische Stabilität des Regelkreises geprüft.

Beispiel 4.1 Stabilitätsanalyse der Konzentrationsregelung von Rührkesselreaktoren

Im Beispiel 6.1 auf S. 242 wird eine Konzentrationsregelung für zwei gekoppelte Reaktoren entworfen, deren Stabilität hier mit Hilfe des Nyquistkriteriums analysiert werden soll. Die als Zustandsrückführung

$$u(t) = -(5 \quad -0,375) \mathbf{x}(t)$$

realisierte Regelung wird entsprechend Abb. 4.12 am Messvektor $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t)$ aufgeschnitten. Aus dem Zustandsraummodell der offenen Kette

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} -0,333 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) - \begin{pmatrix} 0,333 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (5 \quad -0,375) \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

erhält man die Rückfuhrdifferenzmatrix

$$\mathbf{F}(s) = \begin{pmatrix} \frac{s+2}{s+0,333} & \frac{-0,125}{s+0,333} \\ \frac{3,33}{s^2+2,333s+0,667} & \frac{s^2+2,333s+0,417}{s^2+2,333s+0,667} \end{pmatrix}.$$

Die Ortskurve von $\det \mathbf{F}(s)$ ist in Abb. 4.13 gezeigt.

Die Ortskurve beginnt bei

$$\det \mathbf{F}(0) = \det \begin{pmatrix} 6 & -0,375 \\ 5 & 0,625 \end{pmatrix} = 5,63$$

und erreicht für $\omega \rightarrow R$ für einen hinreichend groß gewählten Radius R der Nyquistkurve den Wert

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \det \mathbf{F}(jR) = 1.$$

Die offene Kette ist stabil. Da die Ortskurve in Abb. 4.13 den Ursprung des Koordinatensystems nicht umschlingt, ist der geschlossene Regelkreis stabil. $\square$

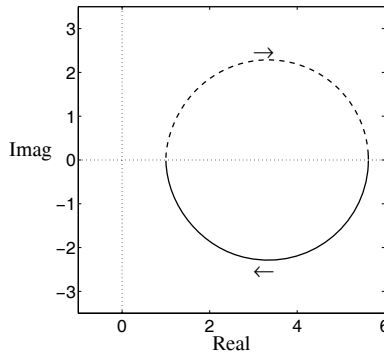


Abb. 4.13: Ortskurve von $F(s)$ für die geregelten Rührkesselreaktoren

Beispiel 4.2 Stabilitätsprüfung der geregelten Magnetschwebbahn

Die in Aufgabe 6.5 auf S. 274 genauer erläuterte Magnetschwebbahn kann durch eine Zustandsrückführung stabilisiert werden, wobei ein instabiler Eigenwert der Regelstrecke in die linke komplexe Ebene geschoben werden muss. Der Regelkreis ist in Abb. 4.14 gezeigt. Da die Zustandsrückführung die Bahn trotz der Störung $d(t)$ im Arbeitspunkt halten soll, hat der Regelkreis keine Führungsgröße.

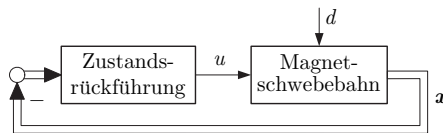


Abb. 4.14: Magnetschwebbahn mit Zustandsrückführung

Der Kreis wird in der Rückführung des vierdimensionalen Zustandsvektors x aufgeschnitten. Folglich hat die Rückführdifferenzmatrix $F(s)$ die Dimension $(4, 4)$.

Abbildung 4.15 zeigt die Ortskurve der Determinante der Rückführdifferenzmatrix. Die Ortskurve beginnt im Punkt

$$\det F(0) = -0,878$$

und verläuft entgegen dem Uhrzeigersinn in den Punkt

$$\det F(\infty) = 1$$

und dann spiegelbildlich bezüglich der reellen Achse zum Ausgangspunkt „zurück“. Offensichtlich umschlingt sie dabei den 0-Punkt einmal entgegen dem Uhrzeigersinn. Die geregelte Magnetschwebbahn ist folglich stabil. $\square$

4.3.4 Stabilität bei kleiner Kreisverstärkung

Hinreichende Bedingungen für die Stabilität des Regelkreises kann man unter Verwendung von Abschätzungen für die Determinante der Rückführdifferenzmatrix er-

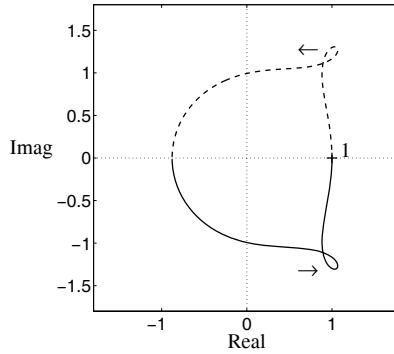


Abb. 4.15: Ortskurve von $\det \mathbf{F}(j\omega)$ für die Magnetschwebbahn

halten. Zwei sollen hier angegeben werden, weil sie in der Literatur über Mehrgrößensysteme häufig verwendet und auch bei der Robustheitsuntersuchung noch eine Rolle spielen werden.

Es werden Regelkreise untersucht, die aus asymptotisch stabilen, nicht sprungfähigen offenen Ketten entstehen. Für die Determinante der Rückfuhrdifferenzmatrix kann man schreiben

$$\det \mathbf{F}(j\omega) = \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i \{\mathbf{G}_0(j\omega)\})$$

wobei $\lambda_i \{\mathbf{G}_0(j\omega)\}$, ($i = 1, \dots, n$) die Eigenwerte der Frequenzgangmatrix der offenen Kette sind (vgl. Gl. (A2.61)). Wenn man weiß, dass sämtliche Faktoren

$$1 + \lambda_i \{\mathbf{G}_0(j\omega)\}$$

positive Realteile haben, so hat auch $\det \mathbf{F}(j\omega)$ für alle Frequenzen auf der Nyquistkurve einen positiven Realteil, kann deshalb den Ursprung der komplexen Ebene nicht umschlingen und erfüllt folglich das Nyquistkriterium. Das ist beispielsweise dann der Fall, wenn

$$\|\mathbf{G}_0(j\omega)\| < 1 \quad (4.51)$$

gilt, denn dann folgt aus

$$|\lambda_i \{\mathbf{G}_0(j\omega)\}| \leq \|\mathbf{G}_0(j\omega)\| < 1$$

die geforderte Relation

$$\operatorname{Re}\{\det \mathbf{F}(j\omega)\} > 0.$$

$\|\cdot\|$ stellt eine Matrixnorm dar. $\|\mathbf{G}_0(j\omega)\|$ ist also eine skalare reelle Größe, die von ω abhängt.

Die Bedingung (4.51) ist hinreichend für die Stabilität des Regelkreises. Sie fordert, dass die Norm der Frequenzgangmatrix der offenen Kette für alle Frequenzen

kleiner als eins ist. Diese Norm kann auch als Kreisverstärkung interpretiert werden, denn sie gibt an, wie gut ein Signal beim Durchlaufen der offenen Kette übertragen wird.

Die Stabilitätsbedingung wird nur dann erfüllt, wenn die Kreisverstärkung kleiner als eins ist. Deshalb wird sie auch als *small gain theorem* bezeichnet, was man mit „Satz der kleinen Kreisverstärkung“ übersetzen kann.

Satz 4.3 (*Small Gain Theorem*)

Wenn eine nicht sprungfähige offene Kette E/A-stabil ist und die Bedingung

$$\|\mathbf{G}_0(j\omega)\| < 1 \quad \text{für } \omega = 0 \dots \infty$$

erfüllt, dann ist der Regelkreis E/A-stabil.

Verwendet man die Matrixnorm

$$\|\mathbf{G}_0(j\omega)\| = \sqrt{\lambda_{\max}\{\mathbf{G}_0' \mathbf{G}_0\}} = \sigma_{\max}\{\mathbf{G}_0(j\omega)\},$$

die mit dem größten Singulärwert der Matrix übereinstimmt, so wird durch die Bedingung (4.51) gefordert, dass der größte Singulärwert der Frequenzgangmatrix der offenen Kette kleiner als eins sein soll:

$$\sigma_{\max}\{\mathbf{G}_0(j\omega)\} < 1. \quad (4.52)$$

Diese Bedingung wird in der Literatur häufig zur Abschätzung der Stabilitätseigenschaften herangezogen. In einer anderen, ebenfalls gebräuchlichen Formulierung fordert man, dass der Spektralradius ρ von $\mathbf{G}_0(j\omega)$ kleiner als eins sein soll:

$$\rho\{\mathbf{G}_0(j\omega)\} < 1 \quad \text{für } \omega = 0 \dots \infty.$$

Die bisher angegebenen hinreichenden Stabilitätsbedingungen haben den Nachteil, dass sie sich auf die skalare Größe $\|\mathbf{G}_0(j\omega)\|$ beziehen, die den Charakter der inneren Verkopplungen des Mehrgrößensystems nur sehr grob wiedergeben kann. Man kann jedoch auch hinreichende Stabilitätsbedingungen angeben, bei denen die Struktureigenschaften erhalten bleiben. Verwendet man beispielsweise die Abschätzung (A2.92)

$$|\lambda_i\{\mathbf{G}_0(j\omega)\}| \leq \lambda_P\{|\mathbf{G}_0(j\omega)|\},$$

wobei λ_P den größten Eigenwert der angegebenen nichtnegativen Matrix bezeichnet, und fordert

$$\lambda_P\{|\mathbf{G}_0(j\omega)|\} < 1, \quad (4.53)$$

so gilt auch hier für die Eigenwerte der Rückführdifferenzmatrix die Beziehung

$$|\lambda_i\{\mathbf{G}_0(j\omega)\}| \leq \lambda_P\{|\mathbf{G}_0(j\omega)|\} < 1,$$

so dass die Bedingungen des Nyquistkriteriums erfüllt sind.

Satz 4.4 (Small Gain Theorem)

Wenn eine nicht sprungfähige offene Kette E/A -stabil ist und die Bedingung

$$\lambda_P\{|\mathbf{G}_0(j\omega)|\} < 1 \quad \text{für } \omega = 0 \dots \infty$$

erfüllt, dann ist der Regelkreis E/A -stabil.

Auch diese hinreichende Stabilitätsbedingung beruht auf einer oberen Schranke für eine „Kreisverstärkung“.

4.3.5 Robuste Stabilität

Die im Abschn. I-8.6 beschriebenen Robustheitsuntersuchungen werden jetzt auf Mehrgrößensysteme erweitert, wobei zunächst auf die verwendeten Beschreibungsformen für die Modellunsicherheiten eingegangen wird.

Beschreibung der Modellunsicherheiten durch Normabschätzungen. Die Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(s)$ einer nicht vollständig bekannten Regelstrecke kann in unterschiedlicher Weise in einen bekannten und einen unbekannten Teil zerlegt werden. Im Folgenden wird mit der additiven und der multiplikativen Zerlegung gearbeitet.

Bei der additiven Zerlegung

$$\mathbf{G}(s) = \hat{\mathbf{G}}(s) + \delta\mathbf{G}_A(s)$$

wird die unbekannte Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(s)$ durch den Näherungswert $\hat{\mathbf{G}}(s)$ und den unbekannten Modellfehler $\delta\mathbf{G}_A(s)$ beschrieben. Es wird angenommen, dass für den Modellfehler eine obere Schranke $\bar{G}_A(s)$ bekannt ist, so dass

$$\|\delta\mathbf{G}_A(s)\| \leq \bar{G}_A(s) \quad \text{für alle } s \in \mathcal{D} \quad (4.54)$$

gilt.

Bei der Stabilitätsanalyse muss die Menge aller Regelstrecken berücksichtigt werden, deren Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(s)$ in der durch Gl. (4.54) beschriebenen Weise vom Näherungswert $\hat{\mathbf{G}}(s)$ abweicht. Diese Menge ist durch

$$\mathcal{G} = \{\mathbf{G}(s) = \hat{\mathbf{G}}(s) + \delta\mathbf{G}_A(s) : \|\delta\mathbf{G}_A(s)\| \leq \bar{G}_A(s)\} \quad (4.55)$$

beschrieben. Wenn man die euklidische Matrixnorm verwendet, so ist diese Menge für jede Frequenz s eine Kugel im mr -dimensionalen Raum der Elemente der (r, m) -Matrizen $\mathbf{G}(s)$ mit dem Mittelpunkt in $\hat{\mathbf{G}}$ und dem Radius $\bar{G}_A(s)$. Dies ist für eine Übertragungsfunktionsmatrix mit zwei Elementen in Abb. 4.16 dargestellt. Für andere Matrixnormen entstehen ähnliche Mengen.

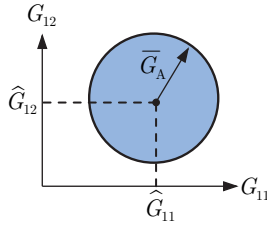


Abb. 4.16: Menge $\mathcal{G}$ der zu betrachtenden Regelstrecken $\mathbf{G}(s) = (G_{11}(s) \ G_{12}(s))$ bei Normabschätzung der Modellunsicherheiten

Man kann die Modellunsicherheiten auch durch einen unbekannten Faktor darstellen,

$$\mathbf{G}(s) = \hat{\mathbf{G}}(s) (\mathbf{I} + \delta \mathbf{G}_M(s)),$$

wobei man $\delta \mathbf{G}_M(s)$ durch eine obere Schranke $\bar{G}_M$ beschreibt:

$$\|\delta \mathbf{G}_M(s)\| \leq \bar{G}_M(s) \quad \text{für alle } s \in \mathcal{D}. \quad (4.56)$$

Die Menge der zu betrachtenden Regelstrecken ist dann

$$\mathcal{G} = \{\mathbf{G}(s) = \hat{\mathbf{G}}(s)(\mathbf{I} + \delta \mathbf{G}_M(s)) : \|\delta \mathbf{G}_M(s)\| \leq \bar{G}_M(s)\}. \quad (4.57)$$

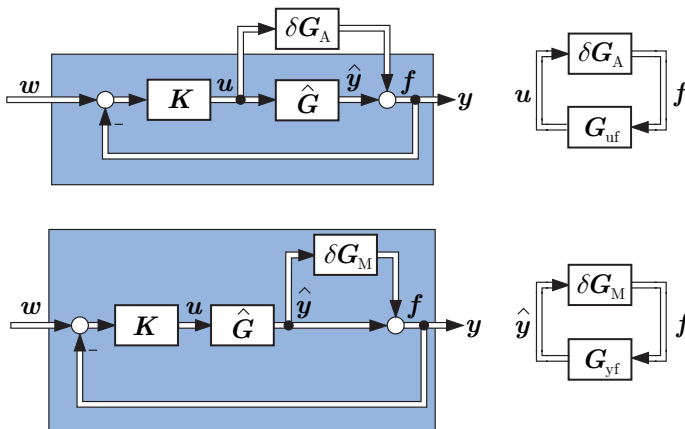


Abb. 4.17: Regelkreis mit additiven bzw. multiplikativen Modellunsicherheiten

Nachweis der robusten Stabilität. Es wird vorausgesetzt, dass der Regelkreis, der aus dem Näherungsmodell $\hat{\mathbf{G}}(s)$ und dem Regler $\mathbf{K}(s)$ besteht, stabil ist. Für die Untersuchung der robusten Stabilität wird der Regelkreis für $\mathbf{W}(s) = \mathbf{O}$ zunächst

in ähnlicher Weise umgeformt, wie es bei einschleifigen Regelkreisen getan wurde und in Abb. 4.17 zu sehen ist. Zu untersuchen ist dann ein rückgekoppeltes System, das aus einem Block mit der Übertragungsfunktionsmatrix $\delta \mathbf{G}_A(s)$ bzw. $\delta \mathbf{G}_M(s)$ einerseits und dem umgeformten Regelkreis mit dem Näherungsmodell andererseits besteht. Der jeweils oben gezeichnete Block wird auch als Fehlermodell bezeichnet, denn er beschreibt die Abhängigkeit des Fehlersignals $\mathbf{F}(s)$ von $\mathbf{U}(s)$ bzw. $\hat{\mathbf{Y}}(s)$. Dieses Fehlermodell ist unbekannt, aber für die Stabilitätsprüfung steht eine obere Schranke $\bar{G}_A(s)$ bzw. $\bar{G}_M(s)$ zur Verfügung.

Für den Regelkreis mit additiven Modellunsicherheiten muss die Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}_{uf}(s)$ ermittelt werden, die beschreibt, wie das Signal $\mathbf{F}(s)$ in das Signal $\mathbf{U}(s)$ durch das Näherungsmodell und den Regler überführt wird. Aus dem Blockschaltbild kann man dafür die Beziehung

$$\mathbf{G}_{uf}(s) = -\mathbf{K}(s) (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{G}}(s)\mathbf{K}(s))^{-1}$$

ablesen. Um die Stabilität des Kreises, der die Übertragungsfunktionen $\delta \mathbf{G}_A(s)$ und $\mathbf{G}_{uf}(s)$ besitzt, zu sichern, wird der Satz der kleinen Kreisverstärkungen angewendet. Voraussetzung dafür ist, dass die offene Kette stabil ist. Diese Voraussetzung ist erfüllt, wenn der Regler mit dem Näherungsmodell einen stabilen Regelkreis bildet und wenn $\delta \mathbf{G}_A(s)$ die Übertragungsfunktionsmatrix eines stabilen Systems ist. Die Bedingung (4.51) lautet für diesen Kreis

$$\|\mathbf{G}_{uf}(j\omega) \delta \mathbf{G}_A(j\omega)\| < 1.$$

Da die Ungleichung

$$\|\mathbf{G}_{uf}(j\omega) \delta \mathbf{G}_A(j\omega)\| < \|\mathbf{G}_{uf}(j\omega)\| \|\delta \mathbf{G}_A(j\omega)\| \leq \|\mathbf{G}_{uf}(j\omega)\| \bar{G}_A(j\omega)$$

gilt, ist die angegebene Bedingung erfüllt, wenn die obere Schranke für die Modellunsicherheiten die Bedingung

Robuste Stabilität: $\bar{G}_A(j\omega) < \frac{1}{\ \mathbf{G}_{uf}(j\omega)\ }$ für alle ω	(4.58)

erfüllt.

Für den Regelkreis mit multiplikativen Modellunsicherheiten erhält man auf demselben Weg zunächst die Übertragungsfunktionsmatrix

$$\mathbf{G}_{yf}(s) = -\hat{\mathbf{G}}(s)\mathbf{K}(s) (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{G}}(s)\mathbf{K}(s))^{-1}$$

und dann aus der Bedingung der kleinen Kreisverstärkung die Forderung

Robuste Stabilität: $\bar{G}_M(j\omega) < \frac{1}{\ \mathbf{G}_{yf}(j\omega)\ }$ für alle ω .	(4.59)

Die Bedingungen (4.58) und (4.59) unterscheiden sich in Bezug darauf, wie die Reglermatrix $\mathbf{K}$ in die Übertragungsfunktionen $\mathbf{G}_{uf}$ bzw. $\mathbf{G}_{yf}$ eingeht. Da die

Modellunsicherheiten unterschiedliche Signale miteinander koppeln, ist dies auch nicht verwunderlich. Die Bedingungen können wie die für Eingrößensysteme im Abschn. 1-8.6 abgeleiteten interpretiert werden. Da der aus Näherungsmodell und Regler bestehende Regelkreis nach Voraussetzung stabil ist, umschlingt die Determinante der Rückführdifferenzmatrix den Ursprung der komplexen Ebene in der für die Stabilität des Regelkreises erforderlichen Weise. Durch die beiden Ungleichungen wird gesichert, dass diese Umschlingung durch die Modellunsicherheiten nicht verändert werden kann.

Satz 4.5 (Stabilitätskriterium für robuste Stabilität)

Ist der aus der nominalen Regelstrecke $\bar{G}(s)$ und dem Regler $K(s)$ gebildete Regelkreis stabil und ist die Anzahl der Pole mit nichtnegativem Realteil für alle Regelstrecken $G(s) \in \mathcal{G}$ dieselbe, so ist der Regelkreis genau dann robust stabil, wenn die Bedingung (4.58) bzw. (4.59) erfüllt ist.

Die angegebenen Bedingungen sind für die robuste Stabilität des Regelkreises nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig, denn wenn sie verletzt werden, kann man ein Fehlermodell δG_A bzw. δG_M angeben, für das der Regelkreis instabil ist.

Die bisher verwendeten Normabschätzungen für die Modellunsicherheiten werden sehr häufig angewendet, um Betragsabschätzungen für Eingrößensysteme auf Mehrgrößensysteme zu erweitern. Dass dabei Normen eingesetzt werden, ist darauf zurückzuführen, dass das Rechnen mit Vektor- und Matrizennormen ein in der Mathematik gut ausgearbeitetes Gebiet ist und hier zu Formeln führt, die denen für einschleifige Regelungen sehr ähnlich sind. Diese Vorgehensweise hat jedoch den entscheidenden Nachteil, dass die Übertragungsfunktionsmatrizen δG_A bzw. δG_M lediglich durch eine *skalare* obere Schranke beschrieben werden, wobei der Mehrgrößencharakter der Fehlermodelle verloren geht. Im Folgenden wird gezeigt, dass man die Betragsabschätzung auch für Mehrgrößensysteme verwenden kann und dabei auf bessere Ergebnisse kommt.

Beschreibung der Modellunsicherheiten durch Betragsabschätzungen. Die elementweise Abschätzung der Modellunsicherheiten $\delta G_A(s)$ erfolgt mit Hilfe einer Matrix $\bar{G}_A(s)$, für die die Beziehung

$$|\delta G_A(s)| \leq \bar{G}_A(s)$$

gilt. In dieser Ungleichung gelten die Betragsstriche elementweise, d. h., die angegebene Beziehung besagt dasselbe wie

$$\begin{pmatrix} |\delta G_{A11}(s)| & |\delta G_{A12}(s)| & \cdots & |\delta G_{A1m}(s)| \\ |\delta G_{A21}(s)| & |\delta G_{A22}(s)| & \cdots & |\delta G_{A2m}(s)| \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ |\delta G_{Ar1}(s)| & |\delta G_{Ar2}(s)| & \cdots & |\delta G_{Arm}(s)| \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \bar{G}_{11}(s) & \bar{G}_{12}(s) & \cdots & \bar{G}_{1m}(s) \\ \bar{G}_{21}(s) & \bar{G}_{22}(s) & \cdots & \bar{G}_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{G}_{r1}(s) & \bar{G}_{r2}(s) & \cdots & \bar{G}_{rm}(s) \end{pmatrix}.$$

Diese Abschätzung der Modellunsicherheiten ermöglicht es, die tatsächlich vorhandenen Unsicherheiten genauer zu beschreiben, als es mit Normabschätzungen möglich ist, denn jedes Element $\bar{G}_{ij}(s)$ kann der Unsicherheit von $\delta G_{Aij}(s)$ angepasst werden.

Die Menge von Regelstrecken, die bei diesem Modell betrachtet werden muss, heißt

$$\mathcal{G} = \{G(s) = \hat{G}(s) + \delta G_A(s) : |\delta G_A(s)| \leq \bar{G}_A(s)\}. \quad (4.60)$$

Diese Menge ist ein Quader im Raum der Elemente der Übertragungsfunktionsmatrix $G(s)$, wobei der Mittelpunkt durch $\hat{G}(s)$ und die Länge der Kanten in Richtung des Elementes ij durch $2\bar{G}_{ij}(s)$ gegeben sind. Für ein einfaches Beispiel ist diese Menge in Abb. 4.18 dargestellt.

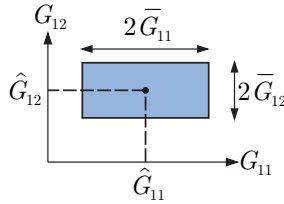


Abb. 4.18: Menge $\mathcal{G}$ der zu betrachtenden Regelstrecken bei elementeweiter Abschätzung der Modellunsicherheiten

Für Systeme mit multiplikativen Modellunsicherheiten erhält man mit der Abschätzung

$$|\delta G_M(s)| \leq \bar{G}_M(s) \quad \text{für alle } s \in \mathcal{D} \quad (4.61)$$

die Menge von Regelstrecken

$$\mathcal{G} = \{G(s) = \hat{G}(s) (I + \delta G_M(s)) : |\delta G_M(s)| \leq \bar{G}_M(s)\}. \quad (4.62)$$

Der Stabilitätsnachweis kann nun mit Hilfe von Satz 4.4 erfolgen, wobei wieder die in Abb. 4.17 gezeigten Rückkopplungsschaltungen betrachtet werden. Die Forderung

$$\lambda_P\{G_{\text{uf}}(j\omega) \delta G_A(j\omega)\} < 1$$

kann mit Hilfe der Monotonieeigenschaft (A2.93) der Perronwurzel $\lambda_P\{\cdot\}$ in

$$\begin{aligned} \lambda_P\{|G_{\text{uf}}(j\omega) \delta G_A(j\omega)|\} &\leq \lambda_P\{|G_{\text{uf}}(j\omega)| |\delta G_A(j\omega)|\} \\ &\leq \lambda_P\{|G_{\text{uf}}(j\omega)| \bar{G}_A(j\omega)\} \end{aligned}$$

und schließlich in

Robuste Stabilität: $\lambda_P\{|G_{\text{uf}}(j\omega)| \bar{G}_A(j\omega)\} < 1 \quad \text{für alle } \omega$

(4.63)

überführt werden. Auf demselben Wege erhält man für Systeme mit multiplikativen Modellunsicherheiten die hinreichende Stabilitätsbedingung

$$\text{Robuste Stabilität:} \quad \lambda_P\{|\mathbf{G}_{yf}(j\omega)| \bar{\mathbf{G}}_M(j\omega)\} < 1 \quad \text{für alle } \omega \quad (4.64)$$

Satz 4.6 (Stabilitätskriterium für robuste Stabilität)

Ist der aus der nominalen Regelstrecke $\hat{\mathbf{G}}(s)$ und dem Regler $\mathbf{K}(s)$ gebildete Regelkreis stabil und ist die Anzahl der Pole mit nichtnegativem Realteil für alle Regelstrecken $\mathbf{G}(s) \in \mathcal{G}$ dieselbe, so ist der Regelkreis robust stabil, wenn die Bedingung (4.63) bzw. (4.64) erfüllt ist.

Diese Stabilitätsbedingungen sind für robuste Stabilität hinreichend, aber nicht notwendig.

Anwendung der Stabilitätskriterien. Bei der praktischen Anwendung der angegebenen Kriterien für robuste Stabilität müssen zunächst obere Schranken für die Modellunsicherheiten gefunden werden. Dabei ist zu beachten, dass die Schranken $\bar{\mathbf{G}}_A(j\omega)$, $\bar{\mathbf{G}}_M(j\omega)$, $\bar{\mathbf{G}}_A(j\omega)$ und $\bar{\mathbf{G}}_M(j\omega)$ Skalare bzw. Matrizen sind, die von der Frequenz ω abhängen und für alle Frequenzen nichtnegative reelle Werte annehmen. Diese Schranken sind häufig nicht durch geschlossene Ausdrücke darstellbar, wie dies bei Übertragungsfunktionen ansonsten durch gebrochen rationale Ausdrücke möglich ist. Für die praktische Anwendung des Stabilitätstests reicht es auch, wenn die geforderten Funktionen der Frequenz ω in Form von Datensätzen vorliegen, so dass die in den Stabilitätsbedingungen angegebenen Ungleichungen für einzelne Frequenzen geprüft werden können.

Bei Verwendung der Normabschätzung können die Stabilitätsbedingungen (4.58) und (4.59) in einfache grafische Tests überführt werden. Diese Ungleichungen besagen, dass der Amplitudengang von $\frac{1}{\|\mathbf{G}_{uf}(j\omega)\|}$ bzw. $\frac{1}{\|\mathbf{G}_{yf}(j\omega)\|}$ oberhalb des Amplitudenganges von $\bar{\mathbf{G}}_A(j\omega)$ bzw. $\bar{\mathbf{G}}_M(j\omega)$ liegen muss. Bei Verwendung der elementweisen Abschätzung der Modellunsicherheiten muss der Frequenzgang der reellen Größe $\lambda_P\{|\mathbf{G}_{uf}(j\omega)| \bar{\mathbf{G}}_A(j\omega)\}$ für alle Frequenzen kleiner als eins sein.

In allen Fällen wird beim Robustheitstest offensichtlich, wo möglicherweise die Modellgüte verbessert werden muss, damit die robuste Stabilität gesichert werden kann. Häufig ist der Bereich kleiner und mittlerer Frequenzen derjenige Bereich, in dem die angegebenen Ungleichungen möglicherweise nicht erfüllt sind.

Will man durch Veränderung des Reglers erreichen, dass die Stabilitätsbedingungen bei vorgegebenen Modellunsicherheiten erfüllt werden, so muss man tendenziell die Reglerverstärkung verkleinern, wenn die Ungleichungen zunächst nicht erfüllt werden. Dabei ist zu beachten, dass die Reglerparameter nichtlinear in die Übertragungsfunktionsmatrizen $\mathbf{G}_{uf}(s)$ bzw. $\mathbf{G}_{yf}(s)$ eingehen und diese Aussage deshalb tatsächlich nur eine Leitlinie angeben kann.

Beispiel 4.3 Vergleich unterschiedlicher Robustheitstests

Das folgende Beispiel zeigt, dass man mit der elementweisen Abschätzung der Modellunsicherheiten tatsächlich viel mehr Informationen über die inneren Kopplungen eines Mehrgrößensystems erfassen kann als mit Normabschätzungen. Es wird die Regelstrecke

$$\mathbf{G}(s) = \begin{pmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ 0 & G_{22}(s) \end{pmatrix}$$

untersucht, bei der das Koppellement $G_{12}(s)$ nicht bekannt ist und deshalb vollständig in das Fehlermodell eingeht. Von den Hauptdiagonalelementen wird angenommen, dass sie genau bekannt sind. Es kann deshalb mit der Zerlegung

$$\mathbf{G}(s) = \underbrace{\begin{pmatrix} G_{11}(s) & 0 \\ 0 & G_{22}(s) \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{G}}(s)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & G_{12}(s) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\delta \mathbf{G}_A(s)}$$

und den Abschätzungen

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 & G_{12}(s) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| \leq \bar{G}_A(s) \quad \text{bzw.} \quad \left| \begin{pmatrix} 0 & G_{12}(s) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right| \leq \begin{pmatrix} 0 & \bar{G}_{12}(s) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gearbeitet werden, wobei für die erste Beziehung bei Verwendung des größten Singulärwertes als Matrixnorm

$$\bar{G}_A(s) = |G_{12}(s)|$$

die kleinste obere Fehlerschranke angibt.

Verwendet man einen dezentralen Regler

$$\begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} K_1(s) & 0 \\ 0 & K_2(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{pmatrix},$$

was sich aufgrund der einseitigen Kopplung der Regelstrecke anbietet, so ist offensichtlich, dass die Stabilität des Regelkreises vollkommen unabhängig von der Übertragungsfunktion $G_{12}(s)$ ist, denn das geregelte System ist eine Reihenschaltung zweier einschleifiger Regelkreise mit der Kopplung $G_{12}(s)$ (Abb. 4.19). Nimmt man an, dass der Regler K_1 mit G_{11} und der Regler K_2 mit G_{22} zu stabilen Regelkreisen führen, so ist auch das Gesamtsystem stabil, wenn $G_{12}(s)$ stabil ist.

Wendet man die Kriterien für die robuste Stabilität an, so zeigt sich, dass nur bei Verwendung der Betragsabschätzung für die Modellunsicherheiten die Information, dass G_{12} auf die Stabilität keinen Einfluss hat, erhalten bleibt. Die Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}_{\text{uf}}(s)$ heißt

$$\mathbf{G}_{\text{uf}}(s) = \begin{pmatrix} \frac{-K_1(s)}{1 + K_1(s)G_{11}(s)} & 0 \\ 0 & \frac{-K_2(s)}{1 + K_2(s)G_{22}(s)} \end{pmatrix}.$$

Bei der Normabschätzung muss für die robuste Stabilität die Ungleichung (4.58)

$$|G_{12}(j\omega)| < \frac{1}{\max\left\{\left|\frac{-K_1(j\omega)}{1 + K_1(j\omega)G_{11}(j\omega)}\right|, \left|\frac{-K_2(j\omega)}{1 + K_2(j\omega)G_{22}(j\omega)}\right|\right\}}$$

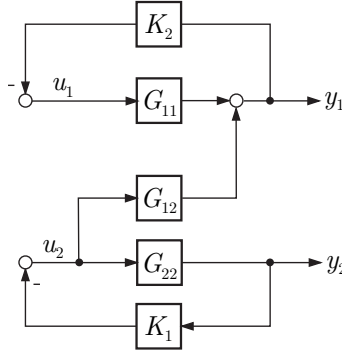


Abb. 4.19: System mit einseitiger Kopplung und dezentraler Regelung

gelten, die offensichtlich von $G_{12}(s)$ abhängig ist und nur erfüllt ist, wenn die beiden Regelkreise die Bedingung

$$\left| \frac{-K_i(j\omega)}{1 + K_i(j\omega)G_{ii}(j\omega)} \right| < \frac{1}{|G_{12}(j\omega)|} \quad (i = 1, 2)$$

erfüllen. Verwendet man hingegen die elementweise Abschätzung der Modellunsicherheiten, so muss man die Ungleichung

$$\begin{aligned} & \lambda_P \left\{ \left\| \begin{pmatrix} \frac{-K_1(j\omega)}{1 + K_1(j\omega)G_{11}(j\omega)} & 0 \\ 0 & \frac{-K_2(j\omega)}{1 + K_2(j\omega)G_{22}(j\omega)} \end{pmatrix} \right\| \begin{pmatrix} 0 & |G_{12}(j\omega)| \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \lambda_P \left\{ \left\| \begin{pmatrix} 0 & \left| \frac{-K_1(j\omega)}{1 + K_1(j\omega)G_{11}(j\omega)} G_{12}(j\omega) \right| \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| \right\} \\ &= 0 < 1 \end{aligned}$$

überprüfen, die für sämtliche Übertragungsfunktionen $G_{12}(s)$ erfüllt ist.

Dieses Beispiel zeigt, dass in die elementweise Abschätzung der Modellunsicherheiten viel mehr Informationen eingehen als in die Normabschätzung. Das Beispiel zeigt auch, dass die Stabilitätsbedingung im Satz 4.4 besser ist als die im Satz 4.3 angegebene in dem Sinne, dass mit Satz 4.4 die Stabilität von Systemen nachgewiesen werden kann, für die der Stabilitätsnachweis mit Satz 4.3 nicht möglich ist. $\square$

4.4 Stationäres Verhalten von Regelkreisen

4.4.1 Sollwertfolge und Störunterdrückung

In den folgenden Abschnitten wird das stationäre Verhalten des Regelkreises untersucht. Dieses Verhalten stellt sich beim stabilen Regelkreis nach Abklingen des

Übergangsverhaltens ein und beschreibt das Regelkreisverhalten für große Zeit t . Die Forderung nach Sollwertfolge und Störunterdrückung bedeutet, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{w}(t) - \mathbf{y}(t)) = \mathbf{0}$$

gelten soll. Diese Forderung kann nicht für beliebige Führungs- und Störsignale, sondern nur für vorgegebene Klassen dieser Signale erfüllt werden.

Führungsgrößenmodell. Zur Beschreibung der Klasse der zu betrachtenden Führungsgrößen $\mathbf{w}(t)$ wird das Führungsgrößenmodell

$$\dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{A}_{\mathbf{w}} \mathbf{x}_{\mathbf{w}}(t), \quad \mathbf{x}_{\mathbf{w}}(0) = \mathbf{x}_{\mathbf{w}0} \quad (4.65)$$

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{C}_{\mathbf{w}} \mathbf{x}_{\mathbf{w}}(t) \quad (4.66)$$

eingeführt. Für dieses Modell wird angenommen, dass die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}_{\mathbf{w}}$ instabil sind, denn wenn das Führungsgrößenmodell asymptotisch stabil wäre, so würde $\mathbf{w}(t)$ abklingen und die Forderung nach Sollwertfolge wäre selbst bei einem im Ruhezustand verharrenden System erfüllt. Für die häufig verwendeten sprungförmigen Führungssignale ist $\mathbf{A}_{\mathbf{w}}$ eine Nullmatrix.

Beim Reglerentwurf wird vorausgesetzt, dass $\mathbf{A}_{\mathbf{w}}$ und $\mathbf{C}_{\mathbf{w}}$ bekannt, der Anfangszustand $\mathbf{x}_{\mathbf{w}0}$ jedoch unbekannt ist. Sollwertfolge soll für alle Führungssignale $\mathbf{w}(t)$, die durch das Modell (4.65), (4.66) für beliebige Anfangszustände $\mathbf{x}_{\mathbf{w}0}$ erzeugt werden, gesichert sein. Ist insbesondere $\mathbf{A}_{\mathbf{w}}$ eine Nullmatrix, so kann das Führungsgrößenmodell sprungförmige Signale

$$\mathbf{w}(t) = \bar{\mathbf{w}} \sigma(t) \quad (4.67)$$

mit beliebiger Sprunghöhe $\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{C}_{\mathbf{w}} \mathbf{x}_{\mathbf{w}0}$ generieren.

Störgrößenmodell. In ähnlicher Weise kann man für die Störung $\mathbf{d}(t)$ das Störgrößenmodell

$$\dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{d}}(t) = \mathbf{A}_{\mathbf{d}} \mathbf{x}_{\mathbf{d}}(t), \quad \mathbf{x}_{\mathbf{d}}(0) = \mathbf{x}_{\mathbf{d}0} \quad (4.68)$$

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{C}_{\mathbf{d}} \mathbf{x}_{\mathbf{d}}(t) \quad (4.69)$$

eingeführen. Auch hier kann man die für praktische Aufgaben häufig betrachteten sprungförmigen Signale

$$\mathbf{d}(t) = \bar{\mathbf{d}} \sigma(t) \quad (4.70)$$

durch ein solches Modell mit $\mathbf{A}_{\mathbf{d}} = \mathbf{0}$ darstellen.

In den folgenden beiden Abschnitten wird das stationäre Verhalten des Regelkreises zunächst für sprungförmige Führungs- und Störsignale untersucht. In Erweiterung der von einschleifigen Regelkreisen bekannten Ergebnisse kann Sollwertfolge entweder durch Verwendung eines Vorfilters oder mit Hilfe von PI-Reglern realisiert werden. Anschließend wird das stationäre Verhalten für sehr allgemeine Störgrößen- und Führungsgrößenmodelle untersucht.

4.4.2 Entwurf von Vorfiltern zur Sicherung der Sollwertfolge

Zustands- und Ausgangsrückführungen stellen proportionale Rückführungen dar, die bekanntlich die Sollwertfolge bei sprungförmigen Führungs- und Störsignalen nicht sichern können. Der Regelkreis hat eine bleibende Regelabweichung, die vom Regler abhängt, es sei denn, die Regelstrecke hat integrales Verhalten.

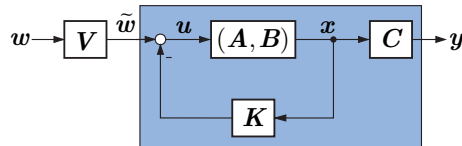


Abb. 4.20: Zustandsrückführung mit Vorfilter

Bezüglich des Führungsverhaltens kann man die Sollwertfolge durch Verwendung eines Vorfilters V erreichen, das ein statisches Übertragungsglied

$$\tilde{w}(t) = V w(t)$$

darstellt. Der Begriff „Vorfilter“ stammt von Regelkreisen, bei denen $V(s)$ eine Übertragungsfunktionsmatrix ist und zur Gestaltung des Führungsverhaltens eingesetzt wird. Für das hier behandelte Problem ist jedoch ein statisches Element mit der konstanten Matrix V ausreichend, weil nur das statische Verhalten des Regelkreises korrigiert werden muss. Insofern ist dieses Element kein Filter im eigentlichen Sinne dieses Wortes.

Im Folgenden werden Regelkreise mit derselben Anzahl von Stell- und Regelgrößen betrachtet. Der Verwendung und Bemessung von V liegt der Gedanke zu Grunde, dass die statische Verstärkungsmatrix der Reihenschaltung von Vorfilter und Regelstrecke mit Zustandsrückführung eine Einheitsmatrix sein soll. Es wird zunächst die statische Verstärkung für den aus der Regelstrecke

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

und der Zustandsrückführung

$$u(t) = -Kx(t) + \tilde{w}(t)$$

bestehenden geschlossenen Kreis

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + B\tilde{w}(t) + Ed(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

berechnet. Da das Vorfilter nichts an der Stabilität des Regelkreises ändert, muss die Zustandsrückführung so entworfen sein, dass alle Eigenwerte der Matrix $A - BK$

negativen Realteil haben. Für konstante Signale $\tilde{w}$ und d ist das statische Verhalten des Regelkreises durch

$$y = -C(A - BK)^{-1}B\tilde{w} - C(A - BK)^{-1}Ed \quad (4.71)$$

beschrieben. Die Matrix $-C(A - BK)^{-1}B$, die das statische Verhalten des in Abb. 4.20 grau hinterlegten Teiles des Regelkreises beschreibt, ist i. Allg. keine Einheitsmatrix. Es tritt also eine bleibende Regelabweichung auf, wenn man kein Vorfilter verwendet und mit $\tilde{w}(t) = w(t)$ und $d(t) = 0$ arbeitet:

$$\begin{aligned} e(\infty) &= w(\infty) - y(\infty) \\ &= (I + C(A - BK)^{-1}B) w(\infty). \end{aligned}$$

Das Vorfilter wird nun so bestimmt, dass die Regelabweichung verschwindet

$$e(\infty) = (I + C(A - BK)^{-1}BV) w(\infty) \stackrel{!}{=} 0.$$

Daraus erhält man die Beziehung

Vorfilter: $V = -(C(A - BK)^{-1}B)^{-1}.$

(4.72)

Diese Berechnungsvorschrift für V kann ohne weiteres für Ausgangsrückführungen modifiziert werden.

Anwendungsgebiet. Bei der Verwendung des Vorfilters zur Sicherung der Sollwertfolge sollte man zwei Dinge bedenken. Erstens tritt Sollwertfolge nur für sprungförmige Führungsgrößen ein. Die Störungen dürfen nicht sprungförmig sein. Aus Gl. (4.71) erhält man für $d(t) \neq 0$ stets eine bleibende Regelabweichung. Es können allerdings impulsförmige Störungen auftreten. Da die Wirkung dieser Störungen aufgrund der Stabilität des Regelkreises abklingt, gefährden sie die Sollwertfolge nicht.

Zweitens ist aus der Berechnungsvorschrift des Vorfilters zu erkennen, dass die Filterparameter von den Parametern der Regelstrecke und der Zustandsrückführung abhängen. Wenn sich die Regelstrecke in ihren Eigenschaften verändert oder die Zustandsrückführung beispielsweise im Sinne eines besseren Übergangsverhaltens modifiziert wird, so muss V neu berechnet werden. Der Regelkreis mit Vorfilter ist nicht robust gegenüber Änderungen im Streckenverhalten.

Dies sind zwei entscheidende Nachteile gegenüber der PI-Regelung, die im nächsten Abschnitt behandelt wird. Von den einschleifigen Regelkreisen ist bekannt, dass eine PI-Regelung die Sollwertfolge auch bei veränderlichen Streckenparametern gewährleistet, solange die Stabilität des Regelkreises durch diese Parameteränderungen nicht gefährdet wird. Der PI-Regler ist deshalb *robust* gegenüber derartigen Parameteränderungen.

Die fehlende Robustheit des Vorfilters ist übrigens darauf zurückzuführen, dass die Sollwertfolge durch eine Vorwärtssteuerung erreicht wird. Eine solche Steuerung

in der offenen Wirkungskette kann nur mit Hilfe eines genauen Modells berechnet werden. Sobald das Modell fehlerbehaftet ist, wird das Steuerungsziel nicht mehr oder zumindest nicht mehr exakt erreicht. Die Vorwärtssteuerung wird in Abb. 4.20 durch das Vorfilter realisiert. Man sollte darauf achten, dass die in der Abbildung dargestellte Summationsstelle nicht die Regelabweichung bildet. Diese Summationsstelle dient lediglich der Aufschaltung der Vorwärtssteuerung auf die Zustandsrückführung.

Aufgabe 4.3 Bemessung des Vorfilters für eine Ausgangsrückführung

Ein dynamisches System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{d}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

wird durch eine statische Ausgangsrückführung

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_y\mathbf{y}(t) + \mathbf{V}\mathbf{w}(t)$$

geregelt. Die Matrix $\mathbf{K}_y$ ist bereits so gewählt, dass der geschlossene Kreis stabil ist.

1. Warum ist das Vorfilter $\mathbf{V}$ notwendig ?
2. Wie muss die Matrix $\mathbf{V}$ des Vorfilters gewählt werden, damit der Regelkreis bei konstanter Führungsgröße keine bleibende Regelabweichung hat?
3. Welche bleibende Regelabweichung entsteht bei sprungförmiger Störung $\mathbf{d}(t)$?
4. Unter welchen Bedingungen kann Sollwertfolge mit Hilfe des Vorfilters erreicht werden, wenn die Regelstrecke eine unterschiedliche Anzahl von Stell- und Regelgrößen besitzt? □

4.4.3 Störgrößenaufschaltung

Störgrößenaufschaltungen sind möglich, wenn die Störung $\mathbf{d}(t)$ messbar ist. Man versucht dann, durch eine geeignete Wahl der Stellgröße der Störung bereits dann entgegenzuwirken, wenn sich diese am Regelstreckenausgang noch nicht bemerkbar gemacht hat.

Eine Verallgemeinerung der im Abschn. I-13.1.1 behandelten Störgrößenaufschaltung für Mehrgrößensysteme erhält man folgendermaßen. Im Regelstreckenmodell

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{d}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

wirkt die Störung $\mathbf{d}(t)$ über die Matrix $\mathbf{E}$ auf den Systemzustand ein. Im Regler

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_y\mathbf{y}(t) - \mathbf{K}_d\mathbf{d}(t) \quad (4.73)$$

stellt die Matrix $\mathbf{K}_d$ die Störgrößenaufschaltung dar. $\mathbf{K}_d$ soll so bestimmt werden, dass die Störung keinen Einfluss mehr auf die Zustandsgleichung hat. Setzt man dazu den Regler in die Zustandsgleichung ein, so erhält man

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}_y\mathbf{C})\mathbf{x}(t) + (\mathbf{E} - \mathbf{BK}_d)\mathbf{d}(t).$$

Die Störung wird ganz unterdrückt, wenn

$$\mathbf{BK}_d = \mathbf{E} \quad (4.74)$$

gilt. Wirkt die Störung am Regelstreckeneingang, so ist

$$\mathbf{E} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{E}},$$

d. h., die Spalten von $\mathbf{E}$ lassen sich als Linearkombination der Spalten von $\mathbf{B}$ darstellen. $\mathbf{K}_d$ kann dann entsprechend

$$\mathbf{K}_d = \tilde{\mathbf{E}}$$

gewählt werden, wodurch die Bedingung (4.74) erfüllt ist.

Für andere Störeingriffe wird die Bedingung (4.74) jedoch i. Allg. nicht erfüllt. $\mathbf{K}_d$ wird dann so gewählt, dass die Differenz beider Gleichungsseiten minimal wird:

Störgrößenaufschaltung: $\mathbf{K}_d = -(\mathbf{B}'\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{E}$

(4.75)

(vgl. Gl. (A2.89)).

Die Realisierung der Störgrößenaufschaltung setzt voraus, dass die Störgrößen messbar sind. Ist diese Voraussetzung erfüllt und kann $\mathbf{K}_d$ so gewählt werden, dass Gl. (4.74) erfüllt ist, so wirkt sich die Störung $\mathbf{d}(t)$ überhaupt nicht auf den Regelkreis aus. Da die Störgrößenaufschaltung eine Vorwärtssteuerung ist, hängt ihre Wirkung entscheidend davon ab, dass das Modell des Regelkreises die Störeinwirkung richtig beschreibt. Die Störgrößenaufschaltung ist also nicht robust gegenüber Modellunsicherheiten. Sie wird deshalb im Allgemeinen in Kombination mit einem Regler eingesetzt, der die verbleibende Wirkung der Störung auf die Regelgröße beseitigt.

4.4.4 PI-Mehrgrößenregler

Soll die Sollwertfolge für sprunghafte Führungssignale und für sprunghafte Störungen gesichert werden, so kann dies nicht mehr mit einem Vorfilter geschehen, sondern es muss ein Regler mit I-Anteil verwendet werden. Diese Tatsache ist von den einschleifigen Regelkreisen bekannt, wobei es, genauer gesagt, darum geht, dass die offene Kette I-Verhalten hat. Wenn also die Regelstrecke selbst bereits über integrales Verhalten verfügt, das beispielsweise durch ein Ventil mit Stellmotor hervorgerufen wird, so erübrigt sich der I-Anteil im Regler. Häufig hat die Regelstrecke

jedoch proportionales Verhalten, wie es auch für die weiteren Betrachtungen vorausgesetzt wird, so dass der I-Anteil aus dem Regler kommen muss.

Bei Mehrgrößensystemen muss für jede der r Regelgrößen im Regler ein Integrator vorgesehen werden, weil auf den Signalwegen $w_i(t) \mapsto y_i(t)$ ($i = 1, \dots, r$) Sollwerte unabhängig voneinander eingestellt werden sollen. Für jedes dieser Signalkopiepaare gilt die für einschleifige Regelungen aufgestellte Forderung nach integralem Verhalten der offenen Kette. Der PI-Regler enthält deshalb, wie bereits in Gl. (4.33) angegeben, r Integratoren:

$$\dot{\mathbf{x}}_r(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{w}(t), \quad \mathbf{x}_r(0) = \mathbf{x}_{r0} \quad (4.76)$$

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_I \mathbf{x}_r(t) - \mathbf{K}_P (\mathbf{w}(t) - \mathbf{y}(t)). \quad (4.77)$$

Wie beim einschleifigen Regelkreis hat ein PI-geregeltes System die Eigenschaft der Sollwertfolge:

Ein stabiler Regelkreis mit PI-Regler (4.76), (4.77) erfüllt für beliebige sprungförmige Führungs- und Störsignale (4.67), (4.70) die Forderung nach Sollwertfolge

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = \bar{\mathbf{w}}.$$

Diese Aussage hat mehrere bemerkenswerte Konsequenzen. Erstens genügt es, r Integratoren in den Mehrgrößenregelkreis einzufügen, um die Sollwertfolge zu erreichen, wenn man außerdem sichert, dass der Regelkreis stabil ist. Folglich können die Güteforderungen (I) nach Stabilität und (II) nach Sollwertfolge in zwei getrennten Entwurfsschritten behandelt werden. Die Forderung (II) ist durch eine reine Strukturrentscheidung, nämlich die Verwendung eines Reglers mit I-Anteil, zu erfüllen, wenn man anschließend die ohnehin erhobene Forderung nach Stabilität erfüllt.

Es bestehen keine Einschränkungen bezüglich der Reglerstruktur, mit der der Regelkreis stabilisiert wird. Die Stabilität muss nicht allein durch geeignete Wahl der Matrizen $\mathbf{K}_I$ und $\mathbf{K}_P$ in der Ausgabegleichung (4.77) des PI-Reglers erfüllt werden. Der Regler kann durch weitere Komponenten, beispielsweise durch eine Zustandsrückführung, ergänzt werden, wie es in Abb. 4.21 gezeigt ist. Diese Ergänzung kann vor allem dann notwendig sein, wenn die Regelstrecke instabil ist. Ist andererseits die Strecke stabil, so können die Forderungen nach Stabilität und Sollwertfolge auch durch einen reinen I-Regler erfüllt werden.

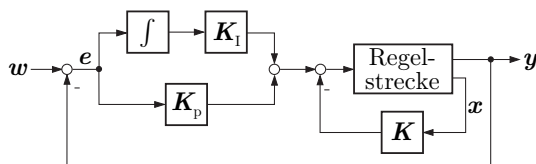


Abb. 4.21: PI-Mehrgrößenregler in Kombination mit einer Zustandsrückführung

Die Möglichkeit, die Güteforderungen nach Sollwertfolge und nach Stabilität des Regelkreises getrennt voneinander zu behandeln, hat eine weitere Konsequenz für den Entwurf. Da die Dynamik des Reglers, nämlich sein I-Anteil, bekannt ist, kann sie zur Regelstrecke hinzugerechnet werden, so wie es bei der Bildung der I-erweiterten Regelstrecke in Abb. 4.6 auf S. 150 gezeigt ist. Der Regler stellt dann eine proportionale Ausgangs- oder Zustandsrückführung dar, die mit den in den folgenden Kapiteln behandelten Methoden entworfen werden kann. Die Möglichkeit, die Reglerdynamik zur Strecke hinzuzurechnen, ist der Grund dafür, dass sich zahlreiche Entwurfsverfahren für Mehrgrößenregler mit proportionalen Reglern beschäftigen.

Die dritte Konsequenz besteht in der Robustheit des Regelkreises bezüglich der Sollwertfolge. Solange durch eine Veränderung der Streckenparameter die Stabilität des Regelkreises nicht gefährdet wird, tritt bei Regelkreisen, die aus offenen Ketten mit I-Verhalten entstehen, Sollwertfolge ein. Die Eigenschaft der Sollwertfolge ist deshalb robust gegenüber Modellunsicherheiten. Diese Tatsache beschreibt einen großen Vorteil der PI-Regelung gegenüber der Verwendung von Vorfiltern zur Sicherung der Sollwertfolge. Dieser Vorteil beruht wiederum auf der Verwendung des Rückführprinzips, denn der PI-Regler reagiert auf die tatsächlich auftretende Regelabweichung, während das Vorfilter eine Vorwärtssteuerung realisiert.

Aufgabe 4.4* *Mehrgrößenregler mit PI- und PID-Charakter*

Bei der Eingrößenregelung werden D-Anteile im Regler verwendet, um den Übergangsvorgang zu beschleunigen. Außerdem sind D-Anteile u. U. notwendig, damit der Regelkreis stabilisiert werden kann (siehe Beispiel I-10.4). Untersuchen Sie, warum D-Anteile überflüssig sind, wenn der PI-Regler wie in Abb. 4.21 gezeigt durch eine Zustandsrückführung ergänzt wird und sprungförmige Führungsgrößen betrachtet werden. (Hinweis: Zeigen Sie, dass der D-Anteil in einem derartigen Regler bereits enthalten ist.) □

4.4.5 Verallgemeinerte Folgeregelung

Es erhebt sich die Frage, ob die für den Reglerentwurf wichtige Trennung zwischen der Sicherung der Sollwertfolge durch geeignete Wahl der Reglerstruktur und der Stabilisierung des Regelkreises auch für andere als sprungförmige Führungs- und Störsignale möglich ist. Die Antwort darauf ist in einer umfangreichen Literatur aus den siebziger Jahre zu finden. Da eine allgemeine Behandlung den Rahmen dieses Buches sprengen würde, soll nur auf das dort behandelte Grundproblem und auf die dabei erhaltene Lösung eingegangen werden.

Das allgemeine Folgeregelungsproblem (*general servomechanism problem*) kann folgendermaßen formuliert werden. Gegeben sind die Regelstrecke

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}d(t), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

sowie ein Führungsgrößenmodell (4.65), (4.66) und ein Störgrößenmodell (4.68), (4.69). Gesucht ist eine Regelung, mit der der Regelkreis stabil ist und die Eigenschaft der Sollwertfolge besitzt. Diese Aufgabe wird häufig dadurch erweitert, dass man zusätzlich fordert, dass die Sollwertfolge robust gegenüber Parameteränderungen in der Regelstrecke sein soll.

Wie die folgenden Ausführungen zeigen werden, hält sich die Lösung dieses allgemeinen Problems sehr eng an das, was im vorangegangenen Abschnitt für die PI-Regelung erläutert wurde, nur dass jetzt allgemeinere Führungs- und Störsignale betrachtet werden. Zur Vereinfachung wird das Folgende für Regelstrecken mit gleicher Anzahl von Stell- und Regelgrößen behandelt ($m = r$).

Existenz der Lösung. Die Lösung des Folgeregelungsproblems existiert unter folgenden Bedingungen:

1. Die instabilen Eigenwerte der Regelstrecke müssen steuerbar und beobachtbar sein.

Andernfalls ließe sich die Regelstrecke nicht stabilisieren. Wenn auf den Zustandsvektor zugegriffen werden kann, so müssen die instabilen Eigenwerte nur steuerbar sein – beobachtbar sind sie dann aufgrund der Messung von x .

2. Die Eigenwerte λ_i der Matrizen A_w und A_d des Führungsgrößen- bzw. Störgrößenmodells dürfen keine invarianten Nullstellen der Regelstrecke sein, d. h., es muss gelten

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \lambda_i I - A & -B \\ C & O \end{pmatrix} = n + m \quad \text{für alle diese } \lambda_i. \quad (4.78)$$

Diese Forderung ist plausibel, denn ist beispielsweise der Eigenwert λ_1 des Führungsgrößenmodells eine Übertragungsnullstelle der Regelstrecke, so kann Sollwertfolge nicht eintreten, weil der in der Führungsgröße $w(t)$ auftretende Term $e^{\lambda_1 t}$ nicht durch die Regelstrecke übertragen wird, also nicht in $y(t)$ vorkommen kann.

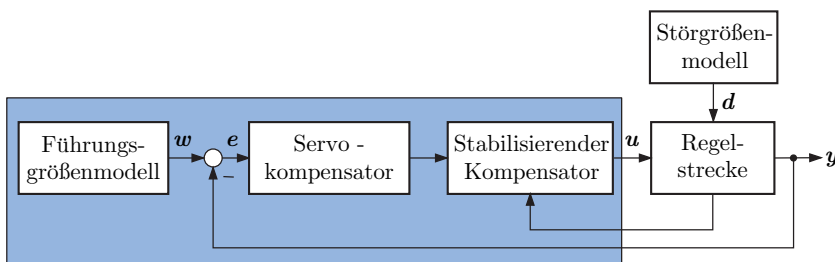


Abb. 4.22: Lösung des Folgeregelungsproblems

Struktur des Folgereglers. Wie Abb. 4.22 zeigt, besteht die Lösung des Folgeregelungsproblems aus zwei Teilen. Der *Servokompensator*, der eine Verallgemeinerung

des I-Anteils im PI-Regler darstellt, muss das Führungsgrößen- und das Störgrößenmodell enthalten. Er muss ferner über seinen Eingang vollständig steuerbar und über seinen Ausgang vollständig beobachtbar sein. Er stellt ein instabiles Glied im Regelkreis dar. Die offene Kette, die aus Regelstrecke und Servokompensator besteht, ist also immer instabil. Das zweite Element ist der *stabilisierende Kompensator*, der außer auf die Ausgangsgröße des Servokompensators auch auf weitere Informationen über die Regelstrecke, beispielsweise auf den Systemzustand x , zugreift.

Durch den Servokompensator erfüllt der Regelkreis das Innere-Modell-Prinzip, demzufolge eine Sollwertfolge nur dann erreicht werden kann, wenn der Regelkreis ein inneres Modell der Stör- und Führungssignale enthält. Dieses im Satz I-7.2 für einschleifige Regelkreise angegebene Prinzip gilt also auch für den Mehrgrößenregelkreis.

Servokompensator. Entsprechend dem Inneren-Modell-Prinzip müssen die Matrizen A_w und A_d im Servokompensator auftreten, und zwar m -mal, nämlich für jede Regelgröße getrennt. Wenn zur Vereinfachung eine störungsfreie Regelstrecke angenommen und das Folgeregelungsproblem nur in Bezug auf das Führungsgrößenmodell (4.65), (4.66) untersucht wird, so kann der Servokompensator beispielsweise folgendermaßen aufgebaut werden:

$$\dot{x}_r(t) = \text{diag } A_w x_r(t) + \text{diag } b_r e(t).$$

In dieser Gleichung ist $\text{diag } A_w$ eine Blockdiagonalmatrix, in der die Matrix A_w m -mal als Diagonalblock vorkommt. $\text{diag } b_r$ ist eine Blockdiagonalmatrix, in der der Vektor b_r m -mal auftritt. Dieser Vektor muss so ausgewählt werden, dass das Paar (A_w, b_r) vollständig steuerbar ist. Der Vektor $x_r(t)$ hat die Dimension $m \cdot n_w$, wobei n_w die dynamische Ordnung des Führungsgrößenmodells ist. In diesem Servokompensator sieht man die Verallgemeinerung des I-Reglers, wenn man für A_w eine (skalare) Null und für b_r eine Eins einsetzt.

Offensichtlich ist die Wahl des Servokompensators ausschließlich von der vorgegebenen Klasse von Führungs- und Störgrößen abhängig. Der Servokompensator kann beim anschließenden Entwurf des stabilisierenden Kompensators zur erweiterten Regelstrecke hinzugerechnet werden, da seine Dynamik bekannt ist und in den folgenden Entwurfsschritten nicht mehr verändert wird.

Stabilisierender Kompensator. Durch geeignete Wahl des stabilisierenden Kompensators muss der Regelkreis stabil gemacht werden. Instabile Elemente enthält der Kreis mindestens durch den Servokompensator. Möglicherweise ist auch die Regelstrecke selbst instabil.

Der stabilisierende Kompensator kann auf den Zustand $x_r(t)$ des Servokompensators zugreifen. Bezüglich der Regelstrecke können verschiedene Fälle auftreten. Wenn die Regelstrecke stabil ist, so ist oft die Kenntnis des Systemausganges $y(t)$ ausreichend. Wenn die Strecke jedoch selbst instabil ist, so muss möglicherweise auf den Systemzustand $x(t)$ zugegriffen werden, was durch ein zusätzliches Signal von der Regelstrecke zum stabilisierenden Kompensator in Abb. 4.22 gekennzeichnet ist.

Ist $x(t)$ nicht messbar, so kann der Zustand auch durch einen Beobachter rekonstruiert werden, wie im Kap. 8 erläutert wird. Unter den angegebenen Existenzbedingungen ist gesichert, dass der Regelkreis einschließlich des instabilen Servokompensators durch eine geeignete Wahl des stabilisierenden Kompensators stabilisiert werden kann.

Bewertung des Ergebnisses. Die Lösung des Folgeproblems gibt einen sehr allgemeinen Rahmen, in dem Regelungsaufgaben gelöst werden können. Eine für den Reglerentwurf wichtige Aussage ist die, dass der Entwurf in die beiden Teilschritte zerlegt werden kann, in denen zunächst aus den Vorgaben der externen Signale der Servokompensator festgelegt und anschließend ein stabilisierender Kompensator entworfen wird. Die genannten Existenzbedingungen beschreiben, unter welchen (nicht sehr einschränkenden) Bedingungen dieses Problem lösbar ist.

Entwurfsverfahren 4.1 *Lösung des Problems der Folgeregelung*

Gegeben: Regelstrecke, Führungsgrößenmodell, Störgrößenmodell

1. Es wird die Existenzbedingung (4.78) überprüft. Ist sie verletzt, so hat das Entwurfsproblem keine Lösung.
2. An hand des Führungsgrößenmodells und des Störgrößenmodells wird der Servokompensator festgelegt.
3. Für die Reihenschaltung von Regelstrecke und Servokompensator wird ein stabilisierender Kompensator entworfen.

Ergebnis: Regler, der Sollwertfolge garantiert.

Diese Lösung hat die wichtige Robustheitseigenschaft, dass die Sollwertfolge solange gesichert ist, wie der Regelkreis stabil ist. Wenn also die Regelstrecke Parameterschwankungen unterliegt, so hat das auf die Sollwertfolge keinen Einfluss, solange dadurch die Stabilität des Kreises nicht gefährdet wird.

Für die praktische Anwendung ist die skizzierte Lösung allein noch nicht befriedigend, weil häufig wichtige Dynamikforderungen erhoben werden, die bei diesem Problem nicht berücksichtigt sind. Die Sollwertfolge sichert nur, dass für hinreichend große Zeiten die Regelgröße der Führungsgröße folgt. Bei den Dynamikforderungen werden aber Vorgaben dafür gemacht, wie schnell und mit welchen zulässigen Anfangsfehlern dieser Übergang erfolgen muss.

Deshalb ist es wichtig, dass das Stabilisierungsproblem, das durch eine geeignete Wahl des stabilisierenden Kompensators gelöst werden muss, dem Problem der Gestaltung der Regelkreisdynamik sehr ähnlich ist. In den folgenden Kapiteln werden unterschiedliche Entwurfsverfahren angegeben, mit denen nicht nur die Stabilität gesichert, sondern auch das Übergangsverhalten des Regelkreises gestaltet werden kann. Auf Grund der hier behandelten Trennung des Folgeregelungsproblems vom Stabilisierungsproblem wird bei vielen Entwurfsverfahren ein ungestörtes System betrachtet und als Entwurfsziel die Gestaltung der Eigenbewegung untersucht. Da

bekanntlich in der Eigenbewegung dieselben Terme $e^{\lambda t}$ wie im Übergangsverhalten auftreten, ist dies keine grundsätzliche Einschränkung. Der im Sinne einer guten Regelkreisdynamik entworfene Regler für die um den Servokompensator erweiterte Regelstrecke kann auch für die Folgeregelung eingesetzt werden, wobei auch Forderungen an das dynamische Übergangsverhalten erfüllt werden.

4.5 Kriterien für die Wahl der Regelkreisstruktur

Bei allen Analyse- und Entwurfsproblemen wird davon ausgegangen, dass bekannt ist, welche Signale der Regelstrecke als Stellgrößen und welche als Regelgrößen dienen. Damit muss eine wichtige Strukturentscheidung bereits gefallen sein, denn bei der Lösung praktischer Regelungsaufgaben ist die Frage nach einer geeigneten Auswahl von Stell- und Regelgrößen in vielen Fällen entscheidend für den Erfolg oder Misserfolg einer Regelung. In diesem Abschnitt werden Richtlinien für die Wahl der Regelkreisstruktur behandelt.

4.5.1 Auswahl von Stell- und Regelgrößen anhand der Pole und Nullstellen der Regelstrecke

Die Fragen nach geeigneten Stell- und Regelgrößen sind struktureller Art, denn sie betreffen nicht spezielle Streckenparameter, sondern die Fragen, welche grundlegenden Übertragungseigenschaften die Regelstrecke besitzt. Dementsprechend sind es vor allem strukturelle Eigenschaften der Regelstrecke, anhand derer diese Fragen zu beantworten sind. Die folgende Aufzählung zeigt, dass Entscheidungen über die Regelungsstruktur durch die bisher behandelten Eigenschaften dynamischer Systeme wesentlich beeinflusst werden:

- Damit eine instabile Strecke stabilisiert werden kann, müssen die Stell- und Regelgrößen so ausgewählt werden, dass die instabilen Eigenwerte über diese Größen steuerbar und beobachtbar sind.
- Um Sollwertfolge erreichen zu können, darf die Regelstrecke bezüglich der gewählten Stell- und Regelgrößen keine invariante Nullstelle besitzen, die mit einem Eigenwert des Führungsgrößenmodells übereinstimmt.
- Die gewählten Stellgrößen und die Regelgrößen dürfen untereinander nicht linear abhängig sein. Diese Bedingung ist verletzt, wenn die Matrix B des Zustandsraummodells einen kleineren Rang als m bzw. die Matrix C einen kleineren Rang als r hat.
- Es müssen stets mindestens so viele Stellgrößen wie Regelgrößen vorhanden sein.

- Allpassverhalten der Strecke bezüglich der gewählten Stell- und Regelgrößen erschwert die Regelungsaufgabe und führt dazu, dass nur schwache Forderungen an das Übergangsverhalten erfüllt werden können.
- Allpassverhalten kann durch Verwendung zusätzlicher Stell- und Regelgrößen beseitigt werden.

4.5.2 Kopplungsanalyse einer dezentralen Regelung

Die Entscheidung, ob ein Mehrgrößenregler verwendet werden muss oder mehrere einschleifige Regelkreise ausreichen, muss in Abhängigkeit von der Stärke der Kopplungen zwischen den einzelnen Stellgrößen-Regelgrößen-Paaren gefällt werden. Dafür sind in der Literatur verschiedene empirische Kopplungsmaße vorgeschlagen worden. Ein Beispiel für ein derartiges Maß wird im Folgenden behandelt, wobei eine Regelstrecke mit zwei Stellgrößen und zwei Regelgrößen betrachtet wird.

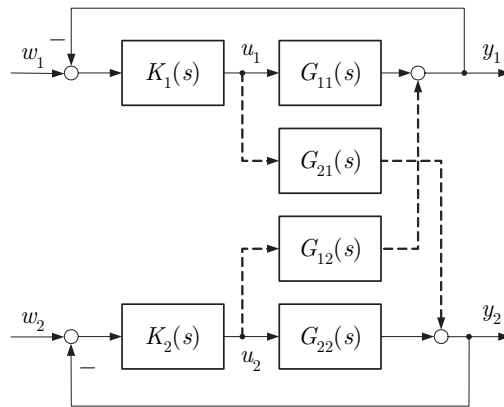


Abb. 4.23: Dezentrale Regelung (4.79), (4.80)

Das E/A-Verhalten der Regelstrecke wird durch die Beziehung

$$\begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix} \quad (4.79)$$

beschrieben. Wenn

$$G_{12}(s) = G_{21}(s) = 0$$

gilt, so besteht die Regelstrecke aus zwei entkoppelten Teilsystemen mit den Übertragungsfunktionen $G_{11}(s)$ und $G_{22}(s)$ und kann mit dem dezentralen Regler

$$\begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} K_1(s) & 0 \\ 0 & K_2(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1(s) - W_1(s) \\ Y_2(s) - W_2(s) \end{pmatrix} \quad (4.80)$$

geregelt werden, wobei zwei einschleifige Regelkreise entstehen (Abb. 4.23). Die Frage ist, wie stark zwei von null verschiedene Elemente $G_{12}(s)$ und $G_{21}(s)$ das Verhalten des Regelkreises beeinflussen. Insbesondere ist es interessant zu wissen, wie groß diese Elemente werden dürfen, ohne dass die Stabilität der einschleifigen Regelkreise durch die Verkopplung gefährdet wird.

Diese Frage, die nicht nur von der Regelstrecke, sondern auch von den gewählten Reglern $K_1(s)$ und $K_2(s)$ abhängt, wird im Kap. 9 behandelt. Im Folgenden wird versucht, eine Bewertung der Kopplungen zu geben, die von den verwendeten Reglern $K_1(s)$ und $K_2(s)$ unabhängig ist und folglich *vor* dem Reglerentwurf zur Entscheidung herangezogen werden kann, ob mit einer Mehrgrößenregelung gearbeitet werden muss.

Definition des Koppelfaktors. Da die Determinante der Rückführdifferenzmatrix für die Stabilitätsanalyse von großer Bedeutung ist, kann man die innere Verkopplung der Regelstrecke daran beurteilen, wie stark die Elemente G_{12} und G_{21} diese Ortskurve beeinflussen. Für den Regelkreis (4.79), (4.80) erhält man

$$\begin{aligned} \det \mathbf{F}(s) &= \det \begin{pmatrix} 1 + G_{11}(s)K_1(s) & G_{12}(s)K_2(s) \\ G_{21}(s)K_1(s) & 1 + G_{22}(s)K_2(s) \end{pmatrix} \\ &= (1 + G_{11}(s)K_1(s))(1 + G_{22}(s)K_2(s)) - G_{12}(s)G_{21}(s)K_1(s)K_2(s) \\ &= 1 + G_{11}(s)K_1(s) + G_{22}(s)K_2(s) + \\ &\quad + G_{11}(s)G_{22}(s)K_1(s)K_2(s) \underbrace{\left(1 - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s)}{G_{11}(s)G_{22}(s)}\right)}_{\text{Querkopplung}}. \end{aligned}$$

Wären die Koppелеlemente G_{12} und G_{21} gleich null, so würde in der Klammer des letzten Summanden eine eins stehen. Folglich kann man die Wirkung der Koppелеlemente daran messen, wie stark der Ausdruck

Koppelfaktor: $\kappa(\mathbf{G}(s)) = \frac{G_{12}(s)G_{21}(s)}{G_{11}(s)G_{22}(s)}$

(4.81)

den letzten Summanden beeinflusst. $\kappa(\mathbf{G})$ wird deshalb als Koppelfaktor bezeichnet.

Da der Koppelfaktor eine frequenzabhängige komplexe Größe ist, verwendet man häufig seinen Betrag als Maß dafür, wie stark sich die Stellgrößen-Regelgrößen-Paare untereinander beeinflussen. Ist $|\kappa(\mathbf{G}(s))|$ für alle s wesentlich kleiner als eins, so liegt eine kleine Kopplung vor und man kann (vermutlich!) die Regelungsaufgabe mit zwei einschleifigen Regelungen lösen.

Eine endgültige Entscheidung, ob eine Mehrgrößenregelung erforderlich ist, kann jedoch nicht anhand der Streckeneigenschaften allein getroffen werden, son-

dern ist auch von den Güteforderungen und folglich von den gewählten Reglerparametern abhängig. Der Koppelfaktor kann deshalb – wie auch alle anderen empirischen Koppelfmaße – nur Richtwerte für diese Entscheidung geben.

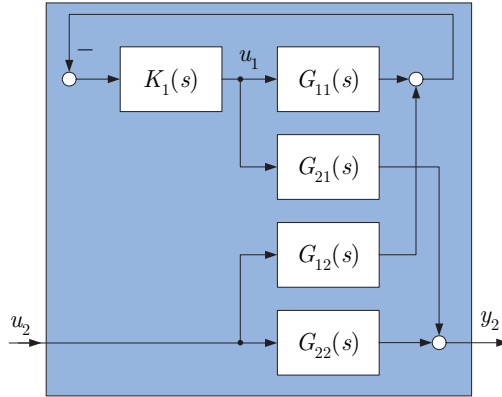


Abb. 4.24: Veränderte Hauptregelstrecke des zweiten Teilreglers

Beschreibung des Regelkreises unter Verwendung des Koppelfaktors. Da für das Verhalten des Regelkreises letzten Endes nicht die Verkopplungen in der unregelten Strecke, sondern die Wirkungen dieser Kopplungen im geschlossenen Kreis maßgebend sind, ist es wichtig, dass der die Regelstrecke bewertende Koppelfaktor direkt bei der Analyse des Regelkreises verwendet werden kann. Schließt man den ersten Regler

$$U_1(s) = -K_1(s) Y_1(s)$$

an die Strecke an und untersucht dessen Wirkung auf die zweite Hauptregelstrecke, also auf die Übertragungseigenschaften zwischen $U_2(s)$ und $Y_2(s)$ (Abb. 4.24), so erhält man zunächst

$$U_1(s) = -K_1(s) (G_{11}(s)U_1(s) + G_{12}(s)U_2(s))$$

$$U_1(s) = -\frac{K_1(s)G_{12}(s)}{1 + K_1(s)G_{11}(s)}U_2(s)$$

und damit

$$\begin{aligned} Y_2(s) &= -\frac{K_1(s)G_{12}(s)G_{21}(s)}{1 + K_1(s)G_{11}(s)}U_2(s) + G_{22}(s)U_2(s) \\ &= G_{22}(s) \left(1 - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s)}{G_{11}(s)G_{22}(s)} \frac{K_1(s)G_{11}(s)}{1 + K_1(s)G_{11}(s)} \right) U_2(s) \end{aligned}$$

und schließlich

$$Y_2(s) = G_{22}(s) (1 - \kappa(\mathbf{G}(s)) G_{w11}(s)) U_2(s), \quad (4.82)$$

wobei

$$G_{w11}(s) = \frac{K_1(s)G_{11}(s)}{1 + K_1(s)G_{11}(s)}$$

die Führungsübertragungsfunktion des ersten Hauptregelkreises bezeichnet. Diese Beziehung zeigt, dass der Koppelfaktor κ die Stärke beschreibt, mit der der erste Regelkreis das Übertragungsverhalten der zweiten Hauptregelstrecke beeinflusst.

Ist κ sehr klein, so kann der Regler $K_2(s)$ an der zweiten Hauptregelstrecke

$$Y_2(s) = G_{22}(s)U_2(s)$$

entworfen werden, ohne auf den ersten Regler Rücksicht zu nehmen. Ist κ jedoch betragsmäßig groß, so muss anstelle von $G_{22}(s)$ mit dem Modell (4.82) gearbeitet werden. Dieses Modell enthält den ersten Regler.

4.5.3 Auswahl von Stellgrößen

Die zu verwendenden Regelgrößen sind bei vielen praktischen Regelungsproblemen durch die Aufgabenstellung festgelegt. Wenn eine bestimmte Temperatur oder ein Druck konstant gehalten werden soll, so fungieren diese Größen als Regelgrößen. Schwieriger ist es häufig, zweckmäßige Stellgrößen auszuwählen. Diese Stellgrößen sollen mit den verwendeten Regelgrößen in einer starken Verkopplung stehen, damit die Regelung schnell und mit geringen Stellamplituden auf die Regelgrößen Einfluss nehmen kann.

Ähnlich wie bei der Entscheidung über Ein- oder Mehrgrößenregelung kann man erst nach dem Reglerentwurf entscheiden, ob die Auswahl der Stellgrößen richtig war, denn wie gut die Kopplung zwischen Stell- und Regelgrößen sein muss, hängt wiederum von der Regelungsaufgabe ab und kann nicht allein anhand von Eigenschaften der Regelstrecke entschieden werden. Deshalb gibt es auch hierfür nur empirische Kopplungsmaße, von denen im Folgenden drei vorgestellt werden.

Ein Kopplungsmaß, das sich auf das statische Verhalten der Regelstrecke bezieht, erhält man aus der Statikmatrix $\mathbf{K}_s$, indem man die Elemente quadriert und durch das größte der dabei entstehenden Elemente $k_{sij,\max}^2$ dividiert. Dabei erhält man die Matrix

$$\text{Kopplungsmatrix: } \bar{\mathbf{K}}_s = \frac{1}{k_{sij,\max}^2} \begin{pmatrix} k_{s11}^2 & k_{s12}^2 & \cdots & k_{s1m}^2 \\ k_{s21}^2 & k_{s22}^2 & \cdots & k_{s2m}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{sr1}^2 & k_{sr1}^2 & \cdots & k_{sr m}^2 \end{pmatrix}. \quad (4.83)$$

Während die Dimension r durch die Anzahl der Regelgrößen vorgegeben ist, ist die Anzahl m der in Frage kommenden Stellgrößen häufig wesentlich größer als r , so dass $\bar{\mathbf{K}}_s$ typischerweise eine rechteckige Matrix ist.

Durch das Quadrieren der Elemente werden alle Elemente nichtnegativ. Außerdem macht sich eine besonders große Statik deutlicher bemerkbar. Durch die Normierung liegen alle Elemente zwischen 0 und 1.

Die Kopplungsmatrix $\bar{K}_s$ bewertet nur die statischen Kopplungen zwischen den Stell- und Regelgrößen. Das hat den Vorteil, dass die Berechnung dieser Matrix nur die Kenntnis des statischen Streckenverhaltens erfordert, was vor allem in der Projektierungsphase zweckmäßig ist, in der strukturelle Entscheidungen wie die der Regelgrößen-Stellgrößen-Zuordnung getroffen werden müssen. Die Regelung beruht jedoch auf dem dynamischen Zusammenspiel von Stell- und Regelgrößen, so dass die Kopplungsmatrix durchaus auch Fehlentscheidungen hervorrufen kann.

Eine Erweiterung der beschriebenen Herangehensweise auf eine Bewertung des dynamischen Verhaltens kann man dadurch erreichen, dass man die Gewichtsfunktionsmatrix $G(t)$ verwendet und die Elemente der Kopplungsmatrix entsprechend

$$k_{dij} = \frac{1}{k_{sij}^2} \int_0^\infty g_{ij}^2(t) dt \quad (4.84)$$

berechnet. Diese Größen bewerten das dynamische Verhalten, wobei durch die Division durch k_{sij}^2 die Abhängigkeit der Elemente von der statischen Verstärkung weitgehend beseitigt wird. Bei der Bildung der modifizierten Kopplungsmatrix

$$\text{Kopplungsmatrix: } \bar{K}_d = \frac{1}{k_{dij, \max}} \begin{pmatrix} k_{d11} & k_{d12} & \cdots & k_{d1m} \\ k_{d21} & k_{d22} & \cdots & k_{d2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{dr1} & k_{dr1} & \cdots & k_{drm} \end{pmatrix} \quad (4.85)$$

wird wieder auf das größte der in der Matrix vorkommenden Elemente normiert, das mit $k_{dij, \max}$ bezeichnet ist.

Als drittes Maß für die Verkopplung von Stell- und Regelgrößen wird im Folgenden die relative Verstärkungsmatrix (*Relative Gain Array (RGA)*) behandelt. Sie ist durch

$$\text{Relative Verstärkungsmatrix: } RGA(G(s)) = G(s) \times (G(s)^{-1})' \quad (4.86)$$

definiert, wobei $\times$ das elementweise Produkt der beiden angegebenen Matrizen bedeutet. Für ein System mit zwei Stell- und Regelgrößen erhält man mit

$$RGA(G(s)) = \frac{1}{1 - \kappa(G(s))} \begin{pmatrix} 1 & -\kappa(G(s)) \\ -\kappa(G(s)) & 1 \end{pmatrix} \quad (4.87)$$

einen direkten Zusammenhang dieses Kopplungsmaßes mit dem in Gl. (4.81) definierten Koppelfaktor $\kappa(G(s))$.

Die Matrix $RGA(G(s))$ ist von der Frequenz s abhängig. Ihre Zeilen und Spalten summieren sich stets zu eins, d. h., die Elemente sind normiert und unabhängig

bezüglich einer Veränderung der Normierungen der Ein- und Ausgänge. Wenn die Regelstrecke nur einseitige Kopplungen aufweist, also $G(s)$ eine Dreiecksmatrix ist, so ist $RGA(G(s))$ eine Einheitsmatrix. Je schwächer die Paare (u_i, y_j) ($i \neq j$) verkoppelt sind, d. h., je besser sich die Regelstrecke für einschleifige Regelkreise eignet, desto mehr „ähnelt“ die Matrix $RGA(G(s))$ einer Einheitsmatrix. Dementsprechend sollte man versuchen, Stellgrößen und Regelgrößen so auszuwählen, dass die mit diesen Signalen aufgestellte Übertragungsfunktionsmatrix $G(s)$ eine relative Verstärkungsmatrix besitzt, die näherungsweise eine Einheitsmatrix ist.

Da die Matrix $RGA(G(s))$ frequenzabhängig ist, verschieben sich die relativen Verstärkungen in Abhängigkeit von der Frequenz. Als zweckmäßige Richtwerte für die Beurteilung der Kopplungen haben sich die statischen Werte $RGA(G(0))$ und die Werte in der Nähe der Schnittfrequenz der Regelstrecke erwiesen.

4.5.4 Beispiele

In diesem Kapitel wird an zwei Beispielen der Einsatz der heuristischen Kopplungsmaße demonstriert. Dabei wird offensichtlich, dass diese Maße sinnvolle Richtwerte für die Wahl der Regelkreisstruktur geben, selbst wenn sich ihre Aussagen teilweise widersprechen.

Beispiel 4.4 Auswahl der Stellgrößen einer Klärschlammverbrennungsanlage

In der in Abb. 4.25 gezeigten Anlage wird Klärschlamm in einer stationären Wirbelschicht verbrannt. Dabei werden Klärschlamm und Luft in den Brennraum gedrückt. Beide bilden zusammen mit dem dort vorhandenen Sand eine Wirbelschicht, in der der Klärschlamm verbrennt. Die Abgase strömen durch das lange Abgasrohr, wobei chemische Reaktionen stattfinden, deren Ergebnis u. a. durch die Sauerstoffkonzentration $y_2(t) = c_{O_2}(t)$ (gemessen in %) am Ende des Abgasrohres charakterisiert ist. Die zweite Regelgröße ist die in Kelvin gemessene Temperatur $y_1(t) = T_B(t)$ im Brennraum.

Die Temperatur des Wirbelbettes $y_1(t) = T_B(t)$ und die Sauerstoffkonzentration $y_2(t) = c_{O_2}(t)$ sind durch eine Regelung auf vorgegebenen Sollwerten zu halten. Dafür können als Stellgrößen die elektrische Leistung $P_{el}(t)$, der Volumenstrom des in den Brennraum geführten Propangases $\dot{m}_P(t)$, der Volumenstrom des Klärschlammes $\dot{m}_S(t)$, die pro Zeiteinheit eingepresste Luftmenge $\dot{m}_L(t)$ oder der Sollwert des Luftvorwärmers $T_L(t)$ verwendet werden. Die Regelstrecke hat also zunächst das in Abb. 4.26 (oben) gezeigte Blockschaltbild.

Das statische Verhalten dieses Systems ist durch die Matrix

$$K_s = \begin{pmatrix} 0,2 & 454,8 & -31,6 & 8,8 & 2,54 \\ 0 & -44,88 & -2,07 & 2,12 & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Die Elemente dieser Matrix zu vergleichen hat wenig Sinn, da es nicht um Absolutwerte, sondern um einen Vergleich geht, wie diese Stellgrößen die Regelgrößen beeinflussen. Deshalb wird die Koppelmatrix $\bar{K}_s$ nach Gl. (4.83) gebildet:

$$\bar{K}_s = \begin{pmatrix} 1,9 \cdot 10^{-7} & 1 & 4,83 \cdot 10^{-3} & 3,74 \cdot 10^{-4} & 3,13 \cdot 10^{-5} \\ 0 & 9,74 \cdot 10^{-3} & 2,07 \cdot 10^{-5} & 2,17 \cdot 10^{-5} & 0 \end{pmatrix}.$$

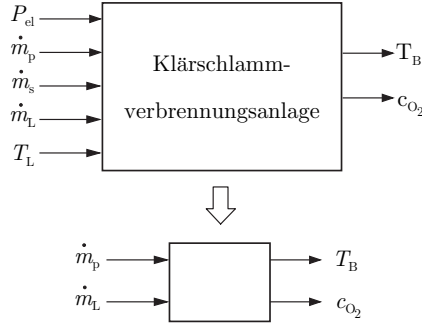


Abb. 4.26: Blockschaltbild der Klärschlammverbrennungsanlage vor und nach Auswahl der Stellgrößen

hindeutet. Für die zweite Regelgröße kommen dann nur noch die Stellgrößen $\dot{m}_S(t)$ und $\dot{m}_L(t)$ in Betracht, die beide mit der Regelgröße $y_2(t)$ etwa gleich stark verknüpft sind. Ein Unterschied bezüglich der Eignung beider Größen besteht lediglich in der Wirkung dieser Stellgrößen auf die erste Regelgröße, die entsprechend dieser empirischen Kennwerte für die Stellgröße $\dot{m}_L(t)$ geringer als für $\dot{m}_S(t)$ ausfällt.

Um auch das Maß $\bar{K}_d$ für die Auswahl der Stellgrößen heranziehen zu können, wurde diese Koppelmatrix mit einem Streckenmodell berechnet, bei dem jede Übertragungsfunktion durch ein PT₁-Glied approximiert wurde:

$$\bar{K}_d = \begin{pmatrix} 0,034 & 0,114 & 0,082 & 0,141 & 0,385 \\ 0 & 0,975 & 0,69 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wie man sieht, erhält man durch diese Matrix ein anderes Bild bezüglich der Kopplungen zwischen den Stell- und Regelgrößen. Diese Matrix legt es nahe, die zweite oder vierte Stellgrößen für die zweite Regelgröße und die zweite, dritte oder vierte Stellgröße für die erste Regelgrößen zu verwenden.

Beide Analysen ergeben gemeinsam die in Abb. 4.26 (unten) angegebene Stellgrößenwahl, wobei $\dot{m}_P(t)$ für y_1 und $\dot{m}_L(t)$ für y_2 gewählt wurde.

Um den Koppelfaktor $\kappa(s)$ und die relative Verstärkungsmatrix $RGA(G(s))$ berechnen zu können, wird mit einer einfachen PT₁-Approximationen für die betrachteten Signalkopplungen

$$\begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{454,8}{1125s+1} & \frac{8,8}{903s+1} \\ \frac{-44,88}{131s+1} & \frac{2,12}{128s+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2(s) \\ U_4(s) \end{pmatrix} \quad (4.88)$$

gearbeitet. Diese relativ grobe Approximation reicht aus, da es ja nur um eine Abschätzung der Querkopplungen zwischen den o.a. Stell- und Regelgrößen geht.

Abbildung 4.27 zeigt die Gewichtsfunktionsmatrix. Für die Kopplungsanalyse geht es um den *qualitativen* Verlauf, der i. Allg. durch eine detailliertere Modellierung nicht wesentlich verändert wird. Die Koppelmatrix $\bar{K}_s$ bewertet die statischen Verstärkungsfaktoren, also die Flächen unter den gezeigten Kurven, wobei die unterschiedlichen Maßstäbe zu beachten sind. Die für dynamische Betrachtungen gebildete Koppelmatrix $\bar{K}_d$ bewertet die Flächen $\int g_{ij}^2 dt$ unter den quadrierten Kurven, wodurch sich der Unterschied zwischen den einzelnen Elementen weiter verstärkt. Diese Bewertung wird auf die statische Verstärkung bezogen, wie in Gl. (4.84) angegeben ist.

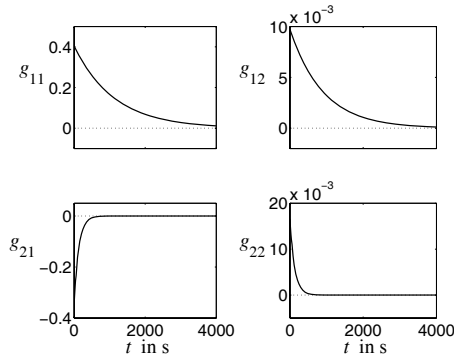


Abb. 4.27: Gewichtsfunktionsmatrix der Klärschlammverbrennungsanlage

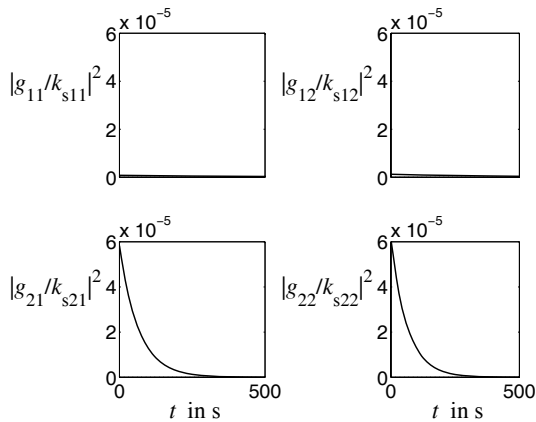


Abb. 4.28: Matrix der Funktionen $\frac{g_{ij}^2(t)}{k_{sij}^2}$ der Klärschlammverbrennungsanlage

Die Integranden in Gl. (4.84) einschließlich der angegebenen Vorfaktoren sind in Abb. 4.28 aufgetragen, wobei für alle Darstellungen derselbe Maßstab verwendet wurde. Vergleicht man diese Kurven mit denen von Abb. 4.27, so wird deutlich, dass sich das Verhältnis der Elemente untereinander durch die Bewertungsvorschrift grundlegend verschoben hat. Diese Bewertung ist zweckmäßig, denn für eine schnelle Kopplung, bei der die Gewichtsfunktion ein „kurzer, hoher“ Impuls ist, entsteht ein größerer Kennwert (4.84) als für eine langsame Kopplung, bei der die Gewichtsfunktion flach verläuft. Hohe Werte der Gewichtsfunktion gehen aufgrund des Quadrierens stärker in das Integral ein als kleinere. Das entspricht der Tatsache, dass man das System über schnelle Kopplungen besser beeinflussen kann als über langsame.

Für die hier verwendeten PT₁-Approximationen kann man das Integral (4.84) umformen. Für

$$G(s) = \frac{k_s}{Ts + 1} \quad \bullet \circ \quad g(t) = \frac{k_s}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

erhält man den Kennwert

$$k_d = \frac{1}{k_s^2} \int_0^\infty \left(\frac{k_s}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right)^2 dt = \frac{1}{2T}.$$

Je größer die Zeitkonstante bei gleicher statischer Verstärkung ist, umso kleiner ist das entsprechende Element der Koppelmatrix $\bar{K}_d$. Die auf diese Weise berechnete Matrix wird, wie oben erläutert, noch auf ihr größtes Element normiert.

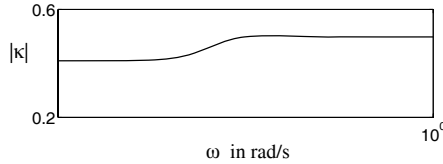


Abb. 4.29: Verlauf des Koppelfaktors für die Klärschlammverbrennungsanlage

Wie Abb. 4.29 zeigt, liegt der Betrag des für die Klärschlammverbrennungsanlage berechneten Koppelfaktors zwischen 0,4 und 0,5. Das ist relativ hoch, weshalb das System als Mehrgrößensystem behandelt werden muss.

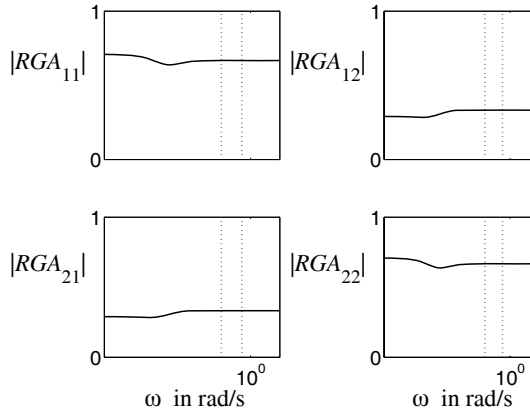


Abb. 4.30: Matrix der Beträge der relativen Verstärkungsfaktoren der Klärschlammverbrennungsanlage

Dieses Ergebnis wird durch die Analyse mit Hilfe von $RGA(G(s))$ bekräftigt, wie Abb. 4.30 verdeutlicht. In dem gekennzeichneten Frequenzbereich, in dem sich die Schnittfrequenzen aller vier Elemente der Übertragungsfunktionsmatrix befinden, liegen die Hauptdiagonalelemente von $RGA(G(s))$ bei 0,7 und die Nebendiagonalelemente bei 0,3. Die Querkopplungen spielen also voraussichtlich beim Reglerentwurf eine wichtige Rolle und sollten deshalb nicht vernachlässigt werden. $\square$

Beispiel 4.5 *Kopplungseigenschaften eines Biogasreaktors*

Als zweites Beispiel sollen die Kopplungseigenschaften des in Abb. 1.5 auf S. 7 gezeigten Biogasreaktors untersucht werden. Eine wichtige Regelungsaufgabe besteht in der Stabilisierung der pH -Werte in allen vier Modulen, wobei die auf das Flüssigkeitsvolumen des Moduls bezogenen Zulaufvolumenströme $u_i(t)$, ($i = 1, \dots, 4$) des Substrats als Stellgrößen verwendet werden.

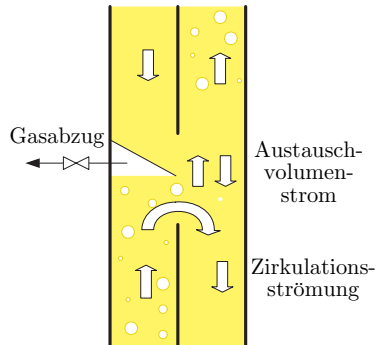


Abb. 4.31: Detail des Biogasreaktors aus Abb. 1.5

Die besondere Schwierigkeit bei der Lösung der Aufgabe besteht darin, dass die Streckeneigenschaften durch komplexe Wechselwirkungen zwischen den pH -Werten in einzelnen Reaktorbereichen, den biochemischen Abbauprozessen, dem Stofftransport und dem Vermischungsverhalten des Reaktors bestimmt werden. Für die Wahl der Reglerstruktur ist eine genaue Kenntnis dieser Zusammenhänge erforderlich, weil die Verkopplung der Teilsysteme erheblich von den Betriebsparametern abhängt. Die Rate des aus den Gassammelräumen entnommenen Biogases beeinflusst in folgender Weise die Vermischung der Flüssigkeit benachbarter Module (Abb. 4.31). Im Grenzbereich zweier Airlift-Schlaufen gibt es einen flüssigkeitsseitigen Austauschvolumenstrom a , dessen beide Komponenten entgegengesetzt und gleich groß sind. Durch diese Vermischung der Flüssigkeiten in benachbarten Modulen beeinflussen sich die pH -Werte dieser Module mehr oder weniger stark gegenseitig. Die folgende Kopplungsanalyse zeigt, dass deshalb unterschiedliche Regelungsstrukturen verwendet werden müssen.

Im Folgenden wird der Zusammenhang zwischen dem pH -Wert und den Stoffkonzentrationen in der Flüssigphase erläutert. Der pH -Wert ist definiert als

$$pH(t) = -\log \beta H^+(t),$$

wobei $H^+(t)$ die Hydroniumkonzentration und β den (näherungsweise konstanten) Aktivitätskoeffizienten bezeichnet. Der pH -Wert kann nach dem Massenwirkungsgesetz und der Ladungsbilanz aus den Stoffkonzentrationen berechnet werden, wobei die Zusammenhänge im Allgemeinen stark nichtlinear sind. Für den abgebildeten Reaktor wurde auf diese Weise ein nichtlineares Modell 36. Ordnung aufgestellt und im Arbeitspunkt $\bar{x}$, $\bar{u}$ linearisiert. Das dabei entstehende Modell hat die Form

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (4.89)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} -\bar{u}_1 - a_1 & a_1 & 0 & 0 \\ \bar{u}_1 + a_1 & -\bar{u}_1 - \bar{u}_2 - a_1 - a_2 & a_2 & 0 \\ 0 & \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + a_2 & -\bar{u}_1 - \bar{u}_2 - \bar{u}_3 - a_2 - a_3 & a_3 \\ 0 & 0 & \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3 + a_3 & -\bar{u}_1 - \bar{u}_2 - \bar{u}_3 - \bar{u}_4 - a_3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} x_0 - \bar{x}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{x}_1 - \bar{x}_2 & x_0 - \bar{x}_2 & 0 & 0 \\ \bar{x}_2 - \bar{x}_3 & \bar{x}_2 - \bar{x}_3 & x_0 - \bar{x}_3 & 0 \\ \bar{x}_3 - \bar{x}_4 & \bar{x}_3 - \bar{x}_4 & \bar{x}_3 - \bar{x}_4 & x_0 - \bar{x}_4 \end{pmatrix},$$

wobei $x(t)$, $u(t)$ Abweichungen vom Arbeitspunkt $(\bar{x}, \bar{u})$ bezeichnen. a_1, a_2 und a_3 sind die drei Austauschvolumenströme zwischen den vier Reaktormodulen.

Für den Grenzfall $a_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) ist A eine untere Dreiecksmatrix. In diesem Fall ist das System „schwach gekoppelt“, d. h. die Kopplung ist einseitig im Reaktor von unten nach oben. Die einseitige Kopplung entsteht durch die langsame Strömung des zu klärenden Abwassers vom Reaktorboden zum Reaktorkopf.

Für $a_i \neq 0$ sind die Module beidseitig (streng) verkoppelt. Die Kopplungsstärke hängt vom Betrag der Austauschvolumenströme ab, die je nach vorgegebenen Betriebsparametern zwischen etwa einem Zehntel und dem sechzigfachen des Zulaufvolumenstroms im Arbeitspunkt betragen können.

Für die Wahl einer geeigneten Regelungsstruktur muss der Kopplungsgrad zwischen den Modulen in Abhängigkeit von den Austauschvolumenströmen abgeschätzt werden, die über den einstellbaren Gasabzug und die Gasrezirkulationsrate in einem weiten Bereich verändert werden können. Es wurden die Kopplungsmaße für die Parameter

$$\begin{aligned} a_i &= \bar{a} \in \{0, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}, \quad i = 1, 2, 3 \\ \bar{u} &= (1.5, 1, 1, 0.5)', \quad i = 1, \dots, 4 \end{aligned} \quad (4.90)$$

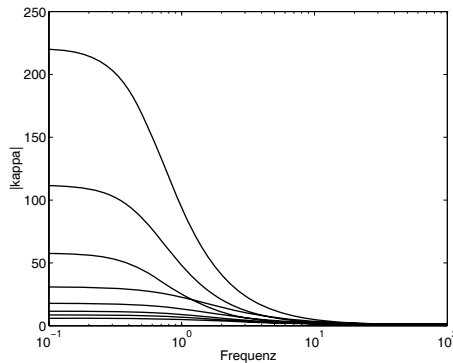


Abb. 4.32: Koppelfaktor des Biogasreaktors

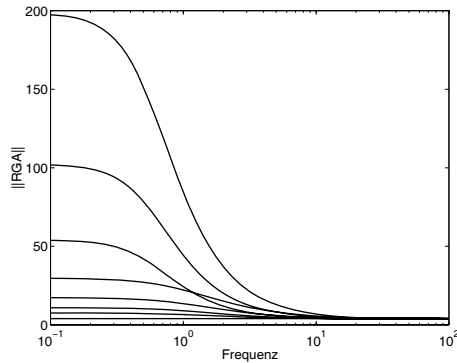


Abb. 4.33: $\|RGA\|$ für den Biogasreaktor

berechnet. Für die angegebenen Parameter werden aus Gl. (4.89) die zugehörigen Übertragungsfunktionsmatrizen $G(s)$ für verschiedene Frequenzen ermittelt und daraus der Kopplungsfaktor κ und die relative Verstärkungsmatrix RGA gebildet (Abb. 4.32 und 4.33). Wie man aus den Abbildungen erkennt, sind beide Kopplungsmaße bei niedrigen Frequenzen höher als bei hohen Frequenzen. Der Maximalwert liegt im statischen Fall ($s = 0$) vor. Die Kurvenscharen entstehen für steigende Gasrezirkulation a_i , wobei beide Kopplungsmaße mit zunehmender Gasrezirkulation ansteigen. Im Bereich realistischer Durchtrittsfrequenz ($\omega = 0,2 \dots 1$) der offenen Kette muss daher in dem Bereich der dominierenden Streckenzeitkonstanten liegen.

Aus der Kopplungsanalyse ergeben sich folgende Schlussfolgerungen für die Wahl der Reglerstruktur:

- Eine dezentrale Regelung kann nur für Austauschvolumenströme kleiner als eins eingesetzt werden. In diesem Bereich ist RGA klein, so dass ein dezentraler PI-Regler gefunden werden kann, der zumindest einen stabilen Regelkreis liefert. Der Kopplungsfaktor ist in diesem Bereich jedoch bereits recht groß. Für diese sehr kleinen Austauschvolumenströme sind die vier Reaktormodule also so schwach gekoppelt, dass ihre pH -Werte durch getrennte Regler im Arbeitspunkt gehalten werden können.
- Im Bereich $a_i = 1 \dots 20$ ist eine Kompensation der Streckenkopplung durch einen Mehrgrößenregler erforderlich. Die Austauschvolumenströme führen auf so starke Kopplung der Module, dass die Regelung auf diese Kopplung Rücksicht nehmen muss.
- Für $a_i > 20$ ist RGA in einer Größenordnung, in der eine Mehrgrößenregelung nicht mehr sinnvoll ist. Unter Berücksichtigung von Stellgrößenbeschränkungen sind nur Arbeitspunkte mit annähernd identischen Konzentrationen in allen Modulen möglich. Auf Grund der starken Vermischung sind die Konzentrationsgradienten zwischen den einzelnen Modulen gering, so dass die Regelungsaufgabe mit einer Eingrößenregelung gelöst werden kann. Der Reaktor wirkt wie ein einziger Rührkesselreaktor, für den man nur noch einen Regler braucht.

Das Beispiel zeigt, dass sich die Kopplungseigenschaften innerhalb der Regelstrecke und folglich die Struktur der zu wählenden Regelung in Abhängigkeit von Betriebsgrößen ändern können, die während des Normalbetriebes einer Anlage variiert werden. Obwohl die Regelungsaufgabe in allen Betriebsfällen dieselbe bleibt, nämlich die Konstanthaltung der pH -Werte in allen Modulen, muss die Lösung dieser Aufgabe auf die sich verändernden strukturellen Streckeneigenschaften Rücksicht nehmen. Die Regelung muss also gegebenenfalls während des Betriebes in Abhängigkeit von den erzeugten Austauschvolumenströ-

men zwischen einer dezentralen Regelung, einer Mehrgrößenregelung und einer Eingrößenregelung umschalten. $\square$

Wie die beschriebene Analyse gezeigt hat, werden auch bei Mehrgrößensystemen die Soll- und Regelgrößen häufig paarweise ausgewählt und nicht etwa beliebig in den Vektoren $\mathbf{u}(t)$ und $\mathbf{y}(t)$ angeordnet. Man bezeichnet deshalb die Hauptdiagonalelemente $G_{ii}(s)$ der Übertragungsfunktionsmatrix auch als *Hauptregelstrecken* und $G_{ij}(s)$ als Querkopplungen. Die Regelkreise, die $U_i(s)$ über $G_{ii}(s)$ und $K_{ii}(s)$ an $U_i(s)$ zurückführen, werden deshalb auch als *Hauptregelkreise* bezeichnet. Vor dem Hintergrund der beschriebenen Kopplungsanalyse wird deutlich, dass diese Begriffe auch bei Mehrgrößenreglern eine Bedeutung haben, selbst wenn sich am Verhalten des Regelkreises nichts ändert, wenn man Stell- oder Regelgrößen innerhalb der Vektoren $\mathbf{u}(t)$ und $\mathbf{y}(t)$ und die entsprechenden Elemente in der Reglermatrix $\mathbf{K}(s)$ vertauscht.

Literaturhinweise

Zur Analyse von Mehrgrößenregelkreisen ist vor allem in den sechziger und siebziger Jahren eine sehr umfangreiche Literatur erschienen. Viele grundlegende Ideen wurden nach Einführung der Zustandsraumbeschreibung zunächst anhand eines derartigen Modells formuliert und später auf die Frequenzbereichsdarstellung von Mehrgrößensystemen übertragen.

Die Originalarbeit für das HSU-CHEN-Theorem ist [39]. Das Nyquistkriterium für Mehrgrößenregelungen wurde 1977 von MACFARLANE und POSTLETHWAITE in [77] bewiesen.

Die Idee, die Stabilität von Mehrgrößenregelkreisen mit Hilfe von Normabschätzungen der Systemoperatoren zu untersuchen, stammt von ZAMES, dessen zweiteiliger Aufsatz [121] von 1966 umfangreiche Arbeiten zur Stabilitätsanalyse nichtlinearer, zeitvarianter und gekoppelter Systeme angeregt hat.

Die Robustheit für Systeme mit beschränkten Modellunsicherheiten wird systematisch seit Beginn der achtziger Jahre untersucht. Zu den ersten wichtigen Ergebnissen gehört die notwendige und hinreichende Bedingung für die robuste Stabilität, die von CHEN und DESOER 1982 für Systeme angegeben wurde, deren Modellunsicherheiten durch eine Normschränke beschrieben sind [12]. Die Konservativität derartiger Robustheitsuntersuchungen kann entscheidend gemindert werden, wenn anstelle von Normabschätzungen mit betragsmäßigen Abschätzungen gearbeitet wird, wie es von LUNZE ausführlich in [71] beschrieben wurde. Das Beispiel 4.3 ist [68] entnommen.

Die Lösung des allgemeinen Folgeregelungsproblems wurde maßgeblich durch DAVISON vorangebracht [15], [16]. Ein Vorschlag, wie der Servokompensator zu wählen ist, ist in [19] enthalten. Neben diesen im Zustandsraum entwickelten Lösungen gab es eine Reihe von Versuchen, die Grundidee in den Frequenzbereich zu übertragen, beispielsweise in [23]. Für eine gute Zusammenfassung der Ergebnisse sei auf [57] verwiesen. Eine empfehlenswerte deutschsprachige Übersichtsarbeit ist [115].

Die im Abschn. 4.5 beschriebenen Kopplungsmaße sind ausführlich in [50], [98] und [112] beschrieben und anhand von Beispielen diskutiert worden. Die Beispiele 4.4 und 4.5 beruhen auf [74] und [75].

5

Einstellregeln für PI-Mehrgrößenregler

In Erweiterung der bekannten Einstellregeln für einschleifige Regelkreise verfolgt man bei Mehrgrößenreglern das Ziel, zweckmäßige Reglerparameter ohne vorherige Modellbildung direkt mit Hilfe von Experimenten an der Regelstrecke festzulegen. Lösungsmöglichkeiten werden in diesem Kapitel angegeben, wobei auch auf die Robustheit der entstehenden Regler bezüglich der durch ungenaue Messdaten entstehenden Unsicherheiten im Regelstreckenverhalten eingegangen wird.

5.1 Zielstellung

Einstellregeln erfreuen sich bei einschleifigen Regelkreisen in der Praxis vor allem deshalb einer großen Beliebtheit, weil mit ihnen die Reglerparameter festgelegt werden können, ohne dass vorher eine aufwändige Modellbildung der Regelstrecke betrieben werden muss. Es erhebt sich deshalb die Frage, ob diese Vorgehensweise auch für Mehrgrößenregler erweitert werden kann.

Wie bei den im Kap. I-9 behandelten Einstellregeln für Eingrößenregelungen ist dieser Weg zur Lösung einer Regelungsaufgabe an eine Reihe von **Voraussetzungen** geknüpft:

- Die Regelstrecke muss stabil sein.

- Die Güteforderungen an den Regelkreis müssen im Wesentlichen auf die Stabilität und die Erzielung der Sollwertfolge für sprungförmige Führungs- und Störsignale beschränkt sein. Scharfe Forderungen an das dynamische Übergangsverhalten können nicht erfüllt werden.
- Es müssen Experimente mit der Regelstrecke und mit dem geregelten System möglich sein. Dies schließt ein, dass die Regelstrecke bereits vorhanden und nicht etwa erst auf dem Reißbrett konzipiert ist und dass sie bis zur Inbetriebnahme der Regelung gegebenenfalls durch einen Anlagenfahrer per Hand geregelt wird.

Diese Voraussetzungen charakterisieren „einfache“ Regelungsaufgaben, die in der Praxis in großer Zahl auftreten. Bei einschleifigen Regelungen werden derartige Aufgaben durch routinierte Inbetriebnahmeteams ohne großen Aufwand – und auch ohne große Beachtung der Regelgüte – gelöst. In diesem Kapitel wird gezeigt, dass auch Mehrgrößenregler unter den genannten Voraussetzungen direkt am Prozess eingestellt¹ werden können.

Der Einstellung von Mehrgrößenreglern wird aus zwei Gründen ein eigenes Kapitel gewidmet. Erstens stellt die Reglereinstellung ohne vorherige Modellbildung im Vergleich zu den in den folgenden Kapiteln behandelten Entwurfsverfahren einen alternativen Lösungsweg dar und ist schon deshalb interessant genug, um mit einiger Tiefgründigkeit behandelt zu werden. Zweitens wird bei der theoretischen Begründung der Einstellverfahren nach den *minimal* notwendigen Kenntnissen über die Regelstrecke gesucht und damit ein Problem betrachtet, dass bei anderen Verfahren überhaupt keine Rolle spielt, weil dort von vornherein die vollständige Kenntnis der Regelstreckendynamik vorausgesetzt wird.

Im Folgenden wird gezeigt, dass man bereits mit einer statischen Beschreibung des Regelstreckenverhaltens sehr viel anfangen kann. Es kann die Existenz eines PI-Reglers überprüft und es können die Reglerparameter bis auf einen einzigen verbleibenden Parameter zweckmäßig festgelegt werden. Mit der ausführlichen Behandlung dieser Tatsachen soll nicht die regelungstechnische Grundeinstellung, dass das dynamische Verhalten der Regelstrecke für die Lösung von Steuerungsaufgaben wichtig ist, ad absurdum geführt, sondern darauf hingewiesen werden, dass bei der Lösung jeder Regelungsaufgabe die vorausgesetzten Kenntnisse über das Regelstreckenverhalten in sinnvoller Relation zum angestrebten Regelungsziel stehen sollen. Wenn in einem Regelkreis mit einer stabilen Regelstrecke also nur die Stabilität und die Sollwertfolge gesichert werden müssen, reicht im Wesentlichen eine statische Beschreibung der Regelstrecke und die Möglichkeit, den Regler durch Experimente vollständig festlegen zu können, aus.

¹ Dem englischen Begriff *tuning* für die Einstellung des Reglers entsprechend spricht man auch im Deutschen gelegentlich von Tuningregelung.

5.2 Gegenkopplungsbedingung für I-Mehrgrößenregler

Regelkreis mit I-Mehrgrößenregler. Es wird mit der Regelstrecke

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{d}(t) \quad (5.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{F}\mathbf{d}(t) \quad (5.2)$$

gearbeitet und vorausgesetzt, dass sie asymptotisch stabil ist. Ferner wird angenommen, dass die Störung $\mathbf{d}(t)$ und die Führung $\mathbf{w}(t)$ sprungförmige Signale sind. Es soll ein Regler gefunden werden, mit dem der Regelkreis asymptotisch stabil ist und für sprungförmige Signale Sollwertfolge sichert.

Da die gestellte Regelungsaufgabe mit Hilfe eines (reinen) I-Mehrgrößenreglers

$$\dot{\mathbf{x}}_r(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{w}(t) \quad (5.3)$$

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_I \mathbf{x}_r(t) \quad (5.4)$$

lösbar ist, wird im Folgenden zunächst mit I-Reglern gearbeitet und der P-Anteil später hinzugenommen. Der Regler (5.3), (5.4) enthält r Integratoren, die durch die erste Gleichung beschrieben sind. Er führt nur die Zustände dieser Integratoren auf die Regelstrecke zurück.

Alle für den I-Regler erhaltenen Ergebnisse gelten auch für PI-Regler

$$\dot{\mathbf{x}}_r(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{w}(t) \quad (5.5)$$

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_I \mathbf{x}_r(t) - \mathbf{K}_P (\mathbf{y}(t) - \mathbf{w}(t)) \quad (5.6)$$

mit hinreichend kleinem P-Anteil $\mathbf{K}_P$. Die im Folgenden abgeleiteten Ergebnisse für I-Regler gelten in diesem Sinne auch für PI-Regler.

Der geschlossene Kreis (5.1) – (5.4) ist durch folgende Gleichungen beschrieben:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_r(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{K}_I \\ \mathbf{C} & -\mathbf{D}\mathbf{K}_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_r(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{O} \\ -\mathbf{I} \end{pmatrix} \mathbf{w}(t) + \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{F} \end{pmatrix} \mathbf{d}(t) \quad (5.7)$$

$$\mathbf{y}(t) = (\mathbf{C} \quad -\mathbf{D}\mathbf{K}_I) \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_r(t) \end{pmatrix} + \mathbf{F}\mathbf{d}(t). \quad (5.8)$$

Im Mittelpunkt der folgenden Untersuchungen stehen zwei Fragen:

- Unter welchen Bedingungen gibt es eine Reglermatrix $\mathbf{K}_I$, so dass der geschlossene Kreis asymptotisch stabil ist und folglich sprungförmigen Führungsgrößen folgt?
- Wie kann man diese Reglermatrix finden?

Bei beiden Fragen kommt es darauf an, dass die Antworten mit möglichst wenigen Informationen über die Regelstrecke gefunden werden. Es wurde bisher und es wird auch auf den nächsten Seiten mit den Zustandsraummodellen der Regelstrecke und

des Regelkreises gearbeitet. Es werden jedoch Ergebnisse angestrebt, die die Kenntnis dieses Modells nicht voraussetzen. Das verwendete Modell dient dann lediglich dazu, die Klasse der linearen, asymptotisch stabilen Regelstrecken bzw. der aus diesen Strecken und einem Mehrgrößen-I-Regler bestehenden Regelkreise festzulegen.

Gegenkopplungsbedingung. Im Folgenden werden mehrere Bedingungen abgeleitet, die die Existenz von I-Mehrgrößenreglern betreffen, mit denen der Regelkreis stabil ist. Diesen Bedingungen ist gemeinsam, dass sie sich nur auf die statische Verstärkung $\mathbf{K}_s$ der Regelstrecke beziehen. Sie können in dem folgenden Satz und einer daraus ableitbaren Folgerung zusammengefasst werden.

Satz 5.1 (Gegenkopplungsbedingung)

Wenn ein Regelkreis bestehend aus einer asymptotisch stabilen Regelstrecke (5.1), (5.2) und einem I-Regler (5.3), (5.4) asymptotisch stabil ist, so gilt die Bedingung

$$\det \mathbf{K}_s \mathbf{K}_I > 0, \quad (5.9)$$

wobei $\mathbf{K}_s$ die Matrix der statischen Verstärkung der Regelstrecke darstellt.

Die notwendige Stabilitätsbedingung (5.9) schreibt vor, dass der aus dem I-Regler und der Regelstrecke bestehende Regelkreis gegengekoppelt sein muss. Als Folgerung erhält man daraus, dass die (r, m) -Matrix $\mathbf{K}_s$ vollen Zeilenrang haben muss:

$$\text{Existenzbedingung für I-Regler:} \quad \text{Rang } \mathbf{K}_s = r. \quad (5.10)$$

Diese Beziehung wird Existenzbedingung für I-Regler genannt, denn es wird sich zeigen, dass sie nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend dafür ist, dass man einen I-Regler (5.3), (5.4) so auswählen kann, dass der geschlossene Regelkreis (5.7), (5.8) asymptotisch stabil ist.

Als notwendige Bedingung dafür erhält man die Forderung

$$m \geq r,$$

die besagt, dass die Regelstrecke mindestens genauso viele Stellgrößen wie Regelgrößen haben muss.

Im Folgenden werden diese Bedingungen auf mehreren Wegen bewiesen. Dabei ist nicht nur das bereits vorweggenommene Ergebnis wichtig, sondern es soll auch gezeigt werden, dass diese Bedingungen durch typisch regelungstechnische Betrachtungen hergeleitet werden können.

Steuerbarkeit der Integratoreigenwerte. Um die Stabilität des Regelkreises gewährleisten zu können, müssen die Integratoreigenwerte steuerbar sein. Diese Überlegung wird durch eine Betrachtung unterstützt, bei der die r Integratoren (5.3) zur Regelstrecke hinzugerechnet werden, wodurch die I-erweiterte Strecke

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{D} \end{pmatrix} \mathbf{u} + \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{F} \end{pmatrix} \mathbf{d} + \begin{pmatrix} \mathbf{O} \\ -\mathbf{I} \end{pmatrix} \mathbf{w} \quad (5.11)$$

$$\mathbf{x}_r(t) = (\mathbf{O} \quad \mathbf{I}) \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_r(t) \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

entsteht. Der Regler ist dann eine proportionale Rückführung (5.4) der Integratorzustände, die in der Beschreibung der I-erweiterten Strecke als neue Ausgangsgrößen eingeführt wurden.

Nach dem Hautuskriterium sind die r Integratoreigenwerte $\lambda = 0$ genau dann steuerbar, wenn die Bedingung

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} & \vdots & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{O} & \vdots & \mathbf{D} \end{pmatrix} = n + r$$

erfüllt ist. Besitzt die Regelstrecke genauso viele Stellgrößen wie Regelgrößen ($m = r$), so kann diese Bedingung in

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \det \mathbf{A} \det(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{K}_s \neq 0$$

umgeformt werden, wobei die Determinantenbeziehung (A2.66) ausgenutzt wurde, deren Voraussetzung $\det \mathbf{A} \neq 0$ aufgrund der Stabilität der Regelstrecke erfüllt ist. Damit erhält man die Forderung

$$\det \mathbf{K}_s \neq 0, \quad (5.13)$$

die für Systeme mit mehr Stellgrößen als Regelgrößen zur Forderung (5.10) verallgemeinert werden kann. Damit ist die Beziehung (5.10) offensichtlich eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Steuerbarkeit der Integratoreigenwerte und folglich notwendig für die Stabilisierbarkeit des I-regelten Systems.

Notwendige Stabilitätsbedingung. Dass die Bedingung (5.9) eine notwendige Stabilitätsbedingung für den Regelkreis ist, kann man aus einer Betrachtung der Determinante der Systemmatrix

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{K}_I \\ \mathbf{C} & -\mathbf{D}\mathbf{K}_I \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

des geschlossenen Kreises (5.7) erhalten. Ist der Regelkreis stabil, so gilt

$$\det(-\bar{\mathbf{A}}) = \prod_{i=1}^{n+r} (-\bar{\lambda}_i) > 0,$$

wobei die $\bar{\lambda}_i$ die Eigenwerte der Matrix $\bar{\mathbf{A}}$ bezeichnen. Diese Bedingung kann unter Verwendung von Gl. (A2.66) in

$$\det(-\bar{A}) = \det \begin{pmatrix} -A & BK_I \\ -C & DK_I \end{pmatrix} = \det(-A) \det(DK_I - CA^{-1}BK_I) > 0$$

umgeformt werden. Da die Regelstrecke nach Voraussetzung asymptotisch stabil ist, gilt

$$\det(-A) = \prod_{i=1}^n (-\lambda_i) > 0,$$

wobei λ_i die Eigenwerte von A bezeichnen. Damit kann die zuvor aufgestellte Bedingung in

$$\det((D - CA^{-1}B)K_I) > 0$$

überführt werden. Die erste Matrix beschreibt die statische Verstärkung der Regelstrecke. Die Ungleichung stellt also gerade die Gegenkopplungsbedingung (5.9)

$$\det(K_s K_I) > 0$$

dar. Da sie aus der Annahme, der Regelkreis sei stabil, abgeleitet wurde, ist sie eine notwendige Stabilitätsbedingung. Wenn sie verletzt wird, ist der Regelkreis instabil.

Interpretation der Gegenkopplungsbedingung. Lässt man die oben abgeleitete Bedingung außer Acht und betrachtet ganz unvoreingenommen die Frage, was Gegenkopplung im Mehrgrößenregelkreis bedeutet, so wird man nicht ohne weiteres eine klare Antwort finden. Natürlich kann man die Gegenkopplung auf unterschiedliche Art und Weise *definieren*, aber ob diese Definition für die Analyse des Regelkreises aussagekräftig ist, wird man bei jeder Definition erst untersuchen müssen.

Die Bedingung (5.9) entstand aus einer Stabilitätsanalyse des I-Regelkreises und beschreibt eine Beziehung, die die Regelstrecke und der I-Regler *notwendigerweise* erfüllen müssen, damit der Regelkreis stabil ist. Sie verdient die Bezeichnung „Gegenkopplungsbedingung“, weil sie für die Stabilität notwendig ist und weil sie sich nur auf die statische Verstärkung der Regelstrecke bezieht. Man kann sogar nachweisen, dass sie die schärfste Bedingung ist, die man unter ausschließlicher Verwendung der statischen Beschreibung der Regelstrecke, also ohne Beachtung der dynamischen Eigenschaften, ableiten kann.

Um die Beziehung (5.9) besser verstehen zu können, wird sie zunächst für einen einschleifigen Regelkreis ($m = r = 1$) betrachtet:

$$k_s k_I > 0.$$

Sie besagt, dass der Parameter des I-Reglers dasselbe Vorzeichen haben muss wie die statische Verstärkung der Regelstrecke. Diese Bedingung wurde bereits in Aufgabe I-8.8 hergeleitet und als Gegenkopplungsbedingung interpretiert. Bezieht man nämlich das in der Gleichung (5.4) enthaltene Minuszeichen in die Betrachtungen ein, so wird offensichtlich, dass bei $w(t) = 0$ die integrierte Ausgangsgröße mit entgegengesetztem Vorzeichen auf die Regelstrecke zurückgekoppelt wird. Die Gegenkopplung tritt auch ein, wenn die Regelstrecke eine negative statische Verstärkung

hat, auf eine Erhöhung der Stellgröße für große Zeiten also mit einer Verkleinerung der Regelgröße reagiert. In diesem Falle muss k_I negativ sein, um die angegebene Bedingung zu erfüllen.

Für Systeme mit gleicher Anzahl von Stell- und Regelgrößen kann die Gegenkopplungsbedingung in

$$\det \mathbf{K}_s \det \mathbf{K}_I > 0$$

umgeformt werden. Es wird also nur eine Bedingung an die Determinante der Reglermatrix $\mathbf{K}_I$ gestellt. Die Elemente der Reglermatrix $\mathbf{K}_I$ können sehr unterschiedliche Vorzeichen besitzen und trotzdem die Gegenkopplungsbedingung erfüllen. Dies zeigt das Beispiel

$$\mathbf{K}_s = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Die Gegenkopplungsbedingung ist für die beiden Matrizen

$$\mathbf{K}_I = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{K}_I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

deren Elemente sich auch in den Vorzeichen unterscheiden, erfüllt.

Gegenkopplungsbedingung für dezentrale Regelung. Die Gegenkopplungsbedingung sowie die im Folgenden abgeleiteten Bedingungen gelten auch für *dezentrale* I-Regler, die getrennte Rückführungen der i -ten Regelgröße auf die i -te Stellgröße darstellen

$$\dot{x}_{ri}(t) = y_i(t) - w_i(t) \quad (5.15)$$

$$u_i(t) = -k_{Ii} x_{ri}(t) \quad (5.16)$$

und zum Mehrgrößenregler

$$\dot{\mathbf{x}}_r(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{w}(t) \quad (5.17)$$

$$\mathbf{u}(t) = -(\text{diag } k_{Ii}) \mathbf{x}_r(t) \quad (5.18)$$

mit diagonalen Reglermatrix zusammengefasst werden können. Die Reglermatrix muss dann die Gegenkopplungsbedingung

$$\det(\mathbf{K}_s \text{diag } k_{Ii}) > 0$$

erfüllen.

Aus der Tatsache, dass die Existenzbedingung (5.10) für Mehrgrößen-I-Regler und für dezentrale I-Regler gleichermaßen gilt, sieht man, dass es bezüglich der in diesem Kapitel untersuchten Güteforderungen vollkommen gleichgültig ist, ob man einen Mehrgrößenregler verwenden oder die Regelungsaufgabe durch mehrere einschleifige Regelkreise lösen will. Die Eigenschaft (5.10), die die Regelstrecke erfüllen muss, damit das Regelungsziel erreicht werden kann, ist dieselbe.

Der Unterschied zwischen einer Betrachtung der gegebenen Aufgabe aus der Sicht der Mehrgrößenregelung bzw. der einschleifigen Regelung liegt darin, dass man eine mögliche Verletzung der Existenzbedingung bei einer Mehrgrößenbetrachtung merkt, während man beim getrennten Entwurf mehrerer einschleifiger I-Regler die Statikmatrix gar nicht aufstellen und eine mögliche Verletzung der Existenzbedingung erst bei der Erprobung der Regelung an der vollständigen Regelstrecke bemerken wird. Jeder Versuch, die Regelung durch eine Veränderung der Reglerparameter stabil zu machen, scheitert dann.

Aufgabe 5.1* *Frequenzregelung von Elektroenergienetzen*

Abbildung 5.1 zeigt ein aus zwei Teilnetzen bestehendes Elektroenergieverbundnetz. Die Verbraucherleistung ist in jedem Netz in einen frequenzabhängigen Anteil $p_{V_i}(t)$, der die Ausgangsgröße des Blocks „Verbraucher“ bildet, und in einen als Störgröße wirkenden frequenzunabhängigen Anteil $p_{L_i}(t)$ aufgeteilt.

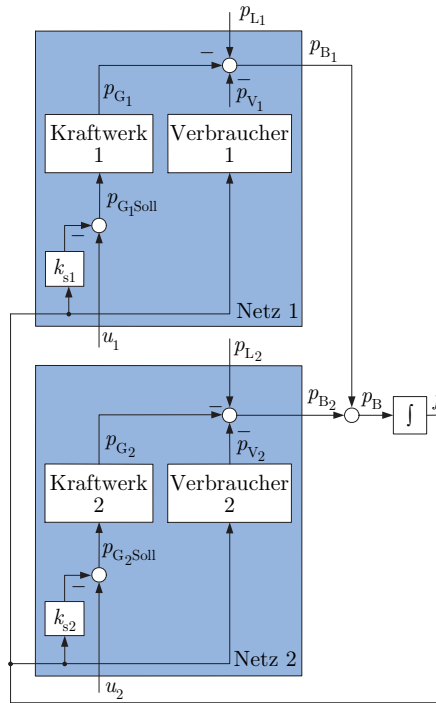


Abb. 5.1: Blockschaltbild eines aus zwei Netzen bestehenden Elektroenergiesystems

Eingangsgrößen der Blöcke „Kraftwerk i “ sind die Sollwerte der Leistungsregler $p_{G_iSoll}(t)$, Ausgangsgrößen die erzeugten Leistungen $p_{G_i}(t)$, wobei im stationären Zu-

stand $p_{Gi} = p_{Gi\text{Soll}}$ gilt (vgl. Abschn. I-2.3). Alle Signale beschreiben, wie üblich, Abweichungen von einem vorgegebenen Arbeitspunkt.

Durch die Primärregelung

$$p_{Gi\text{Soll}}(t) = -k_{si}f(t) + u_i(t) \quad (5.19)$$

werden die Kraftwerke an der Frequenzregelung beteiligt. Die Frequenzabhängigkeit der Kraftwerke und Verbraucher führt dazu, dass bei einer durch einen Lastanstieg $p_{Li}(t)$ verursachten Frequenzabweichung $f < 0$ die Leistung $p_{Gi}(t) - p_{Vi}(t)$ im i -ten Netz nach Abklingen des Übergangsvorganges auf $-k_i f$ erhöht ist. Dabei ist f die bleibende Frequenzabweichung. Die Parameter k_i werden als Leistungszahlen der Netze bezeichnet.

Die Netzfrequenz $f(t)$ ergibt sich entsprechend

$$f(t) = \frac{1}{T} \int_0^t (p_{B1}(\tau) + p_{B2}(\tau)) d\tau \quad (5.20)$$

aus den Differenzen $p_{Bi}(t)$ zwischen den erzeugten Leistungen $p_{Gi}(t)$, den Verbraucherleistungen $p_{Vi}(t)$ und den frequenzunabhängigen Laständerungen $p_{Li}(t)$, wobei bei allen diesen Größen die Abweichung von einem Arbeitspunkt betrachtet wird, in dem in jedem Netz die erzeugte gleich der verbrauchten Leistung ist (siehe Abb. 5.1).

1. Fassen Sie die Abb. 5.1 zu einem Blockschaltbild zusammen, aus dem man den Zusammenhang zwischen den Stellgrößen $u_1(t)$ und $u_2(t)$ sowie den Störgrößen $p_{L1}(t)$ und $p_{L2}(t)$ und der Regelgröße $f(t)$ erkennen kann.
2. Wie groß ist die bleibende Frequenzabweichung, die sich bei einer Lasterhöhung von $p_{L1} = 100 \text{ MW}$ einstellt, wenn die Netze die Leistungszahlen $k_1 = 1163 \frac{\text{MW}}{\text{Hz}}$ und $k_2 = 1555 \frac{\text{MW}}{\text{Hz}}$ haben?
3. Durch eine Sekundärregelung, die eine Rückführung der Frequenzabweichung $f(t)$ auf $u_1(t)$ und $u_2(t)$ darstellt, soll die Frequenzabweichung vollständig abgebaut werden. Da die Kraftwerke weit voneinander entfernt liegen, sollen dezentrale Rückführungen von $f(t)$ auf $u_1(t)$ und von $f(t)$ auf $u_2(t)$ zum Einsatz kommen, wobei zur Verhinderung einer bleibenden Regelabweichung in beiden Fällen I-Regler eingesetzt werden. Gibt es eine Einstellung dieser Regler, so dass der Regelkreis stabil ist?

Wird die Sekundärregelung nach dem Netzkennlinienverfahren durchgeführt, so wird neben der Frequenz $f(t)$ auch der Leistungsaustausch $p_t(t)$ zwischen den Teilnetzen überwacht. Die Kraftwerke sollen so geregelt werden, dass im stationären Zustand $p_{G1} = p_{L1}$ und $p_{G2} = p_{L2}$ gilt, d. h., jedes Kraftwerk soll die in seinem Teilnetz vorhandene Laständerung ausgleichen. Bevor der stationäre Zustand erreicht ist, fließt eine Übergabeleistung $p_t(t)$, die in Richtung vom Teilnetz 1 zum Teilnetz 2 positiv gezählt wird. $p_t(t)$ beschreibt, welche im Kraftwerk 1 erzeugte Leistung zum Ausgleich der Last $p_{L2}(t)$ verwendet wird, wobei

$$p_t(t) = \frac{T_2}{T_1 + T_2} (p_{G1}(t) - p_{V1}(t) - p_{L1}(t)) - \frac{T_1}{T_1 + T_2} (p_{G2}(t) - p_{V2}(t) - p_{L2}(t)). \quad (5.21)$$

mit den Anstiegszeiten T_1 und T_2 der beiden Teilnetze gilt. Beim Netzkennlinienverfahren werden nun die Größen

$$e_1(t) = k_1 f(t) + p_t(t) \quad (5.22)$$

$$e_2(t) = k_2 f(t) - p_t(t) \quad (5.23)$$

als Regelgrößen aufgefasst und dezentrale PI-Rückführungen dieser Größen auf $u_1(t)$ bzw. $u_2(t)$ verwendet. Um die Realisierbarkeit des Netzkennlinienverfahrens nachzuweisen, sind folgende Teilaufgaben zu lösen:

4. Zeigen Sie, dass es Reglereinstellungen gibt, für die der Regelkreis stabil ist.
5. Beweisen Sie, dass für das stabile PI-geregelte Netz bei sprungförmigen Laständerungen $p_{L_1}(t)$ und $p_{L_2}(t)$ im stationären Zustand die Forderungen $f = 0$ sowie $p_{G_1} = p_{L_1}$ und $p_{G_2} = p_{L_2}$ erfüllt sind. $\square$

5.3 Einstellung von I-Reglern

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass die Bedingung (5.10) nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend für die Existenz der gesuchten I-Mehrgrößenregler ist. Dabei wird gleichzeitig eine Einstellregel für diese Regler abgeleitet. Die Ergebnisse werden später auf PI-Regler erweitert.

5.3.1 Idee der Reglereinstellung

Die Vorgehensweise bei der Einstellung von I-Reglern ist einerseits durch die schwachen Güteforderungen und andererseits durch die minimalen Modellinformationen begründet, die bei der Festlegung der Reglerparameter verwendet werden sollen. Um die Stabilität des Regelkreises zu sichern, müssen alle Eigenwerte des geschlossenen Kreises in der linken komplexen Halbebene liegen. Da die Regelstrecke als stabil vorausgesetzt wurde, liegen deren Eigenwerte bereits dort. Problematisch sind die r Integratoreigenwerte, die im Koordinatenursprung der komplexen Ebene liegen, bevor der Regelkreis geschlossen wird. Durch eine geeignete Wahl der Reglerparameter muss also erreicht werden, dass einerseits sämtliche Integratoreigenwerte in die linke komplexe Halbebene wandern und andererseits die Regelstreckeneigenwerte die linke Halbebene nicht verlassen (Abb. 5.2).

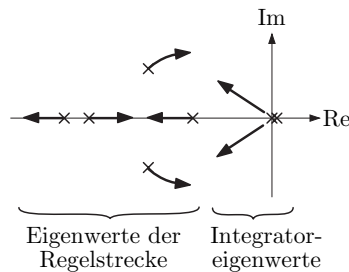


Abb. 5.2: Eigenwerte der offenen Kette

Die beschriebene Situation legt es nahe, die Reglermatrix entsprechend

$$\mathbf{K}_I = a \tilde{\mathbf{K}}_I \quad (5.24)$$

in eine Matrix $\tilde{\mathbf{K}}_I$ und einen skalaren Faktor a , den man auch *Tuningfaktor* oder Einstellfaktor nennt, zu zerlegen. Stellt man sich nun vor, dass man den Regelkreis mit einem sehr kleinen Wert für a schließt und a dann vergrößert, so kann man eine Wurzelortskurve² zeichnen, die die Lage der Eigenwerte des geschlossenen Kreises in Abhängigkeit von a angibt. Zu einem stabilen System kommt man dadurch, dass man die Matrix $\tilde{\mathbf{K}}_I$ so festlegt, dass die Integratoreigenwerte für kleine Werte von a in die linke komplexe Ebene verschoben werden. Wählt man a dann klein genug, so kann kein Streckeneigenwert in die rechte komplexe Ebene gewandert sein. Durch eine geeignete Wahl von $\tilde{\mathbf{K}}_I$ kann man also erreichen, dass der Regelkreis für kleine Werte von a mit Sicherheit stabil ist.

5.3.2 Festlegung der Reglermatrix

Mit der entsprechend Gl. (5.24) zerlegten Reglermatrix heißt die Systemmatrix des geschlossenen Kreises

$$\bar{\mathbf{A}}(a) = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & -a\mathbf{B}\tilde{\mathbf{K}}_I \\ \mathbf{C} & -a\mathbf{D}\tilde{\mathbf{K}}_I \end{pmatrix}.$$

Die Wurzelorte des geschlossenen Kreises beginnen bei $a = 0$ in den Eigenwerten der Matrix

$$\bar{\mathbf{A}}(0) = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{O} \end{pmatrix},$$

wobei im Folgenden diejenigen Äste der Wurzelortskurve von Interesse sind, die in den r Eigenwerten $\lambda = 0$ beginnen. Die Matrix $\tilde{\mathbf{K}}_I$ muss so festgelegt werden, dass diese Eigenwerte für sehr kleine Werte von a in die linke komplexe Halbebene geschoben werden, d. h., dass die als Vektoren in der komplexen Ebene gedeuteten Empfindlichkeiten $\frac{d\lambda}{da}$ in die linke komplexe Halbebene weisen:

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{d\lambda}{da} \right\} < 0. \quad (5.25)$$

Für die Empfindlichkeit eines Eigenwertes λ der Matrix $\bar{\mathbf{A}}(a)$ bezüglich des Skalars a mit dem Nominalwert $a = 0$ gilt die Beziehung

$$\frac{d\lambda}{da} = \frac{\mathbf{w}' \frac{d\bar{\mathbf{A}}}{da} \mathbf{v}}{\mathbf{w}' \mathbf{v}}, \quad (5.26)$$

wobei $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}'$ der Rechts- bzw. Linkseigenvektor der Matrix $\bar{\mathbf{A}}(0)$ zum Eigenwert λ ist (vgl. Anhang 2). Die zu den Eigenwerten $\lambda = 0$ gehörenden Eigenvektoren erhält man aus

² Da es sich hier um einen Mehrgrößenregler handelt, hat diese Wurzelortskurve etwas andere Eigenschaften als die in Kap. I-10 beschriebenen.

$$\bar{A}(0) v = \begin{pmatrix} A & O \\ C & O \end{pmatrix} v = 0$$

und

$$w' \bar{A}(0) = w' \begin{pmatrix} A & O \\ C & O \end{pmatrix} = 0.$$

Zerlegt man die Eigenvektoren entsprechend

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w' = (w'_1 \quad w'_2)$$

in jeweils einen n - und einen r -dimensionalen Teilvektor, so erhält man

$$A v_1 = 0$$

und folglich

$$v_1 = 0$$

bzw.

$$w'_1 A + w'_2 C = 0$$

und daraus

$$w_1 = -w'_2 C A^{-1}.$$

Für beliebige r -dimensionale Vektoren v_2 und w'_2 stellen die $(n+r)$ -Vektoren

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w' = (-w'_2 C A^{-1} \quad w'_2)$$

Eigenvektoren zu $\lambda = 0$ dar. Aufgrund der Freiheit in der Wahl der r -dimensionalen Vektoren v_2 und w_2 beschreiben sie den zu den r Integratoreigenwerten gehörenden r -dimensionalen Eigenraum.

Für die Ableitung der Matrix $\bar{A}$ nach a erhält man die Beziehung

$$\frac{d\bar{A}(a)}{da} = \begin{pmatrix} O & -B\tilde{K}_I \\ O & -D\tilde{K}_I \end{pmatrix}.$$

In Gl. (5.26) eingesetzt folgt

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{da} &= \frac{(-w'_2 C A^{-1} \quad w'_2) \begin{pmatrix} O & -B\tilde{K}_I \\ O & -D\tilde{K}_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}}{(-w'_2 C A^{-1} \quad w'_2) \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}} \\ &= \frac{w'_2 (-D + C A^{-1} B) \tilde{K}_I v_2}{w'_2 v_2} \end{aligned}$$

und schließlich

$$\frac{d\lambda}{da} = \frac{\mathbf{w}_2' (-\mathbf{K}_s \tilde{\mathbf{K}}_I) \mathbf{v}_2}{\mathbf{w}_2' \mathbf{v}_2}. \quad (5.27)$$

Der Realteil dieses Quotienten muss für beliebige Vektoren $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{w}_2$ negativ sein. Da man alle diese Vektoren als Linearkombination der Eigenvektoren $\tilde{\mathbf{v}}$ und $\tilde{\mathbf{w}}'$ der Matrix $\mathbf{K}_s \tilde{\mathbf{K}}_I$ darstellen kann und für diese Eigenvektoren die Beziehung

$$\frac{\tilde{\mathbf{w}}' (-\mathbf{K}_s \tilde{\mathbf{K}}_I) \tilde{\mathbf{v}}}{\tilde{\mathbf{w}}' \tilde{\mathbf{v}}} = \frac{\lambda \{-\mathbf{K}_s \tilde{\mathbf{K}}_I\} \tilde{\mathbf{w}}' \tilde{\mathbf{v}}}{\tilde{\mathbf{w}}' \tilde{\mathbf{v}}} = -\lambda \{\mathbf{K}_s \tilde{\mathbf{K}}_I\}$$

mit $\lambda\{\cdot\}$ als Eigenwert der bezeichneten Matrix gilt, lässt sich die Forderung (5.25) unter Verwendung von Gl. (5.27) in die Ungleichung

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i \{\mathbf{K}_s \tilde{\mathbf{K}}_I\}\} > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

umformen. Wenn die Matrix $\tilde{\mathbf{K}}_I$ so gewählt wird, dass sämtliche Eigenwerte der Matrix $\mathbf{K}_s \tilde{\mathbf{K}}_I$ positiven Realteil haben, so liegen die im Ursprung der komplexen Ebene beginnenden Äste der Wurzelortskurve für kleine Werte von a in der linken Halbebene. Da die Wurzelortskurve stetig bezüglich a ist, gibt es eine (möglicherweise unendlich große) obere Schranke $\bar{a}$, für die sämtliche Äste der Wurzelortskurve für das gesamte Intervall $0 < a \leq \bar{a}$ in der linken komplexen Ebene verlaufen.

Satz 5.2 (Stabilität des I-geregelten Systems)

Betrachtet wird ein Regelkreis, der aus einer asymptotisch stabilen Regelstrecke und einem I-Regler

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_r(t) &= \mathbf{y}(t) - \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{u}(t) &= -\mathbf{K}_I \mathbf{x}_r(t) \end{aligned}$$

besteht. Verwendet man die Reglermatrix

$$\mathbf{K}_I = a \tilde{\mathbf{K}}_I,$$

so gibt es genau dann ein Intervall $0 < a \leq \bar{a}$ für den Tuningfaktor a , für das der Regelkreis asymptotisch stabil ist, wenn die Matrix $\tilde{\mathbf{K}}_I$ die Bedingung

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i \{\mathbf{K}_s \tilde{\mathbf{K}}_I\}\} > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r) \quad (5.28)$$

erfüllt.

Die Beziehung (5.28) stellt offensichtlich eine Verschärfung der Gegenkopplungsbedingung (5.9) dar. Sie ist immer dann erfüllbar, wenn die Regelstrecke der Existenzbedingung (5.10) genügt, denn wenn die Statikmatrix vollen Zeilenrang hat, kann $\tilde{\mathbf{K}}_I$ beispielsweise entsprechend

$$\tilde{\mathbf{K}}_I = \mathbf{K}_s' (\mathbf{K}_s \mathbf{K}_s')^{-1} \quad (5.29)$$

bzw. bei Systemen mit gleicher Anzahl von Stell- und Regelgrößen entsprechend

$$\text{Zweckmäßige Wahl der I-Reglermatrix (für } m = r \text{): } \quad \tilde{K}_I = K_s^{-1} \quad (5.30)$$

gewählt werden, wodurch die Bedingung (5.28) erfüllt ist.

5.3.3 Festlegung des Tuningfaktors

Satz 5.2 zeigt, wie der I-Regler unter ausschließlicher Verwendung eines statischen Modells so festgelegt werden kann, dass der Regelkreis stabil ist. Erfüllt man nämlich durch geeignete Wahl von $\tilde{K}_I$ die Bedingung (5.28), so muss man den Tuningfaktor a nur hinreichend klein wählen, um die Stabilität des Regelkreises zu sichern. Diese Tatsache legt es nahe, a anhand von Experimenten mit der Regelstrecke festzulegen. Da man die Statik K_s in sehr einfacher Weise experimentell bestimmen kann, kommt man bei der beschriebenen Vorgehensweise ohne eine dynamische Modellbildung der Regelstrecke aus. Zusammengefasst ergibt sich folgendes Vorgehen:

Entwurfsverfahren 5.1 Einstellung von I-Reglern

Voraussetzungen:

- Die Regelstrecke ist asymptotisch stabil.
 - Die Güteforderungen sind auf Stabilität und Sollwertfolge bei sprungförmigen Führungs- und Störsignalen beschränkt.
1. Die Matrix K_s der statischen Verstärkungsfaktoren der Regelstrecke wird experimentell bestimmt.
 2. Es wird die Existenzbedingung (5.10) überprüft. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so muss die Regelungsaufgabe mit anderen Stell- oder Regelgrößen gelöst werden.
 3. Es wird mit dem Regler

$$\dot{x}_r(t) = y(t) - w(t)$$

$$u(t) = -a\tilde{K}_I x_r(t)$$

gearbeitet, wobei die Matrix $\tilde{K}_I$ die Bedingung (5.28) erfüllen muss und zweckmäßigerweise entsprechend Gl. (5.29) bzw. (5.30) gewählt wird.

4. Der Regelkreis wird unter Verwendung eines sehr kleinen Tuningfaktors a geschlossen und das Zeitverhalten experimentell bestimmt. Der Tuningfaktor a kann erhöht werden, solange die Experimente mit dem geschlossenen Kreis zeigen, dass der Kreis eine genügend große Stabilitätsreserve aufweist.

Ergebnis: Stabiler Regelkreis mit I-Mehrgrößenregler

Experimentelle Bestimmung von K_s . Zu diesem Vorgehen sollen noch einige Anmerkungen gemacht werden. Für die experimentelle Bestimmung der statischen Verstärkung ändert man einzelne Stellgrößen sprungförmig und misst die statischen Endwerte der Ausgangsgrößen. Bei Änderung der i -ten Stellgröße erhält man auf diese Weise die i -te Spalte von K_s . Dies sieht man für ein System mit zwei Eingangsgrößen aus der statischen Regelstreckenbeschreibung

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{s11} & k_{s12} \\ k_{s21} & k_{s22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

wenn man beispielsweise die zweite Stellgröße entsprechend

$$u_2(t) = \bar{u}\sigma(t)$$

verändert. Nachdem die Regelstrecke ihren statischen Endwert erreicht hat, gilt

$$\begin{pmatrix} y_1(\infty) \\ y_2(\infty) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{s11} & k_{s12} \\ k_{s21} & k_{s22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{u} \end{pmatrix} = \bar{u} \begin{pmatrix} k_{s12} \\ k_{s22} \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung der zweiten Spalte der Matrix K_s muss man die Messwerte $y_1(\infty)$ und $y_2(\infty)$ also nur durch die Amplitude $\bar{u}$ dividieren.

Will man die Stellgrößen nicht einzeln verändern, sondern mehrere Stellgrößen gleichzeitig variieren, so kann man bei einem System mit m Eingangsgrößen m Experimente mit der Eingangsgröße $u(t) = \bar{u}_i\sigma(t)$ durchführen, wobei $\bar{u}_i$ ($i = 1, \dots, m$) linear unabhängige Vektoren sein müssen. Schreibt man die Vektoren $\bar{u}_i$ sowie die erhaltenen Messvektoren $y_i(\infty)$ in zwei Matrizen

$$\begin{aligned} U &= (\bar{u}_1 \ \bar{u}_2 \ \dots \ \bar{u}_m) \\ Y &= (y_1(\infty) \ y_2(\infty) \ \dots \ y_m(\infty)), \end{aligned}$$

so erhält man die Statikmatrix aus der Beziehung

$$K_s = Y U^{-1}. \quad (5.31)$$

Verletzung der Existenzbedingung. Wenn im Schritt 2 des Entwurfsverfahrens 5.1 die Existenzbedingung für I-Regler nicht erfüllt ist, so kann man die gegebene Regelungsaufgabe nicht lösen. Es bleibt dann nichts anderes übrig, als entweder die Regelungsaufgabe bezüglich der Güteforderungen zu verändern und insbesondere eine bleibende Regelabweichung zu akzeptieren oder andere Stell- oder Regelgrößen zu wählen. Ein praktisches Beispiel, bei dem dieses Problem auftritt, wird in Aufgabe 5.1 behandelt.

Dynamisches Verhalten des Regelkreises. Mit der im Entwurfsverfahren angegebenen Wahl der Reglermatrix ist gesichert, dass der Regelkreis für einen hinreichend klein gewählten Tuningfaktor a asymptotisch stabil ist. Ist a genügend klein und

hat sich bei den Experimenten mit dem geschlossenen Regelkreis gezeigt, dass das Übergangsverhalten des Regelkreises sehr langsam ist, so kann man a vergrößern, denn Satz 5.2 besagt, dass die Stabilität nicht nur für einzelne Werte von a , sondern in einem bei null beginnenden Intervall gesichert ist. Eine Erhöhung von a führt tendenziell zu einem schnelleren Einschwingvorgang. Auf Grund dessen kann man mit dem angegebenen Einstellverfahren mehr als nur die Stabilität sichern. Man darf jedoch nicht erwarten, dass man in jedem Anwendungsfall auch ein ausreichend gutes dynamisches Verhalten bekommt, denn das hier beschriebene Vorgehen ist in erster Linie auf die Sicherung der Sollwertfolge und der Stabilität des Regelkreises ausgerichtet.

Entkopplungseigenschaft des erhaltenen I-Reglers. Obwohl die angegebene Wahl von $\tilde{K}_I$ durch eine Betrachtung der Wurzelortskurve begründet ist, hat sie als interessanten Nebeneffekt eine entkoppelnde Wirkung auf die Regelstrecke. Formt man das Reglergesetz (5.3), (5.4) (für $m = r$) mit

$$K_I = a K_s^{-1}$$

in

$$\dot{x}_r(t) = y(t) - w(t) \quad (5.32)$$

$$\tilde{u}(t) = -a x_r(t) \quad (5.33)$$

$$u(t) = K_s^{-1} \tilde{u}(t)$$

um und betrachtet $\tilde{u}(t)$ als neue Stellgröße, so erhält man für das statische Verhalten der erweiterten Regelstrecke mit Eingang $\tilde{u}(t)$ und Ausgang $y(t)$ die Beziehung

$$y(\infty) = I \tilde{u}(\infty) \quad (5.34)$$

(Abb. 5.3). Die m Stellgrößen-Regelgrößen-Paare $(\tilde{u}_i(t), y_i(t))$ sind also statisch voneinander entkoppelt. Der Regler (5.32), (5.33) stellt bezüglich der erweiterten Regelstrecke einen dezentralen Regler dar, denn er führt die integrierten Regelabweichungen $x_{ri}(t)$ unabhängig voneinander auf die Stellgrößen $\tilde{u}_i(t)$ zurück.

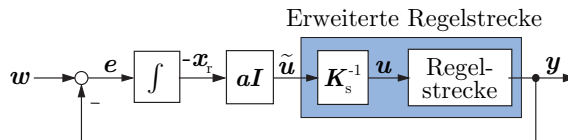


Abb. 5.3: Umformung des Regelkreises zur Erläuterung der Entkopplungseigenschaft

Wenn die Regelstrecke bezüglich aller Stellgrößen-Regelgrößen-Paare ähnliches dynamisches Verhalten hat, so bewirkt die angegebene Wahl der Reglermatrix auch

eine gute dynamische Entkopplung. Gilt nämlich im Extremfall für die Übertragungsfunktionsmatrix der Regelstrecke

$$G(s) = K_s G(s),$$

d. h., unterscheiden sich die Elemente dieser Matrix nur um den statischen Verstärkungsfaktor, so erhält man für die erweiterte Regelstrecke das Modell

$$Y(s) = K_s^{-1} G(s) \tilde{U}(s) = G(s) \tilde{U}(s) = \begin{pmatrix} G(s) & & \\ & \ddots & \\ & & G(s) \end{pmatrix} \tilde{U}(s).$$

Die Stellgrößen-Regelgrößen-Paare sind dann auch dynamisch vollkommen entkoppelt. Mit der angegebenen dezentralen Regelung verhält sich der Mehrgrößenregelkreis wie m einschleifige Kreise.

5.3.4 Erweiterung auf PI-Regler

Der Proportionalanteil des PI-Reglers (5.5), (5.6) dient zur Verbesserung des dynamischen Übergangsverhaltens des Regelkreises. Er bringt, im Gegensatz zum I-Anteil, keine wesentlichen Stabilitätsprobleme mit sich, wenn er schwach eingestellt wird.

Wie der I-Anteil wird die Reglermatrix K_P in

$$K_P = b \tilde{K}_P$$

zerlegt, wobei b den Tuningfaktor des P-Anteils darstellt. Da sich die Eigenwerte des geschlossenen Kreises bei Einführung des P-Anteils mit sehr kleinem b stetig ändern, ist die Stabilität des Kreises bei *beliebiger* Matrix $\tilde{K}_P$ und hinreichend kleinem b nicht gefährdet. Ist das I-geregelte System stabil, so kann man stets versuchen, durch einen P-Anteil mit kleinem Tuningfaktor b die Dynamik des Kreises zu verbessern.

Bei der Wahl von $\tilde{K}_P$ kann man in unterschiedlicher Weise vorgehen. Zweckmäßig ist es wie beim I-Anteil, die inverse Statikmatrix zu verwenden

$$\tilde{K}_P = K_s^{-1}, \quad (5.35)$$

wobei hier die entkoppelnde Wirkung dieser Reglermatrix auf die unterschiedlichen Stellgrößen-Regelgrößen-Paare als ein wichtiges Argument angeführt werden kann (vgl. Gl. (5.34)).

Ein anderer Vorschlag ist dadurch begründet, dass mit dem P-Anteil der Regelkreis vor allem schneller gemacht, also $\dot{y}(t)$ vergrößert werden soll. Aus der Übertragungsfunktionsmatrix

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B$$

erhält man für eine sprungförmige Eingangsgröße durch Anwendung des Grenzwertsatzes

$$\dot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s C (sI - A)^{-1} B = \lim_{s \rightarrow \infty} C (I - \frac{1}{s} A)^{-1} B = C B.$$

Die Elemente des Produktes CB lassen sich ermitteln, indem man die Anstiege der entsprechenden Elemente der Übergangsfunktionsmatrix zur Zeit $t = 0$ misst (vgl. Gl. (2.37)). Ist die dabei entstehende Matrix regulär, so kann man mit dem P-Anteil des Reglers den Übergangsvorgang beschleunigen, wenn man mit

$$\tilde{K}_P = (CB)^{-1} \quad (5.36)$$

arbeitet. Ähnlich wie bei der Entkopplungseigenschaft, die mit der Wahl der Matrix $\tilde{K}_I$ entsprechend Gl. (5.29) einhergeht, kann man hier zeigen, dass bei dieser Wahl von $\tilde{K}_P$ die i -te Stellgröße zur Zeit t nur auf die Ableitung der i -ten Regelgröße zur selben Zeit t wirkt.

Für die Erweiterung des I- zu einem PI-Regler werden zum Entwurfsverfahren 5.1 die folgenden Schritte hinzugefügt:

5. Der Regler wird um einen P-Anteil ergänzt, so dass jetzt mit

$$u(t) = -a \tilde{K}_I x_r(t) - b \tilde{K}_P (y(t) - w(t))$$

gearbeitet wird, wobei die Matrix $\tilde{K}_P$ beispielsweise entsprechend Gl. (5.35) oder (5.36) gewählt wird.

6. Der Regelkreis wird unter Verwendung des im Schritt 4 bestimmten Wertes für a sowie eines sehr kleinen Wertes für b geschlossen. Der Tuningfaktor b kann erhöht werden, solange die Experimente mit dem geschlossenen Regelkreis zeigen, dass diese Erhöhung des P-Anteils das dynamische Verhalten verbessert.

Ergebnis: PI-Mehrgrößenregler

Diskussion. Wie beim I-Anteil wird bei dem in diesem Abschnitt beschriebenen Vorgehen mit einem P-Anteil mit kleiner Verstärkung gearbeitet. Da das Regelstreckenverhalten weitgehend unbekannt ist, ist es wichtig zu wissen, dass die Stabilität des Regelkreises für hinreichend klein gewählten Einstellfaktor b , also für ein Intervall $0 \leq b \leq \bar{b}$ (mit unbekannter Schranke $\bar{b}$) gesichert ist. Wenn man genauere Kenntnisse über die Regelstrecke hat, kann man den P-Anteil des Reglers vor dem I-Anteil mit der Regelstrecke verschalten, so dass für den anschließend zu entwerfenden I-Anteil nicht die Statikmatrix der Strecke, sondern die Statikmatrix der P-geregelten Strecke maßgebend ist. Die dadurch entstehenden Freiheiten in der Reglerwahl werden hier nicht behandelt, weil sie Kenntnisse des dynamischen Streckenverhaltens voraussetzen.

5.3.5 Beispiel

Die behandelten Einstellregeln werden jetzt in einem Beispiel sowie in Übungsaufgaben eingesetzt.

Beispiel 5.1 *Regelung einer Anlage zur Herstellung von Ammoniumnitrat-Harnstoff-Lösung*

Die im Folgenden betrachtete Regelstrecke ist eine Anlage zur Herstellung von Ammoniumnitrat-Harnstofflösung (AHL), einem Flüssigdünger. Die Konzentrationen von Harnstoff und Stickstoff (in % gemessen) werden als Regelgrößen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ verwendet. Stellgrößen sind die Zuflussmenge $u_1(t)$ der Harnstofflösung (gemessen in $\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$) sowie die Temperatur $u_2(t)$ des Ausgangsgemisches. $u_2(t)$ ist der Sollwert einer unterlagerten Temperaturregelung (gemessen in K).

Wie man aus der Übergangsfunktionsmatrix der Regelstrecke in Abb. 5.4 sehen kann, sind die Stell- und Regelgrößen stark verkoppelt, so dass ein PI-Mehrgrößenregler eingesetzt werden muss. Einer sprungförmigen Änderung der Sollwerte sollen die Regelgröße mit kleinem Überschwingen ($\Delta h < 20\%$) und in akzeptabler Zeit ($T_{5\%} \approx 1,5 \text{ h}$) folgen.

Die Regelstrecke hat in der Umgebung des Arbeitspunktes näherungsweise ein lineares Verhalten. Sie ist stabil, weil unterlagerte Regelkreise den Füllstand des Reaktors und die Dosierung der Ausgangsstoffe überwachen. Eine Modellbildung ist aufgrund der im Reaktor ablaufenden, temperaturabhängigen chemischen Reaktionen schwierig. Um die Modellbildung zu umgehen und weil die Güteforderungen an den Regelkreis relativ schwach sind, soll der Regler mit Hilfe einfacher Experimente am Prozess eingestellt werden.

Die im Folgenden angegebenen Grafiken entstanden aus Simulationsuntersuchungen mit einem einfachen Modell. Diesem Beispiel liegt jedoch eine reale Anwendung zu Grunde, bei der die Reglereinstellung mit Hilfe des in diesem Kapitel beschriebenen Verfahrens aufgrund grober Messwerte für die Übergangsfunktionsmatrix vorgenommen wurde:

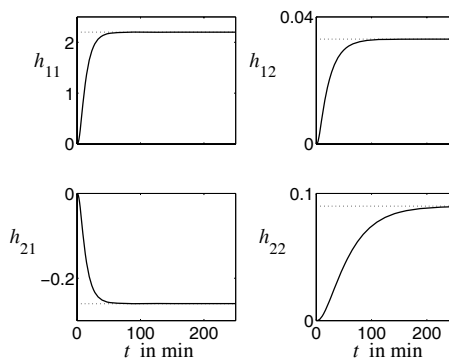


Abb. 5.4: Übergangsfunktionsmatrix der AHL-Anlage

1. Abbildung 5.4 zeigt die Übergangsfunktionsmatrix der Regelstrecke. Aus den Endwerten kann man die Statikmatrix

$$\mathbf{K}_s = \begin{pmatrix} 2,2 & 0,033 \\ -0,26 & 0,09 \end{pmatrix}$$

ablesen.

2. Da die Matrix regulär ist, existiert eine Lösung der betrachteten Regelungsaufgabe.

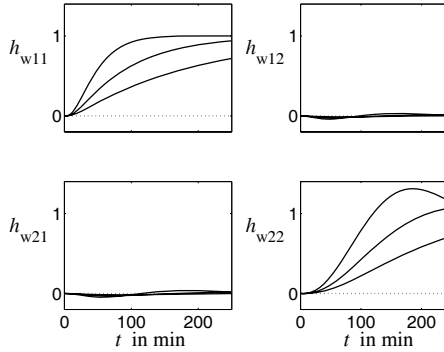


Abb. 5.5: Führungsübergangsfunktionen der I-geregelten AHL-Anlage für $a = 0,005, 0,01$ und $0,02$

3. Es wird ein I-Mehrgrößenregler mit der Reglermatrix $\mathbf{K}_I = a\mathbf{K}_s^{-1}$ verwendet.
4. Für $a = 0,005, 0,01$ und $0,02$ erhält man die in Abb. 5.5 gezeigten Übergangsfunktionen des Regelkreises. Mit steigendem Tuningfaktor werden die Übergangsfunktionen schneller. Um einerseits ein möglichst schnelles Einschwingen von $h_{w11}(t)$ zu gewährleisten und andererseits ein zu großes Überschwingen des Elementes $h_{w22}(t)$ zu vermeiden, wird für die weiteren Untersuchungen der Wert $a = 0,015$ gewählt, der zwischen den beiden größeren Einstellwerten liegt.

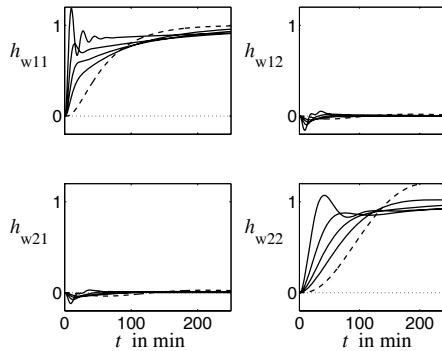


Abb. 5.6: Führungsübergangsfunktionen der PI-geregelten AHL-Anlage (erste Reglereinstellung mit $b = 0, 0,5, 1, 2$ und 5)

5. Der Regler wird um einen P-Anteil mit der Reglermatrix $\mathbf{K}_P = b\mathbf{K}_s^{-1}$ erweitert.
6. Abbildung 5.6 zeigt die Führungsübergangsfunktionsmatrix für unterschiedliche Werte des Tuningfaktors b . Der Regelkreis wird mit steigendem b immer schneller, wobei jedoch bei den großen Werten erhebliche Schwingungen insbesondere in der Übergangsfunktion $h_{w11}(t)$ auftreten. Betrachtet man nur die Übergangsfunktion h_{w22} , so wäre der zweitgrößte Wert $b = 2$ günstig; sieht man sich dagegen h_{w11} an, so ist $b = 0,5$ oder $b = 1$ zu bevorzugen.

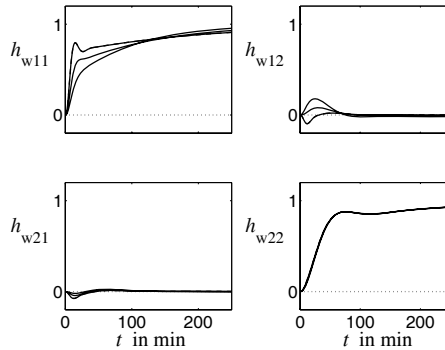


Abb. 5.7: Führungsübergangsfunktionen der PI-geregelten AHL-Anlage (zweite Reglereinstellung mit $b_1 = 0, 0,5, 1$ und 2)

Erweiterung der Einstellvorschrift. Um die erste Regelgröße schneller an den Sollwert führen zu können, ohne das Verhalten der zweiten Regelgröße wesentlich zu beeinflussen, wird jetzt ausgenutzt, dass die Matrix $\mathbf{K}_P$ beliebig gewählt werden kann, und mit der Reglermatrix

$$\mathbf{K}_P = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{K}_s^{-1}$$

gearbeitet, in der neu eingeführten Matrix der vorher festgelegte Wert $b = 2$ als unteres Diagonalelement steht. Durch Veränderung von b_1 kann zielgerichtet das Verhalten der ersten Regelgröße beeinflusst werden, wie Abb. 5.7 für $b_1 = 0, 0,5, 1$ und 2 zeigt. Durch die Vergrößerung von b_1 wird h_{w22} überhaupt nicht beeinflusst. Für $b_1 = 2$ erhält man die in Abb. 5.10 für $b = 2$ enthaltenen Kurven. Zweckmäßig ist jedoch ein Zwischenwert, beispielsweise $b_1 = 1$. Die Reglereinstellung führt damit auf einen PI-Regler mit den Reglermatrizen

$$\mathbf{K}_I = 0,015 \begin{pmatrix} 0,436 & -0,150 \\ 1,259 & 10,650 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0065 & -0,0024 \\ 0,0189 & 0,150 \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

$$\mathbf{K}_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,436 & -0,150 \\ 1,259 & 10,650 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,436 & -0,150 \\ 2,518 & 21,30 \end{pmatrix}. \quad (5.38)$$

Interessanterweise ist nun die durch h_{w12} beschriebene Querkopplung deutlicher als bei allen anderen Experimenten vom Einstellfaktor abhängig. Der Grund dafür ist, dass nicht

mehr mit Vielfachen der Inversen der Statikmatrix $\mathbf{K}_s$ als Reglermatrix gearbeitet wird und damit die im Abschn. 5.3 beschriebene Entkopplung wegfällt. Deshalb gehören auch die Kurven mit größerem Ausschlag von h_{w12} zu den kleineren Werten von b_1 . Für $b_1 = 2$ gilt $\mathbf{K}_P = 2\mathbf{K}_s^{-1}$, wodurch die Querkopplungen wieder vernachlässigbar klein sind.

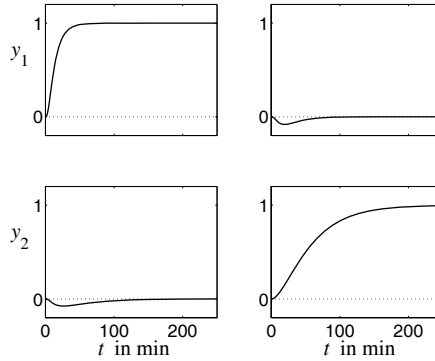


Abb. 5.8: Übergangsfunktionsmatrix der AHL-Anlage bezüglich der modifizierten Eingangsgröße $\tilde{\mathbf{K}}_s$

Diskussion. Das Beispiel illustriert einige der in den vorangegangenen Abschnitten erläuterten Merkmale der Reglereinstellung. Abbildung 5.8 zeigt die Übergangsfunktion der Regelstrecke bezüglich der modifizierten Eingangsgröße

$$\tilde{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{K}_s \mathbf{u}(t).$$

Abgesehen von der statischen Entkopplung ist auch das dynamische Übergangsverhalten gut entkoppelt. Diese Entkopplungseigenschaft kann man übrigens auch experimentell überprüfen, indem man mit $\tilde{\mathbf{u}}_1 = \sigma(t)$ bzw. $\tilde{\mathbf{u}}_2 = \sigma(t)$ arbeitet, also im ersten Experiment

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} 0,436 \\ 1,259 \end{pmatrix} \sigma(t)$$

und im zweiten Experiment

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} -0,150 \\ 10,650 \end{pmatrix} \sigma(t)$$

als Eingangsgrößen verwendet. Dann ändert sich nur jeweils eine der beiden Regelgrößen wesentlich und erreicht schließlich den statischen Endwert eins.

Wie im Abschn. 5.3 anhand der Abb. 5.2 auf S. 212 erläutert wurde, besteht das Problem der I-Reglereinstellung darin, dass die Integratoreigenwerte durch eine geeignete Wahl der Reglermatrix $\mathbf{K}_I$ in die linke komplexe Halbebene verschoben werden. Um eine gute Regelgüte zu erhalten, sollen die Eigenwerte weit nach links verschoben werden, ohne dass dabei jedoch Eigenwerte der Regelstrecke zu weit nach rechts wandern.

Die Veränderung der Eigenwerte in Abhängigkeit vom Tuningfaktor a kann man sich an der Wurzelortskurve ansehen, die für das bei der Simulation der AHL-Anlage verwendete Modell in Abb. 5.9 aufgezeichnet ist. Die Kurven zeigen die Lage der Eigenwerte des

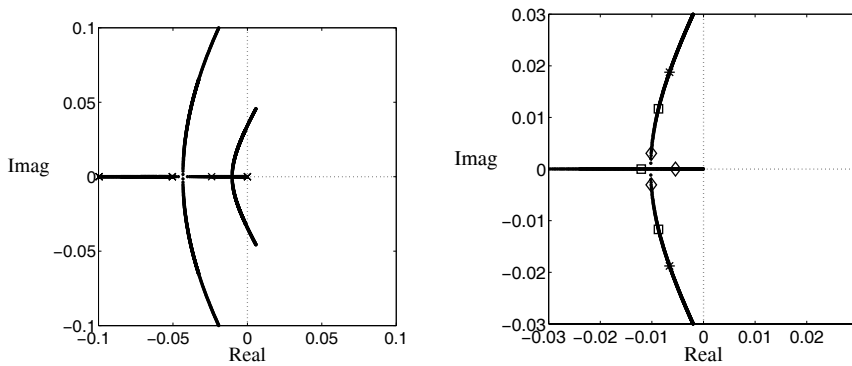


Abb. 5.9: Wurzelortskurve des I-geregelten Systems (links) und Ausschnitt mit Markierung der Eigenwerte für $a = 0,05$ ($\diamond$), $0,1$ ($\square$) und $0,2$ ($*$) (rechts)

geschlossenen Kreises für unterschiedliche Werte des Tuningfaktors a . Es ist gut zu erkennen, dass bei einer Erhöhung von a von null an die Integratoreigenwerte zunächst nach links wandern, sich dann jedoch mit anderen Eigenwerten zu einem konjugiert komplexen Paar vereinigen und bei weiterer Erhöhung von a instabil werden. Zu beachten ist bei der Interpretation des Bildes, dass einige Äste der Wurzelortskurve nicht nur einen, sondern mehrfache Eigenwerte darstellen. Dies ist für den Bereich um den Koordinatenursprung auch gar nicht anders zu erwarten, denn in der offenen Kette gibt es ja zwei Integratoren, also auch zwei Eigenwerte bei null.

Der Tuningfaktor a muss nun so gewählt werden, dass die Eigenwerte in der Nähe der „Verzweigungsstelle“ der beiden genannten Äste der Wurzelortskurve liegen, denn dort führen sie auf relativ schnelle, gut gedämpfte Eigenvorgänge. Für kleine Werte von a liegen die Eigenwerte auf der reellen Achse vor der Verzweigungsstelle und bewirken ein langsames Übergangsverhalten. Für zu große Werte des Einstellfaktors haben die Eigenwerte große Imaginärteile und bewirken daher Schwingungen im Übergangsverhalten. Da bei der Reglereinstellung am Prozess kein Modell der Regelstrecke verfügbar ist, kann man die in der Abbildung gezeigte Wurzelortskurve nicht zeichnen. Indem man jedoch unterschiedliche Werte von a ausprobiert, sieht man, wann die dominierenden Pole die beste Lage in der komplexen Ebene erreicht haben.

In dem hier gezeigten Beispiel liegt bei $a = 0,05$ ein Eigenwert bei $\diamond$ rechts des Verzweigungspunktes, während für $a = 0,1$ und $0,2$ zwei dominierende Eigenwerte $\square$ bzw. $*$ auf den beiden Ästen liegen (Abb. 5.9). Für den anhand der Führungsübergangsfunktionen ausgewählten Wert von $a = 0,015$ liegen Eigenwerte zwischen $\diamond$ und $\square$. Sie haben noch keinen großen Imaginärteil, so dass die zu ihnen gehörenden Eigenvorgänge gut gedämpft sind.

Durch die Verwendung des P-Anteiles im Regler kann das Übergangsverhalten schneller gemacht werden. Das sieht man aus der Wurzelortskurve, die für fest eingestellten I-Anteil $K_1 = 0,015 K_s^{-1}$ für unterschiedliche Werte des Tuningfaktors b in Abb. 5.10 zu sehen ist. Das dominierende Polpaar beginnt in den durch den I-Anteil festgelegten Werten und bewegt sich mit größer werdendem Tuningfaktor zunächst nach links, erhält aber bei weiterer Vergrößerung von b einen steigenden Imaginärteil, der sich in den Schwingungen der Übergangsfunktion in Abb. 5.6 bemerkbar macht. Gleichzeitig wandert ein anderer Pol zum Koordinatenursprung, in dem eine Nullstelle des I-geregelten Systems liegt. Die

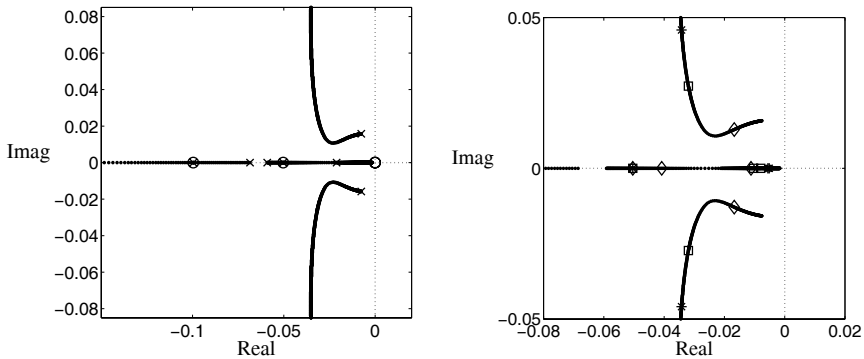


Abb. 5.10: Wurzelortskurve der PI-geregelten AHL-Anlage bezüglich des Tuningfaktors für den P-Anteil (links) und Ausschnitt mit Markierung der Eigenwerte für $b = 0,5$ ($\diamond$), 1 ($\square$) und 2 ($*$) (rechts)

Eigenwerte, die sich für die Werte $b = 0,5$, 1 und 2 des Einstellfaktors ergeben, sind in Abb. 5.10 (rechts) mit $\diamond$, $\square$ bzw. $*$ gekennzeichnet.

Bei der Wahl des Tuningfaktors b muss folglich ein Kompromiss gefunden werden, bei dem sämtliche Eigenwerte möglichst weit links liegen. Da die Wurzelortskurve ohne Modell nicht gezeichnet werden kann, muss man auch hier mehrere Werte für b erproben und anhand der gemessenen Führungsübergangsfunktionen einen günstigen Wert auswählen. $\square$

Das Beispiel zeigt, dass die Einstellregeln zwar nur bezüglich der Stabilität und Sollwertfolge des Regelkreises aufgestellt wurden, in der praktischen Anwendung aber auch einigen Spielraum für die Gestaltung des dynamischen Übergangsverhaltens bieten. Scharfe Anforderungen, wie sie typischerweise beim Reglerentwurf auftreten und mit Hilfe der Entwurfsverfahren auch behandelt werden können, sind jedoch mit Einstellverfahren nicht zu erfüllen.

Einstellregeln sind in der Praxis bei vielen „einfachen“ Regelungsaufgaben einsetzbar. Die modernen Technologien entscheidend beeinflussenden Regelungsprobleme erfüllen jedoch die im Abschn. 5.1 genannten Voraussetzungen i. Allg. nicht, so dass diese Probleme unter Verwendung von Regelstreckenmodellen und mit Hilfe von Entwurfsverfahren gelöst werden müssen.

Aufgabe 5.2 Einstellung der PI-Regelung für eine Klärschlammverbrennungsanlage

Bei der in Beispiel 4.4 beschriebenen Klärschlammverbrennungsanlage wird der für die vollständige Verbrennung des Klärschlammes notwendige Arbeitspunkt einerseits durch die Luftzufuhr in den Brennraum $u_2(t) = \dot{m}_L(t)$ (gemessen in $\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$) und andererseits durch Zuführung von Propangas $u_1(t) = \dot{m}_P(t)$ (gemessen in $\frac{\text{kg}}{\text{h}}$) eingestellt, durch dessen Verbrennung die Wärmeverluste ausgeglichen werden, die durch den Wassergehalt des Klärschlammes verursacht werden.

Das für die Zeiteinheit Sekunde geltende Modell

$$\mathbf{Y}(s) = \begin{pmatrix} \frac{454,8}{1125s+1} & \frac{8,8}{903s+1} \\ \frac{-44,88}{162s+1} & \frac{2,12}{180s+1} \end{pmatrix} \mathbf{U}(s)$$

ist für eine Versuchsanlage mit einer Höhe von 8 m und einem Durchmesser von 10 cm aufgestellt. Obwohl der Durchmesser der Versuchsanlage nur etwa einem Zehntel des Durchmessers der in der Praxis eingesetzten Anlagen entspricht, ist das regelungstechnische Verhalten ähnlich dem technischer Großanlagen.

Stellen Sie mit Hilfe des im Abschn. 5.5 angegebenen Programms einen PI-Regler ein, für den der Regelkreis stabil ist und die Führungsübergangsfunktionen möglichst schnell und mit geringer Überschwingweite den Sollwert erreichen. $\square$

5.4 Robustheit des eingestellten PI-Reglers

Das beschriebene Einstellverfahren führt auf PI-Regler, die gegenüber erheblichen Modellunsicherheiten robust sind. Die Robustheit ist bereits aus der Tatsache ersichtlich, dass gar kein dynamisches Modell der Regelstrecke für die Festlegung der Reglerparameter verwendet wird. Wählt man die Tuningparameter nur hinreichend klein, so ist der Regelkreis mit Sicherheit stabil, und zwar nicht nur für diejenigen Streckeneigenschaften, die bei den Experimenten aus den gemessenen Übergangsfunktionen ersichtlich sind, sondern auch bei Veränderungen dieser Eigenschaften infolge von Parameteränderung oder Verschiebungen des Arbeitspunktes.

Als genau vorausgesetzt wurde bisher lediglich das statische Modell

$$\mathbf{y} = \mathbf{K}_s \mathbf{u}.$$

Im Folgenden wird gezeigt, dass auch dieses Modell nur mit einer bestimmten Genauigkeit bekannt sein muss, wobei interessanterweise eine explizite Schranke für denjenigen Modellfehler angegeben werden kann, für den die Existenz eines robusten PI-Reglers gerade noch gesichert ist. Zur Vereinfachung der Darstellung werden im Folgenden nur Regelstrecken mit gleicher Anzahl von Stell- und Regelgrößen betrachtet ($m = r$).

Statisches Modell mit Unsicherheiten. Aufgrund von Modellunsicherheiten wird die Statikmatrix durch einen Näherungswert $\hat{\mathbf{K}}_s$ beschrieben, der vom wahren Wert $\mathbf{K}_s$ um den Fehler $\delta\mathbf{K}_s$ abweicht:

$$\mathbf{K}_s = \hat{\mathbf{K}}_s + \delta\mathbf{K}_s. \quad (5.39)$$

Mit $\hat{\mathbf{K}}_s$ anstelle von $\mathbf{K}_s$ erhält man als Näherungsmodell für das statische Verhalten der Regelstrecke die Beziehung

$$\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{K}}_s \mathbf{u}.$$

Es wird ferner angenommen, dass die Modellunsicherheit $\delta \mathbf{K}_s$ durch eine obere Schranke abgeschätzt werden kann. Es sei also eine Matrix $\bar{\mathbf{K}}_s$ bekannt, mit der die Bedingung

$$|\delta \mathbf{K}_s| \leq \bar{\mathbf{K}}_s \quad (5.40)$$

erfüllt ist. In Gl. (5.40) gilt sowohl die Betragsbildung $|\cdot|$ als auch das Relationszeichen $\leq$ elementweise. Die obere Schranke $\bar{\mathbf{K}}_s$ kann man beispielsweise dadurch ermitteln, dass man die Übergangsfunktionen der Regelstrecke mehrfach misst und für die dabei erhaltenen unterschiedlichen Endwerte k_{sij} der Übergangsfunktionen h_{ij} ein Intervall festlegt. $\hat{k}_{sij}$ ist dann die Mitte dieses Intervalls und $2\bar{k}_{sij}$ die Intervallbreite.

Die Gln. (5.39) und (5.40) beschreiben für gegebene Matrizen $\hat{\mathbf{K}}_s$ und $\bar{\mathbf{K}}_s$ die Menge

$$\mathcal{K}_s = \{\hat{\mathbf{K}}_s + \delta \mathbf{K}_s : |\delta \mathbf{K}_s| \leq \bar{\mathbf{K}}_s\}$$

von Statikmatrizen. Es ist nur bekannt, dass $\mathbf{K}_s$ in dieser Menge liegt

$$\mathbf{K}_s \in \mathcal{K}_s.$$

Festlegung der Reglermatrix. Es wird wieder mit der I-Reglermatrix

$$\mathbf{K}_I = a \tilde{\mathbf{K}}_I$$

gearbeitet. Die Matrix $\tilde{\mathbf{K}}_I$ muss so festgelegt werden, dass die Gl. (5.28) für alle $\mathbf{K}_s \in \mathcal{K}_s$ erfüllt ist:

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i\{\mathbf{K}_s \tilde{\mathbf{K}}_I\}\} > 0 \quad \text{für alle } \mathbf{K}_s \in \mathcal{K}_s \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (5.41)$$

Dies gelingt auf folgende Weise. Man wendet die Vorschrift (5.30) für die Wahl von $\tilde{\mathbf{K}}_I$ auf den Näherungswert $\hat{\mathbf{K}}_s$ an, was auf

$$\tilde{\mathbf{K}}_I = \hat{\mathbf{K}}_s^{-1} \quad (5.42)$$

führt. Die Matrix $\hat{\mathbf{K}}_s$ muss regulär sein, weil andernfalls die Existenzbedingung (5.10) für das Nahrungsmodell nicht erfüllt ist. Nun ist nachzuweisen, dass diese Reglermatrix die Bedingung (5.41) auch für alle anderen Statikmatrizen $\mathbf{K}_s \in \mathcal{K}_s$ erfüllt.

Dieser Nachweis erfordert eine kurze Rechnung, die hier im Einzelnen ausgeführt wird, weil sie typisch für Robustheitsuntersuchungen an Mehrgrößensystemen ist. Zunächst ist offensichtlich, dass die entsprechend Gl. (5.42) gewählte Matrix die Bedingung (5.41) für $\mathbf{K}_s = \hat{\mathbf{K}}_s$ erfüllt, denn es gilt

$$\hat{\mathbf{K}}_s \tilde{\mathbf{K}}_I = \mathbf{I}.$$

Für alle anderen Elemente von $\mathcal{K}_s$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_s \tilde{\mathbf{K}}_I &= (\hat{\mathbf{K}}_s + \delta \mathbf{K}_s) \hat{\mathbf{K}}_s^{-1} \\ &= \mathbf{I} + \delta \mathbf{K}_s \hat{\mathbf{K}}_s^{-1} \end{aligned}$$

und folglich

$$\lambda_i\{\mathbf{K}_s \tilde{\mathbf{K}}_I\} = 1 + \lambda_i\{\delta \mathbf{K}_s \hat{\mathbf{K}}_s^{-1}\}.$$

Kann man nun nachweisen, dass

$$|\lambda_i\{\delta \mathbf{K}_s \hat{\mathbf{K}}_s^{-1}\}| < 1 \quad (i = 1, \dots, m) \quad (5.43)$$

gilt, so ist die Bedingung (5.41) erfüllt.

Für eine beliebige (m, m) -Matrix $\mathbf{A}$ gilt

$$|\lambda_i\{\mathbf{A}\}| \leq \max_{i=1, \dots, m} \lambda_i\{|\mathbf{A}|\} = \lambda_P\{|\mathbf{A}|\}.$$

Da es sich bei $|\mathbf{A}|$ um eine nichtnegative Matrix handelt, ist die rechte Seite gleich der Perronwurzel λ_P dieser Matrix. Die Perronwurzel hat eine Reihe wichtiger Eigenschaften, die insbesondere ihre Berechnung erleichtern (vgl. Abschn. A2.8).

Wendet man diese Beziehungen auf die linke Seite von Gl. (5.43) an, so erhält man

$$|\lambda_i\{\delta \mathbf{K}_s \hat{\mathbf{K}}_s^{-1}\}| \leq \lambda_P\{|\delta \mathbf{K}_s \hat{\mathbf{K}}_s^{-1}|\}.$$

Eine weitere Umformung ist unter Ausnutzung der Monotonieeigenschaft (A2.93) der Perronwurzel möglich. Je größer die betrachtete nichtnegative Matrix ist, desto größer ist auch ihr größter Eigenwert. Es gilt deshalb

$$\begin{aligned} \lambda_P\{|\delta \mathbf{K}_s \hat{\mathbf{K}}_s^{-1}|\} &\leq \lambda_P\{|\delta \mathbf{K}_s| |\hat{\mathbf{K}}_s^{-1}|\} \\ &\leq \lambda_P\{\bar{\mathbf{K}}_s |\hat{\mathbf{K}}_s^{-1}|\}. \end{aligned}$$

Damit hat man eine hinreichende Bedingung für die Erfüllung der Bedingung (5.43) und folglich für (5.41) erhalten:

Schranke für die Modellunsicherheiten: $\lambda_P\{\bar{\mathbf{K}}_s |\hat{\mathbf{K}}_s^{-1}|\} < 1$

(5.44)

Diese Gleichung beschreibt eine Schranke für die zulässigen Unsicherheiten in der Beschreibung des statischen Verhaltens der Regelstrecke, für die die Einstellregeln anwendbar sind. Ist diese Bedingung erfüllt, so kann die Matrix $\tilde{\mathbf{K}}_I$ entsprechend der Vorschrift (5.42) gewählt werden. Es ist dann gesichert, dass die Integratoreigenwerte für kleine Einstellwerte a in die linke komplexe Halbebene wandern und folglich der Regelkreis stabil ist. Diese Aussage gilt unabhängig davon, welches Element der Menge $\mathcal{K}_s$ die Statikmatrix der Regelstrecke beschreibt.

Die Aussagen des Satzes 5.2 gelten also mit $\hat{\mathbf{K}}_s$ anstelle von $\mathbf{K}_s$, wenn die Modellunsicherheiten die Bedingung (5.44) erfüllen. Folglich kann das Entwurfsverfahren 5.1 auch dann angewendet werden, wenn das statische Verhalten der Regelstrecke nicht genau bekannt ist und in den durch $\bar{\mathbf{K}}_s$ beschriebenen Grenzen um $\hat{\mathbf{K}}_s$ liegt.

Beispiel 5.2 Existenz von PI-Reglern für einen Biogasreaktor

Am Beispiel eines Biogasreaktors soll die Bedingung (5.44) interpretiert werden. Für Eingrößensysteme erhält man als Schranke für die Modellunsicherheiten

$$\bar{k}_s < \left| \hat{k}_s \right|. \quad (5.45)$$

Das heißt, die Menge $\mathcal{K}_s$ muss ein Intervall darstellen, das die Null nicht einschließt. Es muss also das Vorzeichen der statischen Verstärkung bekannt sein.

Diese Bedingung soll für einen Biogasreaktor diskutiert werden, bei dem es darauf ankommt, die Gasproduktion durch Einstellung eines günstigen pH -Wertes zu maximieren. Eingangsgröße der Regelstrecke ist der Sollwert für eine unterlagerte Regelung, die den gewünschten pH -Wert einstellt. Für die statische Betrachtung des Reaktors stimmt der pH -Wert mit der Stellgröße überein. Regelgröße ist die Gasproduktion.

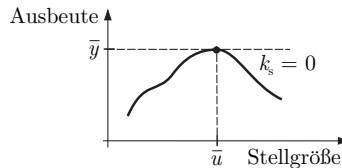


Abb. 5.11: Statisches Verhalten von Reaktoren

Auf Grund der Kinetik hängt die Gasproduktion nichtlinear vom pH -Wert ab, wobei sich die in Abb. 5.11 gezeigte statische Beziehung zwischen Stell- und Regelgröße ergibt. Da man nun interessiert ist, die maximale Ausbeute zu erhalten, wird man einen Arbeitspunkt $(\bar{u}, \bar{y})$ in der Nähe des Maximalwertes der Kurve wählen.

Die Bedingung (5.45) zeigt, dass sich dieser Arbeitspunkt nicht stabilisieren lässt. Um den Arbeitspunkt bei sprungförmigen Störungen einhalten zu können, muss man einen Regler mit I-Anteil verwenden. Dieser Regler existiert nur dann, wenn das Vorzeichen der Statik k_s bekannt ist. Um die für den Reglerentwurf verwendeten Modelle zu erhalten, führt man eine Linearisierung um den aktuellen Arbeitspunkt durch. Die Neigung der Tangente an die in Abb. 5.11 gezeigte Kurve im Arbeitspunkt beschreibt dann die statische Verstärkung der Regelstrecke. Offensichtlich ist die Neigung dieser Tangente rechts vom angestrebten Arbeitspunkt $(\bar{u}, \bar{y})$ negativ, links davon positiv. Das Vorzeichen der statischen Verstärkung ist also nicht bekannt. Es existiert kein PI-Regler, der den gewünschten Arbeitspunkt bei hinreichend kleiner Reglerverstärkung stabilisiert.

Diskussion. Die beschriebene Problematik tritt stets auf, wenn man die Ausbeute einer Anlage maximieren und den dafür ermittelten Arbeitspunkt mit Hilfe von nur einer Stellgröße gegenüber von sprungförmigen Störungen stabilisieren will. Als Ausweg bleibt hier aus regelungstechnischen Erwägungen nur, auf die maximale Ausbeute zu verzichten und den Arbeitspunkt soweit rechts bzw. links vom Maximum zu wählen, dass Störungen das System nicht auf die andere Seite des Maximums auslenken können. Andernfalls kann die Stabilität des Regelkreises (und damit auch die Ausbeute) nicht gesichert werden. Ein anderer Ausweg besteht in der Nutzung weiterer Stellgrößen bezüglich derer die statische Verstärkung der Regelstrecke im gewünschten Arbeitspunkt nicht verschwindet.

Man sollte beachten, dass die Bedingung (5.45), die für Eingrößenregelungen gilt, nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig ist. Wenn sie verletzt ist, kann man die Reglerver-

stärkung nicht so wählen, dass die Gegenkopplungsbedingung (5.9) für die gesamte Umgebung $\mathcal{K}_s$ des festgelegten Arbeitspunktes erfüllt ist. $\square$

Aufgabe 5.3** <i>I-Mehrgrößenregelung bei unvollständig bekannter Statik der Strecke</i>

Weisen Sie nach, dass die Existenzbedingung (5.10) für alle $K_s \in \mathcal{K}_s$ erfüllt ist, wenn $\tilde{K}_s$ regulär und die Bedingung (5.44) erfüllt ist. $\square$

5.5 MATLAB-Programm zur Reglereinstellung

Die in diesem Kapitel beschriebenen Einstellregeln können natürlich nicht nur am Prozess selbst, sondern auch an Simulationsmodellen erprobt bzw. für eine schnelle Festlegung eines PI-Mehrgrößenreglers bei Vorhandensein eines Regelstreckenmodells verwendet werden. Dafür sind keine neuen MATLAB-Funktionen notwendig. Die im Entwurfsverfahren 5.1 angegebenen Schritte können direkt in Funktionsaufrufe übersetzt werden, wie das Programm 5.1 zeigt.

Aufgabe 5.4** <i>Reglereinstellung</i>

Erweitern Sie das Programm 5.1 so, dass nicht nur der Verlauf der Führungsübergangsfunktionen, sondern auch der Verlauf der Stellgrößen bei der Bewertung der Regelgüte herangezogen werden kann. $\square$

Literaturhinweise

Die Erweiterung der Einstellregeln für einschleifige Regelkreise auf Mehrgrößenregler begann mit der Arbeit [17] von DAVISON 1976. Die Existenzbedingung (5.10) für Mehrgrößen-I-Regler sowie deren Erweiterung auf Strecken mit unvollständig bekannter Statik wurden von LUNZE in [66] angegeben und in [69] und [67] auf Einstellregeln für PI-Mehrgrößenregler bzw. auf eine Existenzbedingung für dezentrale PI-Regler erweitert. Unabhängig davon wurde von MORARI in [36] die Eigenschaft der integralen Steuerbarkeit (*integral controllability*) eingeführt, die eine Regelstrecke genau dann besitzt, wenn sie die Existenzbedingung (5.10) erfüllt.

Das Beispiel 5.1 beruht auf der in [73] beschriebenen praktischen Anwendung der Einstellregel.

Erweiterungen der Einstellregeln auf dezentrale I-Regler wurden in [18] vorgenommen.

Programm 5.1 *Einstellung von PI-Mehrgrößenreglern*

Voraussetzungen für die Anwendung des Programms:

- Die Regelstrecke hat dieselbe Zahl von Stell- und Regelgrößen.
- Den Matrizen A, B, C und D sowie den Parametern n und m sind bereits Werte zugewiesen.
- D ist eine Nullmatrix entsprechender Dimension.

Prüfung der Voraussetzungen zur Reglereinstellung

```

» System=ss(A, B, C, D);
» eig(A)                                Stabilitätsprüfung der Regelstrecke
» Ks = dcgain(System);
» rank(Ks)                              Prüfung der Existenzbedingung

» step(System);                          Übergangsfunktionen der Regelstrecke
» Ksinv = inv(Ks);

```

Einstellung des I-Anteiles

```

» a = ...;                              Festlegung des Tuningfaktors a
» KI = a*Ksinv;
» Ag = [A -B*KI; C zeros(m,m)];
» Bg = [zeros(n,m); -eye(m,m)];
» Cg = [C zeros(m,m)];
» Dg = zeros(m,m);
» Kreis=ss(Ag, Bg, Cg, Dg);
» step(Kreis);                          Führungsübergangsfunktionen (I-Regelkreis)

```

Einstellung des P-Anteiles

```

» b = ...;                              Festlegung des Tuningfaktors b
» KP = b*Ksinv;
» Ag = [A-B*KP*C -B*KI; C zeros(m,m)];
» Bg = [B*KP; -eye(m,m)];
» PIKreis=ss(Ag, Bg, Cg, Dg);
» step(PIKreis);                        Führungsübergangsfunktionen (PI-Regelkreis)

```

6

Reglerentwurf zur Polzuweisung

Da die Eigenwerte des geschlossenen Kreises die Eigenbewegung und das E/A-Verhalten entscheidend beeinflussen, versucht man bei den in diesem Kapitel behandelten Entwurfsverfahren, diesen Eigenwerten durch eine geeignete Wahl der Reglerparameter vorgegebene Werte zuzuweisen. Es werden die entsprechenden Berechnungsvorschriften für Zustandsrückführungen angegeben, die Existenzbedingungen derartiger Regler diskutiert sowie Erweiterungen untersucht, bei denen die Zustandsrückführung durch eine technisch einfacher realisierbare Ausgangsrückführung ersetzt wird.

6.1 Zielstellung

Es wird eine lineare Regelstrecke in Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

betrachtet und eine Zustandsrückführung

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{V}\mathbf{w}(t) \tag{6.1}$$

gesucht, für die die Systemmatrix

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$$

des geschlossenen Kreises

$$\dot{x}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})x(t) + \mathbf{BV}w(t) \quad (6.2)$$

$$y(t) = \mathbf{C}x(t) \quad (6.3)$$

vorgegebene Eigenwerte besitzt. Die Motivation für diese Vorgehensweise ist in der schon mehrfach behandelten Tatsache begründet, dass sowohl die freie Bewegung des Regelkreises als auch das Übergangsverhalten in entscheidender Weise durch die Eigenwerte des geschlossenen Kreises geprägt werden. Beide Bewegungen lassen sich als Summe von Exponentialfunktionen $e^{\lambda_i t}$ darstellen, wobei $\bar{\lambda}_i$ die Eigenwerte von $\bar{\mathbf{A}}$ bezeichnen (vgl. Abschn. 2.4.3).

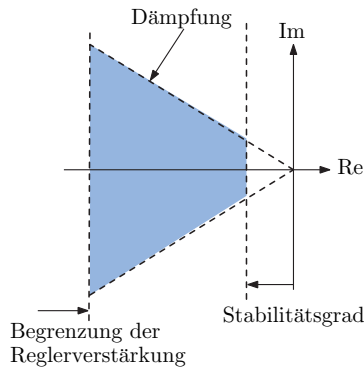


Abb. 6.1: Gebiet für die Eigenwerte des geregelten Systems

Mit der Zielstellung, die Eigenwerte des Regelkreises geeignet in der komplexen Ebene zu platzieren, sind die im Folgenden behandelten Verfahren dem für einschleifige Regelkreise im Kap. I-10 behandelten Vorgehen sehr ähnlich. Dort wurde mit Hilfe der Wurzelortskurve des geschlossenen Kreises die Reglerverstärkung so ausgewählt, dass die dominierenden Pole des Regelkreises in vorgegebenen Gebieten liegen. Dabei wurde allerdings nur ein freier Reglerparameter k betrachtet, nachdem möglicherweise dynamische Glieder des Reglers anhand struktureller Überlegungen bezüglich der entstehenden Wurzelortskurve festgelegt worden waren.

Die Erweiterung der Zielstellung bei dem hier behandelten Verfahren besteht in der gleichzeitigen Betrachtung aller n Eigenwerte des Regelkreises in Abhängigkeit von allen Reglerparametern, die in der (m, n) -Matrix $\mathbf{K}$ angeordnet sind. Als „Zielgebiet“ wählt man den in Abb. 6.1 angegebenen Teil der linken komplexen Halbebene, der wie die Vorgaben beim Wurzelortkurvenverfahren durch den gewünschten Mindeststabilitätsgrad, die Mindestdämpfung sowie eine Begrenzung der Reglerverstärkung zur Unterdrückung des Messrauschens bestimmt ist. Aus diesem Gebiet werden n Werte ausgewählt, und es wird sich zeigen, dass die Reglermatrix $\mathbf{K}$ so festgelegt werden kann, dass die Eigenwerte des geschlossenen Kreises gerade diese Werte haben.

Da jetzt alle Eigenwerte des Systems gleichzeitig betrachtet werden, muss nicht mehr ein dominierendes Polpaar erzeugt werden, bezüglich dessen alle anderen Eigenwerte „weit links“ liegen. Die Eigenwertvorgaben können besser den in der Regelstrecke vorhandenen und den aus den Güteforderungen ableitbaren Eigenwerten angepasst werden.

Der Preis für die größere Flexibilität der Regelung liegt darin, dass für die Realisierung des Reglers (6.1) sämtliche Zustandsvariablen x_i gemessen werden müssen. Diese Messbarkeit des Zustandes kann hier vorausgesetzt werden, weil im Kap. 8 gezeigt wird, wie diese Voraussetzung durch Nutzung von Beobachtern umgangen werden kann.

Für die genannte Zielstellung ist eine Vielzahl von Entwurfsverfahren entwickelt worden. Im Folgenden werden nur einige wichtige Verfahren beschrieben und an Beispielen illustriert. Diese Verfahren sind unter verschiedenen Bezeichnungen in der Literatur veröffentlicht worden, von denen sich die meisten wie „Polvorgabe“ oder „Polverschiebung“ auf die Pole des geschlossenen Kreises beziehen, obwohl die Entwurfsverfahren mit der Zustandsraumdarstellung arbeiten und folglich die Eigenwerte der Systemmatrix (und nicht nur die Pole der Übertragungsfunktionsmatrix) zielgerichtet verändern. Es hat sich auch der Begriff Polzuweisung eingebürgert, der eine Übersetzung der englischen Bezeichnung *pole assignment* ist und den Umstand verdeutlicht, dass den Eigenwerten der Regelstrecke durch die Zustandsrückführung neue Werte, die sie im Regelkreis annehmen, zugewiesen werden. Diese Vorstellung darf jedoch nicht darüber hinwegtäuschen, dass man den Eigenwerten des Regelkreises nicht ohne weiteres bestimmte Eigenwerte der Regelstrecke zuordnen kann, aus denen sie „entstanden“ sind.

6.2 Polzuweisung durch Zustandsrückführung

6.2.1 Polzuweisung für Systeme in Regelungsnormform

Das Polverschiebungsverfahren wird zunächst für Regelstrecken mit einer Stellgröße erläutert, deren Zustandsraummodell in Regelungsnormform (I-5.69) bis (I-5.72)

$$\dot{\mathbf{x}}_R(t) = \mathbf{A}_R \mathbf{x}_R(t) + \mathbf{b}_R u(t), \quad \mathbf{x}_R(0) = \mathbf{x}_0 \quad (6.4)$$

$$y(t) = \mathbf{c}'_R \mathbf{x}_R(t) + du(t) \quad (6.5)$$

mit

$$\mathbf{A}_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

$$\mathbf{b}_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

$$\mathbf{c}'_R = (c_1, c_2, \dots, c_n) \quad (6.8)$$

vorliegt. In der Matrix $\mathbf{A}_R$ stehen die Koeffizienten a_i des charakteristischen Polynoms der Regelstrecke:

$$p(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_R) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0. \quad (6.9)$$

Sind die Koeffizienten b_i ($i = 1, \dots, q$) der das System beschreibenden Differenzialgleichung bekannt, so können $\mathbf{c}'_R$ und d_R für $q = n$ aus

$$\mathbf{c}'_R = (b_0 - b_n a_0, b_1 - b_n a_1, \dots, b_{n-1} - b_n a_{n-1}) \quad (6.10)$$

$$d_R = b_n \quad (6.11)$$

bestimmt werden. Für nicht sprungfähige Systeme hat $\mathbf{c}'_R$ die einfachere Form

$$\mathbf{c}'_R = (b_0 \quad b_1 \dots b_q \quad 0 \dots 0). \quad (6.12)$$

Durch die Zustandsrückführung

$$u(t) = -\mathbf{k}'_R \mathbf{x}_R(t) \quad (6.13)$$

sollen Eigenwerte des geschlossenen Kreises erzeugt werden, die die durch die Menge

$$\bar{\sigma} = \{\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n\}$$

vorgegebenen Werte haben. Den Vektor

$$\mathbf{k}'_R = (k_{R1}, k_{R2}, \dots, k_{Rn})$$

kann man bestimmen, indem man zunächst das Modell des geschlossenen Kreises (6.4), (6.13) aufschreibt

$$\dot{\mathbf{x}}_R(t) = (\mathbf{A}_R - \mathbf{b}_R \mathbf{k}'_R) \mathbf{x}_R(t) = \bar{\mathbf{A}}_R \mathbf{x}_R(t), \quad (6.14)$$

wobei man für die Systemmatrix die Beziehung

$$\bar{\mathbf{A}}_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 - k_{R1} & -a_1 - k_{R2} & -a_2 - k_{R3} & \cdots & -a_{n-1} - k_{Rn} \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

erhält. Es entsteht also wieder eine Systemmatrix in Frobeniusform.

Aus der Matrix (6.15) können in der letzten Zeile die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms des geschlossenen Kreises abgelesen werden. Da die Menge $\bar{\sigma}$ der Eigenwerte des Regelkreises vorgeben ist, sind auch die Koeffizienten des entsprechenden charakteristischen Polynoms bekannt, denn es gilt

$$\begin{aligned}\bar{p}(\lambda) &= \det(\lambda \mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{\text{R}}) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \bar{\lambda}_i) \\ &= \lambda^n + \bar{a}_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \bar{a}_1 \lambda + \bar{a}_0,\end{aligned}\quad (6.16)$$

woraus die Koeffizienten $\bar{a}_i$ abgelesen werden können. Für $\bar{\mathbf{A}}_{\text{R}}$ müssen folglich die Beziehungen

$$\begin{aligned}-\bar{a}_0 &= -a_0 - k_{\text{R}1} \\ -\bar{a}_1 &= -a_1 - k_{\text{R}2} \\ -\bar{a}_2 &= -a_2 - k_{\text{R}3} \\ &\vdots \\ -\bar{a}_{n-1} &= -a_{n-1} - k_{\text{R}n}\end{aligned}$$

gelten, damit der Regelkreis die gewünschten Eigenwerte besitzt. Stellt man diese Beziehungen um, so erhält man die Reglerparameter nach folgender Beziehung:

Zustandsrückführung: $\mathbf{k}'_{\text{R}} = (\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n-1}) - (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$

(6.17)

Diese Gleichung zeigt, dass die Reglerparameter bei Verwendung der Regelungsnormalform gerade die Differenzen zwischen den gewünschten Koeffizienten des charakteristischen Polynoms des Regelkreises und den Koeffizienten des charakteristischen Polynoms der Regelstrecke sind. Für eine gegebene Regelstrecke ändert sich der Regler linear mit den vorgegebenen Koeffizienten des Regelkreispolynoms. Je mehr diese Koeffizienten von denen der Regelstrecke abweichen, umso größer sind die Reglerparameter, d. h., umso mehr verändert der Regler die Dynamik der Strecke.

Es ist dieser Zusammenhang, der die linke Begrenzung des in Abb. 6.1 grau eingetragenen „Zielgebietes“ für die Polzuweisung bestimmt. Je weiter links die Eigenwerte des Regelkreises liegen sollen, umso größer sind die Elemente der Zustandsrückführung $\mathbf{k}'_{\text{R}}$ und umso stärker wird folglich das der Zustandsmessung überlagerte Messrauschen verstärkt. Begrenzt man die akzeptable Verstärkung bzw. bezieht man die Stellgrößenbeschränkungen in die Betrachtungen ein, so wird offensichtlich, dass man die Eigenwerte des Regelkreises nicht beliebig weit von denen der Regelstrecke platzieren kann.

6.2.2 Erweiterung auf beliebige Modellform

Liegt das Modell der Regelstrecke nicht in Regelungsnormalform, sondern in beliebiger Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (6.18)$$

vor, so kann der beschriebene Lösungsweg angewendet werden, wenn man das Modell zunächst in die geforderte Normalform überführt. Die dafür notwendige Zustandstransformation

$$\mathbf{x}_R(t) = \mathbf{T}_R^{-1}\mathbf{x}(t)$$

ist im Abschn. I-5.3.5 beschrieben. Für die Transformationsmatrix gilt Gl. (I-5.75)

$$\mathbf{T}_R = \begin{pmatrix} s'_R \\ s'_R \mathbf{A} \\ s'_R \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ s'_R \mathbf{A}^{n-1} \end{pmatrix}^{-1}, \quad (6.19)$$

wobei

$$\mathbf{s}'_R = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1) \mathbf{S}_S^{-1}$$

die letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix $\mathbf{S}_S$ ist.

Um die Modelltransformation zu umgehen, kann man auch Gl. (6.13) transformieren

$$u(t) = -\mathbf{k}'_R \mathbf{x}_R(t) = -\mathbf{k}'_R \mathbf{T}_R^{-1} \mathbf{x}(t),$$

wodurch man für die gesuchte Zustandsrückführung

$$u(t) = -\mathbf{k}' \mathbf{x}(t) \quad (6.20)$$

die Beziehung

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k}'_R \mathbf{T}_R^{-1} = ((\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n-1}) - (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})) \mathbf{T}_R^{-1} \quad (6.21)$$

erhält. Wollte man diese Beziehung anwenden, so müsste man zur Berechnung von $\mathbf{k}'$ zunächst $\mathbf{k}'_R$ und $\mathbf{T}_R$ ausrechnen. Dies kann man sich dadurch ersparen, dass man Gl. (6.19) direkt einsetzt, woraus man

$$\mathbf{k}' = (\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n-1}) \begin{pmatrix} s'_R \\ s'_R \mathbf{A} \\ s'_R \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ s'_R \mathbf{A}^{n-1} \end{pmatrix} - (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \begin{pmatrix} s'_R \\ s'_R \mathbf{A} \\ s'_R \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ s'_R \mathbf{A}^{n-1} \end{pmatrix}$$

erhält. Der zweite Ausdruck kann in der Form

$$s'_R (a_0 \mathbf{A}^0 + a_1 \mathbf{A} + \dots + a_{n-1} \mathbf{A}^{n-1})$$

geschrieben werden. Entsprechend dem Cayley-Hamilton-Theorem (A2.45) ist die in der Klammer stehende Summe gleich $-\mathbf{A}^n$. Setzt man diesen Wert ein, so erhält man für den Regler die Beziehung

ACKERMANN-Formel:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}' &= (\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{n-1}, 1) \begin{pmatrix} s'_R \\ s'_R \mathbf{A} \\ s'_R \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ s'_R \mathbf{A}^{n-1} \\ s'_R \mathbf{A}^n \end{pmatrix} \\
 &= s'_R (\bar{a}_0 \mathbf{I} + \bar{a}_1 \mathbf{A} + \dots + \bar{a}_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n).
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

Die von ACKERMANN abgeleitete Formel stellt einen direkten Zusammenhang zwischen den gewünschten Koeffizienten des charakteristischen Regelkreispolynoms und den Eigenschaften der Regelstrecke her. Von der Regelstrecke gehen die letzte Zeile s'_R der invertierten Steuerbarkeitsmatrix sowie die Matrix $\mathbf{A}$ in diese Beziehung ein. Will man die Zustandsrückführung für unterschiedliche Eigenwertvorgaben ausrechnen, so sollte man dafür die erste Darstellung verwenden, denn in ihr ändert sich dann nur der Zeilenvektor mit den Polynomkoeffizienten.

Entwurfsverfahren 6.1 Entwurf einer Zustandsrückführung

Voraussetzungen:

- Die Regelstrecke ist vollständig steuerbar.
 - Die Regelstrecke hat nur eine Stellgröße ($m = 1$).
 - Die Güteforderungen betreffen nur die Eigenbewegung des Regelkreises bzw. das Übergangsverhalten des Regelkreises.
1. Anhand der Güteforderungen an die Eigenbewegung des Regelkreises werden Werte für die Pole des geschlossenen Kreises festgelegt.
 2. Die Reglerparameter werden mit Gl. (6.22) berechnet.
 3. Es wird das Modell des geschlossenen Regelkreises (6.18), (6.20) berechnet.
 4. Die Eigenbewegung des Regelkreises wird für verschiedene Anfangszustände berechnet und anhand der gegebenen Güteforderungen bewertet. Sind die Güteforderungen nicht erfüllt, so werden die Schritte 1–4 unter Verwendung anderer Vorgaben für die Pole des geschlossenen Kreises wiederholt.

Ergebnis: Zustandsrückführung

6.2.3 Diskussion der Lösung

Die angegebene Lösung des Entwurfsproblems zeigt mehrere Eigenschaften von Zustandsrückführungen, die für beliebige Regelstrecken gelten und unabhängig davon sind, ob das Modell in Regelungsnormalform vorliegt oder nicht.

Die erste Aussage ist so wichtig, dass sie als Satz formuliert wird:

Satz 6.1 (Polverschiebbarkeit)

Wenn das System (A, b) vollständig steuerbar ist, so können die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises durch eine Zustandsrückführung (6.20) beliebig festgelegt werden.

Die Aussage, dass die Eigenwerte „beliebig“ vorgegeben werden können, ist an die Einschränkung geknüpft, dass komplexe Eigenwerte in der Menge $\bar{\sigma}$ als konjugiert komplexe Werte in derselben Häufigkeit auftreten. Diese Einschränkung ist jedoch so selbstverständlich, dass sie im Folgenden nicht jedesmal erwähnt wird.

Die Forderung nach vollständiger Steuerbarkeit trat in den bisherigen Betrachtungen nicht explizit, sondern nur implizit auf. Da die Regelungsnormform nur den vollständig steuerbaren Teil der Regelstrecke erfasst, gelten alle bisherigen Betrachtungen nur dann für die gesamte Regelstrecke, wenn diese vollständig steuerbar ist. Beim Entwurf mit Hilfe eines beliebigen Modells war die Steuerbarkeitsforderung in der Tatsache versteckt, dass die Transformationsmatrix (6.19) existieren muss.

Aus Satz 6.1 erhält man mehrere wichtige Schlussfolgerungen:

Ist die Regelstrecke als Ganzes zwar nicht vollständig steuerbar, gehören jedoch alle instabilen Eigenwerte zum steuerbaren Teil, so kann die Regelstrecke durch eine Zustandsrückführung stabilisiert werden. Aus diesem Grunde werden derartige Regelstrecken „stabilisierbar“ genannt (vgl. S. 114).

Man muss dann das bisher behandelte Entwurfsverfahren nur auf den steuerbaren Teil anwenden und für den entstehenden Regelkreis Eigenwerte mit negativem Realteil vorgeben.

Um die Eigenwerte des Regelkreises beliebig platzieren zu können, reicht eine Stellgröße aus, wenn die Regelstrecke über diese Stellgröße vollständig steuerbar ist.

Mit anderen Worten: Die durch den n -dimensionalen Vektor k gegebenen n Freiheitsgrade für die Wahl der Reglerparameter sind ausreichend, um sämtliche Eigenwerte beliebig festzulegen. Es gibt also nur geringe Forderungen bezüglich der Stellgrößen. In Bezug auf die Messgrößen ist natürlich die Forderung zu erfüllen, dass alle Zustandsvariablen messbar sind.

Erst wenn man mehr mit dem Regler erreichen will, als nur die Eigenwerte zu verschieben, braucht man mehr als eine Stellgröße (vgl. Abschn. 6.3.2).

Abhängigkeit der Koeffizienten der charakteristischen Gleichung von den Reglerparametern. Die Ackermannformel (6.22) kann man auch „rückwärts lesen“ und mit ihr für eine vorgegebene Zustandsrückführung die Koeffizienten des cha-

rakteristischen Polynoms ausrechnen. Zerlegt man die rechte Seite der Gl. (6.22) entsprechend

$$\mathbf{k}' = (\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n-1}) \begin{pmatrix} s'_R \\ s'_R \mathbf{A} \\ s'_R \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ s'_R \mathbf{A}^{n-1} \end{pmatrix} + s'_R \mathbf{A}^n,$$

so erhält man nach Umstellung die Beziehung

$$(\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n-1}) = \mathbf{k}' \begin{pmatrix} s'_R \\ s'_R \mathbf{A} \\ s'_R \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ s'_R \mathbf{A}^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} + (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}), \quad (6.23)$$

mit der für eine gegebene Zustandsrückführung $\mathbf{k}'$ die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms des geschlossenen Kreises ausgerechnet werden können.

Unveränderte Regelstreckeneigenwerte. Das Phänomen, dass Pole der Regelstrecke gegen Nullstellen des Reglers gekürzt werden können, tritt bei der Zustandsrückführung auf, wenn Eigenwerte für den geschlossenen Kreis vorgegeben werden, die bereits Eigenwerte der Regelstrecke sind. Schneidet man den geschlossenen Kreis bei der Stellgröße u auf, so treten diese Eigenwerte nicht als Pole in der Übertragungsfunktion

$$G_0(s) = \mathbf{k}'(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$$

auf. Das sieht man aus der Ackermannformel, wenn man sie von rechts mit Potenzen von $\mathbf{A}$ multipliziert und das Ergebnis in

$$\begin{pmatrix} \mathbf{k}' \\ \mathbf{k}' \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{k}' \mathbf{A}^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s'_R \\ s'_R \mathbf{A} \\ \vdots \\ s'_R \mathbf{A}^{n-1} \end{pmatrix} (\bar{a}_0 \mathbf{I} + \bar{a}_1 \mathbf{A} + \dots + \bar{a}_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n)$$

überführt. Wenn mindestens ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{A}$ auch als Eigenwert für den Regelkreis und folglich als Lösung der charakteristischen Gleichung mit den Koeffizienten $\bar{a}_i$ vorgegeben ist, so gilt

$$\det(\bar{a}_0 \mathbf{I} + \bar{a}_1 \mathbf{A} + \dots + \bar{a}_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n) = 0$$

(vgl. Gl. (A2.46)). Daraus erhält man die Beziehung

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{k}' \\ \mathbf{k}' \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{k}' \mathbf{A}^{n-1} \end{pmatrix} = 0, \quad (6.24)$$

in der die Beobachtbarkeitsmatrix des Paares (A, k') für die Regelstrecke mit der Ausgangsgleichung $u = k'x$ steht. Sie besagt, dass die Regelstrecke über die Zustandsrückführung von der Stellgröße u aus nicht vollständig beobachtbar ist. Der Regler verändert also – wie gefordert – einen oder mehrere Eigenwerte der Regelstrecke nicht. Deshalb treten diese Eigenwerte nicht als Pole in der Übertragungsfunktion $G_0(s)$ auf, sind also Übertragungsnullstellen der mit der Zustandsrückführung gebildeten offenen Kette.

Beispiel 6.1 Konzentrationsregelung durch Zustandsrückführung

Für die gekoppelten Rührkessel aus Aufgabe I-5.5 ist eine Regelung zu entwerfen, durch die die Konzentration des Reaktors 2 im Arbeitspunkt $y = 0$ gehalten wird. Störungen sind Konzentrationsschwankungen in beiden Reaktoren, die durch nichtverschwindende Anfangszustände $x_1(0)$ und $x_2(0)$ dargestellt werden. Stellgröße ist die Zulaufkonzentration c_0 des ersten Reaktors, die bei konstantem Durchfluss F durch beide Reaktoren mit Hilfe der Ventile für den Zulauf des Wassers bzw. des Stoffes A verzögerungsfrei eingestellt werden kann.

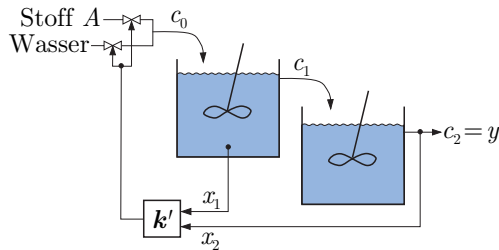


Abb. 6.2: Geregelte Rührkesselreaktoren

Das Zustandsraummodell für die Regelstrecke lautet

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{F}{V_1} & 0 \\ \frac{F}{V_2} & -\frac{F}{V_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{F}{V_1} \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

(vgl. Seite I-573). Dieses Modell beschreibt die Abweichungen der Konzentrationen vom Arbeitspunkt, so dass $x_1 = c_1 = 0$ und $x_2 = c_2 = 0$ bedeutet, dass die Konzentrationen auf den vorgeschriebenen Werten liegen.

Eine einschleifige Regelung würde y auf u zurückführen. Wie aus Abb. 6.2 zu vermuten ist, kann die jetzt zu entwerfende Zustandsrückführung Störungen schneller abbauen, weil dieser Regler auch auf Konzentrationsänderungen im ersten Reaktor reagieren kann. Bei der Polverschiebung macht sich diese Tatsache dadurch bemerkbar, dass die Eigenwerte des Regelkreises beliebig platziert werden können.

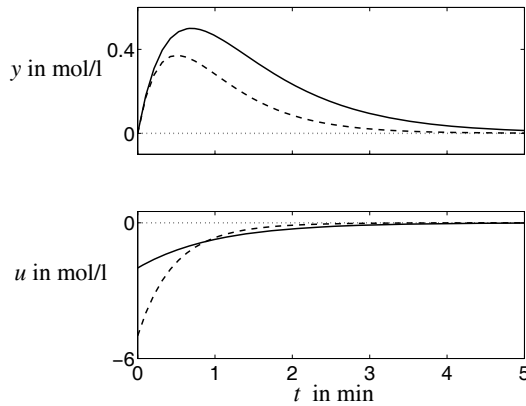


Abb. 6.3: Eigenbewegung der geregelten Reaktoren

Die Zustandsrückführung wird für Reaktoren mit den Volumina $V_1 = 6\text{ l}$ und $V_2 = 1\text{ l}$ und dem Durchfluss $F = 2 \frac{1}{\text{min}}$ entworfen. Es werden zwei Regler berechnet, die die Eigenwerte des Regelkreises auf die Werte $-1 \frac{1}{\text{min}}$ und $-2 \frac{1}{\text{min}}$ bzw. $-1,5 \frac{1}{\text{min}}$ und $-2,5 \frac{1}{\text{min}}$ legen. Mit dem angegebenen Entwurfsverfahren erhält man dabei die Reglerparameter

$$\mathbf{k}' = (2 \ 0)$$

bzw.

$$\mathbf{k}' = (5 \ -0,375). \quad (6.25)$$

In Abb. 6.3 ist die Eigenbewegung des Regelkreises für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = (1 \frac{\text{mol}}{\text{l}} \ 0 \frac{\text{mol}}{\text{l}})'$ dargestellt, wobei oben die Regelgröße $y(t)$ und unten die Stellgröße $u(t)$ aufgetragen sind. Die durchgezogenen Linien gelten für die erste Regelung, die gestrichelten für die zweite.

Erwartungsgemäß wird die Regelabweichung bei der zweiten Regelung schneller als bei der ersten Regelung abgebaut. Dafür ist aber auch eine größere Stellamplitude notwendig. Theoretisch kann der Regelkreis beliebig schnell gemacht werden, indem die Eigenwerte immer weiter in die linke komplexe Halbebene geschoben werden. Technisch ist dies aber durch die dafür notwendige Stellamplitude begrenzt. $\square$

Aufgabe 6.1* Entwurf einer Zustandsrückführung

Gegeben ist die Regelstrecke

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{x}(t). \end{aligned}$$

1. Kann eine Zustandsrückführung so entworfen werden, dass der geschlossene Kreis die Eigenwerte $-1, -2 \pm j$ besitzt?

2. Entwerfen Sie einen Regler, so dass die Eigenwerte des geschlossenen Kreises bei $-1, -2, -4$ liegen, wobei Sie den im Abschn. 6.2.1 beschriebenen Lösungsweg über die Regelungsnormform verwenden. $\square$

Aufgabe 6.2* *Regelung einer Verladebrücke mit Zustandsrückführung*

1. Berechnen Sie für die Verladebrücke aus Aufgabe 3.15 auf S. 130 eine Zustandsrückführung mit Hilfe der Ackermannformel, wobei Sie von einem beliebig vorgegebenen charakteristischen Polynom des geschlossenen Kreises

$$\lambda^4 + \bar{a}_3\lambda^3 + \bar{a}_2\lambda^2 + \bar{a}_1\lambda + \bar{a}_0 = 0$$

ausgehen.

2. Was folgt für die Reglerkoeffizienten aus der notwendigen Stabilitätsbedingung $\bar{a}_i > 0$ ($i = 0, \dots, 3$)?
3. Kann auf die Messung (und Rückführung) von Zustandsgrößen verzichtet werden, ohne dass die Stabilität gefährdet wird?
4. Welche Reglerparameter hängen von der veränderlichen Masse m_G ab? Kann der Regelkreis, der für den leeren Lasthaken stabil ist, bei größeren Massen instabil werden? (Hinweis: Prüfen Sie die Stabilität mit Hilfe des Hurwitzkriteriums.) $\square$

6.2.4 Darstellung der Reglerparameter in Abhängigkeit von den Eigenwerten

In der Ackermannformel wird die Zustandsrückführung in Abhängigkeit von den Koeffizienten des charakteristischen Polynoms des geschlossenen Kreises dargestellt. Im Folgenden wird eine alternative Darstellung angegeben, die die Reglerparameter in direkte Beziehung zu den Eigenwerten der Regelstrecke und den gewünschten Regelkreiseigenwerten setzt.

Ausgangspunkt ist das Regelstreckenmodell in kanonischer Normalform

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \text{diag } \lambda_i \tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{b}}u(t), \quad \tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}_0 \quad (6.26)$$

$$y(t) = \tilde{\mathbf{c}}'\tilde{\mathbf{x}}(t), \quad (6.27)$$

für die der kanonische Zustandsvektor $\tilde{\mathbf{x}}$ durch die Transformation

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}(t) \quad (6.28)$$

aus $\mathbf{x}$ hervorgeht (vgl. Abschn. I-5.3.1). $\mathbf{V}$ ist die Matrix der Eigenvektoren von $\mathbf{A}$. Es gilt

$$\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_n \end{pmatrix} \quad (6.29)$$

$$\tilde{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'\mathbf{V}. \quad (6.30)$$

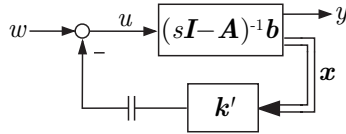


Abb. 6.4: Regelkreis mit Zustandsrückführung

Es wird der mit der Zustandsrückführung

$$u(t) = -\tilde{\mathbf{k}}' \tilde{\mathbf{x}}(t) + w(t) \quad (6.31)$$

geschlossene Kreis betrachtet, wobei für den Regler

$$\tilde{\mathbf{k}}' = (\tilde{k}_1 \ \tilde{k}_2 \ \dots \ \tilde{k}_n)$$

gilt. Die weiteren Betrachtungen setzen voraus, dass die für den Regelkreis vorgegebenen Eigenwerte $\bar{\lambda}_i$ nicht mit denen der Regelstrecke zusammenfallen

$$\bar{\lambda}_i \neq \lambda_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Trennt man den geschlossenen Kreis an der Stellgröße auf, wie es in Abb. 6.4 gezeigt ist, so heißt die Rückführdifferenzfunktion

$$\begin{aligned} F(s) &= 1 + \tilde{\mathbf{k}}' (s\mathbf{I} - \text{diag } \lambda_i)^{-1} \tilde{\mathbf{b}} \\ &= 1 + \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{k}_i \tilde{b}_i}{s - \lambda_i}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Entsprechend dem Hsu-Chen-Theorem (4.50) ist $F(s)$ der Quotient aus den charakteristischen Polynomen des geschlossenen Kreises und der offenen Kette

$$F(s) = \frac{\prod_{i=1}^n (s - \bar{\lambda}_i)}{\prod_{i=1}^n (s - \lambda_i)} = \frac{\bar{p}(s)}{p(s)}, \quad (6.33)$$

wobei hier der im Hsu-Chen-Theorem stehende Faktor k gleich eins ist, weil die Regelstrecke nicht sprungfähig ist. $\bar{p}(s)$ und $p(s)$ sind die Polynome (6.9) bzw. (6.16), die hier mit s anstelle von λ verwendet werden, aber natürlich dieselben Koeffizienten haben.

Aus den Gln. (6.32) und (6.33) erhält man die Beziehung

$$1 + \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{k}_i \tilde{b}_i}{s - \lambda_i} = \frac{\prod_{i=1}^n (s - \bar{\lambda}_i)}{\prod_{i=1}^n (s - \lambda_i)},$$

die mit $(s - \lambda_j)$ durchmultipliziert in

$$(s - \lambda_j) + \sum_{i \neq j} \frac{(s - \lambda_j) \tilde{k}_i \tilde{b}_i}{s - \lambda_i} + \tilde{k}_j \tilde{b}_j = \frac{\prod_{i=1}^n (s - \bar{\lambda}_i)}{\prod_{i \neq j} (s - \lambda_i)}$$

übergeht. Setzt man jetzt $s = \lambda_j$, so erhält man eine Vorschrift zur Berechnung von $\tilde{k}_j$:

Zustandsrückführung:
$$\tilde{k}_j = \frac{1}{\tilde{b}_j} \frac{\prod_{i=1}^n (\lambda_j - \bar{\lambda}_i)}{\prod_{i \neq j} (\lambda_j - \lambda_i)} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

(6.34)

Macht man die Transformation (6.28) rückgängig

$$u(t) = -\tilde{\mathbf{k}}' \tilde{\mathbf{x}}(t) = -\tilde{\mathbf{k}}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{x}(t), \quad (6.35)$$

erhält man die gewünschte Zustandsrückführung entsprechend

$$\mathbf{k}' = \tilde{\mathbf{k}}' \mathbf{V}^{-1}.$$

Die Gleichung (6.34) zeigt, wie die Zustandsrückführung direkt aus den Eigenwerten λ_i der Regelstrecke sowie aus den für den geschlossenen Kreis vorgegebenen Eigenwerten $\bar{\lambda}_i$ berechnet werden kann. Es wird offensichtlich, dass die Reglerparameter umso größer sind, je größer der Abstand $\lambda_j - \bar{\lambda}_i$ zwischen den Regelstreckeneigenwerten und den Regelkreiseigenwerten ist. Diese Tatsache zeigt unmittelbar, dass der Regler umso mehr in den Kreis eingreifen muss, je weiter die Eigendynamik des Kreises von der der Regelstrecke entfernt liegen soll.

6.3 Erweiterung auf Regelstrecken mit mehreren Stellgrößen

Bisher wurde davon ausgegangen, dass die Regelstrecke nur eine Stellgröße u besitzt und die Zustandsrückführung folglich durch den Vektor $\mathbf{k}'$ beschrieben ist. Dabei stellte sich heraus, dass eine Stellgröße sogar ausreicht, um sämtliche Eigenwerte beliebig vorzugeben, wenn die Regelstrecke über diese eine Stellgröße vollständig steuerbar ist.

Die Erweiterung der Zustandsrückführung auf Systeme mit mehreren Eingangsgrößen muss deshalb zwei Wege verfolgen. Wenn man nur an der Eigenwertvorgabe interessiert ist, so kann man die vektorielle Eingangsgröße auf eine skalare

Eingangsgröße reduzieren und die Zustandsrückführung dann wie bisher berechnen. Andererseits kann man die zusätzlichen Freiheitsgrade ausnutzen, um mehr als nur die Eigenwerte vorzugeben. Auf beide Möglichkeiten wird im Folgenden eingegangen.

6.3.1 Dyadische Regelung

Es wird vorausgesetzt, dass die Regelstrecke mit mehreren Eingangsgrößen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (6.36)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (6.37)$$

vollständig steuerbar ist. Die Zustandsrückführung

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (6.38)$$

ist durch die (m, n) -Matrix $\mathbf{K}$ beschrieben.

Da für die Eigenwertverschiebung eine einzige Stellgröße ausreicht, wird der m -dimensionale Eingangsvektor durch eine skalare Eingangsgröße $\tilde{u}$ ersetzt, so dass

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{q}\tilde{u}(t) \quad (6.39)$$

gilt. Dabei ist $\mathbf{q}$ ein zeitunabhängiger m -dimensionaler Vektor. Setzt man die Beziehung (6.39) in das Streckenmodell ein, so erhält man

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{b}}\tilde{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (6.40)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (6.41)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{B}\mathbf{q}. \quad (6.42)$$

Für diese reduzierte Regelstrecke kann die Zustandsrückführung

$$\tilde{u}(t) = -\tilde{\mathbf{k}}' \mathbf{x}(t)$$

mit den in den vorangegangenen Abschnitten beschriebenen Verfahren entworfen werden. Anschließend wird die Reduzierung der Zahl der Stellgrößen rückgängig gemacht, indem man die Zustandsrückführung in Gl. (6.39) einsetzt:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{q}\tilde{\mathbf{k}}' \mathbf{x}(t). \quad (6.43)$$

Das heißt, die (m, n) -Matrix $\mathbf{K}$ erhält man aus dem Produkt des m -dimensionalen Spaltenvektors $\mathbf{q}$ mit dem n -dimensionalen Zeilenvektor $\tilde{\mathbf{k}}'$. Da das Produkt eines Spaltenvektors mit einem Zeilenvektor als dyadisches Produkt bezeichnet wird, heißt die entstehende Regelung auch dyadische Regelung:

Dyadische Regelung: $K = q\tilde{k}'$

(6.44)

Steuerbarkeit der reduzierten Regelstrecke. Damit alle Eigenwerte des Regelkreises beliebig vorgegeben werden können, muss das Paar $(A, \tilde{b})$ vollständig steuerbar sein. Um das beschriebene Vorgehen anwenden zu können, muss ein Vektor q gefunden werden, für den diese Bedingung erfüllt ist. Dies gelingt für „fast alle“ Regelstrecken, für die das Paar (A, B) vollständig steuerbar ist.

Satz 6.2 (Steuerbarkeit der reduzierten Regelstrecke)

Wenn das Paar (A, B) vollständig steuerbar und die Matrix A zyklisch ist, dann gibt es einen Vektor q , so dass das Paar (A, Bq) vollständig steuerbar ist.

Eine Matrix ist zyklisch, wenn sie in die Frobeniusform transformiert werden kann. Man kann zeigen, dass unter der im Satz 6.2 genannten Bedingung „fast alle“ Vektoren q auf ein steuerbares Paar (A, Bq) führen. Deshalb legt man den Vektor q beliebig fest und prüft die Steuerbarkeit. Sollte es nicht steuerbare Eigenwerte geben, so führt i. Allg. eine kleine Veränderung von q auf ein steuerbares Paar.

Falls A nicht zyklisch ist, kann man zunächst eine Ausgangsrückführung

$$u(t) = -K_y y(t) + \hat{u}(t)$$

verwenden, für die der entstehende Kreis

$$\dot{x}(t) = (A - BK_y C)x(t) + B\hat{u}(t)$$

eine zyklische Systemmatrix $(A - BK_y C)$ hat. Auch hier darf man davon ausgehen, dass die Zyklizität der Systemmatrix für „fast alle“ Rückführmatrizen K_y erzeugt wird. Aus diesem Grunde soll jetzt keine tiefgründige Untersuchung angestellt werden, wie q und gegebenenfalls K_y gefunden werden können, sondern nur anhand eines einfachen Beispiels gezeigt werden, dass die Steuerbarkeitsbedingung nur in Ausnahmefällen problematisch ist und dort durch eine Ausgangsrückführung gesichert werden kann.

Beispiel 6.2 Reduzierung der Zahl der Eingangsgrößen

Wenn die Regelstrecke aus zwei PT₁-Gliedern mit derselben Zeitkonstante besteht, die getrennt gesteuert werden können, so heißt das Zustandsraummodell

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{T} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \\ y(t) &= (c_1 \ c_2) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Das System ist vollständig steuerbar, weil beide PT₁-Glieder ihre separate Eingangsgröße haben. Die Systemmatrix ist jedoch nicht zyklisch.

Reduziert man die Eingangsgröße auf

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \tilde{u}(t),$$

so erhält man durch Anwendung des Hautuskriteriums für die Steuerbarkeit des Systems mit einem Eingang die Forderung

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \lambda + \frac{1}{T} & 0 & q_1 \\ 0 & \lambda + \frac{1}{T} & q_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 2,$$

die für $\lambda = -\frac{1}{T}$ für beliebige Werte von q_1 und q_2 *nicht* erfüllt ist. Der Grund liegt darin, dass bei der Reduzierung der Zahl der Eingangsgrößen eine Parallelschaltung mit zwei identischen Teilsystemen entsteht, die bekanntlich nicht vollständig steuerbar ist (vgl. S. 83).

Verwendet man zunächst eine Ausgangsrückführung

$$\mathbf{u}(t) = - \begin{pmatrix} k_{y1} \\ k_{y2} \end{pmatrix} y(t) + \hat{\mathbf{u}}(t)$$

und reduziert dann die neue Eingangsgröße $\hat{\mathbf{u}}(t)$, so heißt die Steuerbarkeitsbedingung

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \lambda + \frac{1}{T} - k_{y1}c_1 & -k_{y1}c_2 & q_1 \\ -k_{y2}c_1 & \lambda + \frac{1}{T} - k_{y2}c_2 & q_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 2 \quad \text{für alle } \lambda.$$

Diese Bedingung ist für fast alle Werte für k_{y1} , k_{y2} , c_1 , c_2 und q_1 , q_2 erfüllt. Der Grund liegt darin, dass die Ausgangsrückführung die beiden Teilsysteme unterschiedlich verändert, so dass bei der Reduzierung der Eingangsgröße eine Parallelschaltung von PT₁-Gliedern mit unterschiedlichen Zeitkonstanten entsteht, die steuerbar ist. $\square$

6.3.2 Vollständige Modale Synthese

Mit Zustandsrückführungen, die mehr als einen Systemeingang verwenden, kann man mehr erreichen als „nur“ die Vorgabe der Eigenwerte. Was soll man mit den überflüssigen Freiheitsgraden tun?

Um diese Frage zu beantworten, sei daran erinnert, dass die Idee der Polvorgabe auf der Darstellung der Eigenbewegung des Regelkreises als Summe

$$\mathbf{x}_{\text{frei}}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i e^{\bar{\lambda}_i t} \tilde{x}_i(0)$$

beruht. Bisher wurde nur beachtet, dass die Eigenvorgänge $e^{\bar{\lambda}_i t}$ durch die Eigenwerte $\bar{\lambda}_i$ des geschlossenen Kreises bestimmt werden, für die deshalb zweckmäßige Werte vorgegeben und durch die Zustandsrückführung realisiert wurden. Jetzt kann

man die zusätzlichen Freiheitsgrade nutzen, um auch einige oder gar alle Eigenvektoren $\mathbf{v}_i$ geeignet festzulegen. Wieviel von dieser zusätzlichen Zielstellung realisierbar ist, hängt von der Zahl der Stellgrößen ab.

Dass die Eigenwerte allein das System nicht vollständig beschreiben, sieht man am Vergleich zweier PT₁-Glieder, die entweder in Reihe oder parallel geschaltet sind. In beiden Fällen hat die Zusammenschaltung dieselben Eigenwerte, aber das E/A-Verhalten unterscheidet sich grundlegend.

Im Folgenden wird gezeigt, dass sogenannte Parametervektoren neben den Eigenwerten zur genaueren Beschreibung der Eigenschaften des Regelkreises verwendet werden können und es deshalb zweckmäßig ist, die zusätzlichen Freiheitsgrade für die geeignete Festlegung dieser Vektoren zu verwenden.

Systeme mit einer Stellgröße. Um das erweiterte Entwurfsproblem beschreiben zu können, wird zunächst die bereits behandelte Zustandsrückführung mit einer Stellgröße in einer neuen Form dargestellt. Es wird wieder angenommen, dass die Eigenwerte des Regelkreises einfach auftreten und es folglich n linear unabhängige Eigenvektoren $\mathbf{v}_i$ gibt. Die Eigenwerte und Eigenvektoren des Regelkreises erfüllen die Gleichung

$$(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}') \mathbf{v}_i = \bar{\lambda}_i \mathbf{v}_i.$$

Um die Länge der Eigenvektoren $\mathbf{v}_i$ zu charakterisieren, wird das Produkt $\mathbf{k}'\mathbf{v}_i$ mit p_i bezeichnet:

$$\mathbf{k}'\mathbf{v}_i = p_i.$$

Schreibt man diese Beziehung für $i = 1, 2, \dots, n$ nebeneinander, so erhält man

$$\mathbf{k}' (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n) = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n)$$

und daraus

$$\mathbf{k}' = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n) \mathbf{V}^{-1}. \quad (6.45)$$

Für die Eigenvektoren folgt aus der Eigenwertgleichung des Regelkreises

$$(\mathbf{A} - \bar{\lambda}_i \mathbf{I}) \mathbf{v}_i = \mathbf{b}p_i. \quad (6.46)$$

Man kann die Zustandsrückführung also auch so berechnen, dass man zunächst für die vorgegebenen Eigenwerte $\bar{\lambda}_i$ des Regelkreises die Eigenvektoren mit Gleichung (6.46) bestimmt und anschließend den Regler aus der Beziehung (6.45) berechnet. Aus beiden Schritten zusammen erhält man die Beziehung

$$\mathbf{k}' = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n) \left((\mathbf{A} - \bar{\lambda}_1 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{b}p_1 \ (\mathbf{A} - \bar{\lambda}_2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{b}p_2 \ \dots \ (\mathbf{A} - \bar{\lambda}_n \mathbf{I})^{-1} \mathbf{b}p_n \right)^{-1}.$$

Dieser Rechenweg hat für Systeme mit einem Eingang keinen Vorteil gegenüber den bisher beschriebenen Verfahren, weil mit den vorgegebenen Eigenwerten auch sämtliche Eigenvektoren des Regelkreises festliegen. Der Regler $\mathbf{k}'$ ist unabhängig von den Parametern p_i , die folglich beliebig vorgegeben werden können (z. B. $p_i = 1$). Im Folgenden wird sich jedoch zeigen, dass man auf diesem Rechenweg die größeren Freiheiten bei Systemen mit mehr als einer Stellgröße gut ausnutzen kann.

Systeme mit mehreren Stellgrößen. Wenn die Regelstrecke mehr als eine Stellgröße hat, so sehen die Gleichungen zwar prinzipiell genauso aus wie bisher. Da aber $\mathbf{K}$ nicht mehr ein Vektor, sondern eine Matrix ist, hat man jetzt Freiheitsgrade in der Wahl der Eigenvektoren.

Für den Zusammenhang von Eigenwerten und Eigenvektoren des Regelkreises gilt

$$(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \mathbf{v}_i = \bar{\lambda}_i \mathbf{v}_i.$$

Führt man die m -dimensionalen *Parametervektoren*

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{K} \mathbf{v}_i \quad (6.47)$$

ein, so kann man diese Gleichung in

$$\mathbf{v}_i = (\mathbf{A} - \bar{\lambda}_i \mathbf{I})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{p}_i \quad (6.48)$$

umformen, wenn man voraussetzt, dass kein vorgegebener Eigenwert des Regelkreises mit einem Regelstreckeneigenwert übereinstimmt. Diese Gleichung zeigt, wie die Eigenvektoren aus den Parametervektoren entstehen.

Schreibt man Gl. (6.47) für $i = 1, 2, \dots, n$ nebeneinander, so erhält man

$$\mathbf{K} (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n) = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \dots \ \mathbf{p}_n)$$

und daraus die Berechnungsvorschrift für die Zustandsrückführung

Zustandsrückführung aus der Vollständigen Modalen Synthese:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \dots \ \mathbf{p}_n) \mathbf{V}^{-1} \\ &= (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \dots \ \mathbf{p}_n) ((\mathbf{A} - \bar{\lambda}_1 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{p}_1 \ \dots \ (\mathbf{A} - \bar{\lambda}_n \mathbf{I})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{p}_n)^{-1} \end{aligned} \quad (6.49)$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Zustandsrückführung $\mathbf{K}$ eindeutig durch die n Eigenwerte $\bar{\lambda}_i$ sowie die n m -dimensionalen Parametervektoren $\mathbf{p}_i$ bestimmt ist. Da man mit der angegebenen Zustandsrückführung $\mathbf{K}$ sämtliche Eigenwerte vorgibt und die Eigenvektoren im Rahmen der vorhandenen Freiheitsgrade festlegt, also die modalen Parameter des Regelkreises vorschreibt, heißt diese Vorgehensweise auch *Vollständige Modale Synthese*.

Wahl der Entwurfparameter. Die zusätzlich zur Eigenwertfestlegung vorhandenen Freiheitsgrade sind in den Parametervektoren erkennbar. Hat die Regelstrecke nur eine Stellgröße, so schrumpfen die Vektoren $\mathbf{p}_i$ zu Skalaren p_i zusammen, die lediglich die ohnehin nicht eindeutig festgelegte Länge der Eigenvektoren beeinflussen, jedoch keinen Einfluss auf die Richtung der Eigenvektoren $\mathbf{v}_i$ haben. Die Zustandsrückführung kann nur die Eigenwerte des Regelkreises festlegen. Mit anderen Worten: Durch n vorgegebene Eigenwerte ist die Zustandsrückführung bereits vollständig festlegt.

Hat die Regelstrecke mehr als eine Stellgröße, so können die m -dimensionalen Vektoren $\mathbf{p}_i$ beliebig vorgegeben werden, wobei die Freiheitsgrade umso größer

sind, je mehr Stellgrößen zur Verfügung stehen. Wie bei den Eigenvektoren gehören allerdings zu konjugiert komplexen Eigenwerten auch konjugiert komplexe Parametervektoren. Ferner müssen die bei der Ableitung der Reglergleichung gemachten Voraussetzungen erfüllt werden, dass nämlich kein Eigenwert des Regelkreises mit einem Streckeneigenwert übereinstimmt und dass die mit Hilfe von Gl. (6.48) aus $\bar{\lambda}_i$ und $\mathbf{p}_i$ berechneten Eigenvektoren $\mathbf{v}_i$ untereinander linear unabhängig sind.

Ein wichtiger Aspekt der Vollständigen Modalen Synthese ist, dass die zusätzlichen Freiheitsgrade *explizit* in Form der frei wählbaren Parametervektoren auftreten und diese Freiheitsgrade deshalb gezielt zur Erfüllung zusätzlicher Forderungen an den Regelkreis eingesetzt werden können. Die Beziehung (6.49) zeigt, wie die Zustandsrückführung eindeutig durch diese Vorgaben bestimmt ist.

Da der Vektor $\mathbf{v}_i$ beschreibt, wie sich der Eigenvorgang $e^{\bar{\lambda}_i t}$ auf die einzelnen Zustandsvariablen x_i auswirkt, wird man bei der Formulierung von Entwurfsaufgaben nicht $\mathbf{p}_i$, sondern $\mathbf{v}_i$ vorgeben und daraus $\mathbf{p}_i$ berechnen. Aus Gl. (6.48) erhält man, wenn wie üblich $\text{Rang } \mathbf{B} = m$ ist, die Beziehung

$$\mathbf{p}_i = (\mathbf{B}'\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}'(\mathbf{A} - \bar{\lambda}_i\mathbf{I})\mathbf{v}_i, \quad (6.50)$$

aus der hervorgeht, wie die Parametervektoren für vorgegebene Eigenvektoren $\mathbf{v}_i'$ aussehen. Man muss jedoch beachten, dass die Freiheitsgrade von der Zahl der Stellgrößen bzw. der Länge der Parametervektoren abhängen. Die Eigenvektoren sind also nur innerhalb eines m -dimensionalen Raumes frei wählbar. Je mehr Stellgrößen zur Verfügung stehen, umso größer ist diese Freiheit.

Beachten sollte man ferner, dass die Länge der Parametervektoren $\mathbf{p}_i$ keinen Einfluss auf die Reglermatrix $\mathbf{K}$ hat. Multipliziert man einen gegebenen Parametervektor mit einer Zahl k , so verändert sich zwar die Länge des zugehörigen Eigenvektors $k\mathbf{v}_i$, die Zustandsrückführung $\mathbf{K}$ bleibt jedoch unverändert. Jeder m -dimensionale Vektor $\mathbf{p}_i$ hat also nur $m - 1$ wirksame Entwurfsparameter. Durch Vorgabe von n Eigenwerten und n Parametervektoren mit $m - 1$ wirksamen Entwurfsparametern werden also insgesamt $n + (m - 1)n = nm$ frei wählbare Parameter zur Berechnung der $m \cdot n$ Reglerparameter festgelegt.

Erweiterungen. Die Vollständige Modale Synthese wurde hier unter einigen Voraussetzungen an die Wahl der Regelkreiseigenwerte und -eigenvektoren abgeleitet, die man bei etwas größerem mathematischen Aufwand auch hätte abschwächen oder umgehen können. Sie sind jedoch für die praktische Anwendung ohne Belang. So wurde vorausgesetzt, dass die vorgegebenen Eigenwerte $\bar{\lambda}_i$ einfach sind, also auch die Matrix $\mathbf{V}$ invertierbar ist, und dass die Matrix $\mathbf{A} - \bar{\lambda}_i\mathbf{I}$ regulär ist. Das bedeutet, dass alle Eigenwerte des Regelkreises von denen der Regelstrecke verschieden sind. Diese Einschränkung kann einfach dadurch umgangen werden, dass man Eigenwerte vorschreibt, die sich geringfügig von denen der Regelstrecke unterscheiden.

6.4 Polzuweisung durch Ausgangsrückführung

6.4.1 Überlegungen zu den Freiheitsgraden von Ausgangsrückführungen

Die technische Anwendung der bisher sehr ausführlich behandelten Zustandsrückführung

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (6.51)$$

ist dadurch stark eingeschränkt, dass sie die Messbarkeit sämtlicher Zustandsvariablen x_i zur Voraussetzung hat. Es soll deshalb im Folgenden untersucht werden, inwieweit tatsächlich alle Zustandsvariablen in die Rückführung einbezogen werden müssen, um die Eigenwerte des Regelkreises beliebig festlegen zu können.

An Stelle der Zustandsrückführung (6.51) wird der Regelkreis jetzt mit einer Ausgangsrückführung

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_y\mathbf{y}(t) \quad (6.52)$$

geschlossen, für deren technische Realisierung nur auf Messwerte des Ausgangsvektors $\mathbf{y}(t)$ zurückgegriffen werden muss. Wie bereits früher betont, bezieht sich der Begriff der Ausgangsrückführung auf eine *proportionale* Rückführung von $\mathbf{y}(t)$ auf $\mathbf{u}(t)$. Was man durch zusätzliche Dynamik in dieser Rückführung erreichen kann, wird später untersucht.

Da selbst bei der aufwändigeren Zustandsrückführung die Regelstrecke vollständig steuerbar sein muss, wenn alle Eigenwerte des Regelkreises beliebig festgelegt werden sollen, wird diese Eigenschaft auch im Folgenden als gegeben vorausgesetzt. Hinzu kommt jetzt, dass die Rückführung auf den Ausgangsvektor $\mathbf{y}$ zugreift und somit alle nicht beobachtbaren Eigenwerte der Regelstrecke nicht verändern kann. Es wird im Folgenden deshalb ferner vorausgesetzt, dass die Regelstrecke vollständig beobachtbar ist bzw. es wird nur mit dem steuerbaren und beobachtbaren Teil der Regelstrecke gerechnet.

Wie bei der Zustandsrückführung gilt, dass alle steuerbaren und beobachtbaren Eigenwerte der Regelstrecke durch eine Ausgangsrückführung verändert werden können. Diese Tatsache ergibt sich aus der Kalmanzerlegung der Regelstrecke, die zeigt, dass es gerade diese Eigenwerte sind, die in der Rückführung von $\mathbf{y}(t)$ auf $\mathbf{u}(t)$ liegen und deshalb durch eine Regelung verändert werden können.

Um die Regelungsziele erreichen zu können ist es jedoch entscheidend, ob diese Verschiebung *zielgerichtet* erfolgen kann oder ob sich diese Aussage nur darauf bezieht, dass die Eigenwerte „irgendwie“ verändert werden können. Bei der Zustandsrückführung hatte sich diesbezüglich herausgestellt, dass alle steuerbaren Eigenwerte tatsächlich zielgerichtet verschoben werden können, also durch die Wahl der Reglerparameter jede mögliche Eigenwertvorgabe für den Regelkreis realisiert werden kann.

Es sei einer genaueren Behandlung vorweggenommen, dass diese wertvolle Eigenschaft der Zustandsrückführung verloren geht, sobald auch nur eine einzige Zustandsvariable x_i nicht messbar ist.

Es gibt keine allgemeingültigen Aussagen darüber, für welche Regelstrecke (A, B, C) die Eigenwerte des geschlossenen Kreises mit Hilfe einer Ausgangsrückführung beliebig festgelegt bzw. welche instabilen Regelstrecken durch eine Ausgangsrückführung stabilisiert werden können. Die vollständige Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit der Regelstrecke ist dafür notwendig, aber nicht hinreichend.

Nur wenn man die Regelung durch dynamische Elemente wie beispielsweise einen Kompensator (Abschn. 6.5) oder einen Beobachter (Kap. 8) erweitert, kann man die steuerbaren und beobachtbaren Eigenwerte auch zielgerichtet verschieben. Diese dynamischen Erweiterungen der Ausgangsrückführung entstehen aus unterschiedlichen Motivationen. Sie haben aber gemeinsam, dass sie die Freiheitsgrade bei der Wahl der Regelkreiseigenwerte vergrößern und dadurch die Freiheiten der Zustandsrückführung zurückgewinnen.

Ausgangsrückführung auf eine Stellgröße. Die prinzipiellen Einschränkungen, die eine Beschränkung der Rückführung auf den messbaren Ausgang mit sich bringen, erkennt man sehr deutlich, wenn man ein System mit nur einer Stellgröße und einer Ausgangsgröße betrachtet. Die Ausgangsrückführung hat dann die einfache Form

$$u(t) = -k_y y(t),$$

in der nur noch ein einziger Reglerparameter festgelegt werden kann. Wie die Eigenwerte des geschlossenen Kreises

$$\dot{x}(t) = (A - b k_y c') x(t)$$

mit dieser Rückführung verändert werden können, kann man sich anhand der Wurzelortskurve ansehen. Abbildung 6.5 zeigt am Beispiel eines Systems zweiter Ordnung, dass es keinen Wert für den Reglerparameter k_y gibt, für den der Regelkreis stabil ist, wenn der Mittelwert der beiden Eigenwerte der Regelstrecke eine positive reelle Zahl ist. Sowohl für positive Reglerparameter ($k_y > 0$) als auch für negative Werte ($k_y < 0$) ist mindestens ein Eigenwert des Regelkreises instabil.

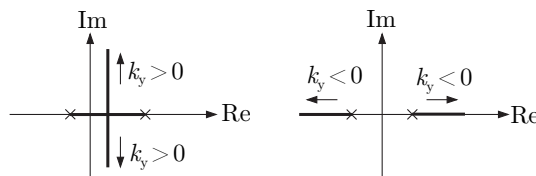


Abb. 6.5: Wurzelortskurve eines Systems zweiter Ordnung

Die Tatsache, dass die betrachtete Regelstrecke zweiter Ordnung durch eine Ausgangsrückführung nicht stabilisiert werden kann, wird plausibel, wenn man bedenkt,

dass zwei Eigenwerte in die linke komplexe Halbebene verschoben werden müssen, dafür jedoch nur ein einziger Reglerparameter frei gewählt werden kann. Die im Kap. I-10 verwendeten dynamischen Elemente im Regler können bei einer proportionalen Ausgangsrückführung nicht eingeführt werden. Wie das dort behandelte Beispiel I-10.4 gezeigt hat, genügt möglicherweise die in einem PD-Regler enthaltene Dynamik, um die Freiheitsgrade der Rückführung so zu erweitern, dass der Regelkreis stabil gemacht werden kann. Die Einfügung des D-Anteiles kann bei diesem Beispiel als Rekonstruktion der zweiten Zustandsgröße $x_2(t) = \dot{y}(t)$ gedeutet werden, womit die dynamische Regelung eine Zustandsrückführung realisiert.

Ausgangsrückführungen auf mehrere Stellgrößen. Die bisherigen Betrachtungen lassen sich problemlos auf Regelstrecken mit mehreren Eingangsgrößen erweitern. Die (m, r) -Reglermatrix K_y hat $m \cdot r$ Parameter. Also können höchstens genauso viele Eigenwerte zielgerichtet verschoben werden. Die restlichen Eigenwerte des Regelkreises sind i. Allg. von denen der Regelstrecke verschieden. Sie können jedoch nicht zielgerichtet platziert werden und wandern gegebenenfalls an dynamisch ungünstige Plätze in der komplexen Ebene.

Sind andererseits sehr viele Ausgangsgrößen messbar, so ist es u. U. möglich, die Ausgangsrückführung so zu wählen, dass sie einer Zustandsrückführung gleichwertig ist:

$$K_y C = K. \quad (6.53)$$

Diese Beziehung wird im Abschn. 6.4.2 weiter untersucht, wobei offensichtlich wird, dass es nicht ausreicht, dass die Zahl $m \cdot r$ der Reglerparameter größer als die Systemordnung n ist, um alle Eigenwerte beliebig verschieben zu können.

Aufgabe 6.3* *Regelung einer Verladebrücke mit Ausgangsrückführung*

Erweitern Sie die Ausgangsgröße der Verladebrücke (3.64) aus Aufgabe 3.15, wenn außer dem Seilwinkel ϕ auch die Position s_K der Laufkatze gemessen wird. Beweisen Sie, dass dieses System *nicht* durch eine statische Ausgangsrückführung

$$u(t) = -(k_1, k_2) \begin{pmatrix} s_K(t) \\ \phi(t) \end{pmatrix}$$

stabilisiert werden kann, obwohl das System vollständig steuerbar und beobachtbar ist. Interpretieren Sie das Ergebnis. $\square$

6.4.2 Näherung einer Zustandsrückführung durch eine Ausgangsrückführung

Realisierung der Zustandsrückführung durch eine Ausgangsrückführung. Mit der Ausgangsrückführung

$$u(t) = -K_y y(t) \quad (6.54)$$

soll näherungsweise dasselbe erreicht werden wie mit einer Zustandsrückführung

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t), \quad (6.55)$$

nämlich die Platzierung der Eigenwerte des geschlossenen Kreises auf vorgegebene Werte. Deshalb liegt der Gedanke nahe zu untersuchen, inwieweit eine Zustandsrückführung, die die vorgegebenen Eigenwerte erzeugt, durch eine Ausgangsrückführung ersetzt werden kann.

Am besten wäre es, man könnte die Matrix $\mathbf{K}_y$ so festlegen, dass die Stellgrößen unverändert bleiben, was unter der Bedingung

$$\mathbf{K}_y \mathbf{C} = \mathbf{K} \quad (6.56)$$

der Fall ist. Die angegebene Zerlegung der Matrix $\mathbf{K}$ in ein Produkt aus der durch die Ausgabegleichung festgelegten Matrix $\mathbf{C}$ und der gesuchten Reglermatrix $\mathbf{K}_y$ ist jedoch nur für spezielle Zustandsrückführungen möglich. Sieht man sich die erste Zeile des Produktes $\mathbf{K}_y \mathbf{C}$ auf der linken Seite und die erste Zeile der Matrix $\mathbf{K}$ auf der rechten Seite der Gl. (6.56) an, so erkennt man, dass die betrachtete Zeile von $\mathbf{K}$ als Linearkombination der Spalten von $\mathbf{C}$ dargestellt wird. Die dabei auftretenden Linearfaktoren sind gerade die Elemente der ersten Zeile von $\mathbf{K}_y$. Damit dies für alle m Zeilen der Gl. (6.56) möglich ist, müssen sämtliche Zeilen von $\mathbf{K}$ von den Zeilen von $\mathbf{C}$ linear abhängig sein, wie es der folgende Satz fordert:

Satz 6.3 (Äquivalenz von Zustands- und Ausgangsrückführung)

Die Zustandsrückführung (6.55) kann genau dann durch die Ausgangsrückführung (6.54) ersetzt werden, so dass Gl. (6.56) gilt, wenn die Matrizen $\mathbf{C}$ und $\mathbf{K}$ die Bedingung

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{K} \end{pmatrix} = \text{Rang } \mathbf{C} \quad (6.57)$$

erfüllen.

Diese Bedingung ist von der betrachteten Zustandsrückführung, also auch von den Eigenwerten, die die Zustandsrückführung im geschlossenen Regelkreis erzeugen soll, abhängig. Wenn sie erfüllt ist und die Matrix $\mathbf{C}$ vollen Rang hat, so erhält man die gesuchte Ausgangsrückführung aus der Beziehung

$$\mathbf{K}_y = \mathbf{K} \mathbf{C}^+ = \mathbf{K} \mathbf{C}' (\mathbf{C} \mathbf{C}')^{-1}, \quad (6.58)$$

in der $\mathbf{C}^+$ die Pseudoinverse von $\mathbf{C}$ darstellt (siehe Gl. (A2.84)).

Im Allgemeinen ist die Bedingung (6.57) nicht erfüllt. $\mathbf{K}_y$ aus Gl. (6.58) ist dann diejenige Ausgangsrückführung, für die die Norm der Differenz $\mathbf{K} - \mathbf{K}_y \mathbf{C}$ minimal ist (siehe Anhang 2 zur Lösung linearer Gleichungssysteme). Das heißt jedoch nicht, dass die Eigenwerte des Systems mit Ausgangsrückführung bestmöglich die durch die Zustandsrückführung erzeugten Eigenwerte approximieren. Es müssen deshalb im Folgenden weitere Überlegungen angestellt werden, um eine Ausgangsrückführung zu finden, die die gegebene Zustandsrückführung im Sinne der Polverschiebung möglichst gut „approximiert“.

Vergleich der Eigenwerte beider Regelkreise. Zur Bewertung dieser Näherung können die Eigenwerte der entstehenden Regelkreise

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \quad (6.59)$$

bzw.

$$\dot{x}(t) = (A - BK_y C)x(t) \quad (6.60)$$

herangezogen werden. Zur Vereinfachung der Darstellung wird angenommen, dass die Eigenwerte des Regelkreises mit Zustandsrückführung einfach sind. Der folgende Satz gibt eine Bedingung an, unter der diese Eigenwerte auch im Regelkreis mit Ausgangsrückführung auftreten.

Satz 6.4 Ein Eigenwert $\bar{\lambda}_i$ der Matrix $A - BK$ ist auch ein Eigenwert der Matrix $A - BK_y C$, wenn die Beziehung

$$K_y C v_i = K v_i \quad (6.61)$$

gilt, wobei v_i der zu $\bar{\lambda}_i$ gehörende Eigenvektor der Matrix $A - BK$ ist:

$$(A - BK)v_i = \bar{\lambda}_i v_i. \quad (6.62)$$

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich aus der Umformung

$$\begin{aligned} (A - BK_y C)v_i &= Av_i - BK_y C v_i \\ &= Av_i - BK v_i \\ &= (A - BK)v_i \\ &= \bar{\lambda}_i v_i, \end{aligned}$$

in der zunächst die zu beweisende Bedingung (6.61) und anschließend die Eigenwertgleichung (6.62) verwendet wird. Aus der ersten und letzten Zeile sieht man, dass $\bar{\lambda}_i$ ein Eigenwert und v_i ein Eigenvektor der Matrix $A - BK_y C$ ist.

Will man erreichen, dass alle n Eigenwerte von $A - BK$ auch Eigenwerte von $A - BK_y C$ sind, so muss die Ausgangsrückführung die Bedingung (6.61) für $i = 1, 2, \dots, n$ erfüllen:

$$K_y C (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n) = K (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n).$$

Da die auf beiden Seiten rechts stehende Matrix $V = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)$ invertierbar ist, ist diese Bedingung äquivalent der Gl. (6.56), die – wie bereits erwähnt – nur für spezielle Zustandsrückführungen K erfüllt werden kann.

Man muss also die Entwurfsforderung insofern abschwächen, dass man nur noch eine näherungsweise Realisierung der Eigenwertvorgaben durch die Ausgangsrückführung fordert. Dafür führt man die Differenz

$$K_y C v_i - K v_i$$

der beiden Seiten von Gl. (6.61) als Maß für die Approximationsgenauigkeit ein, mit der der Eigenwert $\bar{\lambda}_i$ des Regelkreises (6.60) durch einen Eigenwert des Regelkreises (6.59) ersetzt wird. Diese Differenz (ein m -dimensionaler Vektor!) beschreibt zwar nicht genau den Abstand dieser beiden Eigenwerte. Sie ist aber entsprechend Gl. (6.61) ein sinnvolles Maß für die Approximationsgenauigkeit.

Schreibt man diese Differenzen für alle Eigenwerte nebeneinander, so erhält man die Matrix

$$((\mathbf{K}_y \mathbf{C} - \mathbf{K}) \mathbf{v}_1 \quad (\mathbf{K}_y \mathbf{C} - \mathbf{K}) \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad (\mathbf{K}_y \mathbf{C} - \mathbf{K}) \mathbf{v}_v) = (\mathbf{K}_y \mathbf{C} - \mathbf{K}) \mathbf{V},$$

deren Norm $\|(\mathbf{K}_y \mathbf{C} - \mathbf{K}) \mathbf{V}\|$ als Güte der Approximation von $\mathbf{K}$ durch $\mathbf{K}_y$ verwendet werden kann. Es erweist sich jedoch als zweckmäßig, noch eine Wichtungsmatrix $\mathbf{W}$ einzuführen, also mit dem Gütefunktional

$$J(\mathbf{K}_y) = \|(\mathbf{K}_y \mathbf{C} - \mathbf{K}) \mathbf{V} \mathbf{W}\|$$

zu arbeiten. Die gesuchte Ausgangsrückführung erhält man dann als Lösung des Optimierungsproblems

$$\min_{\mathbf{K}_y} J = \min_{\mathbf{K}_y} \|(\mathbf{K}_y \mathbf{C} - \mathbf{K}) \mathbf{V} \mathbf{W}\|. \quad (6.63)$$

Hierbei bezeichnet $\|\cdot\|$ die euklidische Norm (A2.77).

Berechnung der „bestmöglichen“ Ausgangsrückführung. Um das Optimierungsproblem zu lösen, wird es zunächst für eine Regelstrecke mit einer Eingangsgröße betrachtet ($m = 1$). $\mathbf{K}_y$ ist dann ein r -dimensionaler Zeilenvektor $\mathbf{k}'_y$ und $\mathbf{K}$ ein n -dimensionaler Zeilenvektor $\mathbf{k}'$. Für die zu minimierende Matrixnorm gilt

$$\|(\mathbf{k}'_y \mathbf{C} - \mathbf{k}') \mathbf{V} \mathbf{W}\| = \|\underbrace{\mathbf{W}' \mathbf{V}' \mathbf{C}'}_{\mathbf{A}} \underbrace{\mathbf{k}_y}_{\mathbf{x}} - \underbrace{\mathbf{W}' \mathbf{V}' \mathbf{k}}_{\mathbf{b}}\|,$$

da sich an der euklidischen Norm nichts ändert, wenn der betrachtete Vektor transponiert wird. Auf der rechten Seite ist zu erkennen, dass die Lösung des Optimierungsproblems in direkter Beziehung zur Lösung einer linearen Gleichung $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ steht, wobei die (n, r) -Matrix $\mathbf{A}$ den Rang $r \leq n$ hat. Die lineare Gleichung ist nicht lösbar. Es kann jedoch entsprechend Gl. (A2.89)

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^+ \mathbf{b} = (\mathbf{A}' \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}' \mathbf{b}$$

derjenige Vektor $\mathbf{x}$ bestimmt werden, für den die Norm der Differenz $\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}$ minimal wird. Übertragen auf das hier zu lösende Problem erhält man für $\mathbf{k}_y$ die Beziehung

$$\mathbf{k}_y = (\mathbf{W}' \mathbf{V}' \mathbf{C}')^+ \mathbf{W}' \mathbf{V}' \mathbf{k}$$

und nach Transposition und Einsetzen der Pseudoinversen den gesuchten Regler

$$\mathbf{k}'_y = \mathbf{k}' \mathbf{V} \mathbf{W} (\mathbf{C} \mathbf{V} \mathbf{W})^+ = \mathbf{k}' \mathbf{V} \mathbf{W} (\mathbf{C} \mathbf{V} \mathbf{W})' ((\mathbf{C} \mathbf{V} \mathbf{W})(\mathbf{C} \mathbf{V} \mathbf{W})')^{-1}. \quad (6.64)$$

Diese Lösung kann man auf Regelstrecken mit mehr als einer Stellgröße erweitern:

Ausgangsrückführung:

$$\begin{aligned} K_y &= K V W (C V W)^+ \\ &= K V W (C V W)' ((C V W)(C V W)')^{-1}. \end{aligned} \quad (6.65)$$

Die Gleichung zeigt, wie aus der gegebenen Zustandsrückführung K die „best-mögliche“ Ausgangsrückführung K_y bestimmt werden kann. In das rechts von K stehende Matrizenprodukt $V W (C V W)^+$ geht auch die Wichtungsmatrix W ein, die festlegt, wie stark die Approximationsfehler der einzelnen Eigenwerte in den Gütewert J eingehen.

Gleichung (6.65) kann als Verallgemeinerung der Beziehung (6.58) betrachtet werden. Für die spezielle Wichtungsmatrix $W = V^{-1}$ geben beiden Gleichungen dieselbe Berechnungsvorschrift für K_y an. Der entscheidende Nutzen, den man durch die Einführung des Produktes $V W$ hat, besteht darin, dass man über die Wichtungsmatrix W „steuern“ kann, wie gut die einzelnen Eigenwerte approximiert werden. Man hat damit Entwurfsfreiheiten gewonnen, die – wie die folgenden Beispiele zeigen werden – notwendig sind, um beim Ersetzen von Zustandsrückführungen durch Ausgangsrückführungen die an den Regelkreis gestellten Güteforderungen möglichst gut erfüllen zu können.

Wenn man als Wichtung eine Diagonalmatrix

$$W = \text{diag } w_{ii}$$

verwendet, kann man über die Vorgabe des i -ten Diagonalelementes w_{ii} die Approximationsgüte des i -ten Eigenwertes $\bar{\lambda}_i$ beeinflussen. Führt man den Entwurf nacheinander mit unterschiedlichen Wichtungsmatrizen durch, so wird der i -te Eigenwert des Regelkreises (6.60) besser durch einen Eigenwert des Regelkreises (6.59) angenähert, wenn w_{ii} vergrößert wurde. Gleichzeitig vergrößert sich jedoch der Abstand anderer Eigenwerte.

Obgleich man nicht erreichen kann, dass die Ausgangsrückführung alle Eigenwerte auf die durch die Zustandsrückführung vorgegebenen Werte schiebt, so ist es durch Vorgabe der Wichtungsmatrix möglich, die Approximationsgenauigkeit der einzelnen Eigenwerte zu beeinflussen. Dadurch kann man versuchen, die die Regelkreisdynamik am stärksten beeinflussenden Eigenwerte möglichst nahe an die entsprechenden Eigenwerte des zustandsrückgeführten Systems zu schieben.

Dieses Entwurfsverfahren kann auch dann angewendet werden, wenn die Zustandsrückführung nicht nach dem Prinzip der Polzuweisung, sondern z. B. mit dem im Kap. 7 beschriebenen Verfahren der optimalen Regelung bestimmt wurde. Er beruht auf einer Betrachtung der Eigenwerte, die eine gegebene Zustandsrückführung erzeugt, unabhängig von dem Verfahren, mit dem K festgelegt wurde.

Entwurfsverfahren 6.2 Ersetzen einer Zustandsrückführung durch eine Ausgangsrückführung

Gegeben: Regelstrecke (A, B, C) , Zustandsrückführung K , Güteforderungen an den Regelkreis

1. Es werden die Eigenwerte und die Eigenvektormatrix V von $A - BK$ berechnet.
2. Es wird eine Wichtungsmatrix W festgelegt, wobei zweckmäßigerweise eine Diagonalmatrix verwendet wird, bei der das Diagonalelement w_{ii} umso größer ist, je stärker der Eigenwert $\bar{\lambda}_i$ (vermutlich) das Regelkreisverhalten beeinflusst.
3. Die Ausgangsrückführung K_y wird entsprechend Gl. (6.65) ermittelt.
4. Die Eigenbewegung des Regelkreises für verschiedene Anfangszustände wird berechnet und anhand der gegebenen Güteforderungen bewertet. Sind die Güteforderungen nicht erfüllt, so werden die Schritte 3 und 4 unter Verwendung einer anderen Wichtungsmatrix W wiederholt.

Ergebnis: Ausgangsrückführung

Beispiel 6.3 Konzentrationsregelung durch Ausgangsrückführung

Es wird jetzt untersucht, wie die im Beispiel 6.1 berechnete Zustandsrückführung durch eine Ausgangsrückführung ersetzt werden kann. Da das System nur einen Ausgang und die Ausgangsrückführung deshalb nur einen Reglerparameter k_y hat, kann man mit Hilfe der Wurzelortskurve untersuchen, welche Eigenwertvorgaben für den geschlossenen Regelkreis überhaupt möglich sind. Abbildung 6.6 zeigt diese Wurzelortskurve, in der sowohl positive als auch negative Werte für k_y berücksichtigt sind. Durch Kreuze sind die beiden Eigenwerte der Regelstrecke markiert. Diese Analyse ist nicht Bestandteil des Entwurfsverfahrens 6.2. Sie wird hier durchgeführt, um die Wirkungsweise dieses Entwurfsverfahrens für das Beispiel anschaulich darstellen zu können.

Jede Ausgangsrückführung kann nur solche Eigenwerte erzeugen, die auf den beiden in Abb. 6.6 gezeigten Linien liegen, während alle anderen Eigenwertvorgaben grundsätzlich nicht realisierbar sind. Hierin drückt sich die Einschränkung der Freiheiten bei Verwendung einer Ausgangsrückführung – im Gegensatz zur Zustandsrückführung – aus. Das trifft natürlich auch auf die entsprechend Gl. (6.65) berechnete Rückführung zu.

Gl. (6.64) wird für die erste Zustandsrückführung mit der Wichtungsmatrix

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & w_{22} \end{pmatrix}$$

verwendet, bei der w_{22} den Abstand eines Regelkreiseigenwertes von dem durch die Zustandsrückführung erzeugten Wert $-1 \frac{1}{\min}$ wichtet. Dass die Approximationsgenauigkeit des Eigenwertes $-1 \frac{1}{\min}$ gerade durch das zweite und nicht das erste Diagonalelement beeinflusst wird, hängt mit der Reihenfolge zusammen, in der die Eigenvektoren für dieses Beispiel in der Matrix V eingetragen wurden. Der zum Eigenwert $-1 \frac{1}{\min}$ gehörende Eigenvektor bildet die zweite Spalte von V .

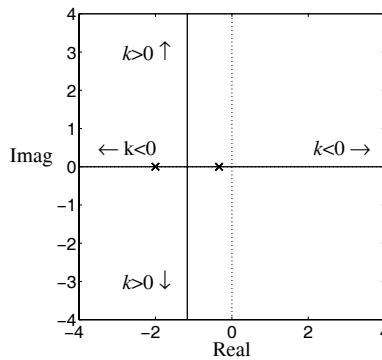


Abb. 6.6: Wurzelortskurve der Reaktorregelung: die beiden Kreuze markieren die Eigenwerte der Regelstrecke

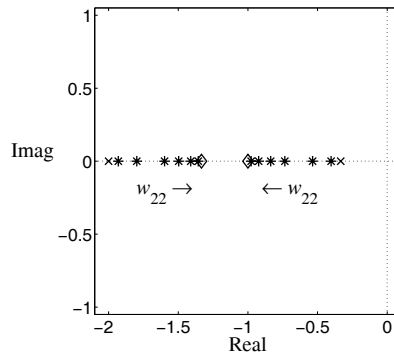


Abb. 6.7: Eigenwerte des Regelkreises, die durch die Ausgangsrückführung bei unterschiedlicher Wichtung $w_{22} = 0,5, 1, 2, 3, 5, 10$ erzeugt werden

Abbildung 6.7 zeigt, welche Regelkreiseigenwerte für unterschiedliche w_{22} erzeugt werden. Durch Kreuze sind die Regelstreckeneigenwerte eingetragen, durch $\diamond$ die Eigenwerte des Regelkreises bei $w_{22} = 100$. Erwartungsgemäß wandert ein Eigenwert mit steigender Wichtung zum Wert $-1 \frac{1}{\min}$. Wie man sieht, entfernt sich der andere Eigenwert vom Wert $-2 \frac{1}{\min}$, der durch die Zustandsrückführung ebenfalls erzeugt wurde. Für $w_{22} = 100$ erhält man den Reglerparameter $k_y = 1$, für den der Regelkreis die Eigenwerte $-1 \frac{1}{\min}$ und $-1,333 \frac{1}{\min}$ besitzt. Die Eigenbewegung ist in Abb. 6.8 zu sehen, in die zum Vergleich durch gestrichelte Linien auch die Eigenbewegung des Regelkreises mit Zustandsrückführung eingetragen ist.

Die Eigenbewegung ist langsamer als bei Verwendung einer Zustandsrückführung. Aus praktischer Sicht liegt der Grund darin, dass der Regler auf die Störung erst reagieren kann, wenn sie sich in der Regelgröße, also im zweiten Reaktor, bemerkbar macht. Theoretisch ist dies zu erwarten, weil die Eigenwerte des Regelkreises nicht mehr beliebig verschoben werden können und jetzt betragsmäßig kleinere Werte als bei der Zustandsrückführung besitzen.

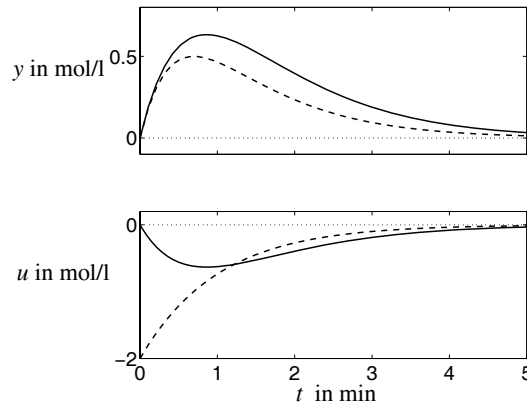


Abb. 6.8: Eigenbewegung der Reaktoren bei Ausgangsrückführung – bzw. der ersten Zustandsrückführung – -

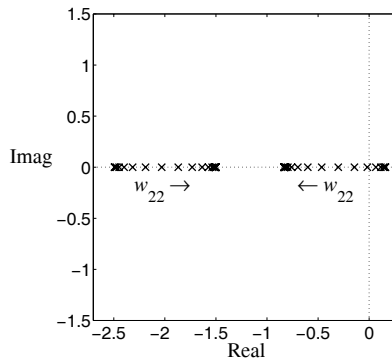


Abb. 6.9: Eigenwerte des Regelkreises mit einer Ausgangsrückführung, die für unterschiedliche Wichtung aus der zweiten Zustandsrückführung entsteht

Auf dieselbe Weise kann auch die Ausgangsrückführung berechnet werden, die die zweite Zustandsrückführung (6.25) approximiert. Da diese Zustandsrückführung einen Eigenwert bei $-2,5 \frac{1}{\text{min}}$ erzeugt, der auf dem für $k_y < 0$ geltenden Zweig der Wurzelortskurve in Abb. 6.6 liegt, erhält man für kleine Wichtung (z. B. $w_{22} = 0,1$) eine negative Reglerverstärkung und damit verbunden einen instabilen zweiten Regelkreiseigenwert. Obwohl also die zweite Zustandsrückführung einen schnelleren Regelkreis erzeugt als die zuvor betrachtete, liefert die damit berechnete Ausgangsrückführung einen instabilen Kreis! Der Grund hierfür ist aus der Wurzelortskurve ersichtlich. Die Eigenwertvorgaben für den Regelkreis sind bezogen auf die Freiheiten, die man beim Entwurf einer Ausgangsrückführung hat, einfach zu „scharf“.

Fordert man nun eine höhere Approximationsgenauigkeit für den Eigenwert bei $-1,5 \frac{1}{\text{min}}$, so wandert mit zunehmender Wichtung w_{22} der zunächst instabile Eigenwert nach links. Als guten Kompromiss für die Lage der Eigenwerte erhält man bei $w_{22} = 100$

die Ausgangsrückführung $k_y = 0,875$, die auf die Eigenwerte $-0,833 \frac{1}{\min}$ und $-1,5 \frac{1}{\min}$ führt.

Diskussion. Das Beispiel zeigt, dass das Entwurfsverfahren 6.2 ein zweckmäßiges Vorgehen beschreibt, mit dem eine gegebene Zustandsrückführung durch eine Ausgangsrückführung ersetzt wird. Die Freiheiten in der Wahl der Wichtungsmatrix können genutzt werden, um den Entwurfsprozess zu einer Lösung zu führen, bei der der Regelkreis ein akzeptables Verhalten hat. Das Beispiel zeigt auch, dass sich der Entwurfsalgorithmus natürlich nicht über die beschränkten Freiheitsgrade einer Ausgangsrückführung hinwegsetzen kann. Obwohl er für zwei unterschiedliche Zustandsrückführungen angewendet wurde, entstanden zwei sehr ähnliche Lösungen. Dies deutet darauf hin, dass „mehr“ mit einer Ausgangsrückführung eben nicht zu erreichen ist. $\square$

6.4.3 Ersetzen einer Zustandsrückführung durch einen dezentralen Regler

Das in Abschn. 6.4.2 beschriebene Vorgehen kann auch für dezentrale Ausgangsrückführungen

$$\mathbf{u}_i(t) = -\mathbf{K}_{yi} \mathbf{y}_i(t)$$

für die Regelstrecke

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^N \mathbf{B}_{si} \mathbf{u}_i(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (6.66)$$

$$\mathbf{y}_i(t) = \mathbf{C}_{si} \mathbf{x}(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (6.67)$$

angewendet werden. Die N dezentralen Teilregler können zu einer Ausgangsrückführung (6.54) zusammengefasst werden, bei der die Reglermatrix Blockdiagonalgestalt hat:

$$\mathbf{K}_y = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{y1} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{K}_{y2} & \cdots & \mathbf{O} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{K}_{yN} \end{pmatrix}.$$

Die im Satz 6.4 angegebene Bedingung gilt auch hier. Erfüllt die Reglermatrix die Bedingung (6.61), so tritt $\bar{\lambda}_i$ auch im dezentral geregelten System auf.

Zerlegt man die gegebene Zustandsrückführung in derselben Weise, wie der Eingangsvektor $\mathbf{u}$ in die Teilvektoren $\mathbf{u}_i$, $i = 1, \dots, N$ zerlegt ist

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{K}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{K}_N \end{pmatrix},$$

so zerfällt die Bedingung (6.61)

$$\begin{pmatrix} K_{y1} & O & \cdots & O \\ O & K_{y2} & \cdots & O \\ & & \ddots & \\ O & O & \cdots & K_{yN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{s1} \\ C_{s2} \\ \vdots \\ C_{sN} \end{pmatrix} v_i = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_N \end{pmatrix} v_i$$

in N unabhängige Bedingungen

$$K_{yi} C_{si} v_i = K_i v_i \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Auf diese Bedingungen kann man dieselben Überlegungen anwenden wie vorher, wodurch man analog zu Gl. (6.65) für jeden dezentralen Teilregler eine separate Bestimmungsgleichung erhält:

Dezentrale Ausgangsrückführung:

$$\begin{aligned} K_{yi} &= K_i V W (C_{si} V W)^+ \\ &= K_i V W (C_{si} V W)' ((C_{si} V W)(C_{si} V W)')^{-1}. \end{aligned} \quad (6.68)$$

Diese Beziehung beschreibt, wie eine Zustandsrückführung durch eine dezentrale Ausgangsrückführung ersetzt werden kann, für die der Regelkreis näherungsweise dieselben Eigenwerte wie bei der Zustandsrückführung hat.

Beispiel 6.4 Dezentrale Frequenz-Übergabeleistungsregelung von Elektroenergienetzen

Als Beispiel wird die in Aufgabe 5.1 auf S. 210 beschriebene Frequenz-Übergabeleistungsregelung betrachtet. Die Regelstrecke ist jetzt ein aus drei Teilnetzen bestehendes Verbundnetz, das in Abb. 6.10 dargestellt ist. Im Netz 1 arbeiten vier unterschiedliche Kraftwerke, während in den beiden anderen Netzen davon ausgegangen wird, dass alle Kraftwerke dieselbe Dynamik haben und deshalb durch einen gemeinsamen Block beschrieben werden können.

Die Primärregelung

$$p_{G_i \text{ Soll}}(t) = -k_{si} f(t) + k_{pi} u_1(t) \quad \text{für } i = 1, \dots, 4 \quad (6.69)$$

$$p_{G_5 \text{ Soll}}(t) = -k_{s5} f(t) + u_2(t) \quad (6.70)$$

$$p_{G_6 \text{ Soll}}(t) = -k_{s6} f(t) + u_3(t) \quad (6.71)$$

ist in Abb. 6.10 durch die Blöcke mit den Konstanten k_{si} dargestellt. Für die Konstanten k_{pi} , mit Hilfe derer die Stellgröße $u_1(t)$ ein Netz 1 entsprechend der Nominalleistung auf die vier Kraftwerke aufgeteilt wird, gilt $k_{p1} + k_{p2} + k_{p3} + k_{p4} = 1$. Im betrachteten Beispiel ist die erste Kraftwerksgruppe nicht an der Sekundärregelung beteiligt ($k_{p1} = 0$).

Die im Folgenden zu entwerfende Sekundärregelung dient dem vollständigen Abbau der Frequenzabweichung sowie der Abweichungen der Übergabeleistungssaldi $p_{t_1}(t)$, $p_{t_2}(t)$ und $p_{t_3}(t)$. Der Übergabeleistungssaldo $p_{t_i}(t)$ beschreibt, wieviel Leistung aus dem i -ten Netz in alle anderen Netze fließt. Die Übergabeleistung kann im Netz gemessen werden. In dem hier verwendeten Modell wird sie aber aus den Leistungen $p_{B_1}(t)$, $p_{B_2}(t)$ und $p_{B_3}(t)$ berechnet:

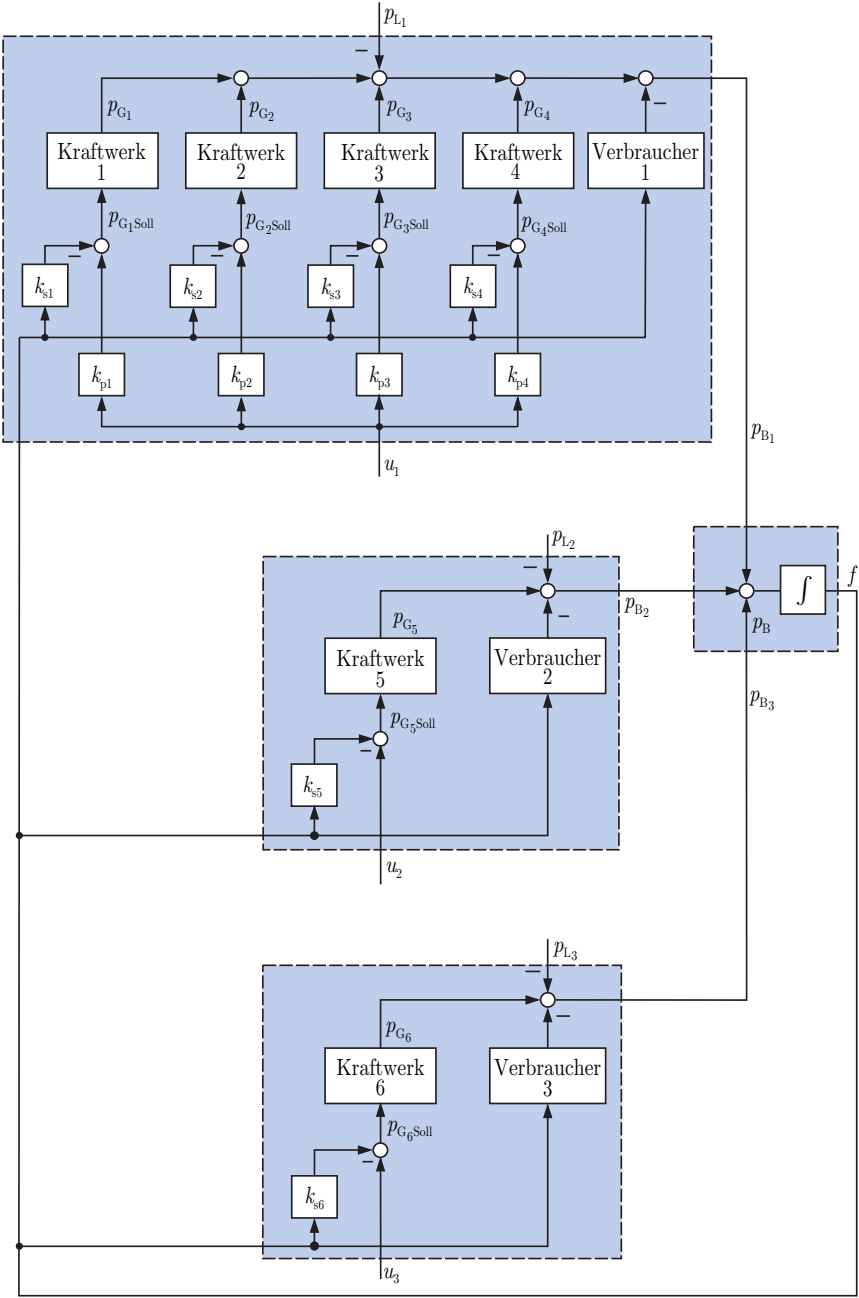


Abb. 6.10: Modell eines Elektroenergienetzes

$$\begin{aligned}
B &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.1928 & 0 & 0 \\ 0.9628 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.0067 & 0 & 0 \\ 0.0048 & 0 & 0 \\ 0.0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1800 \end{pmatrix}, & E &= \begin{pmatrix} -0.1046 & -0.1046 & -0.1046 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0350 & 0.6580 & 0 & 0.3290 & 0.6580 & 0.6580 & 0.6580 & 0 & -0.3420 & -0.3420 \\ -0.0030 & -0.4100 & 0 & -0.2050 & -0.4100 & -0.4100 & -0.4100 & 0 & 0.5900 & -0.4100 \\ -0.0320 & -0.2480 & 0 & -0.1240 & -0.2480 & -0.2480 & -0.2480 & 0 & -0.2480 & 0.7520 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5000 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
D &= O, & F &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.6580 & 0.3420 & 0.3420 \\ 0.4100 & -0.5900 & 0.4100 \\ 0.2480 & 0.2480 & -0.7520 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Auf Grund der geografischen Entfernung der Teilnetze muss die Sekundärregelung dezentral ausgeführt werden. Die Teilregler sollen so ausgewählt werden, dass bei einer Lastserhöhung $p_{L_i}(t) = 100\sigma(t)$ MW in einem der drei Teilnetze

- die maximale Frequenzabweichung nicht größer als 30 mHz ist,
- die Frequenzabweichung innerhalb von etwa 20 s abgebaut wird und
- die Stellgrößen nicht wesentlich überschwingen, damit die Leistungserzeugung der Kraftwerke nicht mehr als nötig verändert wird.

Für die Regelabweichung (6.73) – (6.75) kann man mit dem gegebenen Modell eine Gleichung der Form

$$e(t) = C_e x(t) + F_e d(t)$$

aufstellen und damit die I-erweiterte Regelstrecke

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_r(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ C_e & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_r(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} E \\ F_e \end{pmatrix} d(t) \quad (6.78)$$

$$\begin{pmatrix} e(t) \\ x_r(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_e & O \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_r(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_e \\ O \end{pmatrix} d(t) \quad (6.79)$$

$$y(t) = (C \ O) \begin{pmatrix} x(t) \\ x_r(t) \end{pmatrix} + F d(t) \quad (6.80)$$

bilden. Dabei wurde berücksichtigt, dass es keinen direkten Durchgriff von $u(t)$ auf $y(t)$ gibt ($D = O$). Die dezentralen PI-Regler

$$\begin{aligned}\dot{x}_{ri}(t) &= e_i(t), & (i = 1, 2, 3) \\ u_i(t) &= -k_{Pi}e_i(t) - k_{Ii}x_{ri}(t)\end{aligned}$$

bilden bezüglich der I-erweiterten Regelstrecke die statische Ausgangsrückführung

$$\mathbf{u}(t) = - \begin{pmatrix} k_{P1} & 0 & 0 & k_{I1} & 0 & 0 \\ 0 & k_{P2} & 0 & 0 & k_{I2} & 0 \\ 0 & 0 & k_{P3} & 0 & 0 & k_{I3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}(t) \\ \mathbf{x}_r(t) \end{pmatrix}. \quad (6.81)$$

Man bezeichnet mit $\mathbf{K}_y$ die gesamte Reglermatrix, während $\mathbf{K}_P$ und $\mathbf{K}_I$ die linke bzw. die rechte (3, 3)-Teilmatrix darstellt.

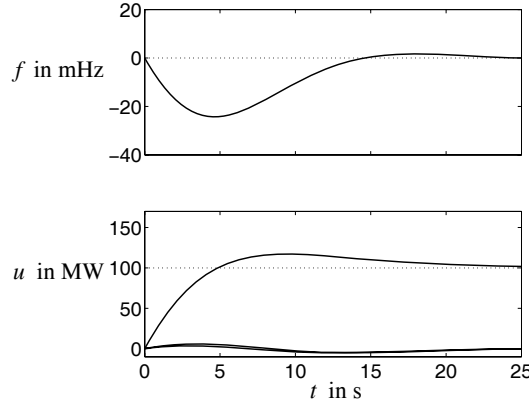


Abb. 6.11: Störübergangsfunktion des Netzes mit Zustandsrückführung bei einer Lasterhöhung um 100 MW

Um die Anwendung der Beziehung (6.68) zu erläutern, wird davon ausgegangen, dass für die Lösung der Regelungsaufgabe eine (zentrale) Zustandsrückführung

$$\mathbf{u}(t) = -(\mathbf{K}_x \quad \mathbf{K}_I) \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_r(t) \end{pmatrix} \quad (6.82)$$

mit

$$\mathbf{K}_x = \begin{pmatrix} 1,299 & 1,206 & 0,586 & 0,075 & 0,536 & 1,481 & 2,086 & 7,180 & 0,056 & 0,063 \\ 1,567 & 0,064 & 0,021 & 0,007 & 0,005 & 0,064 & 0,053 & -0,167 & 1,129 & 0,075 \\ 1,567 & 0,068 & 0,024 & 0,006 & 0,050 & 0,069 & 0,058 & -0,189 & 0,067 & 1,226 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_I = \begin{pmatrix} 0,3162 & 0,0004 & 0,007 \\ -0,0005 & 0,3162 & 0,0066 \\ -0,0067 & -0,0066 & 0,3161 \end{pmatrix}$$

bereits gefunden wurde, mit der der Regelkreis (6.78) – (6.80), (6.82) die gegebenen Güteforderungen erfüllt (vgl. Aufgabe 7.5 auf S. 328). Abbildung 6.11 zeigt den Verlauf der Frequenz und der drei Stellgrößen dieses Regelkreises bei der o. a. Laständerung.

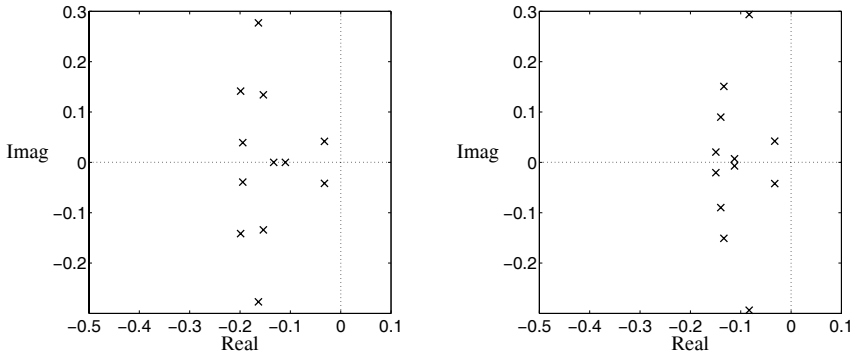


Abb. 6.12: Eigenwerte des Netzes mit Zustandsrückführung (links) und bei Verwendung der ersten dezentralen Regelung (rechts)

Die Lage der Eigenwerte des Regelkreises in der komplexen Ebene ist in Abb. 6.12 (links) zu sehen, wobei aus Maßstabsgründen der Eigenwert bei $-1,738 \frac{1}{s}$ weggelassen wurde. Für die Eigenbewegung sind das Polpaar $(-0,03 \pm j0,0421) \frac{1}{s}$ sowie die beiden reellen Eigenwerte bei $-0,1 \frac{1}{s}$ und $-0,133 \frac{1}{s}$ am wichtigsten.

Für die Berechnung einer dezentralen Regelung, die näherungsweise dasselbe Regelkreisverhalten erzeugt, muss Gl. (6.79) für $d = 0$ in drei Gleichungen der Form

$$\begin{pmatrix} e_i(t) \\ x_{ri}(t) \end{pmatrix} = C_{si} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_r(t) \end{pmatrix}$$

zerlegt werden, wobei die Matrix C_{si} gerade die in Gl. (6.68) auftretende Matrix ist. Außerdem wird die gegebene Zustandsrückführung

$$K = (K_x \ K_1)$$

in die drei Zeilen zerlegt

$$K = \begin{pmatrix} k'_1 \\ k'_2 \\ k'_3 \end{pmatrix}.$$

Wendet man die Beziehung (6.68) für $i = 1, 2, 3$ mit der Wichtungsmatrix $W = I$ an, so erhält man die dezentrale Regelung (6.81) mit

$$K_y = \begin{pmatrix} 0,840 & 0 & 0 & 0,383 & 0 & 0 \\ 0 & 0,373 & 0 & 0 & 0,115 & 0 \\ 0 & 0 & 0,499 & 0 & 0 & 0,162 \end{pmatrix},$$

für die der Regelkreis die in Abb. 6.12 (rechts) dargestellten Eigenwerte sowie einen Eigenwert bei $-1,8 \frac{1}{s}$ besitzt. Das dominante Polpaar ist erhalten geblieben. Die Eigendynamik wird jetzt jedoch auch durch ein relativ schwach gedämpftes Polpaar mit dem Realteil $-0,08 \frac{1}{s}$ entscheidend bestimmt. Die Störübergangsfunktion des Regelkreises, die in Abb. 6.13 zu sehen ist, schwingt deshalb viel stärker als bei Verwendung der Zustandsrückführung. Die Stellgröße verändert sich bei $t = 0$ sprunghaft, da sich die Netzkennlinienfehler bei Lastsprüngen sprunghaft verändern.

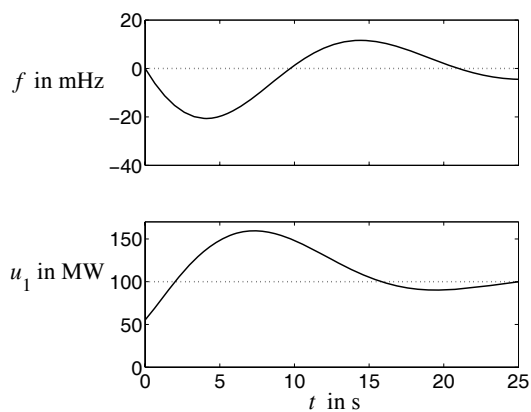


Abb. 6.13: Störübergangsfunktion des Netzes mit der ersten dezentralen Regelung

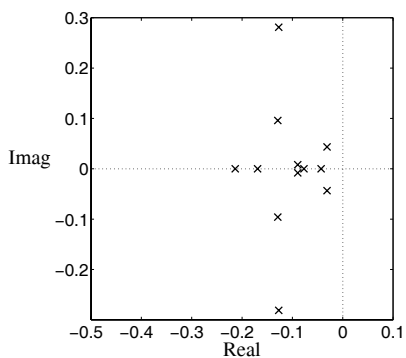


Abb. 6.14: Regelkreiseigenwerte bei Verwendung der zweiten dezentralen Regelung

Um die dezentrale Regelung zu verbessern, muss man Gl. (6.68) mit anderen Wichtungsmatrizen anwenden. Folgende Zuordnung von Wichtungen zu den Eigenwerten des Regelkreises mit Zustandsrückführung erwiesen sich als zweckmäßig:

$$\begin{array}{ll}
\bar{\lambda}_1 = -1,738 & w_{11} = 0 \\
\bar{\lambda}_{2/3} = -0,163 \pm j0,277 & w_{22} = w_{33} = 80 \\
\bar{\lambda}_{4/5} = -0,199 \pm j0,142 & w_{44} = w_{55} = 50 \\
\bar{\lambda}_{6/7} = -0,154 \pm j0,134 & w_{66} = w_{77} = 50 \\
\bar{\lambda}_{8/9} = -0,032 \pm j0,042 & w_{88} = w_{99} = 1 \\
\bar{\lambda}_{10/11} = -0,195 \pm j0,039 & w_{10,10} = w_{11,11} = 1 \\
\bar{\lambda}_{12} = -0,110 & w_{12,12} = 0 \\
\bar{\lambda}_{13} = -0,133 & w_{13,13} = 0.
\end{array}$$

Durch die dabei verwendete Wichtung werden vor allem die in Abb. 6.12 links liegenden Eigenwerte stark bewertet. Die dezentrale Regelung

$$K_y = \begin{pmatrix} 0,587 & 0 & 0 & 0,116 & 0 & 0 \\ 0 & 0,462 & 0 & 0 & 0,055 & 0 \\ 0 & 0 & 0,483 & 0 & 0 & 0,088 \end{pmatrix}$$

erzeugt die in Abb. 6.14 dargestellten Eigenwerte. Diese Eigenwerte liegen zwar im Wesentlichen weiter rechts als bei der ersten dezentralen Regelung, die dominanten Eigenwerte sind aber besser gedämpft, denn sie liegen auf oder in der Nähe der reellen Achse. Wie Abb. 6.15 zeigt, ist das Störübergangsverhalten fast genauso gut wie bei Verwendung der Zustandsrückführung. Die Frequenzabweichung wird schnell abgebaut. Es tritt nur ein kleines Überschwingen auf, weil der Sollwert der Kraftwerke des Netzes 1 im Zeitintervall zwischen 10 s und 30 s nicht so schnell auf den Endwert gebracht wird wie durch die Zustandsrückführung.

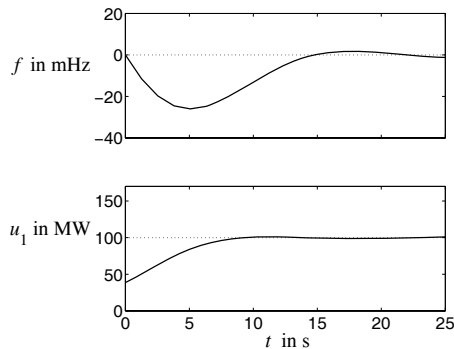


Abb. 6.15: Störübergangsfunktion des Netzes mit der zweiten dezentralen Regelung

6.5 Polzuweisung durch dynamische Kompensation

In den vorhergehenden Abschnitten ist der Unterschied zwischen einer Zustandsrückführung und einer Ausgangsrückführung deutlich geworden. Gemeinsam ist beiden Reglertypen, dass genau diejenigen Eigenwerte des Systems verschoben werden können, die durch die Stellgröße steuerbar und durch die Messgrößen beobachtbar sind. Da bei der Zustandsrückführung voraussetzungsgemäß der gesamte Zustandsvektor gemessen wird, ist die Beobachtbarkeitsvoraussetzung für alle Eigenwerte erfüllt.

Die genannte Bedingung heißt jedoch nur, dass die Eigenwerte „beweglich“ sind. Die beiden Reglertypen unterscheiden sich bezüglich der Frage, welche Eigenwerte zielgerichtet platziert werden können. Während mit Hilfe einer Zustandsrückführung sämtlichen steuerbaren Eigenwerten beliebig vorgegebene Werte zugewiesen werden können, reichen die in der Ausgangsrückführung enthaltenen Freiheitsgrade i. Allg. nicht aus, um alle Eigenwerte zielgerichtet zu verschieben.

Diese Situation legt es nahe zu untersuchen, ob die der Ausgangsrückführung fehlenden Freiheitsgrade dadurch gewonnen werden können, dass man anstelle einer proportionalen Ausgangsrückführung einen dynamischen Regler verwendet. Dieser Regler erhält dieselben Messgrößen, aber seine Gestaltungsmöglichkeiten sind größer, weil mit jeder hinzugenommenen Reglerordnung auch die Zahl der frei wählbaren Parameter steigt.

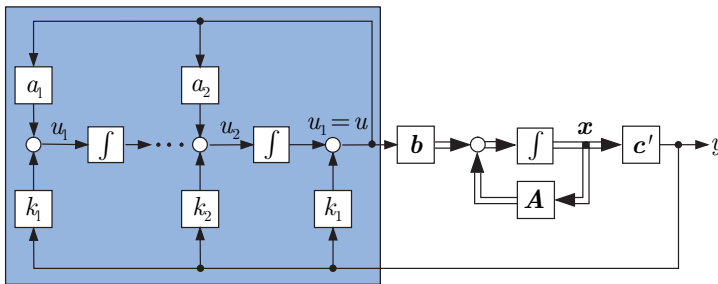


Abb. 6.16: Regelkreis mit dynamischem Kompensator

Es soll hier nur kurz auf dieses als dynamische Kompensation bezeichnete Prinzip eingegangen werden, weil dieses Prinzip nur noch eine theoretische Bedeutung hat. Andere dynamische Regler wie die im Kap. 8 behandelte Zustandsrückführung mit Beobachter führen nicht nur zu einem dynamischen Regler vergleichbarer Komplexität, sondern beruhen auf ingenieurtechnisch besser interpretierbaren Komponenten, so dass sie für die praktische Durchführung des Reglerentwurfes eine größere Bedeutung erlangt haben.

Bei der dynamischen Kompensation wird ein dynamischer Regler angesetzt, der die in Abb. 6.16 gezeigte Struktur besitzt. Der Regler hat eine interne Rückführung von $u(t) = u_1(t)$ auf $u_2(t), u_3(t), \dots, u_l(t)$ sowie eine Einkopplung der Ausgangs-

größe $y(t)$ an den Eingang aller Integratoren. Damit hat der Regler eine der Beobachternormalform ähnliche Struktur mit $2l - 1$ Reglerparametern a_i und k_i .

Der Kompensatorentwurf erfolgt nun in zwei Schritten. Im ersten Schritt denkt man sich die Regelstrecke um die im Regler enthaltene Integratorkette erweitert, wobei a_i und k_i gleich null sind. Es wird eine Rückführung des Zustandsvektors $x(t)$ der Regelstrecke und sämtlicher Integratorzustände auf den Eingang $u_l(t)$ des ersten Integrators entworfen, mit denen die $n + l$ Eigenwerte des Regelkreises beliebig platziert werden. Im zweiten Schritt wird diese Rückführung in Reglerparameter a_i und k_i umgerechnet, so dass schließlich der in der Abbildung gezeigte Regler entsteht. Die Reglerparameter werden dabei so festgelegt, dass der Regelkreis die zuvor durch die Zustandsrückführung festgelegten Eigenwerte besitzt. Wenn l gleich dem Beobachtbarkeitsindex der Regelstrecke ist, so ist diese Umrechnung möglich. Damit ist gezeigt, dass durch dynamische Regleranteile die Freiheitsgrade des Reglers so groß gemacht werden können, dass sämtliche Eigenwerte des Regelkreises beliebig verschoben werden können, auch wenn nur die Ausgangsgröße $y(t)$ gemessen wird.

6.6 MATLAB-Programme für den Entwurf zur Polzuweisung

Der Entwurf einer Zustandsrückführung kann mit dem Programm 6.1 durchgeführt werden, wobei hier die Eigenbewegung des Regelkreises zur Überprüfung der Regelgüte herangezogen wird. Dabei werden auch die Stellgrößen grafisch dargestellt. Das Programm kann mit wenigen Anweisungen so erweitert werden, dass auch das Führungsverhalten berechnet wird, wenn man die erweiterte Rückführung (6.1) verwendet.

Mit dem Programm 6.2 kann eine gegebene Zustandsrückführung durch eine Ausgangsrückführung entsprechend Gl. (6.65) ersetzt werden. Bei der Vorgabe der Wichtungen muss man darauf achten, in welcher Reihenfolge die Eigenwerte in der Matrix `Lambda` eingetragen sind, da die zugehörigen Eigenvektoren in derselben Reihenfolge in `V` stehen. Um eine geeignete Approximation zu berechnen, muss man das Programm gegebenenfalls mit unterschiedlichen Wichtungen mehrfach durchlaufen.

Aufgabe 6.4 Stabilisierung des invertierten Pendels

Das in Beispiel 3.9 auf S. 110 beschriebene invertierte Pendel ist instabil. Es soll eine Zustandsrückführung entworfen werden, die das Pendel stabilisiert und es bei Anfangsauslenkungen mit möglichst wenig Überschwingen in die aufrechte Position bringt.

1. Wählen Sie geeignete Eigenwerte des geschlossenen Kreises.

Programm 6.1 Entwurf einer Zustandsrückführung

Voraussetzungen für die Anwendung des Programms:

- Den Matrizen A, B, C sowie den Parametern n, m und r sind bereits Werte zugewiesen.
- D ist eine Nullmatrix entsprechender Dimension.

Reglerentwurf

```

>> System=ss(A, B, C, D);
>> rank(ctrb(System))           Prüfung der Steuerbarkeit
>> sigma = [...];              Festlegung der Eigenwerte
>> K = place(A, B, sigma);      Berechnung der Reglermatrix K

```

Analyse des Regelkreises mit Zustandsrückführung

```

>> Ag = A - B*K;
>> Bg = B;
>> Cg = C;
>> Dg = D;
>> x0 = [...];                 Vorgabe des Anfangszustandes
>> Kreis=ss(Ag, Bg, Cg, Dg);
>> initial(Kreis, x0);          Eigenbewegung des Regelkreises
>> Stellgroesse=ss(Ag, Bg, -K, zeros(m,m));
>> initial(Stellgroesse, x0);   Darstellung der Stellgrößen

```

2. Berechnen Sie den Regler mit der Funktion `place` und sehen Sie sich die Eigenbewegung des geregelten Systems für

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

an. Wiederholen Sie die Berechnung mit anderen Vorgaben und vergleichen Sie die Ergebnisse.

3. Berechnen Sie den Regler mit der Ackermannformel. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem in Schritt 2 für dieselben Vorgaben erhaltenen Ergebnis. □

Aufgabe 6.5* Stabilisierung der Magnetschwebbahn

Die in der Abb. 6.17 schematisch dargestellte Magnetschwebbahn wird durch die beiden unter der Schiene angeordneten Tragemagneten schwebend über der Schiene gehalten. Das System ist instabil, denn bei einer Veränderung des Luftspaltes wird das Gleichgewicht zwischen der Schwerkraft der Bahn und der Kraft der Tragemagneten so gestört, dass der

Programm 6.2 Ersetzen einer Zustandsrückführung durch eine Ausgangsrückführung

Voraussetzungen für die Anwendung des Programms:

- Den Matrizen A, B, C sowie den Parametern n, m und τ sind bereits Werte zugewiesen.
- D ist eine Nullmatrix entsprechender Dimension.
- K ist eine gegebene Zustandsrückführung.

Analyse des Regelkreises mit Zustandsrückführung

```

» rank(observ(A, C))           Prüfung der Beobachtbarkeit

» [V, Lambda]=eig(A-B*K);
» Lambda                       ... gibt Eigenwerte des Regelkreises an
» W = diag([....]);           Vorgabe der Wichtungen  $w_{ii}$ 

» CVW = C*V*W;
» CVWplus= CVW'*inv(CVW*CVW') ;
» Ky = K*V*W*CVWplus;        Ausgangsrückführung nach Gl. (6.65)

```

Analyse des Regelkreises mit Ausgangsrückführung

```

» Ag = A - B*Ky*C;
» Bg = B;
» Cg = C;
» Dg = D;
» eig(Ag)                     Eigenwerte des Regelkreises

» x0 = [....];                Vorgabe des Anfangszustandes
» Kreis=ss(Ag, Bg, Cg, Dg);
» initial(Kreis, x0);          Eigenbewegung des Regelkreises
» Stellgroesse=ss(Ag, Bg, -K*C, zeros(m,m));
» initial(Stellgroesse, x0);   Darstellung der Stellgrößen

```

Magnet sich entweder vollständig an die Schiene heranzieht oder die Bahn auf die Schiene herunterfällt.

Durch die zu entwerfende Regelung muss erreicht werden, dass der Luftspalt zwischen Fahrzeug und Schiene auch bei Störungen (z. B. Schwellen) annähernd konstant bleibt. Ein linearisiertes Modell hat folgende Komponenten:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \text{Abstand des Tragemagneten von der Schiene in mm} \\ \text{Abstand der Fahrgastkabine vom Tragemagneten in mm} \\ \dot{x}_1 \text{ in } \frac{\text{mm}}{\text{s}} \\ \dot{x}_2 \text{ in } \frac{\text{mm}}{\text{s}} \\ \text{Magnetkraft in N} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}(t) = \text{Spannung des Elektromagneten in V}$$

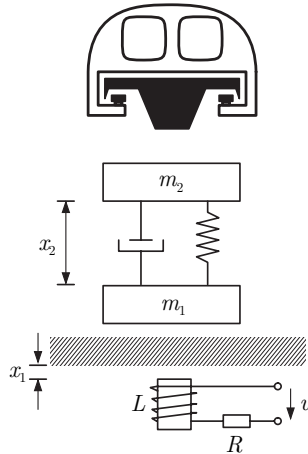


Abb. 6.17: Vertikalbewegung der Magnetschwebbahn

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -50.67 & 50.67 & -4.9 & 4.9 & -2.26 \cdot 10^{-3} \\ 25.25 & -25.25 & 2.44 & -2.44 & 0 \\ -6.4 \cdot 10^6 & 0 & 2.1 \cdot 10^5 & 0 & -3.26 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1440 \end{pmatrix}.$$

Diesen Gleichungen liegt die in Abb. 6.17 unten gezeigte vereinfachte Darstellung der Bahn bezüglich ihrer Vertikalbewegung zu Grunde, wobei zu beachten ist, dass der Magnet fest mit der Masse m_1 verbunden ist. Durch den Dämpfer und die Feder ist die Sekundärfederung der Kabine dargestellt. Die Zustände beschreiben Abweichungen vom Arbeitspunkt. Die Zeit wird in Sekunden gemessen.

Für die Bewertung der Regelgüte ist die Eigenbewegung des geregelten Systems beim Überfahren einer Schwelle von 5 mm, also bei $x_0 = (5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)'$ heranzuziehen.

1. Berechnen Sie die Eigenwerte der Magnetschwebbahn und überprüfen Sie die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit.
2. Entwerfen Sie eine Zustandsrückführung, so dass der geschlossene Kreis dieselben stabilen Eigenwerte wie die Regelstrecke hat und der instabile Streckeneigenwert auf -16 verschoben wird. Bewerten Sie die Regelgüte anhand der Eigenbewegung des geschlossenen Kreises.
3. Wie kann die Regelgüte durch veränderte Eigenwertvorgaben beeinflusst werden? $\square$

Aufgabe 6.6 Erweiterung des Programms 6.1

Erweitern Sie das Programm 6.1 so, dass für die Bewertung der Regelgüte nicht nur die Eigenbewegung des Regelkreises, sondern auch das Führungs- und das Störübertragungsverhalten grafisch dargestellt wird. Wie muss das Programm verändert werden, wenn man die I-erweiterte Regelstrecke betrachtet und folglich eine PI-Zustandsrückführung entwerfen will? $\square$

Literaturhinweise

Die Idee, Regler so zu entwerfen, dass die Eigenwerte des Regelkreises zielgerichtet platziert werden, ist erstmals 1962 von ROSENBROCK in [104] geäußert worden. Bei dem als modale Regelung bezeichneten Vorgehen sollten r kanonische Zustandsvariable beeinflusst werden, was man genau dann erreicht, wenn die Spalten der Matrix B und die Zeilen der Matrix C Rechts- bzw. Linkseigenvektoren der Matrix A sind. Die Matrix K der Zustandsrückführung war eine Diagonalmatrix, bei der jedes Diagonalelement die Verschiebung eines Eigenwertes von A bewirkte.

In einer Vielzahl von Arbeiten wurde diese Idee aufgegriffen und – wie es in diesem Kapitel beschrieben wurde – für beliebige Mess- und Stellgrößen ausgearbeitet. Der Originalbeweis der Ackermannformel wurde 1972 in [2] veröffentlicht.

Eine ausführliche Darstellung der Vollständigen Modalen Synthese gibt die Monografie [103]. Dort wird auch beschrieben, wie die Freiheitsgrade, die in den frei wählbaren Parametervektoren p_i liegen, genutzt werden können, um gutes dynamisches Verhalten zu erzeugen, unterschiedliche Paare von Führungs- und Regelgrößen voneinander zu entkoppeln, Strukturbeschränkungen im Regler einzuhalten oder eine parameterunempfindliche Regelung zu entwerfen.

Weitere interessante Arbeiten dienen der Darstellung des Reglergesetzes in Abhängigkeit von den Eigenwertvorgaben (an Stelle der Koeffizienten der charakteristischen Polynome) [81] sowie der Untersuchung der über die Eigenwertvorgabe hinaus realisierbaren Entwurfsforderungen [86]. PREUSS untersuchte in mehreren Arbeiten, wie konstante Zustandsrückführungen so ausgewählt werden können, dass neben Eigenwertvorgaben auch die Forderung nach Sollwertfolge bei sprungförmigen Führungssignalen erfüllt werden kann [95] – [97].

BRASCH, DING und PEARSON schlugen 1969 das Prinzip der dynamischen Kompensation vor, durch das das Polverschiebeproblem auch dann gelöst werden kann, wenn nicht der gesamte Zustandsvektor, sondern nur bestimmte Ausgangsgrößen gemessen werden können [10], [93]. Als eine sehr frühe zusammenfassende Darstellung des Reglerentwurfs zur Polzuweisung ist das Buch [22] interessant. Das im Abschn. 6.4.2 behandelte Verfahren, mit dem eine vollständige Zustandsrückführung durch eine statische Ausgangsrückführung näherungsweise ersetzt wird, wurde in [8] vorgeschlagen.

Aufgabe 6.2 ist aus [3] und das in Aufgabe 6.5 verwendete Modell der Magnetschwebbahn aus [51] entnommen.

7

Optimale Regelung

Werden die Güteforderungen an den Regelkreis durch ein Gütefunktional ausgedrückt, das den Verlauf der Stell- und Regelgrößen bewertet, so kann der Regler als Lösung eines Optimierungsproblems gefunden werden. In diesem Kapitel wird zunächst die Aufgabenstellung so umgeformt, dass die Lösung des Optimierungsproblems ein lineares, zeitinvariantes Reglergesetz ist. Danach wird die Zustandsrückführung, für die das Gütefunktional minimal ist, berechnet. Es werden die Eigenschaften des Optimalreglers untersucht und das Anwendungsgebiet dieses Entwurfsverfahrens abgesteckt. Das Kapitel endet mit Verfahren zur Berechnung optimaler Ausgangsrückführungen und H^∞ -optimaler Regler.

7.1 Grundgedanke der optimalen Regelung

Aufgabenstellung. Mit den bisher behandelten Entwurfsverfahren wurde der Regler mit dem Ziel ausgewählt, einzelne Kenngrößen des Regelkreises wie Überschwingweite, Einschwingzeit, Pole, Bandbreite oder Resonanzüberhöhung vorgegebenen Forderungen anzupassen. Bei vielen praktischen Aufgabenstellungen beziehen sich die Güteforderungen jedoch auf den gesamten Verlauf der Stell- und Regelgrößen. Diese Tatsache wird bei der optimalen Regelung aufgegriffen, bei der ein Gütefunktional J als Maß für die Güte des Regelkreises herangezogen wird.

Da es sich mit quadratischen Funktionalen am besten rechnen lässt, wird das Gütefunktional in der Form

$$J_e(x_0, u(t)) = y'(t_e)Sy(t_e) + \int_0^{t_e} (y'(t)Q_y y(t) + u'(t)Ru(t)) dt \quad (7.1)$$

angesetzt. Der zweite Summand bewertet den Verlauf der Stellgröße $u(t)$ und der Regelgröße $y(t)$ im Zeitintervall $0 \leq t \leq t_e$, der erste den zu einer vorgegebenen Endzeit t_e erreichten Wert $y(t_e)$ der Regelgröße. Die Matrizen S , Q_y und R sind symmetrisch und positiv (semi)definit, wodurch alle Summanden nichtnegativ sind.

Ziel des Entwurfes ist es, eine Funktion $u^*(t)$ zu finden, für die das Gütefunktional den kleinstmöglichen Wert annimmt:

$$\min_{u(t)} J_e(x_0, u(t)) = J_e(x_0, u^*(t)). \quad (7.2)$$

Diese Funktion heißt optimale Steuerung $u^*(t)$. Da das Gütefunktional außer von $u(t)$ auch noch von x_0 abhängt, ist die optimale Steuerung vom Anfangszustand x_0 des Systems abhängig, was man durch die Bezeichnung $u^*(t, x_0)$ hervorheben kann.

Durch die optimale Steuerung $u^*(t, x_0)$ wird das System aus dem Anfangszustand x_0 in bestmöglicher Weise im Zeitintervall $0 \leq t \leq t_e$ in einen Endzustand $x(t_e)$ überführt. Was „bestmöglich“ heißt, wird durch das Gütefunktional, also insbesondere die Matrizen S , Q_y und R festgelegt. Je größer die Werte von $u(t)$ und $y(t)$ sind, umso größer ist das Integral, wobei durch die quadratischen Terme große Werte stärker „bestraft“ werden als kleine. Man interpretiert das Gütefunktional deshalb auch als verallgemeinerte quadratische Regelfläche nach Gl. (I-9.1).

Umformung des Optimierungsproblems. Die optimale Steuerung stellt einen Kompromiss zwischen zwei Teilzielen dar. Einerseits muss der Zustand $x(t)$ und mit ihm der Systemausgang y möglichst klein gemacht werden, damit der linke Teil des Gütefunktionals

$$y'(t_e)Sy(t_e) + \int_0^{t_e} y'(t)Q_y y(t) dt$$

möglichst klein ist. Je schneller die Regelstrecke vom Anfangszustand x_0 aus in die Umgebung der Ruhelage $x = 0$ gesteuert wird, umso kleiner ist der von y abhängige Teil des Gütefunktionals. Andererseits bewertet das Integral

$$\int_0^{t_e} u'(t)Ru(t) dt$$

den „Aufwand“ für diese Umsteuerung. Die optimale Steuerung $u^*(t)$ ist diejenige Funktion $u(t)$, für die die Summe beider Teile des Gütefunktionals am kleinsten ist.

Im Folgenden soll das angegebene Optimierungsproblem diskutiert, umgeformt und schließlich gelöst werden, ohne auf die Theorie der optimalen Steuerung im Einzelnen einzugehen. Eine vollständige Lösung, die auf der Variationsrechnung und dem Maximumprinzip von PONTRJAGIN¹ beruht, würde einerseits den Rahmen dieses Kapitels sprengen, so dass auf einschlägige Lehrbücher verwiesen werden muss

¹ LEW SEMJONOWITSCH PONTRJAGIN (1908–1988), russischer Mathematiker, arbeitete auf dem Gebiet der dynamische Optimierung

(siehe Literaturhinweise). Andererseits ist das Verständnis dieser Theorie nicht notwendig, wenn das Ziel des Entwurfes ein lineares zeitinvariantes Reglergesetz

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (7.3)$$

sein soll. Wie sich zeigen wird, führt die Einschränkung der optimalen Steuerung auf eine durch eine Zustandsrückführung (7.3) realisierbare Steuerung zu einem statischen Optimierungsproblem, das auf relativ einfache Weise ohne Nutzung der für viel allgemeinere Steuerungsprobleme entwickelten Optimalsteuerungstheorie gelöst werden kann.

Um die weitere Vorgehensweise auch ohne Vorkenntnisse zur optimalen Steuerung verstehen zu können, soll zunächst die Aufgabenstellung noch etwas genauer erläutert werden. Bei dem beschriebenen Optimierungsproblem wird vorausgesetzt, dass sich die Regelstrecke zum Zeitpunkt $t = 0$ in einem Anfangszustand $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ befindet und durch die Steuerung $\mathbf{u}(t)$ in einen anderen Zustand überführt werden soll. Die Regelstrecke ist wie immer ein lineares System

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (7.4)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (7.5)$$

wobei zur Vereinfachung der Darstellung davon ausgegangen wird, dass die Strecke nicht sprunghaft ist. Weder die Systemtrajektorie $\mathbf{y}(t)$ noch der Endwert $\mathbf{y}(t_e)$ sind vorgeschrieben. Beides erhält man als Ergebnisse der Optimierung.

Das Optimierungsproblem (7.2) stellt nun die Aufgabe, einen Verlauf der Stellgröße zu finden, so dass der Gütewert minimal wird. Ein zwar nicht gangbarer, aber das Problem sehr gut veranschaulichender Lösungsweg besteht darin, sehr viele unterschiedliche Funktionen $\mathbf{u}(t)$ für das Intervall $0 \leq t \leq t_e$ vorzugeben, für diese Funktionen die Trajektorie des Systems (7.4), (7.5) auszurechnen, aus diesen Trajektorien den Gütewert zu ermitteln und schließlich denjenigen Verlauf der Stellgröße auszuwählen, für den das Gütefunktional den kleinsten Wert annimmt.

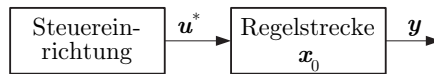


Abb. 7.1: Optimale Steuerung

Das Problem (7.2) ist ein *dynamisches Optimierungsproblem*, denn das Gütefunktional wird über eine Zeitfunktion $\mathbf{u}(t)$ minimiert, wobei aufgrund der Systemdynamik die Werte der Stellgröße bei früheren Zeitpunkten den Wert des Integranden im Gütefunktional zu späteren Zeitpunkten mitbestimmen. Wie die bisher angestellten Überlegungen gezeigt haben, sind dynamische Optimierungsprobleme sehr komplexe Probleme, deren Lösung einen erheblichen Aufwand erfordert. Für den Reglerentwurf ist jedoch nicht dieser Aufwand problematisch, sondern die Tatsache, dass die Lösung eine Steuerung in der offenen Wirkungskette, also gar keine Regelung, ist (Abb. 7.1). Für einen gegebenen Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ berechnet die Steuereinrichtung

die optimale Steuerung $\mathbf{u}^*(t)$ und gibt das Ergebnis als Stellgröße an die Regelstrecke aus. Damit verbunden sind alle Vor- und Nachteile einer Steuerung in der offenen Wirkungskette, insbesondere die fehlende Robustheit in Bezug zu Fehlern im Modell der Regelstrecke. Im Folgenden wird deshalb untersucht, wie das Optimierungsproblem modifiziert werden muss, um für den Entwurf von Regelungen einsetzbar zu sein.

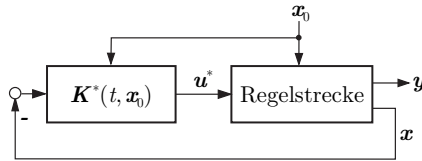


Abb. 7.2: Optimale Regelung bei endlichem Optimierungshorizont

Der erste Umformungsschritt des Optimierungsproblems besteht darin, die Steuerungen auf solche Funktionen $\mathbf{u}(t)$ einzuschränken, die sich als Rückführung (7.3) realisieren lassen. Es wird dann nicht über die Zeitfunktion $\mathbf{u}(t)$, sondern über die Reglermatrix $\mathbf{K}$ optimiert:

$$\min_{\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)} J_e(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(t)). \quad (7.6)$$

Schränkt man die Reglermatrix $\mathbf{K}$ nicht von vornherein auf konstante Matrizen ein, so entsteht ein lineares, zeitvariables Reglergesetz $\mathbf{K}^*(t)$. Diese Tatsache ist plausibel, wenn man die aus dem Optimierungsproblem (7.2) erhaltene optimale Steuerung durch den zum selben Zeitpunkt auftretenden Zustand $\mathbf{x}(t)$ „dividiert“. Man erhält dann eine Matrix $\mathbf{K}^*$, die i. Allg. von der Zeit abhängig ist. Wichtig ist außerdem, dass diese Matrixfunktion vom Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ abhängt, so dass das Reglergesetz die Form

$$\mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}_0) = -\mathbf{K}^*(t, \mathbf{x}_0) \mathbf{x}(t)$$

hat (Abb. 7.2).

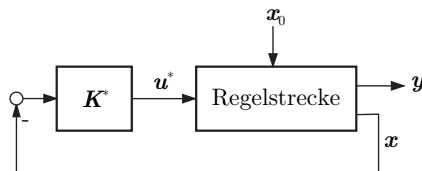


Abb. 7.3: Optimale Regelung mit unendlichem Optimierungshorizont

Zu einem zeitinvarianten Regler (7.3) kommt man, wenn man mit unendlichem Optimierungshorizont arbeitet:

$$J(x_0, u(t)) = \int_0^\infty (y'(t)Q_y y(t) + u'(t)Ru(t)) dt. \quad (7.7)$$

Um einen endlichen Güterwert J zu erhalten, muss $x(t) \rightarrow \mathbf{0}$ für $t \rightarrow \infty$ gelten, womit der erste Summand in Gl. (7.1) entfällt. Das Ergebnis des Optimierungsproblems

$$\min_{u(t)} J(x_0, u(t)) \quad (7.8)$$

ist eine Steuerung, die sich als Reglergesetz

$$u^*(t) = -K^*x(t) \quad (7.9)$$

darstellen lässt (Abb. 7.3), wobei im Gegensatz zu allen vorhergehenden Problemen das Reglergesetz jetzt wie gewünscht linear, zeitinvariant und vom Anfangszustand x_0 unabhängig ist. Das dynamische Optimierungsproblem (7.8) kann also durch das *statische Optimierungsproblem*

$$\min_K J(x_0, -Kx(t)) \quad (7.10)$$

ersetzt werden.

Das statische Optimierungsproblem (7.10) zeichnet sich dadurch aus, dass das Gütefunktional über die konstanten Werte der Matrix K minimiert wird. Es gilt

$$\min_{u(t)} J(x_0, u(t)) = \min_{u(t)=-Kx(t)} J(x_0, u(t)) = \min_K J(x_0, -Kx(t)).$$

Die als Lösung erhaltene Reglermatrix K^* ist von x_0 unabhängig. Das heißt nicht, dass u^* nicht von x_0 abhängt, sondern dass die Stellgröße auf eine von x_0 unabhängige Art und Weise aus $x(t)$ berechnet wird.

Die Vereinfachung des dynamischen in ein statisches Optimierungsproblem ist der entscheidende Grund dafür, dass die Optimalsteuerungstheorie als Hilfsmittel für den Reglerentwurf sehr häufig für das Gütefunktional (7.7) angewendet wird. Da dieses Funktional quadratisch und die Regelstrecke linear ist, spricht man auch von *linear-quadratischer Regelung* (LQ-Regelung). Im Folgenden wird auch häufig vom *Optimalregler* gesprochen.

Das jetzt betrachtete Optimierungsproblem ist ein sehr spezielles Steuerungsproblem. Da das Gütefunktional (7.7) nur dann endlich ist, wenn alle Zustandsvariablen und folglich sowohl die Regel- als auch die Stellgröße für $t \rightarrow \infty$ nach null gehen, führt der Optimalregler (7.9) i. Allg. auf einen stabilen Regelkreis. Er löst das Problem, die Regelstrecke von der gegebenen Anfangsbedingung x_0 in den Nullzustand $x(\infty) = \mathbf{0}$ zu überführen, in bestmöglicher Weise. Im Mittelpunkt der nachfolgenden Abschnitte steht deshalb die Gestaltung der Eigenbewegung des Regelkreises. Wie der dabei erhaltene Regler auch für Sollwertfolge und Störkompensation eingesetzt werden kann, wird zum Abschluss dieses Kapitels behandelt.

Beispiel 7.1 *LQ-Problem für das invertierte Pendel*

Das LQ-Problem wird jetzt für das im Beispiel 3.9 auf S. 110 eingeführte invertierte Pendel erläutert. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass das Pendel nicht auf einem Wagen, sondern auf einem Motor montiert ist und dass das vom Motor auf das Pendel ausgeübte Drehmoment die Stellgröße $u(t)$ ist. Man erhält dann ein Zustandsraummodell zweiter Ordnung mit dem Zustandsvektor

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \dot{\phi}(t) \end{pmatrix}$$

und den Parametern

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 21,5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,62 \end{pmatrix}.$$

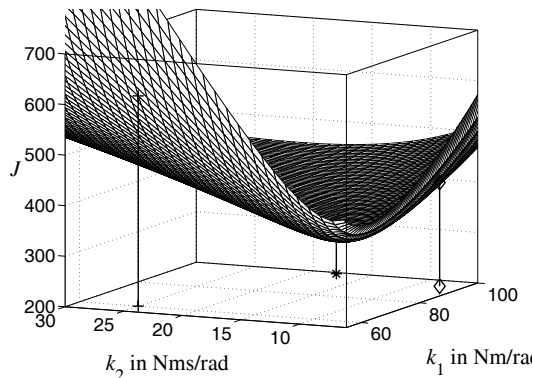


Abb. 7.4: Gütebirge des LQ-Problems für das invertierte Pendel

Das Gütefunktional (7.7) heißt für die skalare Ausgangsgröße $y = \phi$ und die skalare Eingangsgröße

$$J(\mathbf{x}_0, (k_1 \ k_2)) = \int_0^\infty (3000y^2(t) + u^2(t)) dt,$$

wobei hier $\mathbf{Q} = 3000$ und $\mathbf{R} = 1$ gesetzt wurde und zur Vereinfachung der Darstellung $\mathbf{x}_0$ und $\mathbf{k}' = (k_1 \ k_2)$ als Argumente des Gütefunktionals geschrieben werden, denn der Wert des Gütefunktionals J hängt vom Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ sowie von den beiden Parametern k_1 und k_2 der Zustandsrückführung ab. Abbildung 7.4 zeigt den Verlauf von J für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = (0,52 \text{ rad} \ 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}})'$ in Abhängigkeit von k_1 und k_2 . Entsprechend dem Optimierungsproblem (7.10) ist derjenige Regler $\mathbf{k}' = (k_1 \ k_2)$ gesucht, für den das Gütefunktional den kleinsten Wert hat.

Mit der im nächsten Abschnitt behandelten Methode erhält man als Lösung des Optimierungsproblems (7.10) den Regler

$$\mathbf{k}^{*'} = (99 \ 17,8),$$

für den das Gütefunktional den Wert

$$J(x_0, k^{*'}) = 315$$

hat. Dieser Regler ist in der k_1/k_2 -Fläche in Abb. 7.4 durch einen Stern gekennzeichnet. Der senkrechte Strich verbindet diesen Punkt mit dem dazugehörigen Gütwert $J = 315$. Für zwei beliebig ausgewählte andere Regler

$$k'_2 = (95 \ 8) \quad \text{und} \quad k'_3 = (60 \ 25)$$

erhält man die Gütwerte $J = 405$ bzw. $J = 615$. Die Regler sowie die zugehörigen Gütwerte sind durch $\diamond$ bzw. $+$ in der Abbildung gekennzeichnet.

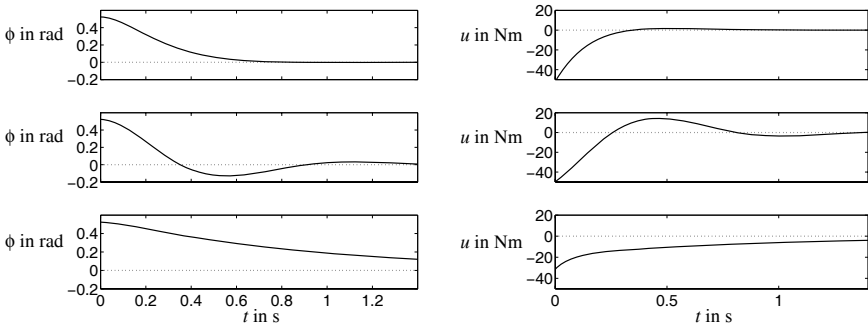


Abb. 7.5: Pendelwinkel (links) und Stellgröße (rechts) bei drei verschiedenen Zustandsrückführungen

Das Verhalten des geregelten Systems ist in Abb. 7.5 zu sehen, wobei links der Pendelwinkel $\phi(t)$ und rechts die Stellgröße $u(t)$ aufgetragen sind. Die obersten Abbildungen zeigen das Pendel mit dem Optimalregler $k^{*'}$, die darunter liegenden Abbildungen das Verhalten bei den Reglern k'_2 bzw. k'_3 . Man sieht, dass das Pendel beim Regler k'_2 schneller aufgerichtet wird als beim Optimalregler $k^{*'}$, dass aber dafür eine größere Stellamplitude notwendig ist. Im Gütefunktional werden der Verlauf des Pendelwinkels und der Verlauf der Stellgröße gemeinsam bewertet und der Optimalregler ist derjenige Regler, für den die Summe beider Bewertungen den kleinsten Wert annimmt.

Zerlegt man das Gütefunktional in der Form

$$J = J_y + J_u \quad \text{mit} \quad J_y = \int_0^\infty 1000y^2(t)dt, \quad J_u = \int_0^\infty u^2(t)dt,$$

so erhält man für die drei angegebenen Regler folgende Ergebnisse:

Regler	J_y	J_u	$J = J_y + J_u$
$k^{*'} = (99 \ 17,8)$	150	165	315
$k'_2 = (95 \ 8)$	136	268	405
$k'_3 = (60 \ 25)$	426	188	615

Für den Optimalregler ist erwartungsgemäß die Summe der Bewertungen des Pendelwinkels und der Stellgröße am kleinsten. Das schnellere Aufrichten des Pendels beim Regler k'_2 schlägt sich in einem kleineren Wert für J_y nieder, jedoch wird dafür eine größere Stellamplitude gebraucht, so dass J_u größer als beim Optimalregler ist. Die Summe beider Bewertungen ist für den zweiten Regler schlechter als für den Optimalregler. Der dritte Regler erzeugt einen Stellgrößenverlauf, der etwa dieselbe Bewertung erhält wie beim Optimalregler. Die Bewertung des Pendelwinkels ist jedoch wesentlich schlechter, so dass sich insgesamt ein wesentlich größerer Wert des Gütefunktional ergibt.

Durch den Faktor 1000 vor $y^2(t)$ im Gütefunktional wurde übrigens erreicht, dass die Werte von J_y und J_u für den Optimalregler etwa gleich groß sind und folglich der Verlauf der Regelgröße und der Verlauf der Stellgröße mit gleichem Gewicht in den optimalen Gütewert eingehen.

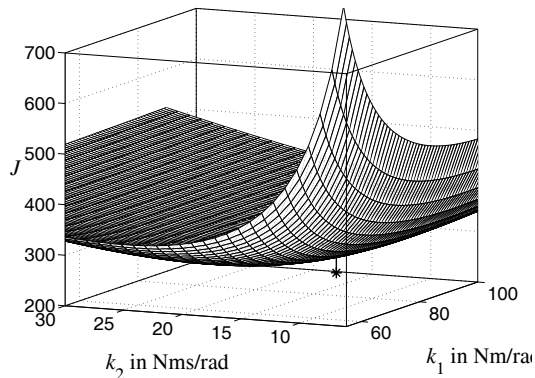


Abb. 7.6: Gütegebirge bei veränderter Anfangsbedingung

Wählt man eine andere Anfangsbedingung, beispielsweise $x_0 = (0 \ 3)'$, so erhält man einen anderen Verlauf des Gütefunktional $J(x_0, k')$, wie Abb. 7.6 zeigt. Entscheidend für die Lösung des LQ-Problems ist, dass das Minimum des Gütefunktional bei demselben Regler $k^{*'}$ liegt. Folglich hängt die Lösung des LQ-Problems nicht von der Anfangsbedingung x_0 ab, obwohl sich der Wert des Gütefunktional natürlich mit x_0 verändert. Die in Abb. 7.6 eingezeichnete Linie beginnt also bei demselben Punkt in der k_1/k_2 -Ebene, führt allerdings zu einem anderen Wert J . $\square$

7.2 Lösung des LQ-Problems

7.2.1 Umformung des Gütefunktional

Das für die Regelstrecke

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (7.11)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (7.12)$$

und das Reglergesetz

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (7.13)$$

zu lösende Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{K}} J \quad (7.14)$$

wird im Folgenden für das Gütefunktional

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}'(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}'(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)) dt \quad (7.15)$$

behandelt, in dem anstelle der Regelgröße $\mathbf{y}$ der Zustand $\mathbf{x}$ bewertet wird. Dieses Gütefunktional ist etwas allgemeiner als das in Gl. (7.7) angegebene, denn beide Funktional sind gleich, wenn mit der speziellen Wichtungsmatrix $\mathbf{Q} = \mathbf{C}'\mathbf{Q}_y\mathbf{C}$ gearbeitet wird.

Gütwert der Regelstrecke. Für die nachfolgend angegebene Ableitung einer notwendigen Optimalitätsbedingung muss eine neue Darstellung für den Wert des Gütefunktional eingeführt werden. Zur Vereinfachung der Umformungsschritte wird zunächst das unregelte System betrachtet ($\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$) und angenommen, dass die Regelstrecke stabil ist. Der Gütwert kann unter Verwendung des Regelstreckenmodells in

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty \mathbf{x}'(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) dt \\ &= \int_0^\infty \mathbf{x}_0' e^{\mathbf{A}'t} \mathbf{Q} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 dt \\ &= \mathbf{x}_0' \mathbf{P} \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{P} = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}'t} \mathbf{Q} e^{\mathbf{A}t} dt$$

umgeformt werden. Durch partielle Integration kann die Matrix $\mathbf{P}$ in

$$\mathbf{P} = e^{\mathbf{A}'t} \mathbf{Q} \mathbf{A}^{-1} e^{\mathbf{A}t} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \mathbf{A}' e^{\mathbf{A}'t} \mathbf{Q} \mathbf{A}^{-1} e^{\mathbf{A}t} dt$$

überführt werden, woraus man für eine stabile Matrix $\mathbf{A}$ und unter Ausnutzung der Vertauschbarkeit der Multiplikationsreihenfolge von $\mathbf{A}$ und $e^{\mathbf{A}t}$ die Beziehung

$$\mathbf{P} = -\mathbf{Q}\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}' \int_0^\infty e^{\mathbf{A}'t} \mathbf{Q} e^{\mathbf{A}t} dt \mathbf{A}^{-1}$$

erhält. Das Integral auf der rechten Seite stellt wieder die Matrix $\mathbf{P}$ dar, für die damit die Beziehung

$$\mathbf{P} = -\mathbf{Q}\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}$$

und folglich

$$\text{LJAPUNOW-Gleichung: } \mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q} \quad (7.16)$$

gilt. Diese Beziehung heißt Ljapunowgleichung. Sie spielt in der Stabilitätsanalyse linearer Systeme eine wichtige Rolle, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 7.1 (Stabilitätsanalyse mit der Ljapunowgleichung)

Die Ljapunowgleichung (7.16) hat genau dann für eine beliebige gegebene symmetrische, positiv definite Matrix $\mathbf{Q}$ eine symmetrische, positiv definite Lösung $\mathbf{P}$, wenn die Matrix $\mathbf{A}$ asymptotisch stabil ist.

Das heißt, man kann anstelle der bisher behandelten Stabilitätskriterien die Ljapunowgleichung für die Stabilitätsprüfung einsetzen.

Gütwert des Regelkreises. Betrachtet man nun die Regelstrecke mit einer Zustandsrückführung (7.13), die auf den Regelkreis

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

mit der Systemmatrix

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$$

führt, so lässt sich das Gütefunktional in der Form

$$J = \int_0^\infty \mathbf{x}'(t) (\mathbf{Q} + \mathbf{K}'\mathbf{R}\mathbf{K}) \mathbf{x}(t) dt = \int_0^\infty \mathbf{x}'(t) \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{x}(t) dt$$

mit

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} + \mathbf{K}'\mathbf{R}\mathbf{K}$$

darstellen. Für den Gütwert erhält man aus einer Erweiterung der o. a. Umformungen die Darstellung

$$J = \mathbf{x}_0' \mathbf{P} \mathbf{x}_0 \quad (7.17)$$

und

$$\bar{\mathbf{A}}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\bar{\mathbf{A}} = -\bar{\mathbf{Q}}. \quad (7.18)$$

7.2.2 Ableitung einer notwendigen Optimalitätsbedingung

Eine notwendige Optimalitätsbedingung ist die Forderung, dass die Ableitung des Gütefunktionals nach allen Elementen k_{ij} der Reglermatrix $\mathbf{K}$ gleich null sein soll:

$$\frac{\partial J}{\partial k_{ij}} \stackrel{!}{=} 0 \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n).$$

Mit Hilfe der Darstellung (7.17) für das Gütefunktional entsteht daraus die Forderung

$$\frac{\partial J}{\partial k_{ij}} = x_0' \frac{\partial P}{\partial k_{ij}} x_0 \stackrel{!}{=} 0.$$

Wie im vorangegangenen Abschnitt erläutert wurde, soll die optimale Regelung von der Anfangsbedingung x_0 unabhängig sein. Die angegebene Bedingung ist deshalb gleichwertig mit

$$\frac{\partial P}{\partial k_{ij}} = O \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n).$$

Leitet man nun die Gleichung (7.18) unter Beachtung dieser Bedingung nach k_{ij} ab, so erhält man

$$\frac{\partial \bar{A}'}{\partial k_{ij}} P + P \frac{\partial \bar{A}}{\partial k_{ij}} = -\frac{\partial \bar{Q}}{\partial k_{ij}}.$$

Da, wie oben angegeben, die Reglermatrix K in $\bar{A}$ und $\bar{Q}$ eingeht, folgen daraus die Beziehungen

$$-\frac{\partial K'}{\partial k_{ij}} B' P - P B \frac{\partial K}{\partial k_{ij}} = -\frac{\partial K'}{\partial k_{ij}} R K - K' R \frac{\partial K}{\partial k_{ij}}$$

und

$$\frac{\partial K'}{\partial k_{ij}} (R K - B' P) + (R K - B' P)' \frac{\partial K}{\partial k_{ij}} = O.$$

Die Ableitung der Matrix K nach dem Element k_{ij} ergibt eine (m, n) -Matrix, in der außer einer Eins im Element (i, j) nur Nullen stehen. Die Multiplikation von $(R K - B' P)'$ mit $\frac{\partial K}{\partial k_{ij}}$ ergibt deshalb eine Matrix, in deren j -ter Spalte die i -te Spalte der Matrix $(R K - B' P)'$ steht. Der Rest ist mit Nullen ausgefüllt. Für den ersten Summanden der letzten Gleichung erhält man eine Matrix, in deren j -ter Zeile die i -te Zeile der Matrix $(R K - B' P)$ steht. Die Summe beider Matrizen soll die Nullmatrix sein. Daraus folgt, dass die i -te Zeile von $(R K - B' P)$ gleich dem Nullvektor sein muss. Wendet man die angegebene Bedingung für $i = 1, \dots, m$ an, so wird offensichtlich, dass die letzte Gleichung äquivalent der Forderung

$$R K - B' P = O$$

ist. Der Regler K erfüllt folglich die Gleichung

Optimalregler: $K^* = R^{-1} B' P,$

(7.19)

wobei die Inverse von R existiert, da die Wichtungsmatrix nach Voraussetzung positiv definit ist.

Setzt man diese Beziehung für den Optimalregler in die Gl. (7.18) ein, so erhält man für die Matrix P die Beziehung

Matrix-Riccatigleichung: $A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q = O,$	(7.20)

wobei man sich nur für die symmetrische, positiv definite Lösung P dieser Gleichung interessiert. Diese Gleichung wird (algebraische) Matrix-Riccatigleichung genannt, weil sie ein Spezialfall einer Riccati-Differenzialgleichung ist, die in der Optimalsteuerungstheorie eine besondere Rolle spielt.

Die Gleichungen (7.19) und (7.20) stellen eine notwendige Optimalitätsbedingung für die Zustandsrückführung (7.13) dar. Diese Bedingung ist unter den im Satz 7.2 angegebenen Voraussetzungen auch hinreichend. Löst man also für eine gegebene Regelstrecke die Matrix-Riccatigleichung und setzt die dabei erhaltene positiv definite Matrix P in Gl. (7.13) ein, so hat man den Optimalregler gefunden.

7.2.3 Optimalreglergesetz

Damit die gefundene notwendige Optimalitätsbedingung auch hinreichend ist, muss noch gesichert werden, dass der erhaltene Regler tatsächlich für alle Anfangsbedingungen x_0 optimal ist. Dies wäre dann nicht der Fall, wenn in das Gütefunktional nicht alle kanonischen Zustandsvariablen eingingen. Es könnte dann Anfangszustände geben, bei denen der Gütewert endlich ist, weil die instabilen Eigenvorgänge gar nicht angeregt werden, während für andere Anfangszustände das System instabil ist, ohne dass dies im Gütewert sichtbar wird.

Um dies zu verhindern, muss man fordern, dass alle Eigenvorgänge in das Gütefunktional eingehen, also durch das Gütefunktional „beobachtbar“ sind. Diese Forderung ist erfüllt, wenn nach Zerlegung der symmetrischen Wichtungsmatrix Q in der Form

$$Q = \bar{Q}'\bar{Q} \quad (7.21)$$

das Paar $(A, \bar{Q})$ beobachtbar ist.

Der Zusammenhang zur Beobachtbarkeit wird schnell klar, wenn man den quadratischen Term $x'Qx$ aus dem Gütefunktional in der Form

$$x'(t)Qx(t) = \bar{y}'(t)\bar{y}(t) \quad \text{mit} \quad \bar{y}(t) = \bar{Q}x(t)$$

schreibt. Dann sieht man, dass das Gütefunktional von der „Ausgangsgröße“ $\bar{y}$ abhängt und die Regelstrecke über diese Ausgangsgröße beobachtbar sein muss, damit das Gütefunktional von allen Eigenvorgängen abhängt. Außerdem muss gesichert sein, dass die Zustandsrückführung zu einem stabilen Regelkreis führt. Man setzt deshalb die Steuerbarkeit der Regelstrecke voraus.

Satz 7.2 (Optimalregler)

Betrachtet wird eine vollständig steuerbare Regelstrecke

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

und ein Gütefunktional

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}'(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}'(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)) \, dt$$

mit symmetrischer, positiv semidefiniter Wichtungsmatrix $\mathbf{Q}$ und symmetrischer, positiv definiter Wichtungsmatrix $\mathbf{R}$. Unter der Voraussetzung, dass das Paar $(\mathbf{A}, \bar{\mathbf{Q}})$ vollständig beobachtbar ist, wobei die Matrix $\bar{\mathbf{Q}}$ aus der Zerlegung

$$\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{Q}}'\bar{\mathbf{Q}}$$

der Wichtungsmatrix $\mathbf{Q}$ hervorgeht, ist die Lösung des Optimierungsproblems

$$\min_{\mathbf{K}} J$$

durch die Zustandsrückführung

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}^*\mathbf{x}(t)$$

mit

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P}$$

gegeben. $\mathbf{P}$ ist dabei die symmetrische, positiv definite Lösung der Matrix-Riccati Gleichung

$$\mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{O}.$$

Die beiden in diesem Satz angeführten Voraussetzungen werden im Folgenden stets als erfüllt betrachtet. Auch wenn von „beliebigen“ Wichtungsmatrizen gesprochen wird, sind symmetrische Matrizen gemeint, von denen $\mathbf{Q}$ positiv semidefinit ist und die Beobachtbarkeitsbedingung an das Paar $(\mathbf{A}, \bar{\mathbf{Q}})$ erfüllt und $\mathbf{R}$ positiv definit ist. Um die Beobachtbarkeitsbedingung nicht prüfen zu müssen, verwendet man häufig sogar positiv definite Matrizen $\mathbf{Q}$, für die das Paar $(\mathbf{A}, \bar{\mathbf{Q}})$ stets beobachtbar ist.

Der mit dem Optimalregler geschlossene Regelkreis ist durch

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (7.22)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (7.23)$$

beschrieben. Er hat die Systemmatrix

$$\bar{A} = A - BK^* = A - BR^{-1}B'P. \quad (7.24)$$

7.2.4 Lösung der Riccatigleichung

Die Matrix P geht quadratisch in die Matrix-Riccatigleichung ein und kann deshalb nicht durch einfaches Umstellen der Gleichung berechnet werden. Im Folgenden soll ein Lösungsverfahren angegeben werden, das numerisch zwar nicht besonders vorteilhaft ist, aber einen Weg zeigt, um die Riccatigleichung zu lösen.

Die Matrix-Riccatigleichung kann folgendermaßen umgeformt werden

$$\begin{aligned} O &= A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q \\ &= (P \ I) \begin{pmatrix} A & BR^{-1}B' \\ Q & -A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ -P \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7.25)$$

wobei die in der Mitte stehende Matrix als *Hamiltonmatrix*

$$H = \begin{pmatrix} A & BR^{-1}B' \\ Q & -A' \end{pmatrix} \quad (7.26)$$

bezeichnet wird. Diese Matrix kann man einer Ähnlichkeitstransformation mit der Transformationsmatrix

$$T = \begin{pmatrix} I & O \\ -P & I \end{pmatrix}$$

unterziehen, wobei

$$\begin{aligned} T^{-1}HT &= \begin{pmatrix} A - BR^{-1}B'P & BR^{-1}B \\ A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q & -(A - BR^{-1}B'P) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A - BK^* & BR^{-1}B' \\ O & -(A - BK^*) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{A} & BR^{-1}B' \\ O & -\bar{A} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

entsteht. Beim Übergang von der ersten zur zweiten Zeile wurde ausgenutzt, dass die links unten stehende Matrix aufgrund der Riccatigleichung eine Nullmatrix darstellt.

Als charakteristische Gleichung der Hamiltonmatrix erhält man

$$\det(\lambda I - H) = \det(\lambda I - \bar{A}) \det(\lambda I + \bar{A}).$$

Die Eigenwerte der Hamiltonmatrix bestehen folglich aus der Menge der Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises sowie aus der Menge dieser mit einem Minuszeichen versehenen Eigenwerte. Diese beiden Eigenwertmengen liegen in der komplexen Ebene symmetrisch zur Imaginärachse. Die Hamiltonmatrix hat also stets n Eigenwerte mit negativem Realteil.

Man kann die umgeformte Riccatigleichung lösen, indem man durch eine Ähnlichkeitstransformation die Hamiltonmatrix zunächst in eine Diagonalform transformiert, wobei im Folgenden angenommen wird, dass dies möglich ist. Man bestimmt die $2n$ -dimensionalen Eigenvektoren zu den n Eigenwerten λ_i der Hamiltonmatrix mit negativen Realteilen und bildet daraus die $(2n, n)$ -Matrix V , die diese Eigenvektoren als Spalten enthält. Zerlegt man V in zwei (n, n) -Matrizen

$$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix},$$

so gilt

$$H \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \text{diag } \lambda_i$$

und nach Multiplikation mit V_1^{-1} von rechts

$$H \begin{pmatrix} I \\ V_2 V_1^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 (\text{diag } \lambda_i) V_1^{-1} \\ V_2 (\text{diag } \lambda_i) V_1^{-1} \end{pmatrix}.$$

Multipliziert man die letzte Gleichung von links mit $(-V_2 V_1^{-1} \ I)$, so erhält man die Beziehung

$$(-V_2 V_1^{-1} \ I) H \begin{pmatrix} I \\ V_2 V_1^{-1} \end{pmatrix} = O.$$

Aus einem Vergleich der letzten Gleichung mit Gl. (7.25) erkennt man, dass die Matrix P aus der Beziehung

$$P = -V_2 V_1^{-1}, \quad (7.27)$$

also aus den Eigenvektoren der Hamiltonmatrix, berechnet werden kann.

Aufgabe 7.1* LQ-Regelung eines Systems erster Ordnung

Berechnen Sie den Optimalregler k^* für ein System erster Ordnung. Wie verändert sich k^* bei Erhöhung der Wichtungen des Zustandes bzw. der Stellgröße im Gütefunktional? Was passiert, wenn die Wichtung der Stellgröße verschwindet ($r \rightarrow 0$)? □

7.3 Eigenschaften des LQ-Regelkreises

Außer der im Satz 7.2 bereits genannten Stabilitätseigenschaft besitzt der mit einem Optimalregler geschlossene Regelkreis eine Reihe bemerkenswerter Eigenschaften, von denen in diesem Abschnitt die wichtigsten aufgeführt sind. Da die Beweise der angegebenen Beziehungen aufwändig sind, werden die Eigenschaften im Folgenden erläutert, auf exakte Beweise jedoch verzichtet.

7.3.1 Stabilität des Regelkreises

Wenn die an die Wichtungsmatrizen gestellten Definitheitsforderungen erfüllt sind (vgl. Satz 7.2), ist der entstehende Regelkreis stabil. Das kann man sich anhand einer Umformung der Riccatigleichung überlegen. Aus den Gln. (7.20) und (7.24) erhält man

$$\bar{A}'P + P\bar{A} = -PBR^{-1}B'P - Q.$$

Die Matrix P ist positiv definit, die Matrizen $PBR^{-1}B'P$ und Q positiv semidefinit. Wenn die rechte Seite der Gleichung negativ definit ist, kann man Satz 7.1 direkt anwenden, wenn sie nur negativ semidefinit ist, muss man einige Zusatzbetrachtungen anstellen um nachzuweisen, dass die Stabilität aufgrund der im Satz 7.2 aufgeführten Beobachtbarkeitsbedingung trotzdem gewährleistet ist. In beiden Fällen kommt man zu dem folgenden Ergebnis:

Satz 7.3 (Stabilität eines Regelkreises mit Optimalregler)

Wenn die im Satz 7.2 angegebenen Forderungen an die Wichtungsmatrizen Q und R erfüllt sind, so ist der mit dem Optimalregler geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil.

7.3.2 Eigenschaft der Rückführdifferenzmatrix

Es wird jetzt die Rückführdifferenzmatrix aufgestellt, die man erhält, wenn man den mit dem Optimalregler geschlossenen Regelkreis bei u aufschneidet. Die offene Kette hat dann die Übertragungsfunktionsmatrix

$$G_0(s) = K^*(sI - A)^{-1}B. \quad (7.28)$$

Daraus erhält man für die Rückführdifferenzmatrix die Beziehung

$$F(s) = I + G_0(s) = I + K^*(sI - A)^{-1}B. \quad (7.29)$$

Eine wichtige Eigenschaft von $F(s)$ findet man durch folgende Umformung der Riccatigleichung (7.20). Erweitert man diese Gleichung um die Differenz $sP - sP$ und setzt das Reglergesetz (7.19) ein, so erhält man

$$(-sI - A)'P + P(sI - A) + K^{*'}RK^* = Q.$$

Multipliziert man diese Gleichung jetzt von links mit $B'(-sI - A')^{-1}$ und von rechts mit $(sI - A)^{-1}B$, so wird daraus die Beziehung

$$\begin{aligned} & B'(-sI - A')^{-1}(-sI - A)'P(sI - A)^{-1}B \\ & + B'(-sI - A')^{-1}P(sI - A)(sI - A)^{-1}B \\ & + B'(-sI - A')^{-1}K^{*'}RK^*(sI - A)^{-1}B \\ & = B'(-sI - A')^{-1}Q(sI - A)^{-1}B. \end{aligned}$$

In dieser Gleichung sind als Teilausdrücke die Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}_0(s)$ nach Gl. (7.28) sowie die daraus abgeleiteten Beziehungen für $\mathbf{G}_0(-s)$ und $\mathbf{G}'_0(-s)$ zu erkennen, so dass man auch

$$\mathbf{G}_0(-s)\mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{G}_0(s) + \mathbf{G}'_0(-s)\mathbf{R}\mathbf{G}(s) = \mathbf{B}'(-s\mathbf{I} - \mathbf{A}')^{-1}\mathbf{Q}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})'\mathbf{B}$$

schreiben kann. Bezeichnet man mit

$$\mathbf{G}_x(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

die Übertragungsfunktionsmatrix der Regelstrecke vom Eingang $\mathbf{u}$ zum Zustandsvektor $\mathbf{x}$, so erhält man aus der letzten Gleichung

$$(\mathbf{I} + \mathbf{G}'_0(-s))\mathbf{R}(\mathbf{I} + \mathbf{G}_0(s)) = \mathbf{R} + \mathbf{G}'_x(-s)\mathbf{Q}\mathbf{G}_x(s).$$

Diese Beziehung wird jetzt für $s = j\omega$ betrachtet. Entsprechend

$$\mathbf{G}^*(j\omega) = \mathbf{G}'(-j\omega)$$

bedeutet der Stern, dass die betreffende Frequenzgangmatrix transponiert und für alle Elemente der konjugiert komplexe Wert eingesetzt wird. Damit erhält man

$$(\mathbf{I} + \mathbf{G}^*_0(j\omega))\mathbf{R}(\mathbf{I} + \mathbf{G}_0(j\omega)) = \mathbf{R} + \mathbf{G}^*_x(j\omega)\mathbf{Q}\mathbf{G}_x(j\omega)$$

und nach Übergang zu den Determinanten

$$\det \mathbf{R} |\det(\mathbf{I} + \mathbf{G}^*_0(j\omega))|^2 \geq \det \mathbf{R}.$$

Auf der rechten Seite wurde dabei ausgenutzt, dass für eine positiv semidefinite Matrix $\mathbf{Q}$ die Determinante $\det(\mathbf{G}^*_x(j\omega)\mathbf{Q}\mathbf{G}_x(j\omega))$ für beliebiges $\mathbf{G}_x$ größer als null ist. Verwendet man noch Gl. (7.29), so erhält man schließlich die wichtige Beziehung

Eigenschaft der Rückführdifferenzmatrix: $ \det \mathbf{F}(j\omega) \geq 1.$	(7.30)

Die Eigenschaft (7.30) ist in Abb. 7.7 für den Fall grafisch veranschaulicht, dass die Regelstrecke stabil ist. Zu erwarten ist aufgrund des verallgemeinerten Nyquistkriteriums, dass die Ortskurve der Determinante der Rückführdifferenzmatrix den Ursprung der komplexen Ebene nicht umschlingt, denn der geschlossene Regelkreis ist nach Satz 7.3 stabil. Auf Grund der Ungleichung (7.30) meidet die Ortskurve aber sogar den Einheitskreis, was für weiterführende Folgerungen bezüglich der Regelkreiseigenschaften herangezogen werden kann.

Für instabile Regelstrecken gilt die angegebene Gleichung auch. Die Ortskurve umschlingt dann den Ursprung der komplexen Ebene nicht nur in der für die Stabilität erforderlichen Anzahl, sondern umschlingt sogar den Einheitskreis. Dieser Sachverhalt wird für das Beispiel 7.3 anhand von Abb. 7.14 später noch diskutiert.

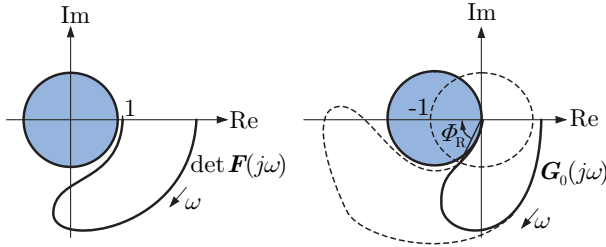


Abb. 7.7: Eigenschaft der Rückfuhrdifferenzmatrix für Systeme mit mehreren Stellgrößen (links) bzw. einer Stellgröße (rechts)

7.3.3 Stabilitätsrand

Im Abschn. 1-8.5.5 wurden der Phasenrand und der Amplitudenrand als Kenngrößen für die Robustheit der Stabilität einschleifiger Regelkreise eingeführt. Diese Kenngrößen werden im Folgenden für den Regelkreis mit Optimalregler untersucht.

Wendet man die Beziehung (7.30) zunächst auf ein System mit einer Stellgröße an, so erhält man für die Rückfuhrdifferenzfunktion die Beziehung

$$F(j\omega) = 1 + \mathbf{k}^{*'} \mathbf{G}_x(j\omega) \geq 1,$$

in der

$$G_0(j\omega) = \mathbf{k}^{*'} \mathbf{G}_x(j\omega)$$

die Übertragungsfunktion der offenen Kette bezeichnet. Der Optimalregler $\mathbf{k}^{*'}$ ist hier ein n -dimensionaler Zeilenvektor und die Regelstrecke ist durch den n -dimensionalen Spaltenvektor $\mathbf{G}_x(j\omega)$ beschrieben, der die Frequenzgänge von der Stellgröße zu allen Zustandsvariablen enthält. Entsprechend der rechten Seite von Abb. 7.7 meidet die Ortskurve der offenen Kette den Einheitskreis um den kritischen Punkt -1 . Daraus ergibt sich ein Phasenrand von mindestens 60°

$$\Phi_R \geq 60^\circ,$$

denn der Phasenrand wird am Schnittpunkt der Ortskurve von $\mathbf{G}_x(j\omega)$ mit dem Einheitskreis um den O-Punkt abgelesen. Außerdem kann die Kreisverstärkung beliebig vergrößert oder auf die Hälfte verkleinert werden, ohne dass die Stabilität gefährdet wird. Bei Vergrößerung der Kreisverstärkung verschieben sich alle Punkte der Ortskurve entlang der Strahlen, die vom Ursprung zu den entsprechenden Ortskurvenpunkten führen, nach außen. Der kritische Punkt kann dabei nicht umschlungen werden. Bei Verkleinerung der Kreisverstärkung wandern alle Ortskurvenpunkte auf dem genannten Strahl in Richtung zum Ursprung. Kritisch ist dies für die Stabilität, wenn die Ortskurve ähnlich wie die gestrichelt eingetragene Kurve in Abb. 7.7 die reelle Achse mehrfach schneidet. Läge sie direkt auf dem Einheitskreis, so könnte die Verstärkung auf die Hälfte herabgesetzt werden, bevor der kritische Punkt umschlungen wird.

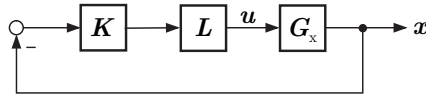


Abb. 7.8: Erweiterung des Regelkreises für die Robustheitsanalyse

Diese Robustheitseigenschaften lassen sich dadurch verdeutlichen, dass anstelle der Regelstrecke $G_x(j\omega)$ jetzt mit der Strecke $L(j\omega) G_x(j\omega)$ gearbeitet wird, wobei das zusätzliche Element $L(j\omega)$ die Unsicherheiten des Regelstreckenmodells repräsentiert (Abb. 7.8). Die Stabilität des Regelkreises ist gesichert, solange $L(j\omega)$ eine Phasenverschiebung von weniger als 60° mit sich bringt und die Amplitude die Ungleichung

$$\frac{1}{2} < |L(j\omega)| < \infty$$

erfüllt.

Besitzt die Regelstrecke mehrere Stellgrößen, so gelten die genannten Eigenschaften bezüglich jeder Stellgröße einzeln. Man kann also vor jede Stellgröße u_i ein Glied $L_i(j\omega)$ schalten und dieses in den angegebenen Schranken verändern, ohne dass die Stabilität gefährdet ist.

Die angeführten Eigenschaften gelten für jeden Optimalregler, also unabhängig von der Wahl der Wichtungsmatrizen Q und R .

Vergleicht man diese Aussagen mit den bei einschleifigen Regelkreisen gemachten Erfahrungen, dass ein Phasenrand von 60° auf eine erhebliche Robustheit der Stabilität gegenüber Modellunsicherheiten hindeutet, so wird offensichtlich, dass der Optimalreglerentwurf relativ gute Robustheitseigenschaften „automatisch“ mitliefert. Man sollte sich jedoch vor Augen halten, dass bereits ein PT_1 -Glied, also z. B. ein vernachlässigtes Messglied, für hohe Frequenzen eine Phasenverschiebung von -90° hervorruft und es deshalb von der Zeitkonstanten abhängt, ob durch diese Phasenverschiebung die hier beschriebene Stabilitätsreserve aufgebraucht ist oder nicht.

Empfindlichkeit des Regelkreises. Eine andere, ebenfalls die Robustheit betreffende Aussage kann man direkt aus der Gl. (7.30) ableiten. Die Empfindlichkeitsmatrix

$$S(s) = F(s)^{-1}$$

beschreibt bekanntlich sowohl die Empfindlichkeit des Regelkreisverhaltens gegenüber Parameteränderungen als auch das Verhalten des Regelkreises bei Störungen am Streckenausgang. Für diese Matrix gilt bei Verwendung eines Optimalreglers

$$|\det S(j\omega)| \leq 1.$$

Das heißt, jedes optimal geregelte System hat über den gesamten Frequenzbereich eine kleinere Parameterempfindlichkeit als eine nominal gleichartige Steuerkette.

7.3.4 Abhängigkeit der Eigenwerte des Regelkreises von den Wichtungsmatrizen

Vergleich der Eigenwerte von Regelstrecke und Regelkreis. Man kann sich die Frage stellen, auf welche Eigenwerte des geschlossenen Kreises der Optimalregler führt. Von den umfangreichen Untersuchungen, die zur Klärung dieses Zusammenhangs unternommen wurden, soll hier nur auf diejenigen eingegangen werden, die helfen, den Zusammenhang zwischen den gewählten Wichtungsmatrizen und den dynamischen Eigenschaften des Regelkreises aufzuklären.

Als erstes sei die Beziehung

$$\prod_{i=1}^n |\lambda_i| \leq \prod_{i=1}^n |\bar{\lambda}_i| \quad (7.31)$$

zwischen den Eigenwerten λ_i der Regelstrecke und den Eigenwerten $\bar{\lambda}_i$ des Regelkreises angeführt. Diese Beziehung gilt für beliebige Wichtungsmatrizen, beschreibt also wiederum eine allgemeine Eigenschaft des Optimalreglers. Sie besagt, dass das geregelte System tendenziell schneller ist als die Regelstrecke.

Diese Eigenschaft ist plausibel, wenn man annimmt, dass die Regelstrecke stabil ist und (ungeregelt) auf den GüteWert

$$J = \int_0^\infty e^{A't} Q e^{At} dt$$

führt. Der optimale Regler führt auf einen kleineren Wert

$$J = \int_0^\infty e^{\bar{A}'t} Q e^{\bar{A}t} dt$$

dieses Funktionals, wobei $\bar{A}$ die Systemmatrix des geschlossenen Kreises darstellt. Damit der Wert des zweiten Kriteriums kleiner als der des ersten ist, muss der Zustandsvektor schneller nach null konvergieren. Also müssen die Eigenwerte „im Mittel“ einen größeren Betrag aufweisen.

Einfluss der Wichtung auf die Eigenwerte. Die zweite Überlegung betrifft die Lage der Eigenwerte in Abhängigkeit von der Wichtung der Stellgröße. Zerlegt man die Matrix R entsprechend

$$R = \rho \tilde{R} \quad (7.32)$$

in eine fest vorgegebene Matrix $\tilde{R}$ und einen noch frei wählbaren Faktor ρ , so kann man eine Wurzelortskurve zeichnen, die die Abhängigkeit der Eigenwerte des geschlossenen Kreises von ρ darstellt. Natürlich hängen die Eigenwerte auch von der Wichtungsmatrix Q ab. Die Wurzelortskurve hat jedoch Eigenschaften, die von Q unabhängig sind, wenn die Regelstrecke minimalphasig ist.

Wählt man die Wichtungsmatrix entsprechend $Q = \bar{Q}' \bar{Q}$, so verläuft die Wurzelortskurve in bemerkenswerter Analogie zu den Wurzelortskurven bei einschleifigen Regelkreisen (vgl. Abschn. I-10.3), obwohl der veränderliche Parameter hier

die Wichtung ρ im Gütefunktional, dort die Reglerverstärkung k darstellt. Man muss nur beachten, dass zu einem kleinen ρ eine große Reglerverstärkung gehört, also die Eigenschaften für $k \rightarrow \infty$ hier mit denen für $\rho \rightarrow 0$ zu vergleichen sind:

- q Äste der Wurzelortskurve enden für $\rho \rightarrow 0$ in den Übertragungsnullstellen des Systems (A , B , $\bar{Q}$).
- Die restlichen $n - q$ Äste verlaufen vollständig in der linken komplexen Halbebene und können für kleine ρ durch Geraden approximiert werden, deren Richtungen nur von der Matrix $\bar{Q}$ abhängig sind.

Abbildung 7.9 illustriert diese Eigenschaften anhand der Wurzelortskurve, die für das im Beispiel 7.3 noch ausführlich behandelte Entwurfsproblem entsteht. Für sehr große Wichtungen ρ beginnen die Äste der Wurzelortskurve in den stabilen Eigenwerten der Regelstrecke und in den an der Imaginärachse gespiegelten instabilen Eigenwerten. Die im Satz 7.2 angegebene „Stabilitätsgarantie“ gilt natürlich auch für sehr große und sehr kleine Wichtungen ρ .

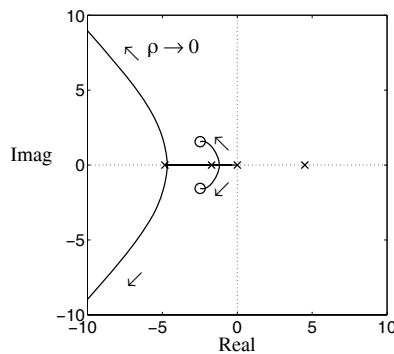


Abb. 7.9: Wurzelortskurve des geschlossenen Kreises bei Wichtung mit $\rho \rightarrow 0$

7.3.5 Diskussion der angegebenen Eigenschaften

So angenehm die aufgeführten Eigenschaften für den Reglerentwurf sind – einige von ihnen scheinen grundlegenden Beschränkungen eines Regelkreises zu widersprechen. Wie kann durch einen Regler die Empfindlichkeitsfunktion bzw. die Empfindlichkeitsmatrix – im Widerspruch zum Gleichgewichtstheorem (Satz I-7.64) – für den gesamten Frequenzbereich kleiner als eins gemacht werden? Wie können mehr als zwei Äste einer Wurzelortskurve auch für große Reglerverstärkung vollständig in der negativen komplexen Ebene verlaufen?

Die Lösung dieser scheinbaren Widersprüche liegt in der Tatsache, dass nicht nur eine oder mehrere Ausgangsgrößen, sondern der gesamte Zustandsvektor $\mathbf{x}$ durch den Regler zurückgeführt wird. Für ein System mit nur einer Stellgröße hat die Übertragungsfunktion

$$G_0(s) = \mathbf{k}^{*'}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$$

der offenen Kette für einen beliebigen Optimalregler $\mathbf{k}^*$ einen Polüberschuss von lediglich eins. Auch dies ist eine Eigenschaft jedes Optimalreglers. Sie ist der Grund dafür, dass das Gleichgewichtstheorem die Absenkung der Empfindlichkeitsfunktion unter den Wert eins *nicht* auf einen bestimmten Frequenzbereich begrenzt und auch die anderen hier beschriebenen Eigenschaften gelten.

7.4 Rechnergestützter Entwurf von LQ-Regelungen

7.4.1 Entwurfsalgorithmus

Beim Einsatz eines Optimalreglers ist i. Allg. nicht die Minimierung des quadratischen Gütefunktional das wichtigste Ziel, sondern die systematische Auswahl eines Reglergesetzes, mit dem der Regelkreis vorgegebene Güteforderungen an die Stabilität und die dynamischen Eigenschaften erfüllt. Es gibt wenige Regelungsprobleme, bei denen es tatsächlich darauf ankommt, den Gütewert (7.15) so klein wie möglich zu machen. Eine derartige Ausnahme ist die Steuerung und Stabilisierung eines Raumflugkörpers, denn bei diesem Problem kommt es tatsächlich auf einen guten Kompromiss zwischen der erreichten Position $\mathbf{y}(t)$ und dem dafür notwendigen Treibstoffverbrauch $\mathbf{u}(t)$ an. Bei den meisten anderen Regelungsproblemen wird die optimale Regelung jedoch als ein Weg verwendet, um auf anschauliche und systematische Weise zweckmäßige Reglergesetze auszuwählen. Es geht dabei gar nicht um eine „optimale“ Regelung, weshalb dieser Begriff hier auch weitgehend vermieden wird. Das Optimierungsproblem (7.14) ist ein die ursprünglich gegebene Regelungsaufgabe ersetzendes, mathematisch exakt gestelltes Problem. Wie gut dieses Problem die tatsächliche Regelungsaufgabe „approximiert“, hängt von der Wahl der Wichtungsmatrizen ab.

Der Reglerentwurf verläuft deshalb i. Allg. iterativ, wobei für eine vorgegebene Regelstrecke unterschiedliche Wichtungsmatrizen festgelegt, der Optimalregler ermittelt und die Eigenschaften des geschlossenen Kreises anhand von Simulationsergebnissen bewertet werden. Da die Stabilität des Regelkreises unter den bekannten Voraussetzungen gewährleistet ist, spielen die Dynamikforderungen bei der Festlegung und Variation der Wichtungsmatrizen die entscheidende Rolle.

Entwurfsverfahren 7.1 Optimalreglerentwurf

Gegeben: Regelstrecke (A, B, C) , Güteforderungen

1. Aus den Güteforderungen an den geschlossenen Kreis werden Wichtungsmatrizen Q und R für das Gütefunktional (7.15) abgeleitet.
2. Es wird die Riccatigleichung (7.20) gelöst und der Optimalregler (7.19) bestimmt.
3. Das Zeitverhalten des geschlossenen Kreises wird simuliert. Entspricht das Verhalten nicht den gegebenen Güteforderungen, so wird der Entwurf mit veränderten Wichtungsmatrizen wiederholt.

Ergebnis: Zustandsrückführung K^*

Für die Anwendung des Optimalreglerentwurfes sprechen folgende Tatsachen:

- Es gibt eine klare Aufgabenteilung zwischen den vom Entwurfsingenieur und den vom Rechner auszuführenden Lösungsschritten. Erfahrungen sind bei der Formulierung der Entwurfsaufgabe als Optimierungsproblem, bei der Bewertung der Simulationsergebnisse und bei der Veränderung des Optimierungsproblems mit dem Ziel einer Verbesserung der Regelkreiseigenschaften notwendig. Der Rechner übernimmt umfangreiche numerische Aufgaben, die bereits bei einfachen Beispielen nicht von Hand erledigt werden können.
- Für das Optimierungsproblem existiert eine eindeutige Lösung, die mit numerisch zuverlässigen Algorithmen ermittelt werden kann.
- Unter den angegebenen Voraussetzungen erfüllt jeder mit einem Optimalregler entstehende Regelkreis wichtige Güteforderungen (Stabilität, Robustheit, verbesserte Dynamik).

7.4.2 Wahl der Wichtungsmatrizen

Die Verwendung des Optimalreglerentwurfes zur Lösung einer gegebenen Regelungsaufgabe wirft die Frage auf, wie geeignete Wichtungsmatrizen gewählt werden können. Auf diese Frage wird im Folgenden eingegangen, wobei man von vornherein darauf hinweisen muss, dass man keine exakte Antwort erwarten darf, denn einerseits können die Forderungen an den Verlauf der Stell- und Regelgrößen sehr unterschiedliche Formen annehmen, andererseits gibt es keine direkten Beziehungen zwischen den Kennwerten des dynamischen Übergangsverhaltens des Regelkreises und den Wichtungsmatrizen. Nichtsdestotrotz gibt es eine Reihe von Richtlinien, die die Auswahl von Q und R wesentlich erleichtern und von denen im Folgenden die wichtigsten aufgeführt werden.

Die Wahl der Wichtungsmatrizen ist durch folgende Tatsachen gekennzeichnet:

- Es gibt unüberschaubar viele Freiheitsgrade, denn die beiden Wichtungsmatrizen haben $\frac{n(n+1)+m(m+1)}{2}$ festzulegende Elemente. Die Freiheiten werden durch die Forderung nach positiver Definitheit aus Sicht der praktischen Anwendung nicht wesentlich eingeschränkt.
- Dass durch eine entsprechende Wahl der Matrizen $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$ sehr unterschiedliche Zustandsrückführungen $\mathbf{K}$ „optimal“ sind, erkennt man aus einer Analyse des *inversen Optimierungsproblems*. Bei diesem Problem sucht man für eine vorgegebene Reglermatrix $\mathbf{K}$ nach Wichtungsmatrizen $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$, für die $\mathbf{K}$ die Lösung des Optimierungsproblems (7.14) ist. Man kann zeigen, dass dieses Problem für *sehr viele* Reglermatrizen eine Lösung hat. Für Regelungsprobleme mit einer Stellgröße ($m = 1$) ist jeder Regler $\mathbf{k}$, für den die Rückführdifferenzfunktion $F(s)$ die Eigenschaft (7.30) erfüllt, ein Optimalregler. Die Tatsache, dass der nach dem Prinzip der optimalen Regelung erhaltene Regler ein Gütefunktional minimiert, schränkt also die Lösungsmöglichkeiten nicht entscheidend ein. Dies kann man als Vorzug wie auch als Mangel dieser Entwurfsmethode deuten.
- Mehrere unterschiedliche Paare $(\mathbf{Q}_1, \mathbf{R}_1)$, $(\mathbf{Q}_2, \mathbf{R}_2)$, $(\mathbf{Q}_3, \mathbf{R}_3)$,... von Wichtungsmatrizen führen auf dasselbe Reglergesetz. Diese Aussage ist sofort einzusehen, wenn sich $(\mathbf{Q}_1, \mathbf{R}_1)$ und $(\mathbf{Q}_2, \mathbf{R}_2)$ nur um einen konstanten Faktor unterscheiden. Sie gilt jedoch auch für vollkommen unterschiedlich aufgebaute Matrizenpaare. Dass dies so ist, kann man sich leicht dadurch erklären, dass die Zahl der frei wählbaren Parameter der Wichtungsmatrizen deutlich größer ist als die Zahl der zu bestimmenden Reglerparameter.
- Es bedeutet keine Einschränkung der Lösungsmöglichkeiten, wenn anstelle der (n, n) -Matrix $\mathbf{Q}$ eine (m, n) -Matrix $\bar{\mathbf{Q}}$ vorgegeben und daraus

$$\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{Q}}' \bar{\mathbf{Q}} \quad (7.33)$$

berechnet wird. Damit bleiben nm anstelle von $\frac{n(n+1)}{2}$ Freiheitsgrade für die Wahl von $\mathbf{Q}$.

- Für Systeme mit nur einem Eingang kann man zeigen, dass man unter relativ schwachen Voraussetzungen nur Diagonalmatrizen

$$\mathbf{Q} = \text{diag } q_{ii} \quad (7.34)$$

zu betrachten braucht, ohne dass dabei die Lösungsvielfalt eingeschränkt wird.

Diese Tatsachen zeigen, dass die Festlegung der Wichtungsmatrizen ein kompliziertes Problem ist. Man kann dieses Problem nur dadurch lösen, dass man systematisch Freiheitsgrade einschränkt.

Einschränkung der Freiheitsgrade. Die folgenden Richtlinien wurden aufgestellt, um auf gut überschaubarem Wege zu sinnvollen Wichtungsmatrizen zu kommen:

- Man arbeitet entweder mit Diagonalmatrizen (7.34) oder mit Wichtungsmatrizen der Form (7.33), wodurch die Lösungsvielfalt nicht eingeschränkt wird. Die Diagonalmatrix ist genau dann positiv semidefinit, wenn die Diagonalelemente nicht negativ sind. Die Beobachtbarkeitsbedingung ist immer erfüllt, wenn alle Diagonalelemente von null verschieden sind. In ähnlich überschaubarer Weise lassen sich diese Bedingungen für Wichtungsmatrizen der Form (7.33) erfüllen.
- Mit dem Ansatz

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C}' \text{diag } q_{ii} \mathbf{C}, \quad (7.35)$$

der die beiden vorhergehenden Einschränkungen kombiniert, erhält man das Gütefunktional

$$J = \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^r q_{ii} y_i^2(t) + \mathbf{u}'(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) \right) dt,$$

in dem durch q_{ii} der Verlauf der Regelgröße y_i bewertet wird. Eine Erhöhung von q_{ii} führt deshalb tendenziell zu einem schnelleren Einschwingen der i -ten Regelgröße. Der Ansatz (7.35) schränkt die Lösungsvielfalt des Optimalreglerentwurfes zu Gunsten eines besser überschaubaren Zusammenhanges von Wichtungselementen und Regelkreisverhalten ein. Die im Satz 7.2 enthaltene Beobachtbarkeitsforderung ist erfüllt, wenn die Regelstrecke $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ beobachtbar ist und alle q_{ii} von null verschieden sind.

- Wie stark die Terme $q_{ij}x_i(t)x_j(t)$ bzw. $r_{ij}u_i(t)u_j(t)$ den Wert des Gütefunktional beeinflussen, hängt nicht nur von den Wichtungen q_{ij} bzw. r_{ij} , sondern auch vom Wertebereich von x_i und x_j bzw. u_i und u_j ab. Änderungen der Maßeinheit einzelner Größen können somit den Wert des Gütefunktional und folglich die Lösung sehr stark beeinflussen. Es hat sich deshalb für stabile Regelstrecken als zweckmäßig erwiesen, das Regelstreckenverhalten auf die statischen Verstärkungen zu normieren, also anstelle von $\mathbf{u}$ mit der Eingangsgröße

$$\tilde{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{K}_s \mathbf{u}(t)$$

zu arbeiten, wobei $\mathbf{K}_s$ die statische Verstärkungsmatrix bezeichnet. An Stelle für die Regelstrecke $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ wird das Optimierungsproblem dann für die Strecke $(\mathbf{A}, \mathbf{B}\mathbf{K}_s^{-1}, \mathbf{C})$ mit der Stellgröße $\tilde{\mathbf{u}}$ gelöst und das Ergebnis später auf $\mathbf{u}$ zurückgerechnet.

- Erfahrungsgemäß sind deutliche Änderungen im Regelkreisverhalten nur dann zu erzielen, wenn die Wichtungen um mindestens eine Größenordnung verändert werden. Man sollte also insbesondere zu Beginn des Entwurfes die Zehnerpotenzen der beiden Wichtungsmatrizen bzw. einzelner Elemente zueinander variieren. Eine Erhöhung der Elemente von $\mathbf{Q}$, insbesondere der Diagonalelemente q_{ii} , führt aufgrund der damit verbundenen härteren „Bestrafung“ von $\mathbf{x}(t)$ tendenziell zu einem stärker gedämpften Einschwingverhalten, insbesondere für $x_i(t)$.

- Je stärker die Stellgrößen gegenüber den Zustands- bzw. Regelgrößen im Gütefunktional gewichtet werden, umso größer ist die Robustheit des Regelkreises gegenüber Parameteränderungen der Regelstrecke. Die Robustheit äußert sich in der Größe der Parameteränderungen, die notwendig sind, um den Regelkreis instabil zu machen bzw. darin, dass trotz erheblicher Parameteränderungen die Trajektorien des Regelkreises wenig voneinander abweichen. Lässt man also die Matrix Q unverändert und arbeitet mit der Wichtungsmatrix $R = \rho \tilde{R}$, so führt eine Erhöhung von ρ zu einer Verbesserung der Robustheit.

7.4.3 Beispiele

Die Anwendung des Prinzips der optimalen Regelung für den Reglerentwurf wird im Folgenden an zwei Beispielen illustriert.

Beispiel 7.2 Optimalregler für die Rollbewegung eines Flugzeuges

Wie in Aufg. I-11.6 ist ein Regler zu entwerfen, der den Rollwinkel eines Flugzeuges durch eine entsprechende Stellung der Querruder auf null hält. Das Zustandsraummodell für die Rollbewegung heißt

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= (2 \ 0) x(t),\end{aligned}$$

wobei die beiden Zustandsgrößen den Rollwinkel und die Rollwinkelgeschwindigkeit darstellen. Es kann davon ausgegangen werden, dass beide Größen messbar sind, so dass die Aufgabe mit einer (optimalen) Zustandsrückführung gelöst werden kann.

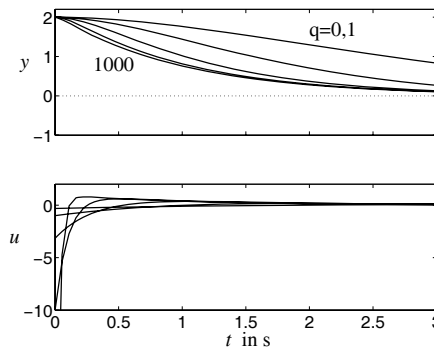


Abb. 7.10: Eigenbewegung des geregelten Flugzeuges bei veränderter Wichtungsmatrix $Q = qI$ mit $q = 0, 1, 1, 10, 100, 1000$

Der Regler wird für unterschiedliche Wichtungen entworfen, wobei

$$\mathbf{Q} = q\mathbf{I}, \quad q = 0, 1, 10, 100, 1000$$

und $\mathbf{R} = 1$ gesetzt werden. In Abb. 7.10 ist die Eigenbewegung $y(t)$ des mit dem Optimalregler geregelten Flugzeuges für $\mathbf{x}_0 = (1 \ 0)'$ gezeigt, wobei oben der Rollwinkel und unten die Stellgröße (Querruderstellung) dargestellt sind. Die Kurven für $y(t)$ gelten von rechts nach links für steigenden Wichtungsfaktor q .

Das Beispiel zeigt, dass mit steigender Wichtung der Zustandsvariablen das Einschwingen immer schneller wird. Damit verbunden ist eine steigende Amplitude der Stellgröße. Typisch für viele Anwendungen ist, dass für eine wesentliche Veränderung der Regelkreiseigenschaften die Wichtung um Größenordnungen verändert werden muss.

Da die hier vorgenommene Erhöhung von q dasselbe bedeutet wie eine Verkleinerung von ρ in Gl. (7.32), macht das Bild auch deutlich, dass bei der früher bereits betrachteten Wichtung $\rho \rightarrow 0$ sich der Verlauf der Stellgröße dem Dirac-Impuls nähert. Geht für $\rho = 0$ (bzw. $q = \infty$) die Stellgröße gar nicht mehr in das Gütefunktional ein, so steuert der Optimalregler das System durch einen Dirac-Impuls in unendlich kurzer Zeit aus dem Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ in die Endlage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

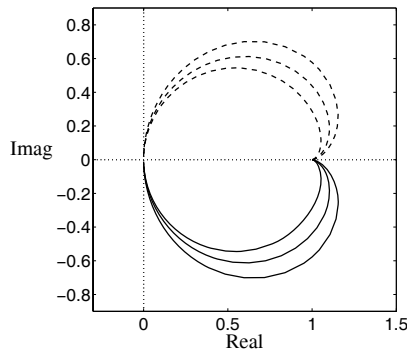


Abb. 7.11: Ortskurve der offenen Kette (Flugzeug und Optimalregler) für $\mathbf{Q} = q\mathbf{I}$ ($q = 1, 10, 100$)

Abbildung 7.11 zeigt die Ortskurve der offenen Kette mit einem Optimalregler, der für unterschiedliche Wichtungsmatrizen erhalten wurde. Je größer der Wichtungsfaktor q ist, umso „kleiner“ ist die Ortskurve. □

Beispiel 7.3 Stabilisierung eines invertierten Pendels

Für das im Beispiel 3.9 auf S. 110 beschriebene invertierte Pendel ist ein Regler zu entwerfen, der das Pendel stabilisiert und dabei ein dynamisch günstiges Einschwingverhalten erzeugt. Da alle Zustandsgrößen messbar sind, kann die Entwurfsaufgabe mit einer Zustandsrückführung gelöst werden, die als Optimalregler für die Wichtungsmatrix

$$\mathbf{Q} = q\mathbf{C}'\mathbf{C}$$

und die Bewertung $R = 1$ der Stellgröße bestimmt wird. Die angegebene Wichtung bedeutet, dass das Gütefunktional die Form

$$J = \int_0^\infty (qy_1^2(t) + qy_2^2(t) + u^2(t)) dt$$

hat, wobei $y_1(t)$ die Position des Wagens und $y_2(t)$ den Winkel darstellt. Abbildung 7.12 zeigt die Eigenbewegung des geregelten Pendels für den Anfangszustand

$$\mathbf{x}_0 = (0 \ 0,05 \ 0 \ 0)'$$

(Winkelabweichung 3°) für unterschiedliche Wichtungen.

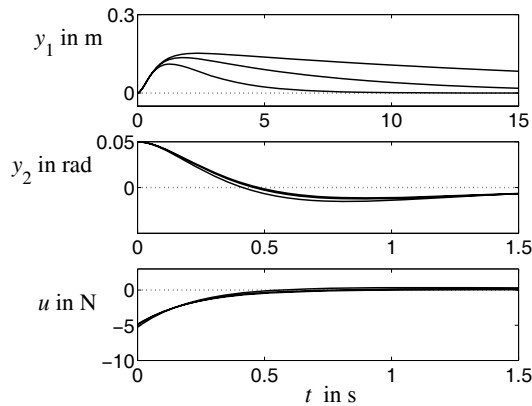


Abb. 7.12: Eigenbewegung des geregelten invertierten Pendels bei Verwendung der Wichtungsfaktoren $q = 0,1, 1, 10$

Die unterschiedlichen Zeitachsen zeigen, dass das Pendel relativ schnell aufgerichtet wird, wobei der Wagen aus der Mittelstellung ($y_1 = 0$ m) herausgefahren werden muss. Die Rückführung des Wagens mit leicht in Fahrtrichtung geneigtem Pendel $y_2 < 0^\circ$ geschieht wesentlich langsamer.

Bemerkenswert ist, dass Pendelwinkel und Stellgröße von der Wichtung weitgehend unabhängig sind. Je größer der Wichtungsfaktor q ist, umso schneller wird allerdings der Wagen zurückgefahren. Diese Tatsache ist darauf zurückzuführen, dass die beiden Ausgangsgrößen in den verwendeten Maßeinheiten Werte unterschiedlicher Größenordnung haben. Zerlegt man das Gütefunktional in der Form

$$J = q \int_0^\infty y_1^2(t) dt + q \int_0^\infty y_2^2(t) dt + \int_0^\infty u^2(t) dt = qJ_1 + qJ_2 + J_3,$$

so erhält man bei den angegebenen Wichtungen folgende Summanden:

q	J_1	J_2
0,1	0,2792	0,00053
1	0,0869	0,00054
10	0,0267	0,00055

Das heißt, die durch eine Vergrößerung von q bewirkte stärkere Wichtung der Ausgangsgrößen im Gütefunktional führt nur auf eine erhebliche Verkleinerung des von $y_1(t)$ abhängigen Anteils J_1 , weil der von $y_2(t)$ beeinflusste Anteil J_2 mehrere Größenordnungen kleiner ist und folglich den Wert des gesamten Gütefunktionals nicht wesentlich beeinflusst.

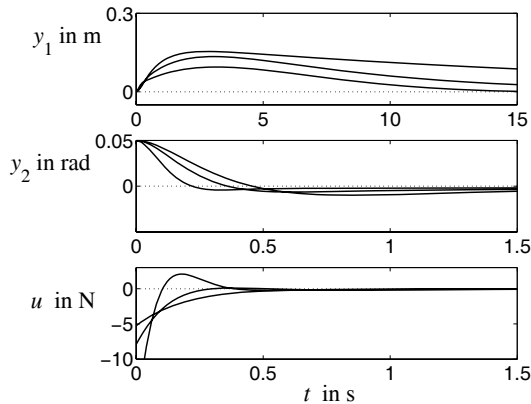


Abb. 7.13: Eigenbewegung bei Verwendung der Wichtungsmatrix Q nach Gl. (7.36)

Auf die unterschiedliche Größenordnung der Signale kann Rücksicht genommen werden, indem zwei unterschiedliche Wichtungen q_1 und q_2 in das Gütefunktional aufgenommen werden, wodurch mit

$$J = \int_0^\infty (qq_1 y_1^2(t) + qq_2 y_2^2(t) + u^2(t)) dt = qJ_1 + qJ_2 + J_3$$

bzw.

$$Q = q C' \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix} C \quad (7.36)$$

gearbeitet wird. Abbildung 7.13 zeigt die Eigenbewegungen, die man für den mit $q_1 = 1$, $q_2 = 10000$ und $q = 0,1, 1, 10$ berechneten Optimalregler erhält, wobei für $q = 1$ beispielsweise der Optimalregler

$$k^* = (-1,0 \quad -158,0 \quad -14,3 \quad -26,4) \quad (7.37)$$

entsteht. Jetzt wird mit steigender Wichtung auch der Pendelwinkel deutlich stärker gedämpft. Die dafür notwendige Stellgröße ist wesentlich größer als vorher.

Durch die veränderte Wichtung gehen jetzt folgende Summanden in den minimalen Wert des Gütefunktionals ein:

q	J_1	J_2
0,1	0,2982	4,835
1	0,1189	3,428
10	0,0500	1,956

Offenbar hat auch die Ausgangsgröße $y_2(t)$ jetzt einen wesentlichen Einfluss auf J^* , der für die gewählten Wichtungen q_1 und q_2 sogar den Einfluss von $y_1(t)$ übersteigt.

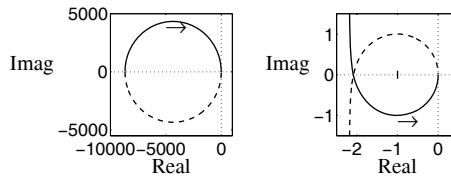


Abb. 7.14: Ortskurve der offenen Kette des geregelten Pendels

Abbildung 7.14 zeigt die Ortskurve der offenen Kette, die aus dem invertierten Pendel und dem Optimalregler besteht. Da das Pendel nur eine Stellgröße hat, ist die durch Auftrennen des Regelkreises bei $u(t)$ entstehende offene Kette ein System mit einem Eingang und einem Ausgang. Das linke Bild zeigt die vollständige Ortskurve, wobei man auf die Größenangaben an den Achsen achten sollte. Es sei daran erinnert, dass die Nyquistkurve $\mathcal{D}$ um den Regelstreckenpol bei 0 herumgeführt wird (vgl. Abb. I-8.12). Im rechten Teil der Abbildung sieht man einen Ausschnitt, der das Verhalten der Ortskurve in der Nähe des kritischen Punktes deutlich erkennen lässt. Es ist offensichtlich, dass der Punkt -1 einmal entgegen dem Uhrzeigersinn umschlungen wird, was für die Stabilität des geschlossenen Kreises notwendig und hinreichend ist. Man erkennt ferner, dass sogar der Einheitskreis um den kritischen Punkt umlaufen wird, was der Eigenschaft (7.30) entspricht.

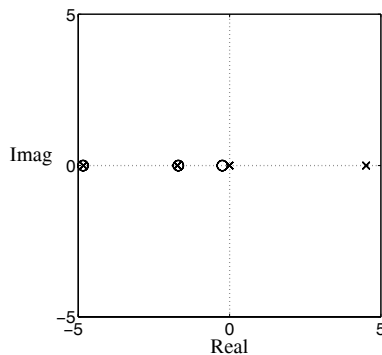


Abb. 7.15: PN-Bild der offenen Kette des Pendels mit Optimalregler

In Abb. 7.15 ist das PN-Bild der offenen Kette dargestellt. Der Optimalregler führt dazu, dass die offene Kette außer den durch die Matrix $\mathbf{A}$ vorgegebenen Polen auch drei Nullstellen besitzt. Die Übertragungsfunktion der offenen Kette hat deshalb einen Polüberschuss von eins, so dass die durch das Gleichgewichtstheorem beschriebenen Beschränkungen für die Eigenschaften des Regelkreises hier nicht gelten.

Die Eigenwerte des geschlossenen Kreises sind in Abb. 7.9 auf S. 299 in Abhängigkeit von der Wichtung aufgetragen. Wie im Abschn. 7.3.4 wurde dabei mit einem festen Wert für

Q und mit der Wichtung $R = \rho$ gearbeitet und die Wurzelortskurve bezüglich ρ gezeichnet. Es ist zu erkennen, dass zwei Eigenwerte für $\rho \rightarrow 0$ entlang zweier Geraden an die linke Bildkante (und noch weiter nach links) wandern, während die beiden anderen Eigenwerte endlichen Endwerten $\circ$ zustreben. $\square$

7.5 Erweiterungen

In den vorangegangenen Abschnitten wurde das Grundprinzip des Optimalreglerentwurfes vorgestellt. Auf diesem Prinzip aufbauend gibt es vielfältige Erweiterungen, von denen hier einige kurz dargestellt werden, um zu zeigen, dass zusätzliche Güteforderungen in den Entwurf eingebracht werden können, ohne den Lösungsweg wesentlich komplizierter zu machen.

Erweiterung auf sprungfähige Systeme. Ist die Regelstrecke durch das Zustandsraummodell

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (7.38)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (7.39)$$

mit $D \neq O$ beschrieben und wird die Ausgangsgröße y im Gütefunktional bewertet, so erhält man im Gütefunktional einen „gemischten“ Term, der von x und u abhängt:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty (y'(t)Q_y y(t) + u'(t)Ru(t)) dt \\ &= \int_0^\infty (x'(t)C'Q_y Cx(t) + 2x'(t)C'Q_y Du(t) + u'(t)(D'Q_y D + R)u(t)) dt \\ &= \int_0^\infty (x'(t)Qx(t) + 2x'(t)Su(t) + u'(t)\tilde{R}u(t)) dt \rightarrow \min_{u(t)}. \end{aligned}$$

Die in der letzten Zeile enthaltenen Matrizen S und $\tilde{R}$ sind Abkürzungen für die entsprechenden Matrizen der darüberstehenden Ausdrücke. Der Optimalreglerentwurf besteht nun in der Aufgabe, eine Reglermatrix zu finden, die das erweiterte Gütefunktional minimiert.

Eine Rückführung auf den bisher betrachteten Standardfall gelingt, wenn man mit

$$\tilde{u}(t) = u(t) + \tilde{R}^{-1}S'x(t) \quad (7.40)$$

eine neue Stellgröße einführt und das Optimalreglerproblem zunächst für diese Steuerung löst. Man erhält

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}x(t) + B\tilde{u}(t), \quad x(0) = x_0$$

als modifizierte Regelstrecke mit

$$\tilde{A} = A - B\tilde{R}^{-1}S'$$

und als neues Gütefunktional

$$J = \int_0^\infty (x'(t)\tilde{Q}x(t) + \tilde{u}'(t)\tilde{R}\tilde{u}(t)) dt \rightarrow \min_{\tilde{u}(t)}$$

mit

$$\tilde{Q} = C'Q_yC - S\tilde{R}^{-1}S'.$$

Damit hat man wieder das Standardproblem vor sich, dessen Lösung durch

$$\tilde{u}(t) = -\tilde{R}^{-1}B'Px(t)$$

gegeben ist. Die Matrix P löst die Riccatigleichung (7.20), in der A durch $\tilde{A}$ und Q durch $\tilde{Q}$ ersetzt wurde. Um die gesuchte Lösung des Originalproblems zu erhalten, setzt man $\tilde{u}$ in Gl. (7.40) ein und erhält

$$u(t) = -\tilde{R}^{-1}(B'P + S')x(t). \quad (7.41)$$

Erzeugung eines vorgegebenen Stabilitätsgrades. Um eine genügend große Robustheit des Regelkreises zu erreichen, fordert man häufig, dass die Eigenwerte $\bar{\lambda}$ des geschlossenen Kreises einen Mindestabstand a ($a > 0$) von der Imaginärachse haben:

$$\operatorname{Re}\{\bar{\lambda}_i\} \stackrel{!}{\leq} -a. \quad (7.42)$$

a wird auch als Stabilitätsgrad bezeichnet. Einen vorgegebenen Stabilitätsgrad kann man dadurch erreichen, dass man in das Gütefunktional den Faktor e^{2at} einführt:

$$J = \int_0^\infty e^{2at}(x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t)) dt \rightarrow \min_u. \quad (7.43)$$

Wenn man jetzt einen Regler berechnet, für den das Gütefunktional einen endlichen Wert annimmt, so müssen alle Zustände $x_i(t)$ und Stellgrößen $u_i(t)$ im Regelkreis schneller als e^{-at} abklingen.

Diese Tatsache kann genutzt werden, um das Entwurfsproblem mit dem Gütefunktional (7.43) auf den Standardfall zurückzuführen. Man formt das Gütefunktional entsprechend

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty (e^{at}x'(t)Qe^{at}x(t) + e^{at}u'(t)Re^{at}u(t)) dt \\ &= \int_0^\infty (\tilde{x}'(t)Q\tilde{x}(t) + \tilde{u}'(t)R\tilde{u}(t)) dt \rightarrow \min_{\tilde{u}(t)} \end{aligned}$$

um, wobei mit den neu eingeführten Größen

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}(t) &= e^{at} \mathbf{x}(t) \\ \tilde{\mathbf{u}}(t) &= e^{at} \mathbf{u}(t)\end{aligned}$$

zunächst die Beziehung

$$\frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{x}}(t) = e^{at} \dot{\mathbf{x}}(t) + a e^{at} \mathbf{x}(t)$$

und damit das modifizierte Modell der Regelstrecke

$$\frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} + a\mathbf{I}) \tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B} \tilde{\mathbf{u}}(t)$$

entsteht. Die Lösung dieses Problems führt über die Riccatigleichung

$$(\mathbf{A} + a\mathbf{I})' \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{A} + a\mathbf{I}) - \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\tilde{\mathbf{P}} + \mathbf{Q} = \mathbf{O} \quad (7.44)$$

zunächst auf

$$\tilde{\mathbf{u}}(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{x}}(t)$$

und nach Rücktransformation schließlich auf den Regler

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{x}(t). \quad (7.45)$$

Wenn das Paar $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ vollständig steuerbar ist, sichert dieser Regler den vorgegebenen Stabilitätsgrad, so dass die Eigenwerte der Systemmatrix $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\tilde{\mathbf{P}}$ die Bedingung (7.42) erfüllen. Wenn man also die Matrix $\tilde{\mathbf{P}}$ aus der Riccatigleichung (7.44) anstelle aus Gl. (7.20) berechnet, so hat der geschlossene Regelkreis den Stabilitätsgrad a . Dabei nutzt man übrigens aus, dass aus der Steuerbarkeit des Paares $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ die vollständige Steuerbarkeit des Paares $(\mathbf{A} + a\mathbf{I}, \mathbf{B})$ folgt.

Optimale Folgeregelung. Der Optimalregler soll jetzt dafür sorgen, dass die Regelgröße y der Führungsgröße w folgt, die durch ein Führungsgrößenmodell der Form

$$\dot{\mathbf{x}}_w(t) = \mathbf{A}_w \mathbf{x}_w(t), \quad \mathbf{x}_w(0) = \mathbf{x}_{w0} \quad (7.46)$$

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{C}_w \mathbf{x}_w(t) \quad (7.47)$$

beschrieben ist. Die Güte der Regelung wird durch das Gütefunktional

$$J = \int_0^\infty ((\mathbf{y}(t) - \mathbf{w}(t))' \mathbf{Q}_y (\mathbf{y}(t) - \mathbf{w}(t)) + \mathbf{u}'(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)) dt \rightarrow \min_{\mathbf{u}}$$

bewertet. Setzt man die Regel- und die Führungsgröße in das Gütefunktional ein, so erhält man

$$\begin{aligned}J &= \int_0^\infty ((\mathbf{C}\mathbf{x}(t) - \mathbf{C}_w \mathbf{x}_w(t))' \mathbf{Q}_y (\mathbf{C}\mathbf{x}(t) - \mathbf{C}_w \mathbf{x}_w(t)) + \mathbf{u}'(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)) dt \\ &= \int_0^\infty ((\mathbf{x}'(t) \quad \mathbf{x}'_w(t)) \begin{pmatrix} \mathbf{C}' \mathbf{Q}_y \mathbf{C} & -\mathbf{C}' \mathbf{Q}_y \mathbf{C}_w \\ -\mathbf{C}_w' \mathbf{Q}_y \mathbf{C} & \mathbf{C}_w' \mathbf{Q}_y \mathbf{C}_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_w(t) \end{pmatrix} + \mathbf{u}'(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)) dt \rightarrow \min_{\mathbf{u}(t)}.\end{aligned}$$

Dieses Funktional ist für die um das Führungsgrößenmodell erweiterte Regelstrecke

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_w(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_w(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t). \quad (7.48)$$

zu minimieren.

Die Lösung des Optimierungsproblems führt auf die Riccatigleichung

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_w \end{pmatrix}' \mathbf{P} + \mathbf{P} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_w \end{pmatrix} - \mathbf{P} \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} \mathbf{R}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix}' \mathbf{P} \\ & + \begin{pmatrix} \mathbf{C}' \mathbf{Q}_y \mathbf{C} & -\mathbf{C}' \mathbf{Q}_y \mathbf{C}_w \\ -\mathbf{C}_w' \mathbf{Q}_y \mathbf{C} & \mathbf{C}_w' \mathbf{Q}_y \mathbf{C}_w \end{pmatrix} = \mathbf{O}. \end{aligned}$$

Zerlegt man die Matrix $\mathbf{P}$ in der Form

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{12}' & \mathbf{P}_{22} \end{pmatrix},$$

wobei der obere linke Block $\mathbf{P}_{11}$ eine (n, n) -Matrix ist, so erhält man den Regler

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{12}' & \mathbf{P}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_w(t) \end{pmatrix},$$

der in

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{P}_{11} \mathbf{x}(t) - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{P}_{12} \mathbf{x}_w(t) \quad (7.49)$$

umgeformt werden kann.

Die letzte Gleichung zeigt, dass der Optimalregler außer den Zuständen der Regelstrecke auch die Zustände des Führungsgrößenmodells auf die Stellgröße zurückführt. Dies ist problematisch, weil i. Allg. der Zustandsvektor $\mathbf{x}_w(t)$ nicht messbar ist. Ein Ausweg aus dieser Situation wird im Kap. 8 angegeben, in dem ein Beobachter für das Führungsgrößenmodell beschrieben ist, mit dem aus der messbaren Führungsgröße $w(t)$ der Zustand $\mathbf{x}_w(t)$ rekonstruiert werden kann.

Da die erweiterte Regelstrecke (7.48) nicht vollständig steuerbar ist, gilt die Stabilitätseigenschaft nicht für den erweiterten Regelkreis. Diese Tatsache ist nicht wichtig, denn die nicht steuerbaren Eigenwerte sind die des Führungsgrößenmodells. Damit gilt auch die Beziehung $\mathbf{u}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathbf{0}$ nicht, was für das betrachtete Nachführungsproblem mit nichtverschwindender Führungsgröße ja auch so sein muss.

Aufgabe 7.2** Optimale PI-Regelung

Es soll ein Optimalregler entworfen werden, der Sollwertfolge für sprungförmige Führungsgrößen sichert.

1. Wenden Sie den in diesem Abschnitt beschriebenen Lösungsweg an. Wie sieht das Blockschaltbild des Regelkreises mit dem Regler (7.49) aus? Wodurch wird die Sollwertfolge gesichert?
2. Ein alternativer Lösungsweg besteht darin, durch geeignete Wahl des Gütefunktional zu sichern, dass anstelle der Stellgröße $u(t)$ die Ableitung $\dot{u}(t)$ für große Zeiten verschwindet und sich gleichzeitig die Regelgröße $y(t)$ der konstanten Führungsgröße w nähert. Wie sieht das auf diesem Lösungsweg zu behandelnde Optimierungsproblem aus? Kann es in das „Standardproblem“ überführt werden? $\square$

7.6 Optimale Ausgangsrückführung

Das Ergebnis des Optimalreglerentwurfes ist eine Zustandsrückführung, für deren technische Realisierung sämtliche Zustandsvariablen der Regelstrecke gemessen werden müssen. Zwar kann man, wie im Kap. 8 noch ausführlich beschrieben wird, den Zustandsvektor x mit Hilfe des Regelstreckenmodells aus dem Verlauf der Eingangs- und Ausgangsgröße rekonstruieren und den Optimalregler deshalb auch dann realisieren, wenn anstelle von x nur der Ausgang y messbar ist. Es stellt sich jedoch die Frage, ob man das Entwurfsproblem nicht von vornherein auf Ausgangsrückführungen beziehen und damit einen einfacher realisierbaren Regler berechnen kann.

Im Folgenden wird deshalb das Problem untersucht, für die Regelstrecke

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (7.50)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (7.51)$$

eine Ausgangsrückführung

$$u(t) = -K_y y(t) \quad (7.52)$$

zu bestimmen, für die das Gütefunktional (7.15)

$$J(x_0, u) = \int_0^\infty (x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t)) dt$$

minimal wird:

$$\min_{K_y} J(x_0, -K_y y(t)). \quad (7.53)$$

In dieser Aufgabenstellung ist die Abhängigkeit des Gütefunktional vom Anfangszustand und von der Steuerung wieder explizit angegeben. Dies wurde getan, weil mit der Beschränkung des Reglers auf eine Ausgangsrückführung wieder ein Problem auftaucht, das im Abschn. 7.1 bereits diskutiert wurde: Die Lösung des Optimierungsproblems (7.53) ist abhängig vom Anfangszustand x_0 ! Man erhält also

für jeden Anfangszustand eine andere Rückführung, was durch die Abhängigkeit $K_y(x_0)$ ausgedrückt wird.

Da eine solche Regelung nicht praktikabel ist, sucht man nach demjenigen Regler, der im Mittel für alle Anfangsbedingungen der beste ist. Diese Vorgehensweise ist dadurch motiviert, dass mit x_0 eine Anfangsauslenkung des Systems beschrieben wird, die von den unbekannten Störungen abhängt. Es ist sinnvoll anzunehmen, dass x_0 eine Zufallsgröße ist, die über der Einheitskugel im Zustandsraum $\mathbb{R}^n$ gleichverteilt ist. Man sucht dann nach einem Regler, der den Erwartungswert $E\{\cdot\}$ des Gütefunktionalen bezüglich dieser Verteilung der Anfangsauslenkung minimiert:

$$\min_{K_y} E\{J(x_0, -K_y y(t))\}. \quad (7.54)$$

Auf diese Weise wird die Abhängigkeit der Lösung des Optimierungsproblems (7.53) von x_0 eliminiert, so dass das Ergebnis ein von x_0 unabhängiger Regler (7.52) ist.

Umformung des Optimierungsproblems. Um das Optimierungsproblem lösen zu können, ist zunächst eine Umformung des Gütefunktionalen notwendig. In Analogie zu den Gln. (7.17) und (7.18) erhält man die Beziehungen

$$J = x_0' P x_0 \quad (7.55)$$

mit P aus der Ljapunowgleichung

$$\bar{A}' P + P \bar{A} = -\bar{Q}, \quad (7.56)$$

in die für die hier verwendete Ausgangsrückführung jetzt

$$\bar{A} = A - B K_y C \quad (7.57)$$

und

$$\bar{Q} = Q + C' K_y' R K_y C \quad (7.58)$$

einzusetzen ist. Aus den Gln. (7.56) – (7.58) erhält man die Riccatigleichung

$$(A - B K_y C)' P + P(A - B K_y C) + C' K_y' R K_y C + Q = O. \quad (7.59)$$

Da für jede symmetrische Matrix P die Beziehung

$$x_0' P x_0 = \text{Spur}(P x_0 x_0')$$

gilt, kann man einen weiteren Umformungsschritt ausführen:

$$J = \text{Spur}(P x_0 x_0').$$

Sind die Anfangszustände, wie angenommen wurde, auf der Einheitskugel im Zustandsraum gleich verteilt, so gilt

$$E\{x_0 x_0'\} = \frac{1}{n} I.$$

Für das Optimierungsproblem (7.54) erhält man damit

$$\min_{\mathbf{K}_y} E\{J(\mathbf{x}_0, -\mathbf{K}_y \mathbf{y})\} = \min_{\mathbf{K}_y} \frac{1}{n} \text{Spur } \mathbf{P}. \quad (7.60)$$

Ableitung einer notwendigen Optimalitätsbedingung. Eine notwendige Optimalitätsbedingung erhält man aus der Ableitung des zu minimierenden Gütefunktional

$$\tilde{J} = \text{Spur } \mathbf{P}$$

nach den Elementen der Reglermatrix $\mathbf{K}_y$. Da $\mathbf{P}$ in relativ komplizierter Weise über die Gl. (7.59) von $\mathbf{K}_y$ abhängt, gelangt man erst nach einer längeren Umformung zu

$$\frac{d\tilde{J}}{d\mathbf{K}_y} = 2(\mathbf{R}\mathbf{K}_y\mathbf{C} - \mathbf{B}'\mathbf{P})\mathbf{L}\mathbf{C}', \quad (7.61)$$

wobei $\mathbf{L}$ die positiv definite Lösung der Ljapunowgleichung

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_y\mathbf{C})\mathbf{L} + \mathbf{L}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_y\mathbf{C})' + \mathbf{I} = \mathbf{O} \quad (7.62)$$

ist. Die Lösung der Ljapunowgleichung existiert genau dann, wenn der geschlossene Kreis stabil ist. Setzt man die Ableitung (7.61) gleich null, so erhält man für den Regler die Gleichung

$$\mathbf{K}_y = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{L}\mathbf{C}'(\mathbf{C}\mathbf{L}\mathbf{C}')^{-1}. \quad (7.63)$$

Die Gln. (7.59), (7.62) und (7.63) stellen eine notwendige Optimalitätsbedingung für die Ausgangsrückführung dar.

Vergleicht man die erhaltenen Gleichungen mit denen für die optimale Zustandsrückführung, so ist eine gewisse Ähnlichkeit der Gln. (7.19) und (7.63) festzustellen. Setzt man $\mathbf{C}' = \mathbf{I}$, so geht die Ausgangsrückführung in die Zustandsrückführung über.

Lösung der Optimalitätsbedingung. Die Lösung der Optimalitätsbedingung ist nicht einfach, weil die angegebenen drei Gleichungen untereinander verkoppelt sind und man keine Berechnungsreihenfolge wählen kann, bei der die Matrizen $\mathbf{P}$, $\mathbf{L}$ und $\mathbf{K}_y$ nacheinander ermittelt werden können. Man sieht jedoch, dass die Gln. (7.59) und (7.62) für eine gegebene Reglermatrix $\mathbf{K}_y$ getrennt voneinander lösbar sind, denn beide Gleichungen stellen bei bekanntem $\mathbf{K}_y$ Ljapunowgleichungen dar, für deren Lösung die bekannten Algorithmen angewendet werden können. Deshalb kann man das Optimierungsproblem folgendermaßen lösen:

Entwurfsverfahren 7.2 Bestimmung einer optimalen Ausgangsrückführung

Gegeben: Regelstrecke (A, B, C) , Güteforderungen

1. $k = 0$.

Es wird eine Ausgangsrückführung K_y^0 bestimmt, für die der geschlossene Kreis $A - BK_y^0 C$ stabil ist.

2. $k := k + 1$

Es werden Matrizen P^k und L^k bestimmt, mit denen die Ljapunowgleichungen

$$(A - BK_y^{k-1} C)' P^k + P^k (A - BK_y^{k-1} C) + C' K_y^{k-1'} R K_y^{k-1} C + Q = O. \quad (7.64)$$

und

$$(A - BK_y^{k-1} C) L^k + L^k (A - BK_y^{k-1} C)' + I = O \quad (7.65)$$

erfüllt sind.

3. Es wird der Wert des Gradienten des Gütefunktional nach Gl. (7.61) berechnet:

$$\frac{d\tilde{J}}{dK_y} = 2(RK_y^{k-1} C - B' P^k) L^k C'.$$

Unterschreitet der Gradient die durch ε gegebene Schranke

$$\left\| \frac{d\tilde{J}}{dK_y} \right\| < \varepsilon,$$

so wird der Entwurfsalgorithmus beendet.

4. Die neue Reglermatrix wird entsprechend

$$K_y^k = K_y^{k-1} - a \frac{d\tilde{J}}{dK_y}$$

bestimmt, wobei a eine Schrittweite darstellt (siehe Bemerkung weiter unten). Das Entwurfsverfahren wird mit Schritt 2 fortgesetzt.

Ergebnis: Optimale Ausgangsrückführung K_y^*

Das Entwurfsverfahren hat zwei bemerkenswerte Eigenschaften. Erstens ist gesichert, dass in jedem Iterationsschritt eine Schrittweite a gefunden werden kann, so dass der Gütewert des neuen Reglers besser ist als der Gütewert des alten Reglers:

$$J(K_y^k) < J(K_y^{k-1}).$$

Jeder Iterationsschritt bringt also eine Verbesserung der Reglergüte, ohne dass jedoch die Konvergenz nachgewiesen werden kann. Um einen „großen Lösungsschritt“ auszuführen, kann man im Schritt 4 eine eindimensionale Suche nach demjenigen Wert von a durchführen, für den $\tilde{J}(\mathbf{K}_y^{k-1} - a \frac{d\tilde{J}}{d\mathbf{K}_y})$ minimal wird.

Zweitens liefert das Entwurfsverfahren in jedem Schritt eine Ausgangsrückführung, mit der der geschlossene Kreis stabil ist. Voraussetzung ist allerdings, dass im Schritt 1 eine Ausgangsrückführung vorgegeben wird, mit der der Regelkreis stabil ist. Diese Voraussetzung ist trivialerweise bei stabilen Regelstrecken mit $\mathbf{K}_y = \mathbf{O}$ erfüllt. Sie führt jedoch auf erhebliche Schwierigkeiten, wenn die Regelstrecke instabil ist, denn aus Kap. 6 ist bekannt, dass die Stabilisierung eines instabilen Systems mit Hilfe einer statischen Ausgangsrückführung ein schwieriges Problem darstellt. Stammt die Instabilität lediglich von Integratoren, die einer stabilen Regelstrecke zur Sicherung der Sollwertfolge hinzugefügt wurden, so kann die stabilisierende Anfangslösung $\mathbf{K}_y^0$ aus der statischen Verstärkung der Strecke bestimmt werden, wie es im Kap. 5 gezeigt wurde.

Der Entwurf optimaler Ausgangsrückführungen eignet sich zur Verbesserung des dynamischen Regelkreisverhaltens, wobei der Regler lediglich eine statische Rückführung der messbaren Ausgänge darstellt. Die Forderung nach Kenntnis einer stabilisierenden Anfangslösung zeigt jedoch, dass bei Beschränkung des Reglers auf eine Ausgangsrückführung viele der vorteilhaften Eigenschaften des Optimalreglers verloren gehen. Es ist nicht von vornherein die Stabilität des Regelkreises gesichert. Statt dessen muss das Stabilisierungsproblem bereits vor der Optimierung gelöst werden, um zu der geforderten Anfangslösung zu kommen.

7.7 H^∞ -optimaler Regler

7.7.1 Erweiterungen der optimalen Regelung

Das bisher behandelte Verfahren für die Bestimmung des Reglers als Ergebnis eines Optimierungsproblems beruht auf einer speziellen Wahl des Gütefunktional, die so getroffen wurde, dass für die entstehende optimale Zustandsrückführung eine geschlossene Lösung angegeben werden kann.

Man kann das Vorgehen, den Regler als Lösung eines Optimierungsproblems zu bestimmen, jedoch viel allgemeiner fassen und dabei Gütefunktionale wählen, die nicht auf ein quadratisches Integralkriterium begrenzt sind. Der Regler kann dann i. Allg. nur unter Verwendung von Suchverfahren bestimmt werden. Diese Suchverfahren sind aus der Optimierungstheorie bekannt. Sie ermöglichen eine systematische Auswahl derjenigen Reglerparameter, die als Kandidaten des Optimalreglers untersucht werden können.

Eine wesentliche Schwierigkeit dieses Lösungsweges resultiert aus der Tatsache, dass die Suchprobleme umso komplexer werden, je größer die durch die Zahl der Reglerparameter beschriebene Dimension des Suchraumes ist. Ist das gewählte Gütekriterium nicht differenzierbar oder gar unstetig, so ist auch die Klasse der für die

Lösung einsetzbaren Suchverfahren stark eingeschränkt, was sich in einer weiteren Erhöhung der Rechenzeit oder gar in der Tatsache bemerkbar macht, dass das gestellte Optimierungsproblem überhaupt nicht gelöst werden kann und man sich deshalb mit suboptimalen Lösungen zufrieden geben muss.

Beschreibt man die sich teilweise widersprechenden Güteforderungen an den Regelkreis durch getrennte Gütefunktionale, so kann man auch anstelle eines skalaren Gütekriteriums einen Vektor von Gütekriterien aufstellen und untersuchen, für welche Regelung dieser Vektor möglichst klein wird. Aus der Theorie der Gütevektroptimierung ist bekannt, dass dieses Problem i. Allg. keine eindeutige Lösung besitzt, sondern dass bei einem m -dimensionalen Gütevektor eine $(m - 1)$ -dimensionale Menge von Lösungen entsteht (Paretomenge). Die in dieser Menge enthaltenen Lösungen sind untereinander in dem Sinne nicht vergleichbar, dass sie paarweise in mindestens einem Element bessere, in einem anderen Element schlechtere Gütewerte besitzen.

Da jedoch der Reglerentwurf als Optimierungsproblem bei den meisten praktischen Aufgaben keine Optimierung im eigentlichen Sinne darstellt, sondern das Optimierungsproblem lediglich ein Ersatzproblem für die gegebene Regelungsaufgabe darstellt, ist man gut beraten, wenn man die Komplexität der Optimierungsaufgabe durch zweckmäßige Wahl des Gütekriteriums soweit wie möglich reduziert. Unter diesem Blickwinkel stellt die H^∞ -Regelung einen guten Kompromiss dar. Auf sie soll als zweites Beispiel für eine zweckmäßig formulierte Aufgabe der optimalen Regelung im Folgenden kurz eingegangen werden.

7.7.2 H^∞ -Optimierungsproblem

Die H^∞ -Regelung ist ein derzeit sehr intensiv diskutiertes Entwurfsvorgehen. Die Regelstrecke wird durch ein Modell der Form

$$\begin{pmatrix} Z(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{zw}(s) & G_{zu}(s) \\ G_{yw}(s) & G_{yu}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(s) \\ U(s) \end{pmatrix} \quad (7.66)$$

beschrieben. Der gesuchte Regler ist durch die Gleichung

$$U(s) = -K(s) Y(s) \quad (7.67)$$

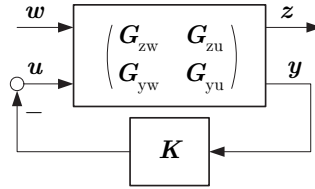
dargestellt, so dass man für den Regelkreis das Modell

$$Z(s) = G_w(s) W(s)$$

mit

$$G_w(s) = G_{zw}(s) + G_{zu}(s)K(s)(I + G_{yu}(s)K(s))^{-1}G_{yw}(s) \quad (7.68)$$

erhält.

Abb. 7.16: H^∞ -Entwurfsproblem

In der hier gewählten Formulierung wird also bereits im Regelstreckenmodell zwischen dem für die Regelung verwendeten E/A-Paar (u, y) und dem E/A-Paar (w, z) unterschieden, das für die Bewertung des Regelkreises maßgebend ist (Abb. 7.16). Die bisher betrachteten Regelkreise sind ein Spezialfall dieser Form.

Die Entwurfsaufgabe besteht darin, einen Regler $K(s)$ zu finden, für den die Norm der Führungsübertragungsfunktion $G_w(s)$ möglichst klein wird

$$\min_{K(s)} \|G_w(s)\|_\infty. \quad (7.69)$$

Man bezeichnet dieses Problem als das H^∞ -Optimierungsproblem.

$\|\cdot\|_\infty$ beschreibt die Norm

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}\{G(j\omega)\}, \quad (7.70)$$

wobei $\sigma_{\max}$ den größten singulären Wert der angegebenen Matrix bezeichnet. Für Eingrößensysteme geht diese Norm in

$$\|G(j\omega)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |G(j\omega)|$$

über, d. h., sie beschreibt das Amplitudenmaximum des Frequenzganges. Man kann $\|\cdot\|_\infty$ auch als Norm des durch $G(j\omega)$ dargestellten Operators deuten.

Diese Norm ist die H^∞ -Norm, wodurch der Name des zu entwerfenden Reglers begründet ist. H steht für HARDY-Raum, also der Menge der beschränkten Funktionen, die in der rechten komplexen Halbebene analytisch sind. $G_w(j\omega)$ liegt in diesem Raum, wenn der Regelkreis stabil ist.

Minimierung der Empfindlichkeit. Im Folgenden soll an mehreren Entwurfsaufgaben gezeigt werden, dass das gestellte Entwurfsproblem mehrere Anwendungsgebiete hat. Als erstes wird die Aufgabe betrachtet, die Norm der Empfindlichkeitsmatrix

$$S(s) = (I + G(s)K(s))^{-1}$$

zu minimieren. Führt man Wichtungsmatrizen $W_O(s)$ und $W_I(s)$ ein, so kann man die Aufgabe stellen, einen Regler zu finden, der die gewichtete Norm der Empfindlichkeitsmatrix möglichst klein macht:

$$\min_{\mathbf{K}(s)} \|\mathbf{W}_O(s)\mathbf{S}(s)\mathbf{W}_I(s)\|_\infty. \quad (7.71)$$

Diese Aufgabe entsteht, wenn man die Störübertragungsfunktion $\mathbf{G}_d(s) = \mathbf{S}(s)$ klein machen will, weil man den Regler vor allem auf gutes Störverhalten entwerfen will.

Die Aufgabe (7.71) kann als H^∞ -Optimierungsproblem (7.69) mit

$$\mathbf{G}_w(s) = \mathbf{W}_O(s)\mathbf{S}(s)\mathbf{W}_I(s)$$

formuliert werden, wenn man in die fiktive Regelstrecke (7.66) die Beziehung

$$\begin{pmatrix} \mathbf{G}_{zw}(s) & \mathbf{G}_{zu}(s) \\ \mathbf{G}_{yw}(s) & \mathbf{G}_{yu}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_O(s)\mathbf{W}_I(s) & \mathbf{W}_O(s)\mathbf{G}(s) \\ -\mathbf{W}_I(s) & \mathbf{G}(s) \end{pmatrix}$$

einsetzt. Die Regelstrecke (7.66) entsteht also aus einer gegebenen Regelstrecke mit der Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(s)$, indem gewichtete Ein- und Ausgänge betrachtet werden. Das Entwurfsproblem bezieht sich folglich nicht auf die ursprünglich gegebene, sondern auf eine daraus abgeleitete fiktive Regelstrecke, was für den Entwurf keine Rolle spielt.

Um die Frage zu beantworten, wie man die Wichtungsmatrizen zweckmäßig wählen muss, wird ein Eingrößensystem mit der Empfindlichkeitsfunktion

$$S(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)}$$

betrachtet. Man fordert, dass der Betrag dieser Funktion beschränkt bleiben soll. Auf Grund des Gleichgewichtstheorems entsteht der in Abb. 7.17 gezeigte prinzipielle Verlauf von $|S(j\omega)|$. Entwurfsziel ist es, einen Verlauf von $|S(j\omega)|$ zu erzeugen, der die schraffierten Gebiete meidet, die anhand der Entwurfsforderungen festgelegt werden. Für den Entwurf gibt man anstelle der hervorgehobenen Gebiete eine Funktion $W_1(j\omega)$ vor und fordert, dass der Regelkreis durch den zu entwerfenden Regler eine Empfindlichkeitsfunktion erhält, die der Bedingung

$$|S(j\omega)| < \frac{1}{|W_1(j\omega)|} \quad (7.72)$$

genügt. Die Bedingung (7.72) ist äquivalent der Forderung

$$\|W_1(j\omega)S(j\omega)\|_\infty < 1. \quad (7.73)$$

Daraus sieht man, dass der Entwurf des Reglers entsprechend Gl. (7.71) sinnvoll ist.

Obwohl die Wahl von $W_1(j\omega)$ aus einer Betrachtung im Bodediagramm hervorgeht, ist die Interpretation der Bedingung (7.72) für die Ortskurve der offenen Kette interessant. Die angegebene Bedingung ist nämlich genau dann erfüllt, wenn für die offene Kette die Beziehung

$$|1 + G_0(j\omega)| > |W_1(j\omega)|$$

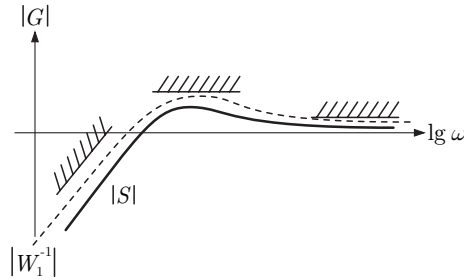


Abb. 7.17: Wahl der Wichtungen beim H^∞ -Entwurf

gilt. Das heißt, die Ortskurve muss vom kritischen Punkt -1 für alle Frequenzen mindestens den Abstand $|W_1(j\omega)|$ haben. Die Forderung (7.72) verschärft also die Stabilitätsforderung aus dem Nyquistkriterium, was nicht verwunderlich ist, denn der Regelkreis soll nicht nur stabil sein, sondern auch eine durch $W_1(j\omega)$ charakterisierte Güte besitzen.

Reglerentwurf auf Robustheit. Als zweite Veranschaulichung des H^∞ -Optimierungsproblems wird der Entwurf eines Reglers auf Robustheit betrachtet. Soll der Regler gegenüber multiplikativen Modellunsicherheiten robust sein, so ist aus Gl. (I-8.53) bekannt, dass die komplementäre Empfindlichkeitsfunktion $\hat{T}(j\omega)$ des mit dem Näherungsmodell gebildeten Regelkreises begrenzt sein muss. Unter Verwendung der zweiten Wichtungsfunktion $W_2(j\omega)$ kann man diese Forderung in die Form

$$\|W_2(j\omega) \hat{T}(j\omega)\|_\infty < 1 \quad (7.74)$$

bringen. Diese Bedingung ist hinreichend für die robuste Stabilität, wenn die Modellunsicherheit durch

$$\|\tilde{G}_M(j\omega)\|_\infty \leq 1$$

beschränkt ist, was man durch geeignete Umformung des Streckenmodells erreichen kann. Die Güteforderung (7.74) ist erfüllt, wenn

$$|1 + \hat{G}_0(j\omega)| > |W_2(j\omega) \hat{G}_0(j\omega)| \quad (7.75)$$

gilt, woraus sich wieder ein H^∞ -Optimierungsproblem ergibt.

Um die beschriebene Robustheitsforderung zu erfüllen, muss die Ortskurve der offenen Kette, die aus dem Regler und dem Näherungsmodell der Strecke besteht, vom Punkt -1 einen Mindestabstand von $|W_2(j\omega) \hat{G}_0(j\omega)|$ haben. Dieser Sachverhalt ist in Abb. 7.18 (links) dargestellt. Die Kreise um alle Punkte der Ortskurve von $\tilde{G}_0$ dürfen den Punkt -1 nicht enthalten. Auch hier sieht man, dass die Forderung nach robuster Stabilität die aus dem Nyquistkriterium entstehende Stabilitätsforderung für die mit dem Näherungsmodell gebildeten Regelkreis verschärft. Man muss dabei beachten, dass der Radius des gezeigten Kreises frequenzabhängig ist.

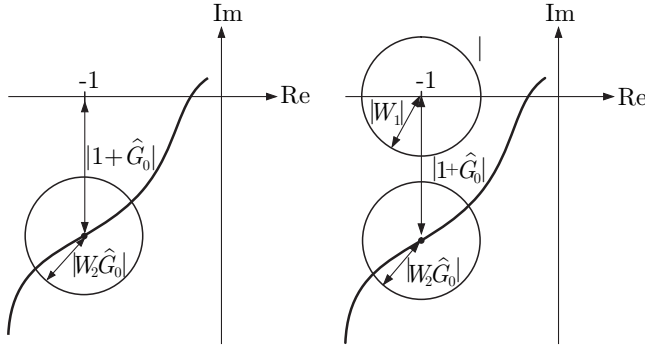


Abb. 7.18: Robustheitsforderung (links) und Forderung nach Robustheit und gutem E/A-Verhalten (rechts)

Gemischte Entwurfsprobleme. Der Ansatz, den Regler durch Lösung eines H^∞ -Problems zu bestimmen, ermöglicht auch die Kombination mehrerer Güteforderungen. Um gleichzeitig ein günstiges E/A-Verhalten und die Robustheit des Regelkreises zu fordern, fasst man die beiden angegebenen Bedingungen zu einem gemeinsamen Gütefunktional zusammen, wobei man

$$\| |W_1(j\omega)\hat{S}(j\omega)| + |W_2(j\omega)\hat{T}(j\omega)| \|_\infty < 1 \quad (7.76)$$

erhält. Diese Forderung lässt sich in der schon beschriebenen Weise interpretierten, was in Abb. 7.18 (rechts) dargestellt ist.

7.7.3 Lösung des H^∞ -Optimierungsproblems

Für das H^∞ -Optimierungsproblem (7.69) sind vielfältige Lösungsverfahren entwickelt worden, deren tiefgründige Behandlung den Rahmen dieses Buches sprengen würde. Es wird deshalb im Folgenden die Lösbarkeit des Problems diskutiert und die Lösung für ein vereinfachtes Problem angegeben. Dabei kommt es vor allem darauf an zu zeigen, dass das H^∞ -Problem an das bekannte LQ-Problem anschließt. Dies ist ein wichtiger Grund, weshalb man der H^∞ -Regelung derzeit in der Regelungstheorie eine so große Bedeutung beimisst.

Es wird sich zeigen, dass die Lösung der Lösung des LQ-Problems ähnlich ist. Dafür wird im Folgenden das Problem zunächst aus dem Frequenzbereich in den Zeitbereich übertragen.

H^∞ -Optimierungsproblem im Zeitbereich. Eine Überführung des Regelstreckenmodells (7.66) in den Zeitbereich führt auf ein Modell der Form

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ew(t) \quad (7.77)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + Fw(t) \quad (7.78)$$

$$z(t) = C_z x(t) + D_z u(t) + F_z w(t). \quad (7.79)$$

Der Regler ist ein dynamisches System mit der Übertragungsfunktionsmatrix

$$K(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_r & \mathbf{B}_r \\ \hline \mathbf{C}_r & \mathbf{D}_r \end{array} \right], \quad (7.80)$$

das zu einem Zustandsraummodell mit den angegebenen Matrizen gehört. Die dynamische Ordnung des Reglers und seine Modellparameter müssen beim Entwurf festgelegt werden. Die angegebenen Modelle der Strecke und des Reglers können zur Lösung des Problems (7.69) genutzt werden, denn aus ihnen kann man das Modell des Regelkreises bestimmen und daraus $\|\mathbf{G}_w(s)\|_\infty$ berechnen.

Existenzbedingungen. Es gibt eine Reihe von Existenzbedingungen für den H^∞ -Regler, von denen zwei hier aufgeführt werden sollen. Damit eine Lösung des Optimierungsproblems (7.69) existiert,

- muss das Paar $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ vollständig stabilisierbar und das Paar $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ ermittelbar sein und
- müssen die Beziehungen

$$\text{Rang } \mathbf{F} = \dim \mathbf{y} \quad \text{und} \quad \text{Rang } \mathbf{D}_z = \dim \mathbf{z}$$

gelten. Die erste Bedingung fordert, dass alle instabilen Eigenwerte steuerbar und beobachtbar sind. Sie sichert, dass der Regelkreis durch den Regler stabilisiert werden kann. Die zweite Bedingung fordert, dass im fiktiven Regelstreckenmodell (7.77) – (7.79) direkte Wirkungen von $\mathbf{w}$ auf $\mathbf{y}$ bzw. $\mathbf{u}$ auf $\mathbf{z}$ auftreten müssen. Die erste dieser beiden Forderungen ist einsichtig, wenn man die Größe $\mathbf{y}$ des fiktiven Regelstreckenmodells mit der Regelabweichung $\mathbf{e}$ gleichsetzt, denn diese Größe ist Eingangsgröße des Reglers. Die Ausgabegleichung lautet dann für eine nicht sprungfähige Regelstrecke

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{e}(t) = -\mathbf{C}_s \mathbf{x}(t) + \mathbf{I} \mathbf{w}(t)$$

wobei $\mathbf{C}_s$ aus der Ausgabegleichung der Regelstrecke stammt. Offensichtlich ist hier die in Gl. (7.78) mit $\mathbf{F}$ bezeichnete Matrix gleich der Einheitsmatrix, die wie gefordert den vollen Zeilenrang hat.

Bezüglich der zweiten Forderung stellt sich die Frage, warum $\mathbf{D}_z$ vollen Zeilenrang haben muss und nicht, wie man sonst häufig annimmt, gleich null sein darf. Der Grund liegt in der Formulierung des Optimierungsproblems. Man kann die Norm von $\mathbf{G}_w$ dann besonders klein machen, wenn man einen Regler mit sehr hoher Reglerverstärkung verwendet. Um auszuschließen, dass das Optimum bei einer unendlich großen Verstärkung liegt, muss der für die Regelung verwendete Aufwand, also entweder die Stellgröße $\mathbf{u}(t)$ oder die Reglerverstärkung, in das Gütefunktional eingehen. Dies geschieht bei dem in Gl. (7.69) verwendeten Gütefunktional nur dann, wenn $\mathbf{D}_z$ nicht verschwindet.

Lösung des H^∞ -Optimierungsproblems. Die Lösung des Optimierungsproblems wird jetzt für einen einfachen Fall angegeben, da es nicht auf die allgemeinste Lösung, sondern auf eine mit dem LQ-Verfahren vergleichbare Lösung ankommt. Da in

der Regelstrecke (7.77) – (7.79) die Matrizen F und D_z vollen Rang haben müssen, können sie nicht der Einfachheit halber gleich null gesetzt werden. Dies ist jedoch mit den Matrizen D und F_z möglich. Eine kleine weitere Modifikation führt dann zum Streckenmodell

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{w}_1(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}_2(t) \\ \mathbf{z}(t) &= \begin{pmatrix} \mathbf{C}_z\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

bei der die Eingangsgröße $\mathbf{w}$ in zwei Teilvektoren $\mathbf{w}_1$ und $\mathbf{w}_2$ zerlegt und der Einfluss der Stellgröße auf den Ausgang $\mathbf{z}$ explizit hervorgehoben ist. Offensichtlich ist dieses Modell ein Spezialfall der angegebenen allgemeineren Form (7.77) – (7.79) wie auch des Modells (7.66), wenn

$$\begin{pmatrix} \mathbf{G}_{zw}(s) & \mathbf{G}_{zu}(s) \\ \mathbf{G}_{yw}(s) & \mathbf{G}_{yu}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_z(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{C}_z(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \\ \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} & \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

gesetzt wird.

Selbst für dieses vereinfachte Problem gibt es keine explizite Vorschrift, wie der optimale Regler gefunden werden kann. Man geht deshalb den Weg, einen Regler auszurechnen, für den der Güterwert unterhalb einer durch γ beschriebenen Schranke liegt

$$\|\mathbf{G}_w\|_\infty < \gamma.$$

Dieser Regler ist durch folgende Gleichungen beschrieben:

Suboptimaler H^∞ -Regler:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{x}} &= \left(\mathbf{A} + \frac{1}{\gamma^2}\mathbf{E}\mathbf{E}'\mathbf{P}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\mathbf{I} - \frac{1}{\gamma^2}\mathbf{T}\mathbf{P}\right)^{-1}\mathbf{C}'(\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{u}(t) &= -\mathbf{B}'\mathbf{P}\hat{\mathbf{x}}(t).\end{aligned}$$

(7.81)

Dabei sind $\mathbf{P}$ und $\mathbf{T}$ positiv definite Lösungen der folgenden Riccatigleichungen:

$$\mathbf{P} : \mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\left(\mathbf{B}\mathbf{B}' - \frac{1}{\gamma^2}\mathbf{E}\mathbf{E}'\right)\mathbf{P} + \mathbf{C}'_z\mathbf{C}_z = \mathbf{O} \quad (7.82)$$

$$\mathbf{T} : \mathbf{A}\mathbf{T} + \mathbf{T}\mathbf{A}' - \mathbf{T}\left(\mathbf{C}'\mathbf{C} - \frac{1}{\gamma^2}\mathbf{C}'_z\mathbf{C}_z\right)\mathbf{T} + \mathbf{E}\mathbf{E}' = \mathbf{O}. \quad (7.83)$$

Man kann den H^∞ -optimalen Regler dadurch berechnen, dass man die angegebenen Gleichungen für unterschiedliche vorgegebene Güteschranken γ anwendet und dabei

γ solange verkleinert, bis die angegebenen Riccatigleichungen keine positiv definiten Lösungen mehr haben. Der für den kleinsten Wert $\gamma_{\min}$ erhaltene suboptimale H^∞ -Regler ist der gesuchte H^∞ -optimale Regler.

Diskussion der Lösung. Bei dem angegebenen Regler mag zunächst verwunderlich erscheinen, dass die zu berechnende Stellgröße u auch in der Zustandsgleichung auftaucht. Man kann selbstverständlich die zweite Reglergleichung in die erste einsetzen und diese Abhängigkeit beseitigen, wodurch man auch explizite Gleichungen für die in Gl. (7.80) vorkommenden Reglermatrizen A_r , B_r , C_r und D_r erhielte. Es gibt jedoch zwei Gründe, die angegebene Schreibweise beizubehalten. Erstens wird die Gleichung für den Regler erheblich unübersichtlicher, wenn man die Gleichung für u aus dem Regler einsetzt und dann alle Terme für $\hat{x}$ auf der rechten Seite zusammenfasst. Zweitens wird sich aus Sicht des Kapitels 8 zeigen, dass der H^∞ -Regler aus einem Beobachter und einer Zustandsrückführung besteht. Der Beobachter ist durch die erste Gleichung gegeben. Er dient der Berechnung eines Näherungswertes $\hat{x}$ für den Zustand x der Regelstrecke. Dieser Näherungswert wird dann verwendet, um die durch die zweite Gleichung dargestellte Zustandsrückführung zu realisieren. Insgesamt entsteht dabei ein dynamischer Regler.

Zusammenhang von H^∞ -Regler und LQ-Regler. Die angegebenen Riccatigleichungen zeigen, dass das hier gelöste Problem trotz der Tatsache, dass es aus einem ganz anderen Optimierungsziel hervorgeht, sehr große Ähnlichkeiten mit dem LQ-Problem aufweist. Man stelle sich insbesondere vor, dass der Zustand messbar ist, man also davon ausgehen kann, dass $\hat{x}(t) = x(t)$ ist und dass γ beliebig groß sein darf ($\gamma \rightarrow \infty$). Dann erhält man aus den angegebenen Gleichungen den Regler

$$u(t) = -B'Px(t)$$

mit P aus der Riccatigleichung

$$A'P + PA - PBB'P + C_z' C_z = 0.$$

Es entsteht also der Optimalregler für das Gütefunktional

$$J = \int_0^\infty z'(t)z(t) dt = \int_0^\infty (x'(t)C_z' C_z x(t) + u'(t)u(t)) dt.$$

Dieses Problem wäre ein singuläres Optimierungsproblem, in das die Stellgröße nicht einging, wenn in der Ausgabegleichung für z die Stellgröße u nicht vorkäme. Diese Vereinfachung zeigt den bereits beschriebenen Grund, weshalb im allgemeinen Problem die Matrix D_z nicht verschwinden darf. Außerdem erkennt man, dass bei zunächst frei gelassener oberer Schranke aus dem H^∞ -Problem im Wesentlichen ein Optimalregler entsteht. Jede vorgegebene endliche Schranke γ für den Gütewert führt zu einer Veränderung der Riccatigleichungen, die für die Bestimmung des H^∞ -Reglers zu lösen sind.

Die Riccatigleichung für T entsteht aus einem Entwurfsproblem für den Beobachter, der im Kap. 8 behandelt wird. Im Unterschied zu den dort vorgestellten

Entwurfsstrategien, die auf der Polzuweisung beruhen, wird hier auch für den Beobachter der Optimalreglerentwurf angewendet.

7.8 Optimalreglerentwurf mit MATLAB

Neben den in vorangegangenen Kapiteln schon behandelten MATLAB-Funktionen ist für den Optimalreglerentwurf nur noch eine zusätzliche Funktion erforderlich, mit der die Lösung der Riccatigleichung bestimmt wird. Die Funktion `lqr` übernimmt diese Aufgabe, wobei sie für eine gegebene Regelstrecke mit den Matrizen A und B und ein Gütefunktional mit den Wichtungsmatrizen Q und R sofort die Reglermatrix K^* berechnet:

```
>> K = lqr(A, B, Q, R);
```

Der Entwurf erfolgt mit dem Programm 7.1, wobei die vom Anfangszustand x_0 ausgehende Eigenbewegung des Regelkreises zur Bewertung der Regelgüte herangezogen wird.

Programm 7.1 Optimalreglerentwurf

Voraussetzungen für die Anwendung des Programms:

- Den Matrizen A , B , C , Q und R sowie dem Vektor x_0 sind bereits Werte zugewiesen.
- D ist eine Nullmatrix entsprechender Dimension.

Prüfung der Voraussetzungen des Optimalreglerentwurfes

```
>> System=ss(A, B, C, D);
>> rank(ctrb(System))
>> eig(Q)
>> eig(R)
```

Prüfung der Steuerbarkeit

Prüfung der Definitheit

Berechnung des Optimalreglers

```
>> K = lqr(A, B, Q, R);
```

Analyse des Regelkreises

```
>> Ag = A-B*K;
>> eig(Ag)
>> Kreis=ss(Ag, B, C, D);
>> initial(Kreis, x0);
```

Berechnung der Eigenbewegung

Für die Berechnung der optimalen Ausgangsrückführung muss das Entwurfsverfahren 7.2 in ein MATLAB-Programm überführt werden. Die Lösung der Gln. (7.64) und (7.65), die die allgemeine Form einer Ljapunowgleichung

$$A'P + PA = -Q$$

haben, kann mit der Funktion

» $P = \text{lyap}(A', Q);$

erfolgen. Hierbei muss man anstelle der Matrix A die transponierte Matrix A' als erstes Argument einsetzen!

Aufgabe 7.3* *Programmerweiterung für den Entwurf von PI-Reglern*

Erweitern Sie das Programm 7.1 so, dass PI-Zustandsrückführungen an der I-erweiterten Regelstrecke entworfen und die Führungsübergangsfunktion des Regelkreises zur Bewertung der Regelkreiseigenschaften berechnet und grafisch dargestellt werden. □

Aufgabe 7.4* *Optimalreglerentwurf für einen Dampferzeuger*

Gegeben ist das Zustandsraummodell eines Dampferzeugers (vgl. Aufgabe 3.18)

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -0,1 & & & & & \\ & -0,05 & & & & \\ & & -0,025 & & & \\ & & & -0,037 & & \\ & & & & -0,0385 & \\ & & & & & -0,0385 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} -0,1286 & -0,0055 & 0 & 0,1286 & 0,0055 & 0 \\ 0,0163 & -0,0045 & 0,0045 & 0 & 0 & -0,0163 \end{pmatrix} x(t).$$

1. Entwerfen Sie optimale Zustandsrückführungen für verschiedene Wichtungen der Ein- und Ausgangsgrößen und vergleichen Sie die durch einen geeigneten Anfangszustand angestoßenen Eigenbewegungen an beiden Ausgängen sowie die dabei entstehenden Stelleingriffe miteinander.
2. Wählen Sie eine Wichtung aus und bestimmen Sie für den dazugehörigen LQ-Regler ein Vorfilter, mit dem Sollwertfolge erreicht wird. Stellen Sie die Führungsübergangsfunktionsmatrix grafisch dar.
3. Lässt sich durch Veränderung der Wichtung der Ausgangsgrößen das Führungsverhalten des Regelkreises gegenüber Ihren bisherigen Ergebnissen wesentlich verbessern?
4. Stellen Sie die Ortskurve von $\det F(j\omega)$ grafisch dar und überprüfen Sie die Bedingung (7.30). □

Aufgabe 7.5* Frequenz-Übergabeleistungsregelung eines Elektroenergiesystems

Für das im Beispiel 6.4 auf S. 264 beschriebene Elektroenergienetz ist eine Zustandsrückführung zu entwerfen, die die beschriebenen Güteforderungen erfüllt. Verwenden Sie dabei das Gütefunktional

$$J = \int_0^\infty \left(k^2 f(t)^2 + \sum_{i=1}^3 (p_{ti}^2(t) + x_{ri}^2(t)) + \rho \sum_{i=1}^3 u_i^2(t) \right) dt,$$

durch das die Frequenzabweichung $f(t)$, die Übergabeleistungen $p_{ti}(t)$ sowie die integrierten Regelabweichungen $x_{ri}(t)$ bewertet werden. Dabei ist $k = k_1 + k_2 + k_3 = 3769$ die Leistungszahl des Netzes. Verändern Sie die Wichtung ρ solange, bis die geforderte Regelgüte erreicht ist. (Hinweis: Entwerfen Sie die Zustandsrückführung (6.82) der I-erweiterten Strecke (6.78) und überprüfen Sie die Regelgüte durch Berechnung der Störübergangsfunktion des Regelkreises (6.78) – (6.80), (6.82).) $\square$

Literaturhinweise

Als Einführung in die Optimierung dynamischer Systeme für Ingenieure kann das Lehrbuch [27] von FÖLLINGER sehr empfohlen werden. In diesem Buch wird ausführlich auf das Optimierungsproblem (7.2) eingegangen und der in diesem Kapitel behandelte Optimalregler als Spezialfall abgeleitet. Diese breite Betrachtungsweise ist vor allem dann interessant, wenn der Prozess nicht notwendigerweise durch einen fest eingestellten Regler, sondern z. B. durch den Menschen gesteuert werden soll und die Lösung des Optimierungsproblems dazu dient, Anhaltspunkte für ein zweckmäßiges Vorgehen zu erhalten.

Das Problem, Regler durch Minimierung eines quadratischen Gütefunktionals auszuwählen, wurde von KALMAN Anfang der sechziger Jahre im Zusammenhang mit der Einführung der Zustandsraumbehandlung von Regelungssystemen gestellt und gelöst. Außer in den bekannten Arbeiten [46] und [48] wurde das Problem in sehr vielen Veröffentlichungen untersucht, so dass die um 1970 erschienenen Monografien [5], [6] und [114], die nach wie vor für ein vertieftes Studium empfohlen werden können, bereits eine weitgehend vollständige Theorie enthalten. Eine Übersicht über numerische Verfahren zur Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung wird in [42] gegeben.

Von der Vielzahl der im Laufe der Jahre erschienenen Arbeiten zum Entwurf optimaler Regelungen seien hier nur wenige angeführt. In [94] wurde die Beziehung (7.31) abgeleitet. Die Eigenschaften des Regelkreises bei verschwindender Wichtung der Stellgröße ($\rho \rightarrow 0$) werden u. a. in [37] und [55] unter den Stichworten *asymptotic properties* und *cheap control* untersucht. Auf die Tatsache, dass unterschiedliche Wichtungen zu demselben Regler führen, wird in [52] und [84] verwiesen. Eine Übersicht über Richtlinien zur Wahl der Wichtungsmatrizen im Sinne einer günstigen Gestaltung der Regelkreisdynamik ist in [7] zu finden.

Ausführlich sind in der Literatur die Robustheitseigenschaften des Optimalreglers diskutiert worden. Der Amplituden- und Phasenrand des LQ-Reglers als qualitatives Maß der Robustheit sind für Systeme mit einem Eingang in [5] und für Systeme mit mehreren Eingangsgrößen in [108] beschrieben. Diese im Abschn. 7.3.3 aufgeführten Eigenschaften sind theoretisch sehr interessant, für viele praktische Einsatzfälle aber nicht ausreichend, wie in dem Diskussionsbeitrag [106] hervorgehoben wurde. Deshalb wurden Verfahren erarbeitet, die die robuste Stabilität des Optimalreglers für quantitativ vorgegebene Modellunsicherheiten zu überprüfen gestatten, siehe beispielsweise [59] und [65].

Die notwendige Optimalitätsbedingung für Ausgangsrückführungen wurde erstmals in [60] angegeben. Der im Abschn. 7.6 beschriebene Lösungsalgorithmus stammt aus [31].

Das H^∞ -Optimierungsproblem wurde 1981 von ZAMES in [122] in dem etwas eingeschränkteren Sinne zur Minimierung der Empfindlichkeitsmatrix behandelt und in allgemeinerer Form in [123] gelöst. Die hier angegebene Lösung im Zeitbereich wurde erst viele Jahre später gefunden und von GLOVER und DOYLE in [34] sowie in der häufig zitierten Arbeit [21] veröffentlicht.

8

Beobachterentwurf

Beobachter rekonstruieren den Zustand aus dem Verlauf der Eingangsgrößen und der Ausgangsgrößen. Nach einer Erläuterung des Beobachterproblems werden verschiedene Lösungswege für den Beobachterentwurf behandelt und an Beispielen illustriert. Für die Realisierung von Zustandsrückführungen mit Beobachtern ist das Separationstheorem von fundamentaler Bedeutung, denn es ermöglicht den getrennten Entwurf der Rückführung und des Beobachters. Abschließend werden Parallelen zum Kalmanfilter aufgezeigt.

8.1 Beobachtungsproblem

Die Behandlung von Zustandsrückführungen war aus mehreren Gründen ein zentrales Thema der vorhergehenden Kapitel. Einerseits ermöglichen Zustandsrückführungen eine weitgehend freie Gestaltung der dynamischen Eigenschaften des Regelkreises. So können instabile Systeme stabilisiert und allen Eigenwerten eines vollständig steuerbaren Systems beliebige Werte zugewiesen werden. Andererseits kommt man bei der Zustandsrückführung mit einem proportional wirkenden Regler aus, so dass die Realisierung des Reglergesetzes nur einfache Multiplikationen und Additionen erfordert.

Kritisch ist jedoch die Voraussetzung, dass sämtliche Zustandsvariablen messbar seien. In vielen technischen Anwendungen ist diese Voraussetzung nicht erfüllt. An Stelle des Zustandsvektors $\mathbf{x}$ ist nur ein i. Allg. viel „kürzerer“ Vektor $\mathbf{y}$

von Ausgangsgrößen messbar. Die Gründe dafür sind vielfältig. Einerseits erfordert die kontinuierliche, exakte Bestimmung aller Zustandsvariablen einen hohen messtechnischen Aufwand, den man in vielen Anwendungen nicht eingehen möchte. So kann man bei Dampfgeräten zwar den Frischdampfdruck und die Dampftemperatur messen. Man will aber nicht außerdem die Temperatur im Feuerraum, die Menge des momentan im Feuerungsraum befindlichen Brennstoffes, die Temperatur des Abgases usw. messen, obwohl alle diese Größen als Zustandsvariable im Regelstreckenmodell auftreten.

Andererseits sind bestimmte Zustandsvariable einer messtechnischen Erfassung einfach gar nicht zugänglich. So ist die Biomasseverteilung für das Verhalten des im Beispiel 1.4 beschriebenen Biogasreaktors von entscheidender Bedeutung. Diese Größe erscheint als eine Zustandsvariable im Modell jedes Reaktormoduls. Sie ist allerdings nur unter Zuhilfenahme eines Labors „messbar“ und steht damit nicht kontinuierlich als Messgröße für die Realisierung eines Reglers zur Verfügung.

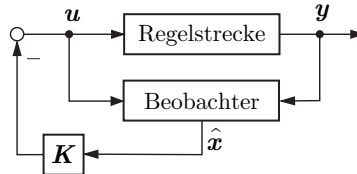


Abb. 8.1: Realisierung einer Zustandsrückführung mit Hilfe eines Zustandsbeobachters

Die Verwendung von Beobachtern, die in diesem Kapitel behandelt werden, stellt einen Ausweg aus dieser Situation dar. Mit dem Beobachter wird ein Schätzwert $\hat{x}(t)$ für den Zustandsvektor $x(t)$ aus dem Verlauf der Stell- und Regelgrößen unter Verwendung des Regelstreckenmodells bestimmt. Die Zustandsrückführung wird dann mit diesem Schätzwert anstelle des tatsächlichen Zustandsvektors realisiert (Abb. 8.1):

$$u(t) = -K \hat{x}(t). \quad (8.1)$$

Für die praktische Anwendung besitzen Beobachter zwei wichtige Eigenschaften. Erstens verhält sich der Regelkreis mit der den Beobachter einschließenden Rückführung (8.1) sehr ähnlich wie der Regelkreis, in dem die Zustandsrückführung mit gemessenen Zustandsvariablen realisiert ist. Zweitens funktioniert diese Regelung auch dann, wenn die Regelstrecke mit Störungen beaufschlagt wird.

Bevor in den nächsten Abschnitten auf das Beobachterprinzip im Einzelnen eingegangen wird, wird das zu lösende Problem noch etwas ausführlicher diskutiert, wobei gleichzeitig auf mathematisch korrekte, in der Praxis aber nicht anwendbare Lösungswege eingegangen und damit das später behandelte, davon abweichende Vorgehen begründet wird.

Informationsgehalt von Messwerten und Messwertfolgen. An einem einfachen Beispiel soll als erstes der Unterschied zwischen den in einer einzelnen Messung $y(t)$ und den im zeitlichen Verlauf $y(\tau)$ ($0 \leq \tau \leq t$) einer Messgröße enthaltenen Informationen verdeutlicht werden. Betrachtet man zunächst ein statisches System wie beispielsweise einen ohmschen Widerstand, so erhält man als Modell eine algebraische Gleichung, die für den Widerstand aus dem ohmschen Gesetz folgt:

$$U(t) = RI(t).$$

Kann man die Spannung messen, so lässt sich aus dem zur Zeit t bestimmten Wert $U(t)$ der zum selben Zeitpunkt durch den Widerstand fließende Strom berechnen:

$$I(t) = \frac{1}{R}U(t).$$

Anders sieht es bei einem dynamischen System wie beispielsweise einem Kondensator aus. Das Modell ist eine Differenzialgleichung

$$I(t) = C \frac{dU(t)}{dt}.$$

Misst man wiederum die momentane Spannung $U(t)$, so kann man daraus den durch den Kondensator fließenden Strom *nicht* bestimmen. Würde man jedoch den zeitlichen Verlauf von $U(t)$ kennen, so könnte man die Ableitung $\frac{dU(t)}{dt}$ und daraus den Strom berechnen.

Für die Rekonstruktion nicht messbarer Größen aus messbaren Größen ist es bei dynamischen Systemen also notwendig, dass man nicht nur den Momentanwert der Messgrößen, sondern auch deren zeitlichen Verlauf kennt. Diese Tatsache wird beim Beobachter ausgenutzt. Obwohl es nicht möglich ist, aus dem Momentanwert der Ausgangsgröße auf den Momentanwert des Zustandes zu schließen, rekonstruiert der Beobachter aus dem Verlauf der Messgröße den Verlauf des Zustandsvektors.

Da der Verlauf einer kontinuierlichen Größe $y(t)$ durch die Ableitungen $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ usw. bestimmt ist, kann im Folgenden die Kenntnis des Verlaufes von y mit der Kenntnis aller Ableitungen gleichgesetzt werden.

Bei zeitdiskreten Systemen (Kap. 10) ist der Verlauf durch eine Folge ($y(T)$, $y(2T)$, $y(3T)$, ...) von Messgrößen zu den Zeitpunkten T , $2T$, $3T$ usw. gegeben und die Bildung der Ableitung nicht möglich. Für diese Systeme ist deshalb der Unterschied zwischen dem Momentanwert einer Messgröße und einer Messwertfolge noch offensichtlicher, weil sich die Folge auf mehrere aufeinanderfolgende Messzeitpunkte bezieht, während sich bei einer kontinuierlichen Betrachtungsweise der Wert sowie die gebildeten Ableitungen auf denselben Zeitpunkt t beziehen. Inhaltlich sind beide Vorgehensweisen jedoch verwandt.

Bestimmung des Zustandsvektors aus dem Modell. Ein sehr einfacher Lösungsweg für das Beobachtungsproblem ist in Abb. 8.2 gezeigt. Man schaltet das Modell der Regelstrecke parallel zum realen Prozess, indem man es mit derselben Eingangsgröße beaufschlagt. Wenn das Modell fehlerfrei ist, so führt es dieselbe erzwungene

Bewegung $y_{\text{erzw}}(t)$ aus wie die Regelstrecke. Unterschiede zwischen $\hat{y}(t)$ und $y(t)$ entstehen nur aufgrund unterschiedlicher Anfangszustände. Wenn jedoch die Regelstrecke stabil ist, so klingt die freie Bewegung ab. Hat man also lange genug gewartet, so gilt sowohl $\hat{y}(t) = y(t)$ als auch $\hat{x}(t) = x(t)$, und man kann den im Modell berechneten Zustandsvektor $\hat{x}(t)$ verwenden, um die Zustandsrückführung (8.1) zu realisieren.

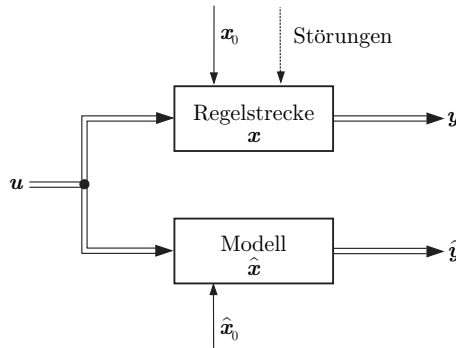


Abb. 8.2: Parallelschaltung von Regelstrecke und Regelstreckenmodell

Für die praktische Anwendung hat die Rekonstruktion des Zustandsvektors auf diese Weise jedoch zwei entscheidende Mängel:

- Die durch unterschiedliche Anfangszustände $\hat{x}_0$ und x_0 verursachte Differenz $x(t) - \hat{x}(t)$ verschwindet asymptotisch nur dann, wenn die Regelstrecke stabil ist. Aus der Zustandsgleichung der Regelstrecke

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0$$

und dem mit $\hat{x}(t)$ anstelle von $x(t)$ aufgeschriebenen Modell erhält man nämlich den Ausdruck

$$x(t) - \hat{x}(t) = e^{At} (x_0 - \hat{x}_0),$$

der nur für eine stabile Matrix A nach null geht. Diese Tatsache ist unabhängig davon, ob die instabile Regelstrecke im Regelkreis durch eine Zustandsrückführung (8.1) stabilisiert wird. In die angegebene Beziehung geht die Systemmatrix der Regelstrecke und nicht die des geschlossenen Kreises ein. Das in Abb. 8.2 gezeigte Vorgehen ist deshalb auf stabile Systeme beschränkt.

- Störgrößen, die auf die Regelstrecke wirken, verändern den Zustand $x(t)$, nicht jedoch den Modellzustand $\hat{x}(t)$. Das in Abb. 8.2 gezeigte Schema ist deshalb nur für ungestörte Regelstrecken anwendbar, also in einem für die Regelungstechnik nicht besonders interessanten Fall.

Aus diesen Gründen wird die Idee, den Zustandsvektor mit Hilfe des Modells aus Messinformationen zu rekonstruieren, im Folgenden zwar weiter verfolgt, die

Struktur, in der der Zustand rekonstruiert wird, jedoch gegenüber der in Abb. 8.2 angegebenen wesentlich verändert.

Aufgabe 8.1* *Berechnung des Zustandes aus den Eingangs- und Ausgangsgrößen*

Zeigen Sie, dass man den Zustand x_0 dadurch aus dem Verlauf der Eingangs- und Ausgangsgrößen berechnen kann, dass man aus dem Modell Gleichungen für x_0 in Abhängigkeit von u und y sowie deren Ableitungen aufstellt. Welche Eigenschaft muss das System besitzen, damit dieser Lösungsweg anwendbar ist? $\square$

8.2 LUENBERGER-Beobachter

8.2.1 Struktur des Beobachters

Die Idee des von DAVID G. LUENBERGER 1964 vorgeschlagenen Beobachters beruht auf der in Abb. 8.2 gezeigten Parallelschaltung des Regelstreckenmodells zur Regelstrecke, erweitert diese Anordnung jedoch um eine Rückführung der Differenz $y(t) - \hat{y}(t)$ auf das Modell (Abb. 8.3). Diese Rückführung soll die Abweichung des Modellausganges $\hat{y}(t)$ vom gemessenen Streckenausgang y nutzen, um den Zustand des Modells dem der Regelstrecke anzugleichen. Hier wird also das Rückführprinzip verwendet, das sich im Regelkreis bestens bewährt hat. Im Regelkreis wird die Abweichung der Regelgröße vom vorgegebenen Sollwert genutzt, um einen Stellgriff zu berechnen, der die Regelabweichung verringert. Wie sich im Folgenden zeigen wird, ist diese Analogie von Beobachtung und Regelung nicht nur die Motivation zur Einführung der im Beobachter enthaltenen Rückführung. Der Entwurf dieser Rückführung kann auch auf den eines Reglers zurückgeführt werden, so dass sich das Beobachtungsproblem mit bekannten Entwurfsverfahren für Zustandsrückführungen lösen lässt.

Der Beobachterentwurf wird im Folgenden für eine nicht sprungfähige Regelstrecke

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (8.2)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (8.3)$$

betrachtet. Für den Beobachter wird dieses Streckenmodell um eine zusätzliche Eingangsgröße u_B erweitert

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A\hat{x}(t) + Bu(t) + u_B(t), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \quad (8.4)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \quad (8.5)$$

und auf diese Eingangsgröße die Differenz zwischen der gemessenen Ausgangsgröße der Regelstrecke und der Ausgangsgröße des Modells zurückgeführt:

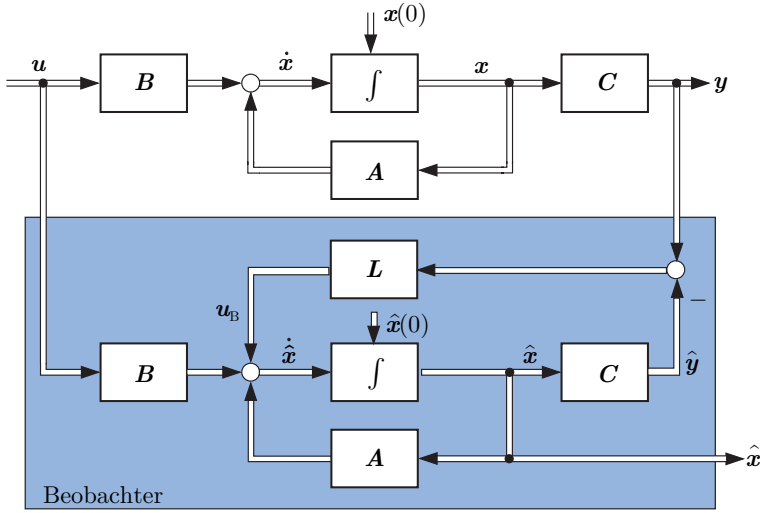


Abb. 8.3: Struktur des Luenbergerbeobachters

$$u_B(t) = L(y(t) - \hat{y}(t)). \quad (8.6)$$

Aus den Gln. (8.3) – (8.6) erhält man die Beziehung

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A\hat{x}(t) + Bu(t) + LC(x(t) - \hat{x}(t)), \quad (8.7)$$

in der die Wirkung der neu eingeführten Rückführung deutlich wird. Solange $\hat{x}(t) = x(t)$ gilt, ist der letzte Summand auf der rechten Seite gleich null und das Modell läuft wie in Abb. 8.2 parallel zum realen Prozess. Tritt eine Differenz zwischen beiden Zustandsvektoren auf, die sich in einer Differenz der Ausgangsgrößen bemerkbar macht, so wird das Verhalten des Modells durch die Rückführung beeinflusst. Die Matrix L muss nun so gewählt werden, dass die Rückführung die Differenz $x(t) - \hat{x}(t)$ verkleinert.

In der praktischen Realisierung kennt man $x(t)$ nicht. Statt dessen ist der Ausgangsvektor $y(t)$ ein Eingang des Beobachters. Der Beobachter ist folglich ein dynamisches System mit den Eingängen $u(t)$ und $y(t)$ (vgl. Abb. 8.3):

Beobachter: $\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t).$

(8.8)

Die folgenden Untersuchungen zeigen, unter welchen Bedingungen der Beobachter seine Aufgabe erfüllt, d. h., unter welchen Bedingungen $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$ gilt.

8.2.2 Konvergenz des Beobachters

Um eine geeignete Matrix L zu finden, wird der Beobachtungsfehler

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (8.9)$$

eingeführt. Mit Hilfe der Gleichungen für das Modell und den Beobachter erhält man für diesen Fehler die Differenzialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \frac{d}{dt}(x(t) - \hat{x}(t)) \\ &= Ax(t) + Bu(t) - A\hat{x}(t) - B\hat{u}(t) - LC(x(t) - \hat{x}(t)) \\ &= (A - LC)(x(t) - \hat{x}(t)) \end{aligned}$$

und daraus

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t), \quad e(0) = x_0 - \hat{x}_0. \quad (8.10)$$

Der Beobachtungsfehler kann also als Zustand eines nicht steuerbaren Systems gedeutet werden. Ist dieses System asymptotisch stabil, so klingt der Beobachtungsfehler ab, d. h., der Zustand des Beobachters nähert sich dem des Prozesses.

Satz 8.1 (Beobachter)

Für den Beobachtungsfehler

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

eines Luenbergerbeobachters gilt die Beziehung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$$

für beliebige Anfangszustände des Systems und des Beobachters genau dann, wenn alle Eigenwerte der Matrix $(A - LC)$ negativen Realteil haben.

8.2.3 Wahl der Rückführmatrix L

Da die Matrix $(A - LC)$ dieselben Eigenwerte besitzt wie die transponierte Matrix

$$(A - LC)' = A' - C'L',$$

kann die Aufgabe, die Rückführmatrix L so zu wählen, dass $(A - LC)$ stabil ist, in ein Entwurfsproblem für Zustandsrückführungen überführt werden. Die angegebene transponierte Matrix ist nämlich gerade die Systemmatrix eines Regelkreises, der aus dem „dualen System“

$$\dot{\mathbf{x}}_T(t) = \mathbf{A}' \mathbf{x}_T(t) + \mathbf{C}' \mathbf{u}_T(t) \quad (8.11)$$

(vgl. Gl. (3.39) auf S. 101) und der Zustandsrückführung

$$\mathbf{u}_T(t) = -\mathbf{L}' \mathbf{x}_T(t) \quad (8.12)$$

besteht. Die Matrix $\mathbf{L}$ muss so gewählt werden, dass das System (8.11), (8.12) ausschließlich Eigenwerte mit negativem Realteil hat. Da das Entwurfsproblem sich auf das duale System bezieht, spricht man auch vom dualen Entwurfsproblem.

Diese Analogie zum Entwurf von Zustandsrückführungen offenbart zwei wichtige Tatsachen:

- Die Eigenwerte der Matrix $(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})$ können durch eine geeignete Wahl von $\mathbf{L}$ genau dann beliebig verschoben werden, wenn das System $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ vollständig beobachtbar ist. Dann ist nämlich das Paar $(\mathbf{A}', \mathbf{C}')$ vollständig steuerbar, und die Matrix $\mathbf{L}'$ kann mit bekannten Entwurfsverfahren für Zustandsrückführungen entworfen werden.
- Damit der Beobachtungsfehler schneller abklingt als das Übergangsverhalten des zu beobachtenden Systems, müssen die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}$ möglichst weit links in der komplexen Ebene platziert werden. Aus den Untersuchungen zur Polverschiebung ist andererseits bekannt, dass die Reglerverstärkung umso größer wird, je weiter die Eigenwerte verschoben werden. Man wählt die Matrix $\mathbf{L}$ deshalb zweckmäßigerweise so, dass die Eigenwerte von $\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}$ links der dominierenden Eigenwerte von $\mathbf{A}$ liegen.

Wenn mit dem Beobachter eine Zustandsrückführung $\mathbf{K}$ realisiert werden soll, so wählt man die Beobachtereigenwerte nicht im Vergleich zu denen der Matrix $\mathbf{A}$, sondern in Bezug auf die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$, wie später noch ausführlich begründet wird.

8.2.4 Berechnung des Beobachters aus der Beobachtungsnormalform

Auf eine besonders einfache Berechnungsvorschrift kommt man, wenn die Regelstrecke nur eine Stellgröße hat und das Modell in Beobachtungsnormalform (I-5.76) – (I-5.79) vorliegt:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_B(t) &= \mathbf{A}_B \mathbf{x}_B(t) + \mathbf{b}_B u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}_B' \mathbf{x}_B(t) \end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{c}_B' = (0 \ 0 \ \dots \ 1). \quad (8.13)$$

Die Rückführung des Beobachters, die durch den Vektor

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$$

beschrieben ist, muss dann so gewählt werden, dass die Matrix

$$\mathbf{A}'_{\text{B}} - \mathbf{c}_{\text{B}}\mathbf{l}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 - l_1 & -a_1 - l_2 & -a_2 - l_3 & \cdots & -a_{n-1} - l_n \end{pmatrix}$$

die vorgegebenen Beobachtereigenwerte $\lambda_{\text{B}i}$ ($i = 1, \dots, n$) aufweist. Bestimmt man aus den vorgegebenen Eigenwerten $\lambda_{\text{B}i}$ die Koeffizienten $a_{\text{B}i}$ des zugehörigen charakteristischen Polynoms, so kann man den Vektor $\mathbf{l}$ in Analogie zu Gl. (6.17) auf S. 237 wie folgt bestimmen:

Beobachterrückführung:

$$\mathbf{l}' = (a_{\text{B}0}, a_{\text{B}1}, \dots, a_{\text{B},n-1}) - (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}).$$

(8.14)

Diese einfache Berechnungsvorschrift ist der Grund für die Wahl des Begriffes Beobachtungsnormalform für Modelle mit der Systemmatrix und dem Ausgabevektor aus Gl. (8.13).

8.2.5 Störverhalten des Beobachters

Störungen auf die Regelstrecke schlagen sich im Beobachtungsergebnis nieder, weil sie über die Beobachterrückführung den Beobachterzustand $\hat{\mathbf{x}}(t)$ beeinflussen. Um dies zu untersuchen, wird das Modell (8.2), (8.3) um einen Summanden für die Störung erweitert:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{d}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (8.15)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \quad (8.16)$$

Anstelle von Gl. (8.10) erhält man jetzt die Beziehung

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e}(t) + \mathbf{E}\mathbf{d}(t), \quad \mathbf{e}(0) = \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0, \quad (8.17)$$

die ein durch die Störung $\mathbf{d}(t)$ erregtes System darstellt. Ob der Beobachtungsfehler $\mathbf{e}(t)$ auch für das gestörte System asymptotisch verschwindet, hängt vom Charakter der Störungen ab.

Impulsförmige Störungen. Die Wirkung impulsförmiger Störungen $d(t) = \bar{d}\delta(t)$ kann entsprechend Gl. (2.50) als eine Änderung des Anfangszustandes x_0 des Systems (8.15), (8.16) um den Wert $E\bar{d}$ interpretiert werden. Deshalb gilt die Fehlergleichung (8.10) mit verändertem Anfangszustand $e(0)$ weiterhin und auch die Aussage von Satz 8.1 bleibt bestehen.

Dies gilt auch, wenn die Störung nicht zum Zeitpunkt $t = 0$, sondern zu einem späteren Zeitpunkt $t = t_0$ auftritt. Die Wirkung der Störung macht sich dann in einer sprungförmigen Veränderung des Beobachtungsfehlers vom alten Wert $e(t_0)$ auf den neuen Wert $e(t_0) + E\bar{d}$ bemerkbar, von dem aus der Beobachtungsfehler anschließend wieder abklingt. In diesem Sinne toleriert der Beobachter also impulsförmige Störungen, ohne dass man weitere Vorkehrungen treffen müsste.

Sprungförmige Störungen. Bleibende Störungen $d(t) = \bar{d}\sigma(t)$ führen zu einer konstanten Eingangsgröße in der Fehlergleichung

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) + E\bar{d}, \quad e(0) = x_0 - \hat{x}_0,$$

die einen bleibenden Beobachtungsfehler

$$e(\infty) = -(A - LC)^{-1}E\bar{d}$$

hervorrufen. Man kann diesen Fehler nicht messen, allerdings den dadurch hervorgerufenen Fehler $y(\infty) - \hat{y}(\infty)$, für den die Beziehung

$$y(\infty) - \hat{y}(\infty) = Ce(\infty) = -C(A - LC)^{-1}E\bar{d}$$

gilt. Wenn man genauso viele Ausgangsgrößen wie Störgrößen hat, kann man den bleibenden Wert $y(\infty) - \hat{y}(\infty)$ der Beobachterrückführung sogar nutzen, um die Störampplitude $\bar{d}$ zu berechnen:

$$\bar{d} = -(C(A - LC)^{-1}E)^{-1}(y(\infty) - \hat{y}(\infty)).$$

Stochastische Störungen. Störungen, die sich stochastisch um den Mittelwert null verändern, stellen eine ständige Erregung für den Beobachter dar, die sich in einer entsprechenden Erregung der Fehlergleichung niederschlägt. Dies soll hier für ein Messrauschen $r(t)$ untersucht werden, das den Messwert der Ausgangsgröße additiv verfälscht, so dass jetzt

$$y(t) = Cx(t) + r(t)$$

gilt. Anstelle von Gl. (8.10) erhält man für den Beobachtungsfehler $e(t)$ damit die Beziehung

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) + Lr(t), \quad e(0) = x_0 - \hat{x}_0.$$

Wiederum tritt die Störung als Eingangssignal der Fehlergleichung auf. Wichtig ist jedoch, dass die Beobachterrückführung L jetzt als Eingangsmatrix dieses Systems wirkt (Abb. 8.4).

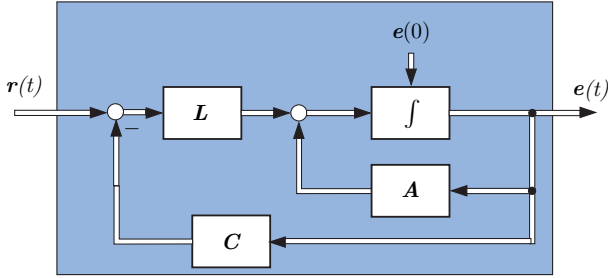


Abb. 8.4: Darstellung der Fehlergleichung als Strukturbild

Das Strukturbild zeigt zwei wichtige Eigenschaften des Beobachters. Erstens wirkt der Beobachter wie ein Filter, das das Messrauschen dämpft und bei geeigneter Wahl der Beobachtereigenwerte und damit des Frequenzganges so stark unterdrückt, dass sich das Rauschen nicht spürbar im Beobachtungsfehler zeigt. Der Beobachtungsfehler klingt dann (fast) asymptotisch ab.

Zweitens zeigt die Abbildung, dass das Messrauschen mit einer von der Rückführmatrix L abhängigen Verstärkung auf den Beobachtungsfehler wirkt. Je größer also der Unterschied zwischen den Eigenwerten der Systemmatrix A der Regelstrecke und der Matrix $A - LC$ des Beobachters gewählt wird, umso größer sind die Elemente der Matrix L und umso stärker wirkt das Messrauschen auf den Beobachtungsfehler. Diese Tendenz wird im Beispiel 8.1 gezeigt. Sie weist darauf hin, dass man den Beobachter unter Störungen nicht beliebig schnell machen kann.

8.3 Realisierung einer Zustandsrückführung mit Hilfe eines Beobachters

8.3.1 Beschreibung des Regelkreises

Der Beobachter wird jetzt verwendet, um eine Zustandsrückführung zu realisieren, ohne den Zustandsvektor zu messen. An Stelle des Reglergesetzes

$$u(t) = -Kx(t) + Vw(t) \quad (8.18)$$

wird mit der Rückführung

$$u(t) = -K\hat{x}(t) + Vw(t) \quad (8.19)$$

gearbeitet, die man verwenden kann, wenn man $\hat{x}(t)$ mit Hilfe eines Beobachters ermittelt. Der Beobachter und die Rückführung (8.19) bilden einen dynamischen Regler, der das Modell der Regelstrecke enthält (Abb. 8.5).

Das Reglergesetz erhält man, wenn man die Gleichung (8.8) für den Beobachter

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t)$$

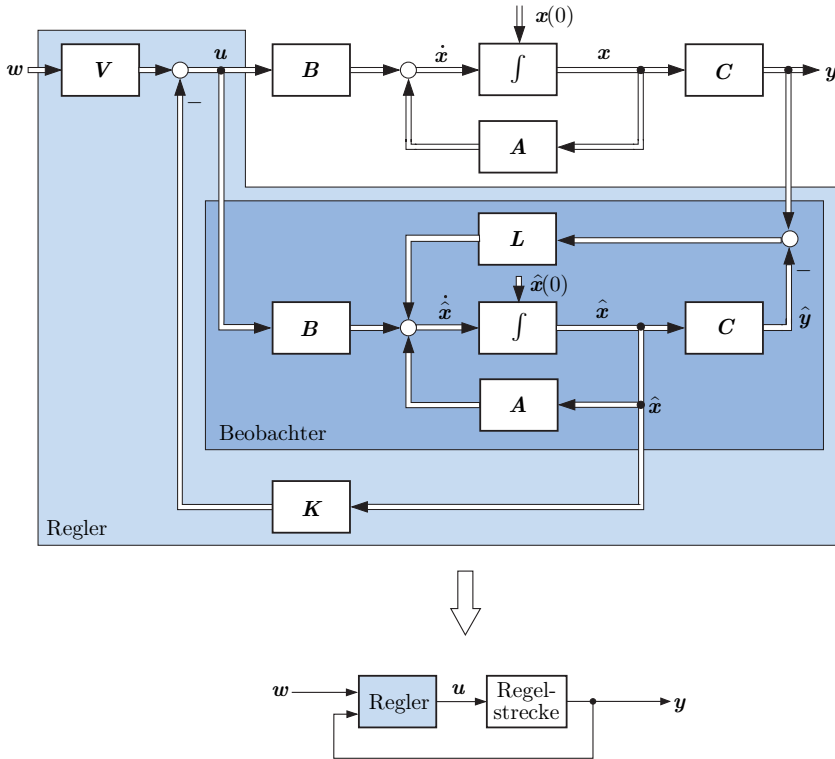


Abb. 8.5: Realisierung einer Zustandsrückführung unter Verwendung eines Beobachters

mit der Rückführung (8.19) kombiniert. Dies führt auf die Beziehung

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = (A - BK - LC)\hat{x}(t) + Ly(t) + BVw(t) \quad (8.20)$$

$$u(t) = -K\hat{x}(t) + Vw(t), \quad (8.21)$$

die zeigt, dass der zu realisierende dynamische Regler mit $y(t)$ und $w(t)$ zwei getrennte Eingänge erhält und die Stellgröße $u(t)$ als Ausgang erzeugt. Bei diesem Regler wird, wie auch bei Zustandsrückführungen, keine Regelabweichung $e(t) = w(t) - y(t)$ gebildet, sondern die beiden Signale sind getrennte Eingangsgrößen des Reglers.

8.3.2 Separationstheorem

Für die praktische Anwendung der mit Hilfe eines Beobachters realisierten Zustandsrückführung erhebt sich die Frage, ob bei Verwendung des Reglers (8.20), (8.21)

dieselbe Rückführmatrix K verwendet werden kann wie bei der „richtigen“ Zustandsrückführung (8.18). Das „Ja“, mit dem man diese Frage beantworten kann, muss etwas ausführlicher begründet werden, denn es beruht nicht auf der Annahme, dass bei einem guten Beobachter die Näherung $\hat{x}(t) \approx x(t)$ gilt und folglich mit den beiden Reglern (8.18) und (8.19) dieselben Stellgrößen berechnet werden. Die folgende Analyse wird zeigen, dass sich $\hat{x}(t)$ und $x(t)$ sogar erheblich voneinander unterscheiden können, ohne dass die Stabilität des Regelkreises gefährdet ist.

Eine für diese Analyse zweckmäßige Darstellung des Regelkreises erhält man aus den Gln. (8.2), (8.3), (8.9) und (8.10) sowie der Reglergleichung (8.19), deren Kombination die Beziehungen

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BK & BK \\ O & A - LC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} BV \\ O \end{pmatrix} w(t) \quad (8.22)$$

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ e(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0 - \hat{x}_0 \end{pmatrix}$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} C & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix} \quad (8.23)$$

ergibt. Dieses Modell hat erwartungsgemäß die dynamische Ordnung $2n$. Es enthält anstelle der beiden Zustände $x(t)$ und $\hat{x}(t)$ der Regelstrecke und des Beobachters die Zustände x und e . Das hat den Vorteil, dass man das gewünschte Ergebnis sofort aus dem angegebenen Modell ablesen kann: Da die angegebene Systemmatrix eine Blockdreiecksmatrix ist, setzen sich ihre Eigenwerte aus denen der Matrizen $A - BK$ und $A - LC$ zusammen. Der Beobachter verändert also die Eigenwerte des zustandsrückgeführten Systems *nicht*. Damit ist die Stabilität des entstehenden Regelkreises gesichert, wenn man die Beobachtereigenwerte und die Eigenwerte der zustandsrückgeführten Regelstrecke zweckmäßig wählt. Insbesondere ist die Stabilität nicht vom Beobachtungsfehler $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ abhängig. Dieses wichtige Ergebnis ist im folgenden Satz zusammengefasst.

Satz 8.2 (Separationstheorem)

Die Eigenwerte des Regelkreises, in dem eine Zustandsrückführung mit einem Beobachter realisiert ist, setzen sich aus den Eigenwerten der Matrix $A - BK$, die einen Regelkreis mit Zustandsrückführung und ohne Beobachter beschreibt, und den Eigenwerten der Systemmatrix $A - LC$ des Beobachters zusammen.

Man kann deshalb die Zustandsrückführung vollkommen unabhängig davon entwerfen, ob sie mit oder ohne Beobachter realisiert wird. Wenn die Strecke vollständig steuerbar ist, kann man dabei die n Eigenwerte von $A - BK$ beliebig festlegen. Unabhängig davon kann man einen Beobachter entwerfen und dessen n Eigenwerte beliebig platzieren, wenn die Regelstrecke vollständig beobachtbar ist. Realisiert man dann die Zustandsrückführung mit Hilfe des Beobachters, so hat der Regelkreis die in den getrennten Entwurfsschritten festgelegten $2n$ Eigenwerte.

Aus dem Separationstheorem ist auch ersichtlich, dass die Eigenwerte eines Beobachters, der zusammen mit einer Zustandsrückführung betrieben wird, nicht in Bezug auf die Eigenwerte der Regelstrecke, sondern in Relation zu den Eigenwerten der Systemmatrix $A - BK$ des Zustandsrückgeführten Systems gewählt werden müssen.

Regelkreis mit Beobachter. Der Regelkreis, der aus der Strecke (8.2), (8.3), dem Beobachter (8.8) und der Zustandsrückführung (8.19) besteht, ist durch die Gln. (8.22), (8.23) beschrieben. Auf Grund der Struktur der in Gl. (8.22) stehenden Matrizen wird offensichtlich, dass die Beobachtereigenwerte nicht durch die Führungsgröße $w(t)$ steuerbar sind. Diese Eigenwerte erscheinen deshalb nicht als Pole in der Übertragungsfunktionsmatrix des Regelkreises. Wie man unter Verwendung der Beziehung (A2.39) für die Inverse einer Blockdreiecksmatrix ausrechnen kann, gilt

$$G_w(s) = C(sI - (A - BK))^{-1}BV. \quad (8.24)$$

Das E/A-Verhalten des Regelkreises mit Beobachter stimmt also mit dem des Regelkreises mit Zustandsrückführung überein. Der Beobachter hat darauf keinen Einfluss! Insbesondere sind die Pole des Regelkreises gleich den Eigenwerten von $A - BK$. Die erzwungene Bewegung, also sowohl das stationäre Verhalten als auch das Übergangsverhalten des Regelkreises, sind unabhängig davon, ob die Zustandsrückführung mit oder ohne Beobachter realisiert wird.

Dieses auf den ersten Blick verblüffende Ergebnis entsteht dadurch, dass die Betrachtung des E/A-Verhaltens des Regelkreises voraussetzt, dass der Regelkreis eine verschwindende Anfangsauslenkung hat. Das heißt hier: $x_0 = 0$, $\hat{x}_0 = 0$. Unter dieser Bedingung gilt $\tilde{x}(t) = x(t)$ für alle Zeitpunkte $t > 0$. Deshalb kann man bei Betrachtung des E/A-Verhaltens einem Regelkreis nicht ansehen, ob er einen Beobachter enthält.

Die Unterschiede liegen in den freien Bewegungen, die bei den beiden Realisierungsarten der Zustandsrückführung unterschiedlich sind, wenn der Anfangszustand des Beobachters nicht mit dem der Regelstrecke übereinstimmt ($\hat{x}_0 \neq x_0$), wie es i. Allg. der Fall ist.

8.3.3 Entwurfsverfahren

Entwurf einer Zustandsrückführung, die mit Beobachter realisiert wird. Eine Zustandsrückführung, die unter Verwendung eines Beobachters realisiert werden soll, kann in folgenden Schritten entworfen werden.

Entwurfsverfahren 8.1 *Entwurf einer Zustandsrückführung und eines Beobachters*

Gegeben: Regelstrecke (A, B, C) , Güteforderungen

1. Es wird überprüft, dass die Regelstrecke vollständig steuerbar und beobachtbar ist.
2. Mit bekannten Verfahren wird eine Zustandsrückführung

$$u(t) = -Kx(t) + Vw(t)$$

entworfen, mit der die an den Regelkreis gestellten Güteforderungen erfüllt sind (vgl. z. B. die Algorithmen 6.1 auf S. 239 und 7.1 auf S. 301).

3. Anhand der Eigenwerte der Matrix $A - BK$ werden die Beobachtereigenwerte festgelegt.
4. Mit einem Verfahren zur Polverschiebung wird für die vorgegebenen Beobachtereigenwerte die Rückführmatrix L entworfen. Dabei wird z. B. das Entwurfsverfahren 6.1 auf S. 239 auf das duale System mit den Matrizen A' und B' angewendet, um L' zu berechnen.
5. Das Verhalten des geschlossenen Kreises wird anhand von Simulationsuntersuchungen bewertet.

Ergebnis: Zustandsrückführung, Beobachter.

In den Schritten 2 und 4 können beliebige Verfahren für den Entwurf von Zustandsrückführungen eingesetzt werden, also beispielsweise der Optimalreglerentwurf. Für den Beobachter eignen sich allerdings die Verfahren der Polverschiebung am besten.

Wenn das Verhalten des geregelten Systems die gestellten Güteforderungen nicht erfüllt, so kann dies einerseits an der entworfenen Zustandsrückführung, andererseits am Beobachter liegen. Erfüllt die Zustandsrückführung die gestellten Forderungen, so muss der Beobachter gegebenenfalls schneller gemacht werden, so dass sich das Verhalten des Regelkreises mit Beobachter dem des Regelkreises ohne Beobachter angleicht.

Wahl der Beobachtereigenwerte. Die Eigenwerte λ_{Bi} ($i = 1, \dots, n$) der Matrix $A - LC$ können relativ frei gewählt werden, wobei Werte möglichst weit in der linken komplexen Halbebene günstig sind, weil für diese Werte der Fehler e nach Gl. (8.10) schnell verschwindet. Die bei der Wahl der Eigenwerte eines Regelkreises zu beachtende Beschränkung, dass große Verschiebungen der Streckeneigenwerte i. Allg. große Stellamplituden erfordern, spielt hier keine Rolle, da der Beobachter durch einen Rechner realisiert wird, so dass das im Beobachter (8.4) auftretende Rückführsignal u_B nahezu beliebige Werte annehmen kann. Beschränkend wirkt lediglich das bisher nicht betrachtete Messrauschen r , das in die Ausgangsbeziehung

$$y(t) = Cx(t) + r(t)$$

einght. An Stelle der Fehlergleichung (8.10) erhält man bei Berücksichtigung des Messfehlers die Beziehung

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) - Lr(t), \quad (8.25)$$

in die das Messrauschen über die Rückführmatrix L eingeht. Liegen die Eigenwerte λ_{Bi} weit von den Streckeneigenwerten λ_i entfernt und ist folglich eine große „Verstärkung“ L notwendig, so beeinflusst das Messrauschen den Beobachtungsfehler sehr stark. Werden andererseits die Beobachtereigenwerte nicht zu weit links von den Streckeneigenwerten gewählt, so ist L klein. Dann beeinflusst das Messrauschen den Beobachtungsfehler nicht sehr stark, aber es dauert länger, bis der durch einen falschen Beobachteranfangszustand bzw. durch Impulsstörungen hervorgerufene Beobachtungsfehler abgebaut ist.

Um einen guten Kompromiss zu finden, kann man folgende Richtlinie anwenden:

Man wählt die Beobachtereigenwerte λ_{Bi} so aus, dass sie in der linken komplexen Halbebene deutlich links von den Eigenwerten der Regelstrecke bzw. des geschlossenen Kreises liegen. Der Betrag der Realteile soll 2 bis 6 mal so groß sein wie der Betrag der Realteile der dominierenden Eigenwerte, wobei der kleinere Faktor für großes Messrauschen gilt.

Bei dieser Wahl klingen die Eigenvorgänge des Beobachters zwei- bis sechsmal so schnell ab wie die Eigenvorgänge der Strecke bzw. des Regelkreises. Die durch die Zustandsrückführung erzeugten Eigenwerte der Matrix $A - BK$ sind deshalb für das Regelkreisverhalten mit Beobachter maßgebend.

Beispiel 8.1 Beobachter für ein invertiertes Pendel

Für das invertierte Pendel aus Beispiel 3.9 soll ein Beobachter entworfen werden, wenn die Wagenposition $x_1 = x$ und der Winkel $x_2 = \phi$ messbar sind. Das Zustandsraummodell heißt

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0,88 & -1,9 & 0,0056 \\ 0 & 21,5 & 3,9 & -0,14 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,3 \\ -0,62 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t). \end{aligned}$$

Das Pendel ist instabil und hat Eigenwerte bei $0 \frac{1}{s}$, $4,51 \frac{1}{s}$, $-1,7 \frac{1}{s}$ und $-4,84 \frac{1}{s}$. Für den Beobachter werden deshalb die Eigenwerte $-2 \frac{1}{s}$, $-3 \frac{1}{s}$, $-4 \frac{1}{s}$ und $-5 \frac{1}{s}$ festgelegt. Dafür erhält man die Beobachterrückführung

$$L = \begin{pmatrix} 4,52 & -0,237 \\ 0,95 & 7,437 \\ 0,945 & -1,188 \\ 6,45 & 33,05 \end{pmatrix}$$

und mit dieser den Beobachter

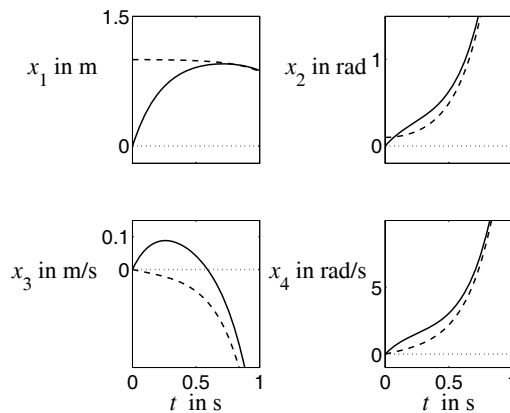


Abb. 8.6: Eigenbewegung des Pendels - und des Beobachters -

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -4,523 & 0,237 & 1 & 0 \\ -0,95 & -7,4368 & 0 & 1 \\ -0,945 & 0,3078 & -1,9 & 0,0056 \\ -6,45 & -11,549 & 3,9 & -0,14 \end{pmatrix} \hat{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,3 \\ -0,62 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 4,52 & -0,237 \\ 0,95 & 7,437 \\ 0,945 & -1,188 \\ 6,45 & 33,05 \end{pmatrix} y$$

Abbildung 8.6 zeigt die Eigenbewegung des Pendels und des Beobachters, wobei sich zum Zeitpunkt $t = 0$ s der Beobachter in der Ruhelage $\hat{x}_0 = \mathbf{0}$ und das Pendel in der Anfangslage

$$x_0 = (1 \ 0,1 \ 0 \ 0)'$$

befand, bei der der Wagen 1 m von der Nulllage entfernt steht und das Pendel etwa 6° von der senkrechten Lage abweicht. Die Abbildung zeigt, dass sich die Zustände des Beobachters sehr schnell denen des Pendels nähern, wobei bereits nach 0,5 Sekunden eine sehr gute Übereinstimmung besteht. Der Beobachter rekonstruiert die Zustände des umfallenden Pendels also so schnell, dass eine Regelung noch Zeit genug hat, das Pendel wieder aufzurichten. Für die Regelung ist dabei nicht in erster Linie der genaue Wert, sondern das Vorzeichen und die Größenordnung der Zustandsvariablen wichtig. Das werden spätere Untersuchungen noch zeigen.

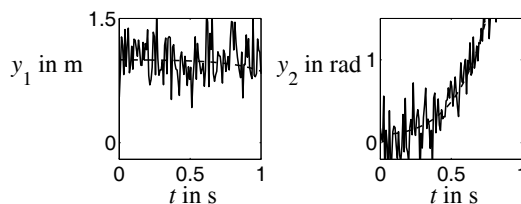


Abb. 8.7: Gestörte Messgrößen

Es wird jetzt das Verhalten des Beobachters bei Messstörungen untersucht, die auf die in Abb. 8.7 gezeigten Messwertfolgen führen.

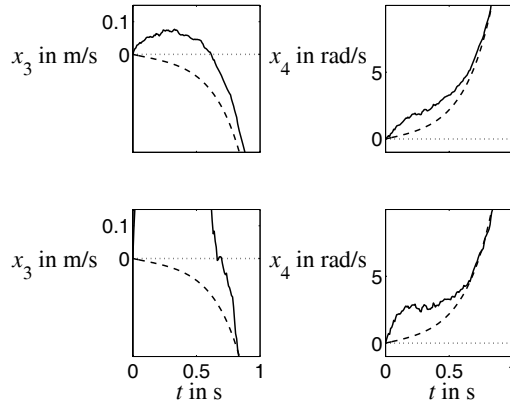


Abb. 8.8: Beobachtungsergebnis bei stochastisch gestörter Messung

Das Beobachtungsergebnis ist in Abb. 8.8 für zwei verschiedene Beobachter gezeigt. Die beiden oberen Abbildung gehören zu dem beschriebenen Beobachter, die beiden unteren zu einem Beobachter mit den Eigenwerten $-4 \frac{1}{s}$, $-5 \frac{1}{s}$, $-6 \frac{1}{s}$ und $-7 \frac{1}{s}$. Es ist zu sehen, dass sich die Messstörung aufgrund der vergrößerten Werte in der Rückführmatrix L beim zweiten Beobachter wesentlich stärker auf das Beobachtungsergebnis auswirkt als beim ersten Beobachter.

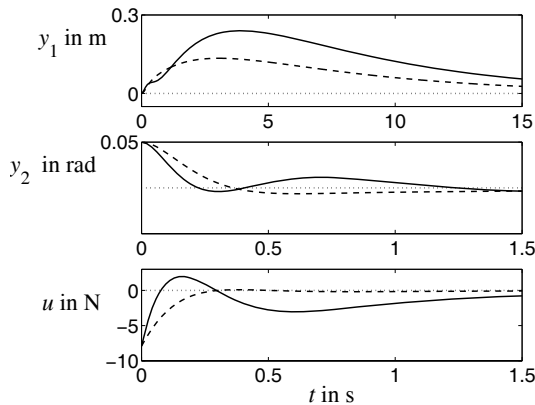


Abb. 8.9: Eigenbewegung des geregelten Pendels ohne - - und mit - Beobachter

Mit dem Beobachter wird jetzt die im Beispiel 7.3 entworfene Zustandsrückführung (7.37) realisiert. Die Eigenbewegung des Regelkreises ist in Abb. 8.9 zu sehen, wobei die Bewegung des Beobachters in der Ruhelage beginnt und die Regelstrecke die im Beispiel 7.3 verwendete Anfangslage

$$\mathbf{x}_0 = (0 \ 0,5 \ 0 \ 0)'$$

besitzt. Die gestrichelte Linie beschreibt das Verhalten des Regelkreises mit Zustandsrückführung, die durchgezogene Linie den Regelkreis mit Beobachter und Regler.

Die jeweils zwei Kurven sind für die beiden Ausgangsgrößen Wagenposition $y_1(t) = x(t)$ und Winkel $y_2(t) = \phi(t)$ sowie für die Stellgröße $u(t)$ ähnlich. Bei dem mit dem Beobachter realisierten Regler fährt der Wagen weiter aus der Nulllage heraus, wobei das Pendel schneller aufgerichtet wird. In Bezug auf das Regelungsziel, das Pendel möglichst schnell zu stabilisieren, ist die Regelgüte bei Verwendung des Beobachters also nur bezüglich der Wagenbewegung schlechter.

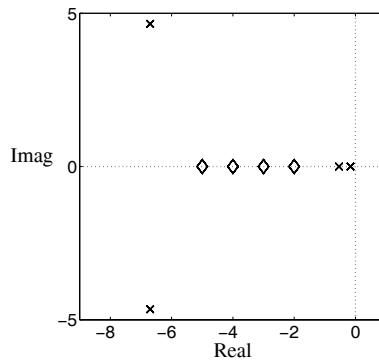


Abb. 8.10: Eigenwerte des Regelkreises mit Beobachter

Abbildung 8.10 zeigt die Lage der Eigenwerte des Regelkreises mit Beobachter. Entsprechend dem Separationstheorem gehören die durch $\diamond$ dargestellten Eigenwerte bei $-2 \frac{1}{s}$, $-3 \frac{1}{s}$, $-4 \frac{1}{s}$ und $-5 \frac{1}{s}$ zum Beobachter, während die anderen vier Eigenwerte die des mit dem Optimalregler rückgeführten Pendels sind. Die Beobachtereigenwerte liegen deutlich links von den beiden dominierenden Eigenwerten. Das konjugiert komplexe Eigenwertpaar, das links von den Beobachtereigenwerten liegt, hat auf die Dynamik keinen wesentlichen Einfluss, da die zu ihnen gehörenden Eigenbewegungen sehr schnell abklingen.

Es soll abschließend untersucht werden, ob die Regelgüte verbessert werden kann, wenn man die Beobachtereigenwerte weiter nach links schiebt, beispielsweise auf die Werte $-4 \frac{1}{s}$, $-5 \frac{1}{s}$, $-6 \frac{1}{s}$ und $-7 \frac{1}{s}$. Die Eigenbewegung des neuen Regelkreises ist in Abb. 8.11 zu sehen. Die das Verhalten des Regelkreises bei großen Zeiten bestimmende Wagenposition y_1 verändert sich kaum. Die Stellgröße hat einen anderen Verlauf, so dass sich auch der Winkel auf einer anderen Trajektorie dem gewünschten Wert null nähert. Bezüglich der Regelungsaufgabe, das Pendel zu stabilisieren, hat sich das Regelkreisverhalten nicht wesentlich verändert. Der erste (langsamere) Beobachter ist also vollkommen ausreichend für die Lösung der hier betrachteten Aufgabe, zumal sich beim zweiten Beobachter nicht nur das Beobachtungsergebnis, sondern auch die Regelgüte wesentlich verschlechtert, wenn wie oben gezeigt stochastische Messstörungen auftreten.

Diskussion. Das Beispiel zeigt, dass ein Beobachter auch für instabile Systeme eingesetzt werden kann. Der Beobachter rekonstruiert die Zustände der instabilen Strecke schnell und führt deshalb nicht nur zu einem „theoretisch“ stabilen Regelkreis, sondern zu einem Regel-

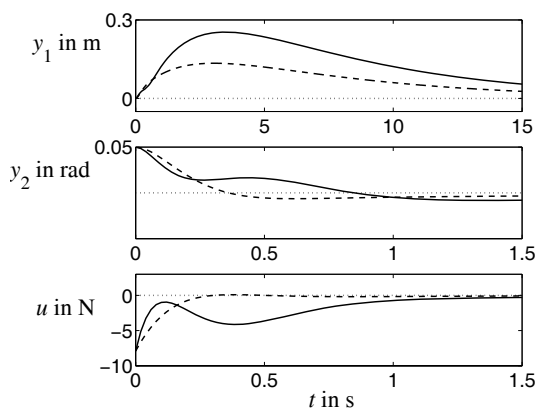


Abb. 8.11: Eigenbewegung des geregelten Pendels ohne - - und mit – Beobachter bei veränderten Beobachtereigenwerten

kreis, dessen Dynamikeigenschaften denen des zustandsrückgeführten Systems sehr nahe kommen. $\square$

Aufgabe 8.2* Entwurf eines Luenbergerbeobachters

Gegeben ist das Modell der Regelstrecke in Beobachtungsnormform

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y(t) &= (0 \quad 1) \mathbf{x}(t).\end{aligned}$$

1. Kann für dieses System ein Beobachter entworfen werden?
 2. Wählen Sie geeignete Beobachtereigenwerte.
 3. Bestimmen Sie einen Beobachter, mit dem der Zustand $\mathbf{x}$ rekonstruiert werden kann.
- $\square$

Aufgabe 8.3 Störverhalten des Regelkreises mit Beobachter

Das Führungsverhalten eines Regelkreises ist unabhängig davon, ob eine Zustandsrückführung mit oder ohne Beobachter realisiert ist (vgl. Gl. (8.24)). Untersuchen Sie, ob diese Aussage auch auf das Störverhalten zutrifft. $\square$

8.4 Reduzierter Beobachter

Beispiel 8.1 zeigt, dass mit dem bisher verwendeten Beobachter eigentlich zuviel getan wird. In dem Beispiel konnten nämlich die beiden Zustandsvariablen $x_1(t)$ und $x_2(t)$, die die Wagenposition und den Pendelwinkel darstellen, direkt gemessen werden. Nichtsdestotrotz wurden sie durch den verwendeten Beobachter auch rekonstruiert. Bei der Realisierung der Zustandsrückführung mit Hilfe des Beobachters in der zuvor beschriebenen Weise wurden dann die Schätzwerte $\hat{x}_1(t)$ und $\hat{x}_2(t)$ anstelle der bekannten exakten Werte für die Regelung verwendet. Es stellt sich deshalb die Frage, ob die in den Messgrößen enthaltenen Informationen über den Zustandsvektor nicht ausgenutzt werden können, um weniger Zustandsvariable zu beobachten und dabei auch die Ordnung des Beobachters zu reduzieren.

Diese Überlegungen können auch dann durchgeführt werden, wenn der Messvektor $\mathbf{y}(t)$ aus der Ausgabegleichung

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

mit beliebiger Matrix $\mathbf{C}$ entsteht, also nicht von vornherein einen Teil des Zustandsvektors darstellt. Da die Matrix $\mathbf{C}$ nach Voraussetzung den Rang r hat, kann man r linear unabhängige Spalten finden, die man durch Umnummerierung der Zustandsvariablen in der Matrix $\mathbf{C}$ „vorn“ anordnen kann, so dass die Ausgabegleichung die Form

$$\mathbf{y}(t) = (\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{pmatrix}$$

erhält. Dabei ist $\mathbf{C}_1$ eine reguläre (r, r) -Matrix. Der Zustandsvektor wurde in die ersten r Komponenten, die in $\mathbf{x}_1(t)$ zusammengefasst sind, und die restlichen $n - r$ Komponenten zerlegt. Auf Grund der Regularität von $\mathbf{C}_1$ gilt

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{C}_1^{-1} (\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}_2 \mathbf{x}_2(t)).$$

Man muss also nur den $(n - r)$ -dimensionalen Teilvektor $\mathbf{x}_2(t)$ beobachten, denn aus $\mathbf{y}(t)$ und $\mathbf{x}_2(t)$ kann man dann den Vektor $\mathbf{x}_1(t)$ berechnen.

Ableitung der Beobachtergleichungen. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass der Messvektor $\mathbf{y}(t)$ wie im Beispiel 8.1 einen Teil des Zustandsvektors darstellt. Diese Voraussetzung kann mit Hilfe der Zustandstransformation

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1^{-1} & -\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{pmatrix}$$

erfüllt werden, wobei die angegebenen Teilmatrizen von $\mathbf{C}$ die o. g. Voraussetzungen erfüllen. Die Systemgleichungen können deshalb in der Form

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (8.26)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}(0) \\ \mathbf{x}_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{x}_{20} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t) = (\mathbf{I} \quad \mathbf{O}) \begin{pmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{pmatrix} \quad (8.27)$$

geschrieben werden. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von „Sensorkoordinaten“, weil der Zustandsvektor so ausgewählt ist, dass ein Teil von ihm mit den Messgrößen übereinstimmt. Aus der zweiten Zeile der ersten Gleichung erhält man für den unbekannten Teilvektor $\mathbf{x}_2$ die Beziehung

$$\dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2(t) + (\mathbf{A}_{21}\mathbf{y}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t)), \quad (8.28)$$

wobei der eingeklammerte Ausdruck bekannte Größen umfasst. Definiert man als neue Größe

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \dot{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{A}_{11}\mathbf{y}(t) - \mathbf{B}_1\mathbf{u}(t), \quad (8.29)$$

so erhält man aus der ersten Zeile von Gl. (8.26)

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2(t). \quad (8.30)$$

Die Gln. (8.28) und (8.30) kann man nun als Zustands- bzw. Ausgangsgleichung interpretieren, auf die der Beobachterentwurf angewendet werden soll. Der Ansatz (8.4), (8.5) führt auf

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{x}}_2(t)}{dt} &= \mathbf{A}_{22}\hat{\mathbf{x}}_2(t) + (\mathbf{A}_{21}\mathbf{y}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t)) + \mathbf{u}_B(t), & \hat{\mathbf{x}}_2(0) &= \hat{\mathbf{x}}_{20} \\ \hat{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{A}_{12}\hat{\mathbf{x}}_2(t). \end{aligned}$$

Der in der ersten Gleichung auf der rechten Seite stehende eingeklammerte Ausdruck ist wieder die bekannte „Eingangsgröße“ aus der Zustandsgleichung (8.28). $\hat{\mathbf{y}}(t)$ stimmt bei verschwindendem Beobachtungsfehler mit $\tilde{\mathbf{y}}(t)$ überein. Die Eingangsgröße $\mathbf{u}_B(t)$ wird entsprechend

$$\mathbf{u}_B(t) = \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{y}}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t))$$

aus der Differenz dieser beiden Größen bestimmt, wobei $\mathbf{L}$ wieder die noch festzulegende Rückführmatrix darstellt. Für den Beobachter erhält man damit

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{x}}_2(t)}{dt} &= \mathbf{A}_{22}\hat{\mathbf{x}}_2(t) + \mathbf{A}_{21}\mathbf{y}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{A}_{12}\hat{\mathbf{x}}_2(t)) \\ &= (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{12})\hat{\mathbf{x}}_2(t) + \mathbf{A}_{21}\mathbf{y}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}(\dot{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{A}_{11}\mathbf{y}(t) - \mathbf{B}_1\mathbf{u}(t)), \end{aligned}$$

wobei beim Übergang von der ersten zur zweiten Zeile der Ausdruck für $\tilde{\mathbf{y}}(t)$ eingesetzt wurde. In dieser Gleichung stört noch der Ausdruck $\dot{\mathbf{y}}(t)$, der eine Differenziation der gemessenen Ausgangsgröße notwendig macht. Man kann ihn durch Einführung der neuen Zustandsgröße

$$\tilde{\mathbf{x}}_2(t) = \hat{\mathbf{x}}_2(t) - \mathbf{L}\mathbf{y}(t)$$

beseitigen, wodurch der Beobachter seine endgültige Form erhält:

Reduzierter Beobachter:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\mathbf{x}}_2(t)}{dt} &= (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{12}) \tilde{\mathbf{x}}_2(t) + (\mathbf{B}_2 - \mathbf{L}\mathbf{B}_1)\mathbf{u}(t) \\ &\quad + (\mathbf{A}_{21} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{11} + (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{12})\mathbf{L}) \mathbf{y}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}_2(t) &= \tilde{\mathbf{x}}_2(t) + \mathbf{L}\mathbf{y}(t). \end{aligned} \quad (8.31)$$

Dieser Beobachter wird Beobachter reduzierter Ordnung oder kürzer reduzierter Beobachter genannt. Er hat die dynamische Ordnung $n - r$, die umso kleiner ist, je mehr Größen gemessen werden können.

Eigenschaften des reduzierten Beobachters. Die Eigenschaften des reduzierten Beobachters sind ähnlich denen des vollständigen Beobachters. Sie sollen deshalb hier ohne Beweis zusammengestellt werden:

- Für den Beobachtungsfehler gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_2(t) - \hat{\mathbf{x}}_2(t)\| = 0$$

für beliebige Anfangszustände des Systems und des Beobachters genau dann, wenn alle Eigenwerte der Matrix $(\mathbf{A}_{22} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{12})$ negativen Realteil haben.

- Die Matrix $\mathbf{L}$ kann genau dann so gewählt werden, dass $(\mathbf{A}_{22} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{12})$ vorgegebene Eigenwerte hat, wenn das System $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ vollständig beobachtbar ist.

Wie man sich anhand des Hautuskriteriums überlegen kann, ist nämlich dann auch das Paar $(\mathbf{A}_{22}, \mathbf{A}_{12})$ beobachtbar. Der Entwurf von $\mathbf{L}$ kann wie beim vollständigen Beobachter mit Hilfe von Verfahren der Polverschiebung erfolgen.

Regelkreis mit reduziertem Beobachter. Der Regelkreis besteht jetzt aus der Strecke (8.26), (8.27), dem reduzierten Beobachter (8.31) und dem Regler

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= -\mathbf{K} \begin{pmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}_2(t) \end{pmatrix} + \mathbf{V}\mathbf{w}(t) \\ &= -\mathbf{K}_1\mathbf{y}(t) - \mathbf{K}_2\hat{\mathbf{x}}_2(t) + \mathbf{V}\mathbf{w}(t), \end{aligned} \quad (8.32)$$

wobei in der zweiten Zeile die Reglermatrix $\mathbf{K}$ in die zwei Teilmatrizen $\mathbf{K}_1$ und $\mathbf{K}_2$ zerlegt wurde, von denen die erste Matrix die ersten r Spalten von $\mathbf{K}$ und die zweite Matrix die restlichen Spalten enthält. Der Beobachter kann unter Verwendung der Abkürzungen

$$\begin{aligned}\tilde{B} &= B_2 - LB_1 \\ E &= A_{21} - LA_{11} + (A_{22} - LA_{12})L\end{aligned}$$

kürzer als

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}_2(t)}{dt} &= (A_{22} - LA_{12})\tilde{x}_2(t) + \tilde{B}u(t) + Ey(t) \\ \hat{x}_2(t) &= \tilde{x}_2(t) + Ly(t)\end{aligned}\quad (8.33)$$

geschrieben werden. Setzt man Gl. (8.33) in die Rückführung (8.32) ein

$$u(t) = -K_1y(t) - K_2\hat{x}_2(t) + Vw(t) = -(K_1 + K_2L)y(t) - K_2\tilde{x}_2(t) + Vw(t)$$

und führt für den ersten Summanden die Abkürzung

$$\tilde{K}_1 = K_1 + K_2L$$

ein, so erhält man durch Zusammenfassen der angegebenen Gleichungen das Modell des Regelkreises

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y \\ x_2 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{11} - B_1\tilde{K}_1 & A_{12} & -B_1K_2 \\ A_{21} - B_2\tilde{K}_1 & A_{22} & -B_2K_2 \\ E - \tilde{B}\tilde{K}_1 & O & A_{22} - LA_{12} - \tilde{B}K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ x_2(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} B_1V \\ B_2V \\ \tilde{B}V \end{pmatrix} w(t)\end{aligned}\quad (8.34)$$

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ x_2(0) \\ \tilde{x}_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ x_{20} \\ \tilde{x}_{20} \end{pmatrix}$$

$$y(t) = (I \quad O \quad O) \begin{pmatrix} y(t) \\ x_2(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix}.\quad (8.35)$$

Wie beim vollständigen Beobachter gilt:

- Wird die Zustandsrückführung mit Hilfe des reduzierten Beobachters entsprechend Gl. (8.32) realisiert, so gilt das Separationstheorem. Das heißt, die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises setzen sich aus denen des Regelkreises mit Zustandsrückführung und denen des Beobachters zusammen und können folglich aus den Matrizen $A - BK$ bzw. $A_{22} - LA_{12}$ berechnet werden.

Wahl der Beobachtereigenwerte. Für die Wahl der Beobachtereigenwerte gelten dieselben Richtlinien wie für den vollständigen Beobachter. Im Zusammenhang mit der Festlegung des Anfangszustandes des Beobachters gibt es jedoch eine Einschränkung. Setzt man nämlich wie beim vollständigen Beobachter der Einfachheit halber den Anfangszustand des Beobachters zu null

$$\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0},$$

so erhält man aus der Ausgabegleichung des reduzierten Beobachters (8.31) die Beziehung

$$\hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{L}\mathbf{y}(0),$$

d. h., der Anfangswert des geschätzten Zustandes $\mathbf{x}_2$ ist vom Anfangswert der Messgröße und der Rückführverstärkung des Beobachters abhängig. Hat man Eigenwerte für den Beobachter gewählt, die sehr weit links in der komplexen Ebene liegen, so enthält $\mathbf{L}$ große Elemente. Folglich hat $\hat{\mathbf{x}}(t)$ sehr große Anfangswerte, die u. U. sehr weit von den wahren Werten $\mathbf{x}_{20}$ entfernt liegen. Es wird dann einige Zeit dauern, bis sich die geschätzten den wahren Werten des Zustandes angenähert haben.

Aus diesem Grunde soll $\mathbf{L}$ keine zu großen Elemente enthalten, was die Wahl der Beobachtereigenwerte einschränkt. Ist jedoch $\mathbf{y}(0)$ bekannt, so kann $\tilde{\mathbf{x}}_2 = -\mathbf{L}\mathbf{y}(0)$ gesetzt werden, wodurch wie beim vollständigen Beobachter $\hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}$ gilt.

Beispiel 8.2 Reduzierter Beobachter für ein invertiertes Pendel

Beim invertierten Pendel aus Beispiel 8.1 können die beiden Zustandsvariablen x_1 und x_2 direkt gemessen werden. Das Modell hat deshalb schon die in Gln. (8.26), (8.27) angesetzte Form und kann dementsprechend zerlegt werden:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -0,88 & \vdots & -1,9 & 0,0056 \\ 0 & 21,5 & \vdots & 3,9 & -0,14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0,3 \\ -0,62 \end{pmatrix} u(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Der Beobachter (8.31) ist nur noch ein System zweiter Ordnung, für das die Eigenwerte $-2 \frac{1}{s}$ und $-3 \frac{1}{s}$ gewählt werden. Die Rückführung $\mathbf{L}$ wird so festgelegt, dass die Matrix

$$\mathbf{A}_{22} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} -1,9 & 0,0056 \\ 3,9 & -0,14 \end{pmatrix} - \mathbf{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

diese Eigenwerte erhält, was auf

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -1,9 & 0,0056 \\ 3,9 & -0,14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,0056 \\ 3,9 & 2,86 \end{pmatrix}$$

führt. Damit erhält man für den reduzierten Beobachter das Modell

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}_2(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_2(t) + \begin{pmatrix} 0,3 \\ -0,62 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} -0,2 & -0,89 \\ -11,7 & 12,92 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_2(t) = \hat{\mathbf{x}}_2(t) + \begin{pmatrix} 0,1 & 0,0056 \\ 3,9 & 2,86 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t)$$

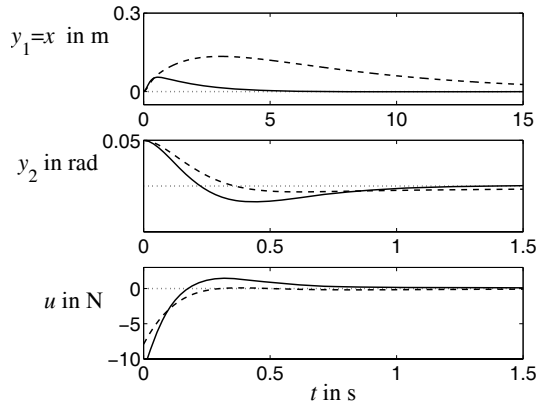


Abb. 8.12: Geregeltes Pendel mit reduziertem Beobachter – bzw. Zustandsrückführung – -

Realisiert man die Zustandsrückführung (7.37) mit dem reduzierten Beobachter, so entsteht die in Abb. 8.12 gezeigte Eigenbewegung des geregelten Systems. Diese Kurven entstanden für den Anfangszustand $\hat{\mathbf{x}}_{20} = \mathbf{0}$. Der Regelkreis mit reduziertem Beobachter reagiert schneller und hat zunächst größere Stellamplituden als die Zustandsrückführung und auch als die mit dem vollständigen Beobachter realisierte Zustandsrückführung (Abb. 8.9). Dass der Regler mit dem reduzierten Beobachter mit einer größeren Stellgröße als der Regler mit dem vollständigen Beobachter arbeitet, hängt an dem direkten Durchgriff von $\mathbf{y}(t)$ auf $\hat{\mathbf{x}}_2(t)$, durch den sich die Messgröße ohne Verzögerung auf das Beobachtungsergebnis und damit auf die Stellgröße auswirkt. Dass der Regelkreis bezüglich der Ausgangsgröße $y_1(t)$ deutlich schneller als die Zustandsrückführung ist, ist nicht typisch, sondern liegt in den hier verwendeten Anfangszuständen begründet. $\square$

Aufgabe 8.4 Reduzierter Beobachter für zwei gekoppelte Rührkesselreaktoren

Bei den im Beispiel 3.1 auf S. 68 behandelten Rührkesselreaktoren wird die Stoffkonzentration des zweiten Reaktors gemessen. Die Beobachtungsaufgabe betrifft also nur die Zustandsvariable x_1 , die die Stoffkonzentration im ersten Reaktor beschreibt. Wie sieht der reduzierte Beobachter für dieses System aus? $\square$

8.5 Weitere Anwendungsgebiete von Beobachtern

Bisher wurde der Beobachter mit dem Ziel eingeführt, den Zustandsvektor der Regelstrecke zu rekonstruieren, um Zustandsrückführungen realisieren zu können. Wie die folgenden Beispiele zeigen, geht das Anwendungsgebiet des Beobachters weit über diesen Einsatzfall hinaus.

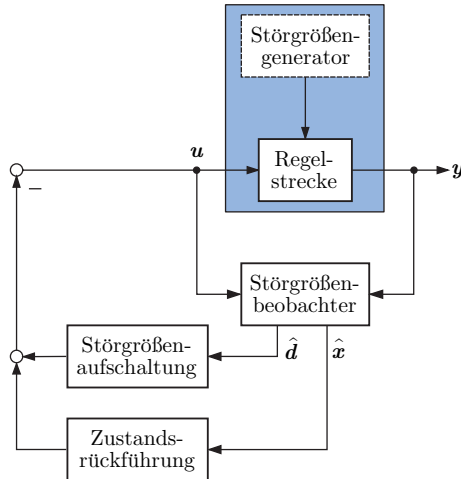


Abb. 8.13: Realisierung einer Zustandsrückführung und einer Störgrößenaufschaltung mit Hilfe eines Beobachters

Störgrößenbeobachter. Für die Realisierung einer Störgrößenaufschaltung muss die Störung d messbar sein. Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, kann man versuchen, die unbekannte Störung aus dem Verlauf der Stell- und Messgrößen zu rekonstruieren. Dazu muss bekannt sein, welche Klasse von Störungen auf das System wirken, von welchem Störgrößenmodell (4.68), (4.69)

$$\dot{\mathbf{x}}_d(t) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_d(t), \quad \mathbf{x}_d(0) = \mathbf{x}_{d0} \quad (8.36)$$

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{C}_d \mathbf{x}_d(t) \quad (8.37)$$

das Signal d also generiert wird. Das Verhalten der Regelstrecke zusammen mit dem Störgrößenmodell ist dann durch die Gleichungen

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_d(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{E}\mathbf{C}_d \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_d(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (8.38)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{x}_d(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_{d0} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_d(t) \end{pmatrix} \quad (8.39)$$

beschrieben (vgl. den grau hinterlegten Teil in Abb. 8.13).

Das Prinzip des Zustandsbeobachters kann nun angewendet werden, um den Zustand dieses Systems zu bestimmen. Entsprechend Gl. (8.4) erhält man dann

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}_d(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{EC}_d \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}_d(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) + \mathbf{u}_B(t),$$

woraus mit der Beobachterrückführung

$$\mathbf{u}_B(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_2 \end{pmatrix} (\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t))$$

der Beobachter

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}_d(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{L}_1\mathbf{C} & \mathbf{EC}_d \\ -\mathbf{L}_2\mathbf{C} & \mathbf{A}_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}_d(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{pmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_2 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \hat{\mathbf{d}}(t) &= \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{C}_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}_d(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

entsteht. Eine um eine Störgrößenaufschaltung erweiterte Zustandsrückführung

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) - \mathbf{K}_d\mathbf{d}(t)$$

kann mit Hilfe dieses Beobachters in der Form

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{K}_d\hat{\mathbf{d}}(t)$$

realisiert werden. Die Struktur des dabei entstehenden Regelkreises ist in Abb. 8.13 aufgezeichnet. Für den Entwurf dieses Regelkreises gelten dieselben Aussagen wie für die reine Zustandsrückführung.

Führungsgrößenbeobachter. In Anlogie zum Störgrößenbeobachter kann man mit einem Beobachter den Zustand $\mathbf{x}_w(t)$ des Führungsgrößenmodells (4.65) rekonstruieren. Der Anfangszustand $\mathbf{x}_w(0)$ ist i. Allg. nicht bekannt, weil man die Führungsgröße nicht tatsächlich mit dem Führungsgrößenmodell generiert, sondern mit diesem Modell lediglich die Klasse der möglichen Führungssignale fixiert. Für die Regelung kann dieser Zustand jedoch von Bedeutung sein, wie die Beziehung (7.49) verdeutlicht.

Um $\mathbf{x}_w$ aus dem bekannten Führungssignal $\mathbf{w}(t)$ zu berechnen, verwendet man das Beobachterprinzip, wobei das im Beobachter enthaltene Führungsgrößenmodell kein Eingangssignal erhält, denn das Führungsgrößenmodell ist ein autonomes System. Kombiniert man diesen Beobachter mit einem Beobachter der Regelstrecke, so entstehen ähnliche Formeln wie für den Regler mit Störgrößenbeobachter.

Aufgabe 8.5 Regelung mit Störgrößenbeobachter

Betrachten Sie eine stabile Eingrößenregelstrecke mit einer sprungförmigen Störung d . Um eine bleibende Regelabweichung zu verhindern, muss der Regler bekanntermaßen einen I-Anteil besitzen, den bei den im Band 1 behandelten klassischen Entwurfsverfahren in den Ansatz für die Übertragungsfunktion $K(s)$ des Reglers hineingenommen werden musste.

Zeigen Sie, dass man den I-Anteil im Regler dadurch erhält, dass man einen Zustandsbeobachter mit einer Zustandsrückführung kombiniert, wobei der Beobachter nicht nur den Zustand der Regelstrecke, sondern auch den Zustand des Störgrößenmodells berechnet. $\square$

8.6 Beziehungen zwischen LUENBERGER-Beobachter und KALMAN-Filter

Beobachter können bei impulsförmigen Störungen, die sich durch Anfangszustände des zu beobachtenden Systems darstellen lassen, eingesetzt werden. Es soll nun untersucht werden, wie sich das Beobachtungsproblem verändert, wenn das System durch einen stochastischen Rauschprozess fortwährend in seiner Bewegung beeinflusst wird. Dieses Problem wird durch den Kalmanfilter gelöst, der eine Größe $\hat{x}(t)$ bestimmt, die im Mittel mit dem Systemzustand $x(t)$ übereinstimmt. Da die jetzt betrachteten Störungen während der gesamten Beobachtungszeit die Messgrößen verfälschen, kann nicht erreicht werden, dass der Beobachtungsfehler asymptotisch verschwindet, wie es entsprechend Satz 8.1 für den Beobachter nachgewiesen werden kann.

Im Folgenden soll nicht auf die Theorie des Kalmanfilters im Einzelnen eingegangen werden, weil dies aufgrund des stochastischen Charakters der Störungen ein vollkommen anderes mathematisches Handwerkszeug erfordert, als es beim Beobachter verwendet wird. Ziel ist es, Parallelen in der Problemstellung und im Lösungsweg aufzuzeigen und damit einen Zusammenhang zwischen dem hier behandelten Beobachter und dem sehr bekannten Prinzip der Kalmanfilterung herzustellen. Es wird sich zeigen, dass bei den für deterministische Störungen ausgelegten Beobachtern und den für stochastische Störungen entworfenen Filtern zwar unterschiedliche Begriffe gebraucht werden, die Grundidee für beide Vorgehensweisen jedoch dieselbe ist.

Beim Kalmanfilter wird ein lineares System mit n - bzw. r -dimensionalen vektoriellen stochastischen Störungen $\varepsilon(t)$ und $\nu(t)$ betrachtet

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) + \varepsilon(t) \quad (8.40)$$

$$y(t) = C x(t) + \nu(t), \quad (8.41)$$

wobei $\varepsilon(t)$ als Störung auf das System (Prozessrauschen) und $\nu(t)$ als Messrauschen interpretiert werden kann. Für die Störungen muss man eine Reihe von Voraussetzungen treffen, damit das Schätzproblem einfach lösbar ist. Diese Voraussetzungen werden hier nur der Vollständigkeit halber aufgeführt. Sie sind für das Verständnis

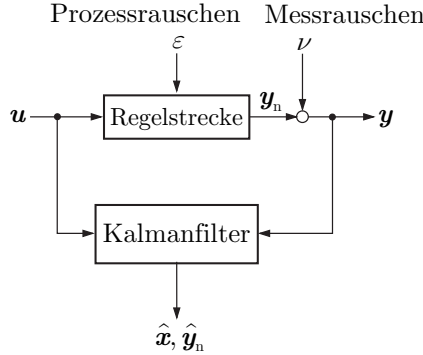


Abb. 8.14: Regelstrecke mit Kalmanfilter

der prinzipiellen Zusammenhänge von Beobachter und Kalmanfilter nicht wesentlich. $\varepsilon(t)$ und $\nu(t)$ müssen weiße gaußsche Rauschprozesse sein, d. h., ihr Mittelwert muss gleich null, ihre Varianzen unendlich groß und aufeinanderfolgende Werte dürfen nicht korreliert sein. Es gelten also die Annahmen

$$E\{\varepsilon(t)\} = \mathbf{0} \quad \text{var}\{\varepsilon(t)\} = E\{(\varepsilon(t) - \bar{\varepsilon})^2\} = \infty$$

(für $\nu(t)$ entsprechend) und

$$\begin{aligned} \text{cov}\{\varepsilon(t), \varepsilon(\tau)\} &= E\{\varepsilon(t)\varepsilon(\tau)'\} = \mathbf{Q}\delta(t - \tau) \\ \text{cov}\{\nu(t), \nu(\tau)\} &= E\{\nu(t)\nu(\tau)'\} = \mathbf{R}\delta(t - \tau). \end{aligned} \quad (8.42)$$

Außerdem wird zur Vereinfachung der Darstellung angenommen, dass beide Rauschsignale statistisch unabhängig sind

$$\text{cov}\{\varepsilon(t), \nu(t)\} = 0.$$

Das Kalmanfilter beruht auf demselben Ansatz wie der Beobachter

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}(\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)),$$

nur wird jetzt die Rückführmatrix $\mathbf{L}$ in anderer Weise bestimmt. Wie beim Beobachter wird der Fehler zwischen dem tatsächlichen und dem geschätzten Zustand entsprechend Gl. (8.9) definiert

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t).$$

Man spricht jetzt allerdings nicht mehr vom Beobachtungsfehler, sondern vom Schätzfehler. An Stelle von Gl. (8.10) erhält man die Beziehung

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\mathbf{e}(t) + \varepsilon(t) - \mathbf{L}\nu(t), \quad \mathbf{e}(0) = \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0, \quad (8.43)$$

aus der hervorgeht, dass der Schätzfehler durch die beiden Rauschprozesse ständig angeregt wird. Auf Grund der genannten Voraussetzungen ist $e(t)$ ein mittelwertfreier weißer Rauschprozess.

Die Rückführmatrix L soll nun so gewählt werden, dass der mittlere quadratische Schätzfehler möglichst klein wird:

$$\min_L \sum_{i=1}^n E\{e_i^2\} = \min_L \sum_{i=1}^n \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e_i^2(t) dt. \quad (8.44)$$

Als optimale Rückführmatrix erhält man

$$L = PC'R^{-1} \quad (8.45)$$

mit P als positiv definiter Lösung der Matrix-Riccatigleichung

$$AP + PA' - PC'R^{-1}CP + Q = O. \quad (8.46)$$

Vergleicht man diese beiden Gleichungen mit den Beziehungen (7.19), (7.20) auf Seite 289, so erkennt man, dass die Rückführung L beim Kalmanfilter wie ein Optimalregler bestimmt wird, wobei – wie beim Beobachter – mit dem „dualen System“ (8.11) gearbeitet wird. An den Stellen der Wichtungsmatrizen aus dem Gütefunktional des Optimalreglers stehen jetzt die Matrizen Q und R , die die Streuung der Störungen $\varepsilon(t)$ und $\nu(t)$ beschreiben. Die Forderung nach Steuerbarkeit des Paares (A, B) beim Optimalregler wird hier auf das „dual System“ angewendet und führt auf die Forderung nach Beobachtbarkeit des Paares (A, C) . Die Gln. (8.45), (8.46) erhält man also auch, wenn man den Optimalreglerentwurf auf das „dual System“ anwendet. Diese Überlegung ist hilfreich, wenn man die Matrizen Q und R nicht wie in Gl. (8.42) gefordert aus den Eigenschaften der Störung bestimmen kann. Man arbeitet dann mit Wichtungsmatrizen, wie sie im Optimalreglerentwurf vorkommen.

Das Kalmanfilter hat also dieselbe Struktur wie ein Beobachter. Sein Entwurf wird allerdings nicht durch Polvorgabe, sondern mit dem Optimalreglervorgabe durchgeführt. Der Grund dafür liegt in der Tatsache, dass das Ziel, den Schätzfehler zu minimieren, eine direkte Verbindung zum Prinzip der optimalen Regelung herstellt.

Wie beim Beobachter gilt auch beim Kalmanfilter das Separationstheorem. Das heißt, für einen stochastisch gestörten Prozess kann eine Zustandsrückführung unabhängig davon entworfen werden, wie der Zustandsvektor x geschätzt bzw. beobachtet wird. Man kann beim Entwurf so tun, als sei $x(t)$ messbar. Sind die Störungen deterministisch, so wendet man anschließend das Beobachterprinzip an, um einen Näherungswert $\hat{x}(t)$ für den Zustand zu berechnen. Ist die Störung stochastisch, so ermittelt man diesen Näherungswert mit Hilfe eines Kalmanfilters.

Die Verwendung der Polverschiebung zum Beobachterentwurf bzw. der optimalen Regelung beim Kalmanfilterentwurf legen es jedoch nahe, die Zustandsrückführung im Falle deterministischer Störungen ebenfalls mit Verfahren der Polverschiebung, bei stochastischen Störungen als Optimalregler zu berechnen. Diese Kombinationen sind zwar geläufig, jedoch nicht zwingend. Wird ein Optimalregler mit Hilfe

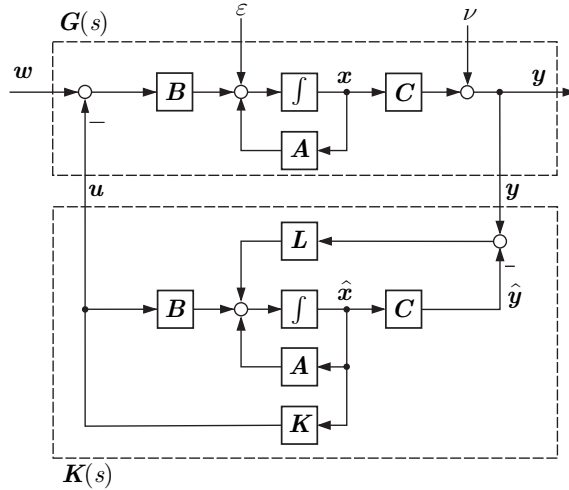


Abb. 8.15: Zustandsrückführung mit Kalmanfilter

eines Kalmanfilters realisiert, so spricht man auch vom LQG-Regler, wobei sich die Abkürzung aus den Voraussetzungen eines **l**inearen Systems, eines **q**uadratischen Gütefunktional und **g**außscher Störungen zusammensetzt.

8.7 Beobachterentwurf mit MATLAB

Da der Entwurf des Beobachters vollständig auf bekannte Schritte zurückgeführt werden konnte, sind keine neuen MATLAB-Funktionen erforderlich. Die einzelnen Entwurfsschritte sind lediglich in Funktionsaufrufe zu übersetzen, wie es im Programm 8.1 getan ist. Bei diesem Programm wird der Beobachter auf ein unregelmäßiges System angewendet. Soll der Beobachter zur Realisierung einer Zustandsrückführung eingesetzt werden, so ist für die Wahl der Beobachtereigenwerte nicht die Matrix A , sondern die Matrix des geschlossenen Kreises $A - BK$ maßgebend. Nichtsdestotrotz kann das Verhalten des Beobachters zunächst mit dem Programm 8.1 im Zusammenspiel mit der unregelmäßigen Strecke analysiert werden.

Für die Analyse des Systems mit Beobachter wird die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ LC & A - LC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix} u(t)$$

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ \hat{x}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \hat{x}_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{pmatrix}$$

verwendet. Im Programm 8.1 wird damit für $\mathbf{x}_0 = (1 \ 1 \dots 1)'$ und $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}$ die Eigenbewegung untersucht. Mit denselben Gleichungen kann aber auch das Verhalten des gestörten Systems simuliert werden.

Programm 8.1 Beobachterentwurf

Voraussetzungen für die Anwendung des Programms:

- Den Matrizen A, B, C sowie den Parametern n und m sind bereits Werte zugewiesen.
- D ist eine Nullmatrix entsprechender Dimension.

Beobachterentwurf

```

» System=ss(A, B, C, D);
» rank(observ(System));
» rank(ctrb(System));           Prüfung der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

» eig(A)                        Berechnung der Eigenwerte
» sigma = [...];               Festlegung der Beobachtereigenwerte

» Lt = place(A', C', sigma);
» L = Lt';                     Entwurf der Rückführmatrix L

```

Simulation des Beobachterverhaltens

```

» Ab = [A zeros(n,n); L*C A-L*C];
» Bb = [B; B];
» Cb = eye(2*n, 2*n);
» Db = zeros(2*n, m);
» Beobachter=ss(Ab, Bb, Cb, Db);
» x0 = [ones(n,1); zeros(n,1)];   Vorgabe der Anfangszustände
» initial(Beobachter, x0);         Eigenbewegung

```

Analyse einer mit Beobachter realisierten Zustandsrückführung. Der Regelkreis mit Beobachter (8.7) und Zustandsrückführung (8.1) ist durch die folgenden Gleichungen beschrieben:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{BK} \\ \mathbf{LC} & \mathbf{A} - \mathbf{BK} - \mathbf{LC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{BV} \\ \mathbf{BV} \end{pmatrix} w(t) \quad (8.47)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \hat{\mathbf{x}}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \hat{\mathbf{x}}_0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t) = (\mathbf{C} \quad \mathbf{O}) \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{pmatrix}. \quad (8.48)$$

Sein Verhalten kann mit dem Programm 8.2 analysiert werden. Hier wird nur die Eigenbewegung untersucht, da das E/A-Verhalten des Regelkreises durch den Beobachter nicht beeinflusst wird.

Programm 8.2 Analyse des Regelkreises mit Beobachter

Voraussetzungen für die Anwendung des Programms:

- Den Matrizen A, B, C und L sowie den Variablen n und m sind bereits Werte zugewiesen.
- D ist eine Nullmatrix entsprechender Dimension.
- Die Zustandsrückführung ist in der Matrix K gespeichert.

Simulation des geschlossenen Kreises

```

» Ag = [A -B*K; L*C A-L*C-B*K];
» Bg = [B*V; B*V];
» Cg = [C zeros(r,n)];
» Dg = D;
» Kreis=ss(Ag, Bg, Cg, Dg);
» x0 = [...];
» xb0 = [...];
» initial(Kreis, [x0; xb0])

```

Vorgabe der Anfangszustände
Eigenbewegung

Aufgabe 8.6* Beobachter für die Magnetschwebbahn

Für die in Aufgabe 6.5 entworfene Zustandsrückführung der Magnetschwebbahn soll ein Beobachter entworfen werden. Gemessen werden kann nur der Abstand des Tragemagneten von der Schiene. Kann der Beobachter schnell genug gemacht werden, so dass er mit der Zustandsrückführung

$$\mathbf{k}' = (8411 \ 478 \ 189 \ 76,2 \ -0,02)$$

die in Aufgabe 6.5 gestellten Güteforderungen erfüllt? □

Aufgabe 8.7** Erweiterung der Programme 8.1 und 8.2 für den reduzierten Beobachter

Erweitern Sie die Programme 8.1 und 8.2 so, dass sie für den Entwurf und die Analyse des reduzierten Beobachters eingesetzt werden können. □

Literaturhinweise

Der Beobachter wurde 1964 von LUENBERGER in [63] vorgeschlagen. Die Idee des reduzierten Beobachters ist in [13] erstmals veröffentlicht.

Das Kalmanfilter wurde 1961 in [49] erstmals beschrieben. Seine Theorie ist ausführlich in Lehrbüchern über stochastisch gestörte Systeme abgehandelt.

Einen Vergleich von klassischen Reglerentwurfsverfahren und dem Entwurf von Zustandsrückführungen, die mit Hilfe von Beobachtern realisiert sind, enthält [120]. In dieser Arbeit wird gezeigt, dass beide Entwurfswege auf äquivalente Reglerstrukturen führen, wenn man die Führungsgrößen- und Störgrößenmodelle in die Beobachtung einbezieht. So erhält man die durch das Innere-Modell-Prinzip vorgeschriebenen I-Anteile in dem aus einem Zustandsbeobachter und einer Zustandsrückführung bestehenden Regler, wenn man die Modelle der sprungförmigen Führungs- und Störsignale in die Beobachtung einbezieht.

9

Reglerentwurf mit dem Direkten Nyquistverfahren

Bei dem in diesem Kapitel behandelten Verfahren wird der Entwurf eines Mehrgrößenreglers auf den Entwurf mehrerer Eingrößenregler zurückgeführt. Bei der Analyse des Regelkreises werden die Querkopplungen innerhalb der Regelstrecke durch Abschätzungen berücksichtigt. Das Verfahren eignet sich deshalb sowohl zur Bemessung dezentraler Regler als auch zur Berechnung von Eingrößenreglern für die um ein Entkopplungsglied erweiterten Regelstrecke.

9.1 Grundidee des Direkten Nyquistverfahrens

Nachdem Mehrgrößenregelungen in den sechziger und Anfang der siebziger Jahren zunächst nur im Zeitbereich unter Verwendung des Zustandsraumkonzeptes untersucht worden waren, wurde in den siebziger Jahre versucht, die Entwurfsverfahren für einschleifige Regelungen im Frequenzbereich auf Mehrgrößenregler zu erweitern. Dadurch sollte die Anschaulichkeit der grafischen Entwurfsverfahren im Frequenzbereich für Mehrgrößenregler nutzbar gemacht werden.

In diesem Kapitel wird ein Entwurfsvorgehen behandelt, bei dem der Mehrgrößenreglern aus mehreren Eingrößenreglern besteht. Voraussetzung dafür ist, dass die Regelstrecke in relativ schwach gekoppelte „Eingrößenregelstrecken“ zerlegt werden kann, wofür gegebenenfalls ein Entkopplungsglied notwendig ist. Für den Ent-

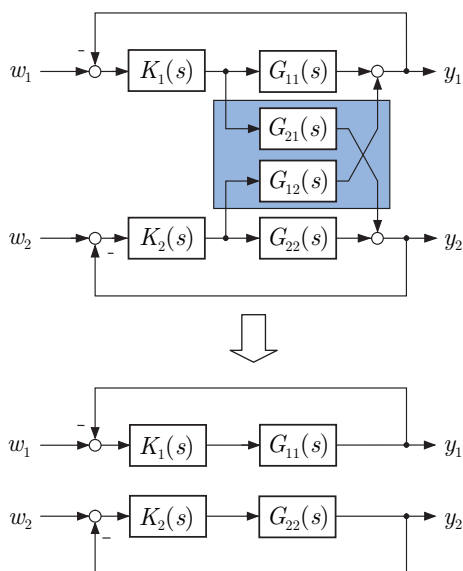


Abb. 9.1: Grundidee des Direkten Nyquistverfahrens

wurf der Eingrößenregelungen ist jedoch keine vollständige Entkopplung der Einzelregelkreise, sondern nur eine Autonomieeigenschaft der einschleifigen Regelungen notwendig, die sich in der Diagonaldominanz der Übertragungsfunktionsmatrix äußert. Der Entwurf der einschleifigen Regelungen erfolgt ohne Beachtung der Querkopplungen innerhalb der Regelstrecke. Der mehrschleifige Regelkreis wird jedoch unter Berücksichtigung dieser Kopplungen analysiert.

Das prinzipielle Vorgehen ist in Abb. 9.1 veranschaulicht. Für eine Regelstrecke mit zwei Stellgrößen und zwei Regelgrößen werden zwei Eingrößenregler entworfen. Ignoriert man beim Entwurf die durch die Übertragungsfunktionen $G_{12}(s)$ und $G_{21}(s)$ beschriebenen Querkopplungen, so zerfällt der Mehrgrößenregelkreis in zwei unabhängige einschleifige Regelungen, für deren Entwurf die bereits beschriebenen Methoden eingesetzt werden können. Werden die Eingrößenregler an der Regelstrecke implementiert, so sind sie über die Querkopplungen in der Regelstrecke verkoppelt. Vor der Inbetriebnahme muss deshalb überprüft werden, welche Wirkungen die Querkopplungen auf das Regelkreisverhalten haben.

Ein wesentliches Merkmal des in diesem Kapitel behandelten Entwurfsverfahrens besteht in der Tatsache, dass bei der Analyse des Regelkreises mit Abschätzungen für die Querkopplungen gearbeitet wird.

9.2 Stabilitätsanalyse unter Verwendung von Abschätzungen für die Querkopplungen eines Mehrgrößenregelkreises

Betrachtet wird eine Regelstrecke mit m Stellgrößen und m Regelgrößen. Die Regler $K_i(s)$, ($i = 1, 2, \dots, m$) seien an den „Regelstrecken“ $G_{ii}(s)$ entworfen, so dass stabile Regelkreise entstehen. Im Folgenden wird untersucht, wie groß die Querkopplungen $G_{ij}(s)$, ($i \neq j$) in der Regelstrecke sein dürfen, ohne dass sie die Stabilität des Mehrgrößenregelkreises gefährden können.

9.2.1 Betrachtungen zum Nyquistkriterium

Das im Satz 4.2 auf S. 165 angegebene Nyquistkriterium für Mehrgrößensysteme bezieht sich auf die Rückführdifferenzmatrix

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{I} + \mathbf{G}_0(s),$$

bei der $\mathbf{G}_0(s)$ die Übertragungsfunktionsmatrix der offenen Kette ist. Es schreibt vor, wie oft $\det \mathbf{F}(s)$ für $s \in \mathcal{D}$ den Ursprung der komplexen Ebene umschließen muss, damit der Regelkreis stabil ist. Diese Bedingung wird im Folgenden umgeformt, um ein Stabilitätskriterium abzuleiten, das sich auf die einschleifigen Regelkreise bezieht und die Querkopplungen zwischen diesen Regelkreisen berücksichtigt.

Umformung des Nyquistkriteriums. Die Umschließungsbedingung des Nyquistkriteriums kann man umformen, wenn man die Eigenwerte λ_i der Rückführdifferenzmatrix $\mathbf{F}$ betrachtet. Die Eigenwerte ergeben sich bekanntlich aus der Lösung der Gleichung

$$\det(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{F}(s)) = 0,$$

wobei hier zu bedenken ist, dass die (m, m) -Matrix $\mathbf{F}(s)$ von der Frequenz s abhängt und sich folglich für jede Frequenz s eine neue Menge von m Eigenwerten λ_i ergibt. An Stelle von λ_i wird deshalb im Folgenden $\lambda_{Fi}(s)$ geschrieben:

$$\det(\lambda_{Fi}(s) \mathbf{I} - \mathbf{F}(s)) = 0.$$

Die im Nyquistkriterium stehende Umschließungsbedingung kann für die Eigenwerte λ_{Fi} formuliert werden, denn die Determinante jeder Matrix ist gleich dem Produkt ihrer Eigenwerte. Es gilt

$$\begin{aligned} \det \mathbf{F}(s) &= \prod_{i=1}^m \lambda_{Fi}(s) \\ \Delta \arg \det \mathbf{F}(s) &= \sum_{i=1}^m \Delta \arg \lambda_{Fi}(s). \end{aligned}$$

Eine offene Kette führt genau dann auf einen stabilen Regelkreis, wenn die Eigenwerte $\lambda_{Fi}(s)$ der Rückföhrdifferenzmatrix den Ursprung der komplexen Ebene insgesamt $-n^+$ -mal im Uhrzeigersinn umschlingen:

$$\sum_{i=1}^m \Delta \arg \lambda_{Fi}(s) = -2n^+ \pi. \quad (9.1)$$

Dabei bezeichnet n^+ die Zahl der Pole von $G_0(s)$ mit positivem Realteil.

9.2.2 Abschätzung der Eigenwerte der Rückföhrdifferenzmatrix

Wenn der Mehrgrößenregelkreis aus vollkommen entkoppelten einschleifigen Regelkreisen bestünde, so wäre F eine Diagonalmatrix und $\lambda_{Fi}(s)$ gleich den Diagonalelementen $F_{ii}(s)$. Sind die Regelkreise jedoch gekoppelt, wie es im Folgenden angenommen wird, so haben $\lambda_{Fi}(s)$ und $F_{ii}(s)$ unterschiedliche Werte, wobei die Differenz zwischen beiden umso größer ist, je größer die durch $F_{ij}(s)$ ($i \neq j$) ausgedrückten Querkopplungen sind. Mit Hilfe des Gershgorintheorems (Satz A2.2 auf S. 625) kann man abschätzen, wie groß diese Differenz in Abhängigkeit von $F_{ij}(s)$ sein kann.

Das Gershgorintheorem besagt, dass die Eigenwerte λ einer (m, m) -Matrix A betragsmäßig nicht weiter von einem Hauptdiagonalelement a_{ii} entfernt sind, als es die Summe der Beträge der in derselben Zeile stehenden Elemente a_{ij} angibt:

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^m |a_{ij}|, \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (9.2)$$

Man kann das Gershgorintheorem auch in Bezug auf die Spalten der Matrix formulieren:

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^m |a_{ji}|, \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (9.3)$$

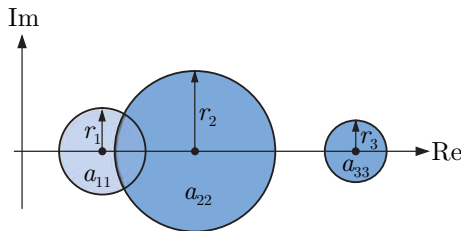


Abb. 9.2: Veranschaulichung des Gershgorintheorems

Das Gershgorintheorem hat eine einfache geometrische Interpretation. Die Ungleichungen (9.2) und (9.3) beschreiben m Kreislächen mit den Mittelpunkten a_{ii} und Radien, die durch die auf der rechten Seite stehenden Summen gegeben sind (Abb. 9.2). Das Gershgorintheorem besagt, dass die m Eigenwerte der Matrix A innerhalb der durch die m Kreise gebildeten Fläche liegen.

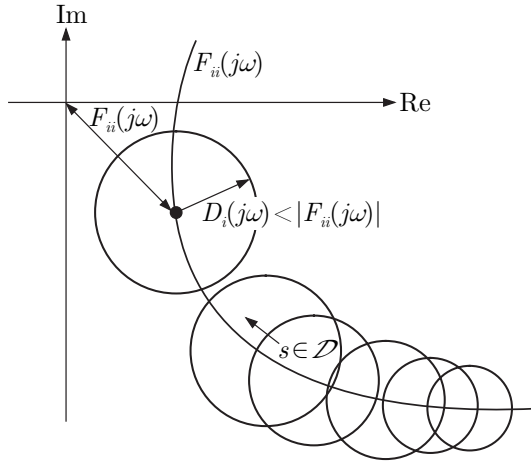


Abb. 9.3: Band um ein Hauptdiagonalelement der Rückführdifferenzmatrix

Wendet man das Gershgorintheorem (9.2) auf die Rückführdifferenzmatrix an, so erhält man die Aussage, dass die Eigenwerte $\lambda_{Fi}(s)$ in Kreisen um $F_{ii}(s)$ mit dem Radius

$$D_i(s) = \sum_{j=1, j \neq i}^m |F_{ij}(s)|$$

liegen. Da sowohl die Mittelpunkte $F_{ii}(s)$ als auch die Radien $D_i(s)$ frequenzabhängig sind, entstehen in der komplexen Ebene m Bänder, von denen eines in Abb. 9.3 gezeigt ist. Entsprechend dem Gershgorintheorem ist bekannt, dass die frequenzabhängigen Eigenwerte $\lambda_{Fi}(s)$ für alle Frequenzen $s \in \mathcal{D}$ innerhalb dieser m Bänder liegen, die deshalb auch als Gershgorinbänder bezeichnet werden.

Satz 9.1 (Gershgorinbänder)

Die Eigenwerte $\lambda_{Fi}(j\omega)$ der Rückführdifferenzmatrix liegen in Bändern um die Hauptdiagonalelemente $F_{ii}(j\omega)$ mit den frequenzabhängigen Radien

$$D_i(j\omega) = \sum_{j=1, j \neq i}^m |F_{ij}(j\omega)|. \quad (9.4)$$

Die Radian können entsprechend Gl. (9.3) auch nach der Formel

$$D_i(j\omega) = \sum_{j=1, j \neq i}^m |F_{ji}(j\omega)| \quad (9.5)$$

berechnet werden, in der über die Spaltenelemente F_{ji} summiert wird.

Hinreichende Stabilitätsbedingung. Zu einer für den Entwurf wichtigen Stabilitätsbedingung kommt man nun, indem man die Umschlingsbedingung (9.1) auf die Gershgorinbänder anwendet. Wenn diese Bänder den Ursprung der komplexen Ebene nicht enthalten, so umschlingen alle Kurven innerhalb dieser Bänder den Ursprung genauso oft wie die „mittleren“ Kurven $F_{ii}(s)$. Folglich gilt

$$\Delta \arg \lambda_{Fi}(s) = \Delta \arg F_{ii}(s). \quad (9.6)$$

Damit der Ursprung nicht innerhalb der Gershgorinbänder liegt, muss der Radius der Kreise in Abb. 9.3 kleiner sein als der Abstand des Mittelpunktes vom Ursprung der komplexen Ebene:

$$D_i(s) < |F_{ii}(s)|.$$

Eine Matrix F , die diese Bedingung erfüllt, wird als *diagonaldominant* bezeichnet, denn in ihr sind alle Hauptdiagonalelemente größer als die Summe der Beträge der anderen in derselben Zeile bzw. Spalte stehenden Elemente.

Definition 9.1 (Diagonaldominanz)

Die (m, m) -Rückführdifferenzmatrix $F(s)$ heißt *zeilendominant*, wenn

$$|F_{ii}(s)| > \sum_{j=1, j \neq i}^m |F_{ij}(s)| \quad \text{für } s \in \mathcal{D} \quad (9.7)$$

gilt, und *spaltendominant*, wenn

$$|F_{ii}(s)| > \sum_{j=1, j \neq i}^m |F_{ji}(s)| \quad \text{für } s \in \mathcal{D} \quad (9.8)$$

gilt. Ist die Matrix $F(s)$ entweder zeilen- oder spaltendominant, so wird sie als *diagonaldominant* bezeichnet.

Für eine Zweigrößenregelung ($m = 2$) kann die Diagonaldominanz sehr einfach im Bodediagramm überprüft werden. Die Amplitudengänge der Hauptdiagonalelemente $F_{11}(s)$ und $F_{22}(s)$ müssen für alle Frequenzen oberhalb der Amplitudengänge der Nebendiagonalelemente $F_{12}(s)$ und $F_{21}(s)$ liegen.

Auf Grund der Beziehung (9.6) erhält man die folgende hinreichende Stabilitätsbedingung:

Eine offene Kette führt auf einen stabilen Regelkreis, wenn die Rückführdifferenzmatrix $F(s)$ diagonaldominant ist und die Hauptdiagonalelemente $F_{ii}(s)$ die Bedingung

$$\sum_{i=1}^m \Delta \arg F_{ii}(s) = -2n^+ \pi. \quad (9.9)$$

erfüllen, d. h., wenn alle Hauptdiagonalelemente $F_{ii}(s)$ zusammen den Ursprung der komplexen Ebene $-n^+$ -mal im Uhrzeigersinn umschlingen.

Diese Bedingung ist nur hinreichend, aber nicht notwendig für die Stabilität des Regelkreises, weil der Regelkreis auch stabil sein kann, wenn die Rückführdifferenzmatrix nicht diagonaldominant ist.

9.2.3 Stabilitätsbedingung für ein dezentral geregeltes System

Die bisherigen Überlegungen gelten für beliebige Mehrgrößenregler $K(s)$. Man kann die erhaltene hinreichende Stabilitätsbedingung weiter umformen, wenn die Regelung aus m einschleifigen Regelkreisen besteht. Die Eingrößenregler sind durch die Gleichung

$$U(s) = -\text{diag } K_i(s) (Y(s) - W(s))$$

beschrieben, wobei $K_i(s)$ die Übertragungsfunktion des i -ten Reglers ist. Die Rückführdifferenzmatrix heißt deshalb

$$F(s) = I + \text{diag } K_i(s) G(s), \quad (9.10)$$

wenn man den Regelkreis am Stellvektor u aufschneidet. Für die Hauptdiagonalelemente gilt

$$F_{ii}(s) = 1 + K_i(s) G_{ii}(s) \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Man kann deshalb die Umschlingungsbedingung für das Hauptdiagonalelement $F_{ii}(s)$ bezüglich des Ursprungs der komplexen Ebene in eine Umschlingungsbedingung für die i -te offene Kette

$$G_{0i}(s) = K_i(s) G_{ii}(s)$$

bezüglich des Punktes -1 überführen, denn $F_{ii}(s)$ umschlingt den Ursprung genauso oft wie $G_{0i}(s)$ den Punkt -1 .

Satz 9.2 (Hinreichende Stabilitätsbedingung)

Der aus m Eingrößenreglern $K_i(s)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) und der Regelstrecke $G(s)$ bestehende Regelkreis ist stabil, wenn die Rückführdifferenzmatrix (9.10) diagonaldominant ist und wenn die Übertragungsfunktionen $G_{0i}(s)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) der offenen Ketten der Eingrößenregelkreise den Punkt -1 insgesamt $-n^+$ -mal im Uhrzeigersinn umschlingen. Dabei bezeichnet n^+ die Zahl der Pole von $G_0(s)$ mit positivem Realteil.

Besonders einfach wird diese Stabilitätsbedingung, wenn die offene Kette stabil ist:

|| Sind Regler und Regelstrecke stabil, so ist der Regelkreis stabil, wenn die Rückführdifferenzmatrix diagonaldominant ist und die Ortskurven $G_{0i}(j\omega)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) der offenen Ketten den Punkt -1 nicht umschlingen.

Diese Bedingung kann man in der bekannten Weise auf I-Ketten erweitern. Auch für diese dürfen die Ortskurven den kritischen Punkt -1 nicht umschlingen.

Die einzelnen Regelkreise können unabhängig voneinander auf Stabilität geprüft werden, wobei das Nyquistkriterium für einschleifige Regelkreise zur Anwendung kommt. Die Diagonaldominanz sichert dann, dass die Regelkreise nicht so stark gekoppelt sind, dass aus den stabilen Einzelregelkreisen ein instabiles Gesamtsystem entstehen kann. Die Gershgorinbänder, die um die Ortskurve der offenen Ketten $G_{0i}(j\omega)$ mit den Radien $D_i(j\omega)$ gezeichnet werden, enthalten den Punkt -1 nicht (Abb. 9.4).

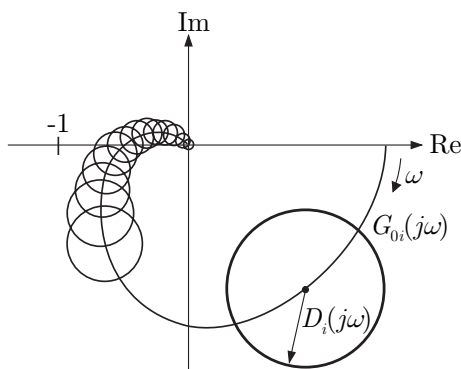


Abb. 9.4: Gershgorinkreise um die Ortskurve einer offenen Kette

9.2.4 Integrität des Regelkreises

Ein Regelkreis besitzt die Integritätseigenschaft, wenn seine Stabilität nicht durch Abschalten oder Ausfall von Mess- oder Stellsignalen gefährdet wird. Diese Eigenschaft ist wichtig für den praktischen Einsatz von Mehrgrößenreglern und gewinnt beim Direkten Nyquistverfahren zusätzlich dadurch an Bedeutung, dass das Entwurfsverfahren auf dem unabhängigen Entwurf der Teilregler beruht und damit eine schrittweise Inbetriebnahme der Regelung nahelegt. Die aufeinanderfolgenden Inbetriebnahmeschritte sind jedoch nur dann durchführbar, wenn der Regelkreis nach jedem Schritt stabil ist.

Es ist deshalb von großer Bedeutung, dass die im Satz 9.2 angegebene hinreichende Stabilitätsbedingung nicht nur die Stabilität, sondern sogar die Integrität der Regelung sichert, wie aus der folgenden Überlegung hervorgeht.

Da die hier betrachtete Regelung aus m Eingrößenregelungen besteht, ist der Ausfall eines Stell- oder Messsignals gleichbedeutend mit dem Ausfall eines Reglers. Die Wirkung auf die anderen Regelkreise ist dieselbe, wenn man $K_i(s)$ gleich null setzt oder wenn man die Koppelemente $G_{ij}(s)$ und $G_{ji}(s)$ für den betrachteten Index i und $j = 1, 2, \dots, m$ gleich null setzt. Verschwinden Querkopplungen in der Regelstrecke, so führt die Abschätzung der Eigenwerte $\lambda_{Fi}(s)$ mit dem Gershgorintheorem auf Werte für $D_i(s)$, die gleich oder kleiner den bisherigen Werten sind. Das heißt, die Gershgorinbänder bleiben in ihrer Größe unverändert oder werden schmaler. Da nun die hinreichende Stabilitätsbedingung für die Kreise mit den bisherigen Radien erfüllt ist, ist sie auch für die kleineren Kreise erfüllt. Die hinreichende Stabilitätsbedingung ist also zumindest auch dann erfüllt, wenn beliebige Querkopplungen $G_{ij}(s)$ gleich null gesetzt werden. Das System besitzt die Integritätseigenschaft.

|| Wenn Regler und Regelstrecke stabil sind und die offene Kette die Bedingungen aus Satz 9.2 erfüllt, so besitzt der Regelkreis die Integritätseigenschaft.

Aufgabe 9.1* *Diagonaldominanz und Stabilität von Mehrgrößensystemen*

Gegeben ist die Übertragungsfunktionsmatrix

$$G_0(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{k_{12}}{s+3} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+4} \end{pmatrix}$$

der offenen Kette.

1. Für welche Werte für k_{12} ist die offene Kette diagonaldominant?
2. Überprüfen Sie mit Hilfe des Hurwitzkriteriums, für welche Werte für k_{12} der geschlossene Kreis stabil ist und die Integritätseigenschaft besitzt?
3. Für welche Werte für k_{12} erfüllt der Regelkreis die im Satz 9.2 angegebene hinreichende Stabilitätsbedingung. $\square$

Aufgabe 9.2 *Diagonaldominanz dezentral geregelter Systeme*

Untersuchen Sie die Diagonaldominanz der Rückführdifferenzmatrix eines dezentral geregelten Systems mit zwei Teilreglern, für die Sie der Einfachheit halber proportionale Rückführungen einsetzen können. Wie werden Zeilendominanz und Spaltendominanz durch die Reglerparameter beeinflusst? Unter welchen Bedingungen kann man die Diagonaldominanz der Rückführdifferenzmatrix durch eine geeignete Wahl der Reglerparameter sicher stellen?

$\square$

9.3 Entwurf mit dem Direkten Nyquistverfahren

Die Ergebnisse des letzten Abschnitts zeigen einen Weg, um eine Mehrgrößenregelungsaufgabe mit Hilfe von m einschleifigen Regelkreisen zu lösen. Wenn die Rückföhrdifferenzmatrix diagonal dominant ist, so sind die Kopplungen in Bezug zu den Eigenschaften der einschleifigen Regelkreise so schwach, dass sie die Stabilität des geregelten Mehrgrößensystems nicht gefährden.

Die Forderung nach Diagonaldominanz bezieht sich auf die Rückföhrdifferenzmatrix, also auf die offene Kette. Man wird diese Diagonaldominanz jedoch nur dann erreichen, wenn die Querkopplungen bereits in der Regelstrecke schwach sind, die Regelstrecke also zumindest näherungsweise diagonal dominant ist. Für die Integrität des Regelkreises muss man ferner fordern, dass die Regelstrecke selbst stabil ist. Für die Anwendung des Nyquistkriteriums in der in Satz 4.2 angegebenen Form darf die offene Kette nicht sprungfähig sein, was bei Reglern mit P-Anteil nur dann gesichert ist, wenn die Strecke nicht sprungfähig ist.

Dieses Verfahren ist von ROSENBROCK als Direktes Nyquistverfahren bezeichnet worden, weil es mit den Ortskurven der offenen Kette (engl. *nyquist array*) arbeitet. Es gibt auch ein Inverses Nyquistverfahren, das mit den Ortskurven der invertierten offenen Ketten $G_{0i}^{-1}(s)$ arbeitet, hier aber nicht behandelt wird.

Entwurfsverfahren 9.1 Direktes Nyquistverfahren

Voraussetzungen:

- Die Regelstrecke ist nicht sprungfähig.
 - Die Regelstrecke ist näherungsweise diagonal dominant.
 - Die Regelstrecke ist E/A-stabil (wenn die Integritätseigenschaft gefordert ist).
1. Es werden m Eingrößenregler $K_i(s)$ entworfen, die zusammen mit der betreffenden Hauptregelstrecke $G_{ii}(s)$ die Güteforderungen an die einzelnen Regelkreise erfüllen.
 2. Es wird die Diagonaldominanz der Rückföhrdifferenzmatrix des vollständigen Regelkreises überprüft. Ist diese Eigenschaft erfüllt, so ist der Regelkreis stabil (und besitzt die Integritätseigenschaft). Andernfalls muss versucht werden, durch Wahl anderer Eingrößenregler $K_i(s)$ die Diagonaldominanz herzustellen.
 3. Die Regelgüte des Regelkreises mit m Reglern wird anhand von Simulationsuntersuchungen bewertet.

Ergebnis: Dezentrale Regelung bestehend aus m Eingrößenreglern $K_i(s)$

Im ersten Schritt kann ein beliebiges Verfahren für den Entwurf von Eingrößenreglern eingesetzt werden. Der eigentliche Entwurfsvorgang ist damit auf den für einschleifige Regelkreise zurückgeföhr, wobei auch alle Arten von Dynamikforderungen, die diese Verfahren behandeln, berücksichtigt werden können.

Bei der Analyse ist zu beachten, dass die Diagonaldominanz nur die Stabilität und Integrität des Regelkreises sichert, jedoch keine unmittelbaren Aussagen

über die Regelgüte im Sinne von Dynamikforderungen zulässt. Die Gershgorinbänder vermitteln allerdings einen Eindruck von der Stärke, mit der sich die einzelnen Regelkreise über die Querkopplungen innerhalb der Regelstrecke untereinander beeinflussen. Je weiter diese Bänder vom Prüfpunkt -1 entfernt sind, umso weniger Neigung zum Schwingen haben die Regelkreise.

Eine genauere Bewertung der Regelgüte ist jedoch nur anhand von Simulationsuntersuchungen möglich, wobei es bei vielen praktischen Aufgaben ausreicht, das vollständig geregelte System zu untersuchen. Für den Fall, dass ein Regler durch Ausfall von Mess- oder Stellsignalen außer Betrieb genommen wird, begnügt man sich i. Allg. mit der Integrität und akzeptiert, dass die Regelgüte der weiterhin geschlossenen Regelkreise schlechter ist.

Beispiel 9.1 Dezentrale Knotenspannungsregelung von Elektroenergienetzen

Es ist die in Abb. 2.8 auf S. 36 gezeigte Knotenspannungsregelung eines Elektroenergienetzes zu entwerfen. An der Spannungsregelung werden viele Kraftwerke beteiligt. Auf Grund der großen Entfernung zwischen diesen Kraftwerken muss mit dezentralen Reglern gearbeitet werden. Gefordert wird, dass die Führungsübergangsfunktion möglichst schnell und ohne Überspringen ihren Endwert erreicht. Da die Knotenspannungsregler im Normalbetrieb des Netzes zusammen mit den entsprechenden Kraftwerksblöcken zu- und abgeschaltet werden, muss das System die Integritätseigenschaft besitzen.

Der erste Schritt des Direkten Nyquistverfahrens, in dem die Regler an den einzelnen Kraftwerken entworfen werden, wurde im Beispiel I-11.1 behandelt. Es wird jetzt für ein aus drei Kraftwerken bestehendes Netz untersucht, ob der dort erhaltene Regler auch als dezentraler Regler eingesetzt werden kann und dabei die Integritätseigenschaft erfüllt.

Das betrachtete Netz besteht aus drei gleichen Kraftwerken, so dass der im Beispiel I-11.1 entworfene Regler

$$K_i(s) = \left(1 + \frac{2}{s}\right) \frac{1+s}{1+0,22s}$$

ohne Veränderung für alle drei Kraftwerke eingesetzt werden kann. Die Kraftwerke verhalten sich jedoch im gekoppelten Betrieb etwas anders als an dem im Beispiel I-11.1 angenommenen „starrten Netz“, weil das Netz bezüglich der Kraftwerkseinspeisungen nicht symmetrisch ist.

Da die Regelstrecke die dynamische Ordnung neun hat, sind die Elemente der Übertragungsfunktionsmatrix gebrochen rationale Ausdrücke, in denen Polynome bis zum Grad neun vorkommen. Deshalb wird hier anstelle der Übertragungsfunktionsmatrix das Zustandsraummodell (A, B, C, D) angegeben, aus dem die Übertragungsfunktionsmatrix

$$G(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

mit Hilfe von Gl. (2.12) berechnet werden kann:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2,445 & -0,160 & 0 & -0,162 & 0 & 0 & -0,129 & 0 & 0 \\ 2,557 & 0 & 0 & -0,007 & 0 & 0 & -0,006 & 0 & 0 \\ 3,060 & 0 & -2 & 0,984 & 0 & 0 & 0,785 & 0 & 0 \\ -0,162 & 0 & 0 & -2,546 & -0,160 & 0 & -0,111 & 0 & 0 \\ -0,007 & 0 & 0 & 2,552 & 0 & 0 & -0,005 & 0 & 0 \\ 0,984 & 0 & 0 & 3,672 & 0 & -2 & 0,673 & 0 & 0 \\ -0,129 & 0 & 0 & -0,111 & 0 & 0 & -2,289 & -0,160 & 0 \\ -0,006 & 0 & 0 & -0,005 & 0 & 0 & 2,564 & 0 & 0 \\ 0,785 & 0 & 0 & 0,673 & 0 & 0 & 2,116 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0,900 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,900 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,900 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{O}.$$

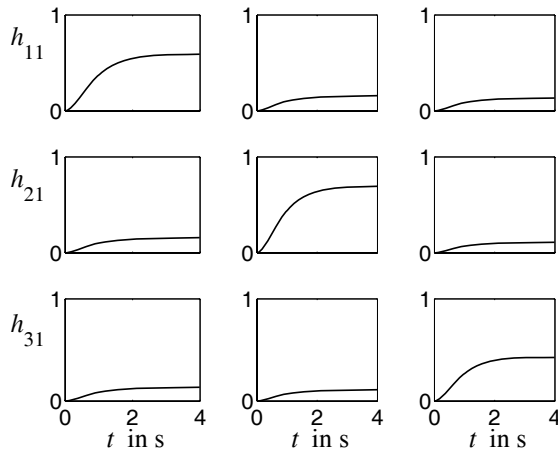


Abb. 9.5: Übergangsfunktionsmatrix der Regelstrecke

Abbildung 9.5 zeigt die Übergangsfunktionsmatrix und gibt einen Eindruck von den dynamischen Eigenschaften der Regelstrecke. Um die Stärke der Querkopplungen zu verdeutlichen, wurde für alle Diagramme derselbe Maßstab gewählt.

Wie man mit dem angegebenen Modell und dem dezentralen Regler nachweisen kann, ist die Rückführdifferenzmatrix des Regelkreises mit den drei Eingößenreglern diagonal-dominant. Folglich ist der Regelkreis stabil, da, wie in Beispiel I-11.1 gezeigt wurde, die Einzelregelkreise stabil sind. Außerdem besitzt der Regelkreis die Integritätseigenschaft.

Zeichnet man die Gershgorinbänder, so erkennt man, dass diese Bänder einen großen Abstand vom Prüfpunkt -1 haben (Abb. 9.6). Es ist also zu erwarten, dass der Regel-

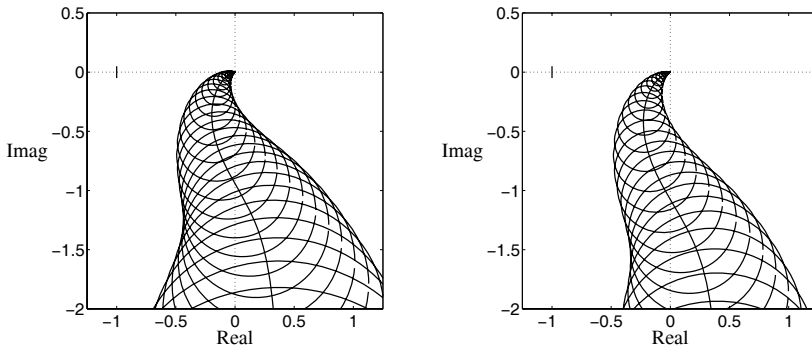


Abb. 9.6: Gershgorinband für den ersten und den zweiten Regelkreis

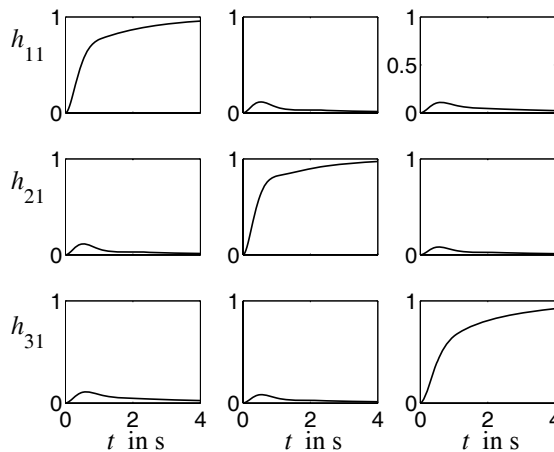


Abb. 9.7: Führungsübergangsfunktionsmatrix des Elektroenergienetzes mit dezentraler Knotenspannungsregelung

kreis bei sprungförmigen Änderungen der Führungsgröße mit wenig Überschwängen einschwingt, so, wie es für die Einzelregelkreise beim Reglerentwurf gefordert wurde. Dass dies tatsächlich so ist, zeigt Abb. 9.7. $\square$

Für die Durchführung des Entwurfes sind zwei Eigenschaften der Gershgorinbänder von Bedeutung. Erstens hängen die Radien $D_i(s)$ der Gershgorinkreise um die Ortskurve des i -ten Regelkreises nur vom zugehörigen Regler $K_i(s)$ und nicht von den anderen Reglern $K_j(s)$ ($j \neq i$) ab, denn nach Gl. (9.4) gilt

$$D_i(j\omega) = \sum_{j=1, j \neq i}^m |K_i(j\omega)G_{ij}(j\omega)| = |K_i(j\omega)| \sum_{j=1, j \neq i}^m |G_{ij}(j\omega)|.$$

Das heißt, der Entwurf des i -ten Reglers kann anhand der Ortskurve der offenen Kette des i -ten Hauptregelkreises erfolgen, wobei der Einfluss der nach Inbetriebnahme aller Regler wirkenden Querkopplungen durch das Gershgorinband berücksichtigt wird. Wenn alle Regler $K_i(s)$ so ausgewählt werden, dass für jeden Hauptregelkreis das Gershgorinband den kritischen Punkt -1 nicht enthält, so ist gesichert, dass die Rückführdifferenzmatrix diagonaldominant und folglich der Regelkreis auch unter der Wirkung der Querkopplungen stabil ist. Der Abstand, den die Bänder vom Punkt -1 haben, ist ein Maß für die Stabilitätsreserve, die der betreffende Regelkreis besitzt.

Zweitens ist aus dem Quotienten

$$\frac{D_i(j\omega)}{|K_i(j\omega)G_{ii}(j\omega)|} = \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^m |K_i(j\omega)G_{ij}(j\omega)|}{|K_i(j\omega)G_{ii}(j\omega)|} = \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^m |G_{ij}(j\omega)|}{|G_{ii}(j\omega)|}$$

zu erkennen, dass sich die relative Größe der Gershgorinkreise durch den Regler nicht ändert (Abb. 9.4). Der Quotient beschreibt das Verhältnis des Kreisdurchmessers zum Abstand des Kreismittelpunktes vom Ursprung der komplexen Ebene. Ist die Regelstrecke stabil, so können die hinreichenden Stabilitätsbedingungen aus Satz 9.2 deshalb durch die Verwendung hinreichend kleiner Reglerverstärkungen $|K_i(j\omega)|$ erfüllt werden.

Für die Stabilität ist allerdings die auf $F_{ii}(j\omega)$ bezogene Größe der Gershgorinkreise maßgebend, denn der Radius $D_i(j\omega)$ darf den Abstand des Kreismittelpunktes vom kritischen Punkte -1 , der gleich

$$|F_{ii}(j\omega)| = |1 + K_i(j\omega)G_{ii}(j\omega)|$$

ist, nicht übersteigen. Die Stabilitätsreserve ist also durch den Quotienten

$$\frac{D_i(j\omega)}{|1 + K_i(j\omega)G_{ii}(j\omega)|} = \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^m |F_{ij}(j\omega)|}{|F_{ii}(j\omega)|} \quad (9.11)$$

gegeben, der für die Zeilendominanz der Rückführdifferenzmatrix $F(s)$ kleiner als eins sein muss.

Entwurf von PI-Reglern. Die Forderung nach „hinreichend kleiner“ Reglerverstärkung kann nicht für alle Frequenzen erfüllt werden, wenn die Regler integrale Anteile besitzen und wenn insbesondere I-Regler

$$K_i(j\omega) = \frac{1}{j\omega T_{Ii}}$$

eingesetzt werden, denn für diese Regler wird $|K_i(j\omega)|$ für kleine Frequenzen ω sehr groß. Die Bedingung

$$|1 + K_i(j\omega)G_{ii}(j\omega)| > \sum_{j=1, j \neq i}^m |K_i(j\omega)G_{ij}(j\omega)|,$$

die erfüllt werden muss, damit der Punkt -1 nicht im Gershgorinband liegt, führt für kleine ω auf die Forderung

$$\left| \frac{1}{K_i(j\omega)} + G_{ii}(j\omega) \right| > \sum_{j=1, j \neq i}^m |G_{ij}(j\omega)|$$

$$|j\omega T_{Ii} + G_{ii}(j\omega)| > \sum_{j=1, j \neq i}^m |G_{ij}(j\omega)|,$$

also für $\omega \rightarrow 0$ auf die

Existenzbedingung für PI-Regler mit Integritätseigenschaft:

$$|G_{ii}(0)| > \sum_{j=1, j \neq i}^m |G_{ij}(0)|. \quad (9.12)$$

Das heißt, die Statikmatrix der Regelstrecke

$$\mathbf{K}_s = \mathbf{G}(0)$$

muss diagonaldominant sein, damit der I-Regler (und ebenso ein PI-Regler) mit hinreichend kleiner Reglerverstärkung (bzw. hinreichend großer Nachstellzeit T_{Ii}) auf eine diagonaldominante Rückfuhrdifferenzmatrix führt.

Die Bedingung (9.12) ist schärfer als die auf Seite 206 angegebene Existenzbedingung (5.10) von I-Reglern, bei der lediglich $\det \mathbf{K}_s \neq 0$ gefordert wird. Dies verwundert nicht, wenn man bedenkt, dass bei Erfüllung der hier erhobenen Forderung nach Diagonaldominanz der Rückfuhrdifferenzmatrix nicht nur die Stabilität, sondern bei hinreichend großen Integrationszeitkonstanten T_{Ii} ($i = 1, 2, \dots, m$) sogar die Integrität des Regelkreises gewährleistet wird. Außerdem muss man bedenken, dass die hier durchgeführte Analyse auf einer Bedingung beruht, die hinreichend, aber nicht notwendig für Stabilität und Integrität ist. Es wird sich im Abschn. 9.4 zeigen, dass die erhobene Forderung an $\mathbf{K}_s$ noch etwas abgeschwächt werden kann, ohne dass die Integrität des Regelkreises gefährdet wird.

9.4 Verbesserung der Analyse des Regelkreises

Wie die vorangegangenen Abschnitte gezeigt haben, kann der Entwurf eines aus mehreren einschleifigen Regelkreisen bestehenden Mehrgrößenreglers auf unabhängige Entwurfsschritte für m Eingrößenregler zurückgeführt werden, wenn die dabei entstehende Rückfuhrdifferenzmatrix diagonaldominant ist. Die Eigenschaft der

Diagonaldominanz wurde dabei in Definition 9.1 anhand von Abschätzungen der Eigenwerte mit Hilfe des Gershgorintheorems definiert. Auf dieser Grundlage wurde das Direkte Nyquistverfahren von ROSENBROCK entwickelt, und in dieser Form ist es auch heute noch in den meisten Monografien beschrieben.

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass man den Einfluss der Querkopplungen auf das Regelkreisverhalten genauer abschätzen kann, als es mit Hilfe des Gershgorintheorems möglich ist. Da eine verbesserte Abschätzung dieser Einflüsse schließlich dazu führt, dass für stärkere Querkopplungen als bisher nachgewiesen werden kann, dass sie durch die Regelung tolerierbar sind, hat diese Verbesserung des Verfahrens unmittelbaren Einfluss auf seine praktische Anwendung.

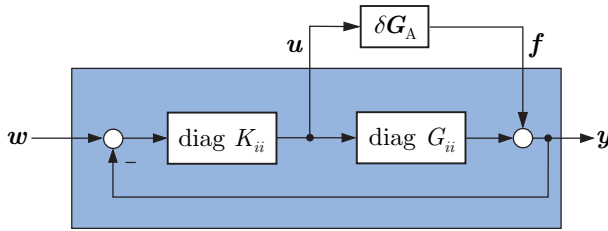


Abb. 9.8: Zerlegung des Regelkreises

9.4.1 Ableitung einer Stabilitätsbedingung aus Robustheitsbetrachtungen

Verbunden mit der im Folgenden behandelten verbesserten Abschätzung ist eine interessante neue Interpretation der dem Direkten Nyquistverfahren zu Grunde liegenden Vorgehensweise. Man kann nämlich den Weg, Eingrößenregler unabhängig voneinander zu entwerfen und anschließend ihre Verkopplung über die Regelstrecke abzuschätzen, auch als ein Problem der robusten Regelung auffassen.

Da während des Reglerentwurfes die Querkopplungen $G_{ij}(s)$ in der Regelstrecke vernachlässigt werden, kann man sie als „Modellunsicherheiten“ interpretieren und die Regelstrecke in der Form

$$\mathbf{G}(s) = \hat{\mathbf{G}}(s) + \delta\mathbf{G}_A(s)$$

mit dem Näherungsmodell

$$\hat{\mathbf{G}}(s) = \begin{pmatrix} G_{11}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G_{22}(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & G_{mm}(s) \end{pmatrix} = \text{diag } G_{ii}(s)$$

und dem Fehlermodell

$$\delta \mathbf{G}_A(s) = \begin{pmatrix} 0 & G_{12}(s) & \cdots & G_{1m}(s) \\ G_{21}(s) & 0 & \cdots & G_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{m1}(s) & G_{m2}(s) & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

zerlegen (vgl. Abb. 9.8 mit Abb. 4.17 (oben) auf S. 171). Als Abschätzung der Modellunsicherheiten verwendet man dann einfach den Betrag von $\delta \mathbf{G}_A(s)$:

$$\bar{\mathbf{G}}_A(s) = |\delta \mathbf{G}_A(s)| = \begin{pmatrix} 0 & |G_{12}(s)| & \cdots & |G_{1m}(s)| \\ |G_{21}(s)| & 0 & \cdots & |G_{2m}(s)| \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ |G_{m1}(s)| & |G_{m2}(s)| & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Die m Eingrößenregler führen zu einem stabilen Regelkreis, wenn die Bedingung (4.63) erfüllt ist. Die in dieser Bedingung vorkommende Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}_{\text{uf}}(s)$ erhält man, wenn man die m Eingrößenregler zum Mehrgrößenregler

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} K_1(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_2(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_m(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1(s) - W_1(s) \\ Y_2(s) - W_2(s) \\ \vdots \\ Y_m(s) - W_m(s) \end{pmatrix} \\ &= -\text{diag } K_i(s) (\mathbf{Y}(s) - \mathbf{W}(s)) \end{aligned}$$

zusammenfasst und mit dem Näherungsmodell $\hat{\mathbf{G}}(s)$ verknüpft:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\text{uf}}(s) &= -\text{diag } K_i(s) (\mathbf{I} + \text{diag } G_{ii}(s) \text{diag } K_i(s))^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{K_1(s)}{1+G_{11}(s)K_1(s)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{K_2(s)}{1+G_{22}(s)K_2(s)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{K_m(s)}{1+G_{mm}(s)K_m(s)} \end{pmatrix} \\ &= \text{diag} \left(-\frac{K_i(s)}{1+G_{ii}(s)K_i(s)} \right). \end{aligned} \quad (9.13)$$

Die Stabilitätsbedingung (4.63) lautet dann

$$\lambda_P \left\{ \left| \text{diag} \left(-\frac{K_i(s)}{1+G_{ii}(s)K_i(s)} \right) \right| \begin{pmatrix} 0 & |G_{12}| & \cdots & |G_{1m}| \\ |G_{21}| & 0 & \cdots & |G_{2m}| \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ |G_{m1}| & |G_{m2}| & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\} < 1. \quad (9.14)$$

Diese Ungleichung kann man als eine Bedingung an die Rückföhrdifferenzmatrix

$$\mathbf{F}(j\omega) = \mathbf{I} + \text{diag } K_i(j\omega) \mathbf{G}(j\omega)$$

formulieren, wenn man folgende Umformungen unternimmt

$$\begin{aligned} |\mathbf{G}_{\text{uf}}| \hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{A}} &= \left| \text{diag} \left(-\frac{K_i}{1 + G_{ii}K_i} \right) \right| \begin{pmatrix} 0 & |G_{12}| & \cdots & |G_{1m}| \\ |G_{21}| & 0 & \cdots & |G_{2m}| \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ |G_{m1}| & |G_{m2}| & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ &= \text{diag} \left(\frac{1}{|1 + G_{ii}K_i|} \right) \begin{pmatrix} 0 & |K_1 G_{12}| & \cdots & |K_1 G_{1m}| \\ |K_2 G_{21}| & 0 & \cdots & |K_2 G_{2m}| \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ |K_m G_{m1}| & |K_m G_{m2}| & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ &= \text{diag} \frac{1}{|F_{ii}(j\omega)|} \begin{pmatrix} 0 & |F_{12}(j\omega)| & \cdots & |F_{1m}(j\omega)| \\ |F_{21}(j\omega)| & 0 & \cdots & |F_{2m}(j\omega)| \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ |F_{m1}(j\omega)| & |F_{m2}(j\omega)| & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und dabei beachtet, dass die Rückföhrdifferenzmatrix die Hauptdiagonalelemente

$$F_{ii}(j\omega) = 1 + K_i(j\omega)G_{ii}(j\omega)$$

sowie die Elemente

$$F_{ij}(j\omega) = K_i(j\omega)G_{ij}(j\omega) \quad (i \neq j)$$

besitzt. Die Bedingung (9.14) kann also in Abhängigkeit von der Rückföhrdifferenzmatrix formuliert werden:

Definition 9.2 (Verallgemeinerte Diagonaldominanz)

Die Rückföhrdifferenzmatrix $\mathbf{F}(s)$ heißt verallgemeinert diagonaldominant, wenn die Bedingung

$$\lambda_P \left\{ \text{diag} \frac{1}{|F_{ii}(j\omega)|} \begin{pmatrix} 0 & |F_{12}(j\omega)| & \cdots & |F_{1m}(j\omega)| \\ |F_{21}(j\omega)| & 0 & \cdots & |F_{2m}(j\omega)| \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ |F_{m1}(j\omega)| & |F_{m2}(j\omega)| & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\} < 1 \quad (9.15)$$

für alle ω erfüllt ist.

Im Anhang 2 ist erläutert, dass diese Bedingung äquivalent ist zur Forderung, dass die Vergleichsmatrix $\mathbf{C}(\mathbf{F}(j\omega))$ für alle Frequenzen ω eine M-Matrix ist.

Wie der Begriff verallgemeinerte Diagonaldominanz andeutet, ist die Bedingung (9.15) schwächer als die Forderungen (9.7) und (9.8), die für die Diagonaldominanz nach Definition 9.1 erfüllt werden muss. Das heißt, dass es Rückführdifferenzmatrizen gibt, die nicht diagonaldominant, jedoch verallgemeinert diagonaldominant sind. Diese Tatsache kann man anhand der im Anhang 2 zusammengefassten Aussagen über M-Matrizen beweisen. An Stelle einer ausführlichen Erläuterung sei hier darauf hingewiesen, dass man sich diesen Zusammenhang der beiden Eigenschaften anhand von Beispiel 4.3 auf S. 176 plausibel machen kann.

Aus der Ableitung der Beziehung (9.15) geht hervor, dass der Regelkreis stabil ist, wenn die Einzelregelkreise stabil sind und die Rückführdifferenzmatrix verallgemeinert diagonaldominant ist.

Satz 9.3 (Hinreichende Stabilitätsbedingung)

Der aus dem Regler $\text{diag } K_i(s)$ und der Regelstrecke $G(s)$ bestehende Regelkreis ist stabil, wenn die Rückführdifferenzmatrix (9.10) verallgemeinert diagonaldominant ist und wenn die Übertragungsfunktionen $G_{0i}(s)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) der offenen Ketten der m einschleifigen Regelkreise den Punkt -1 insgesamt $-n^+$ -mal im Uhrzeigersinn umschlingen. Dabei bezeichnet n^+ die Zahl der Pole von $G_0(s)$ mit positivem Realteil.

Wenn die Regelstrecke stabil ist, so wird mit diesem Stabilitätskriterium gleichzeitig die Integritäitseigenschaft nachgewiesen.

Verallgemeinerte Gershgorinbänder. Obwohl das hier angegebene Stabilitätskriterium nicht wie die im Satz 9.2 angegebene Stabilitätsbedingung aus einer Eigenwertabschätzung entstand, sondern aufgrund einer Robustheitsbetrachtung hergeleitet wurde, lässt auch dieses neue Kriterium eine Abschätzung der Hauptdiagonalelemente der Rückführdifferenzmatrix und folglich der Frequenzgänge der offenen Kette zu. Wenn auch der mathematische Weg dorthin nicht über das Gershgorintheorem, sondern über die im Anhang 2 kurz beschriebene Theorie nichtnegativer Matrizen verläuft, so ist diese Ähnlichkeit der beiden Ergebnisse nicht ganz überraschend. Beide Stabilitätskriterien enthalten Bedingungen, unter denen aus der Stabilität der Einzelregelkreise die Stabilität des gesamten Regelkreises gefolgert werden kann. Da in beiden Kriterien nur Abschätzungen der Querkopplungen und nicht die Querkopplungen selbst eingehen, ist der Stabilitätsnachweis nur möglich, wenn die Amplituden der Querkopplungen hinreichend klein sind. Für die Eigenwerte der Rückführdifferenzmatrix gilt die Abschätzung

$$|\lambda_{Fi}(j\omega) - F_{ii}(j\omega)| \leq d(F) |F_{ii}(j\omega)| \quad (9.16)$$

mit

$$d(\mathbf{F}(j\omega)) = \lambda_P \left\{ \text{diag} \frac{1}{|F_{ii}(j\omega)|} \begin{pmatrix} 0 & |F_{12}(j\omega)| & \cdots & |F_{1m}(j\omega)| \\ |F_{21}(j\omega)| & 0 & \cdots & |F_{2m}(j\omega)| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |F_{m1}(j\omega)| & |F_{m2}(j\omega)| & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad (9.17)$$

was auch als verallgemeinertes Gershgorintheorem bezeichnet wird.

Satz 9.4 (Verallgemeinerte Gershgorinbänder)

Wenn die Rückföhrdifferenzmatrix $\mathbf{F}(s)$ verallgemeinert diagonaldominant ist, so gilt Gl. (9.16)

$$|\lambda_{Fi}(j\omega) - F_{ii}(j\omega)| \leq d(\mathbf{F}) |F_{ii}(j\omega)|.$$

Das heißt, in der komplexen Ebene liegen die Eigenwerte $\lambda_{Fi}(j\omega)$ innerhalb der durch Gl. (9.16) beschriebenen Bänder um die Ortskurven von $F_{ii}(j\omega)$.

Man zeichnet allerdings anstelle der Ortskurven

$$F_{ii}(j\omega) = 1 + K_i(j\omega)G_{ii}(j\omega)$$

wiederum die Ortskurven der offenen Kette $G_{0i}(j\omega) = K_i(j\omega)G_{ii}(j\omega)$, schlägt die Kreise um diese Punkte und überprüft die Umschlingungsbedingung um den kritischen Punkt -1 . Die Stabilitätsreserve ist durch den Quotienten des Radius und des Mittelpunktabstandes vom Punkt -1 gegeben, wobei hier im Unterschied zu der mit dem Gershgorintheorem erhaltenen Gl. (9.11) ein vom Einzelregelkreis i unabhängiger Quotient

$$\frac{d(\mathbf{F}(j\omega)) |F_{ii}(j\omega)|}{|1 + K_i(j\omega)G_{ii}(j\omega)|} = d(\mathbf{F}(j\omega)) \quad (9.18)$$

entsteht.

9.4.2 Abschätzung des E/A-Verhaltens des Regelkreises

Die Integritätseigenschaft sagt nur etwas über die Stabilität des Regelkreises bei Ausfall von Eingrößenreglern aus. Wenn die Regler jedoch, wie im Beispiel der Knotenspannungsregelung, nicht nur durch Fehler in der Datenübertragung ausfallen, sondern sogar regelmäßig während des Normalbetriebes abgeschaltet werden, so ist es auch interessant zu wissen, wie sich das E/A-Verhalten der verbleibenden Regelkreise ändert. Eine derartige Abschätzung kann man vornehmen, wenn man den Regelkreis zunächst entsprechend Abb. 9.8 in zwei Teilsysteme zerlegt, die durch

$$\mathbf{F}(s) = \delta \mathbf{G}(s) \mathbf{U}(s) \quad (9.19)$$

und

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}_{yw}(s)\mathbf{W}(s) + \mathbf{G}_{yf}(s)\mathbf{F}(s) \quad (9.20)$$

$$\mathbf{U}(s) = \mathbf{G}_{uw}(s)\mathbf{W}(s) + \mathbf{G}_{uf}(s)\mathbf{F}(s) \quad (9.21)$$

beschrieben sind. Dabei ist $\mathbf{F}(s)$ die Laplacetransformierte des „Fehlersignals“, die vom Fehlermodell zum Regelkreis mit dem Nominalmodell führt. Diese üblicherweise verwendete Signalbezeichnung darf nicht mit der Rückführdifferenzmatrix $\mathbf{F}(s)$ verwechselt werden (vgl. Abschn. 4.3.5). Ähnlich wie für die Matrix $\mathbf{G}_{uf}(s)$ in Gl. (9.13) erhält man für die anderen Übertragungsfunktionsmatrizen die Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{yw}(s) &= \text{diag } G_{ii}(s) \text{diag } K_i(s) (\mathbf{I} + \text{diag } G_{ii}(s) \text{diag } K_i(s))^{-1} \\ &= \text{diag } \left(\frac{G_{ii}(s)K_i(s)}{1 + G_{ii}(s)K_i(s)} \right) \end{aligned} \quad (9.22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{yf}(s) &= (\mathbf{I} + \text{diag } G_{ii}(s) \text{diag } K_i(s))^{-1} \\ &= \text{diag } \left(\frac{1}{1 + G_{ii}(s)K_i(s)} \right) \end{aligned} \quad (9.23)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{uw}(s) &= \text{diag } K_i(s) (\mathbf{I} + \text{diag } G_{ii}(s) \text{diag } K_i(s))^{-1} \\ &= \text{diag } \left(\frac{K_i(s)}{1 + G_{ii}(s)K_i(s)} \right). \end{aligned} \quad (9.24)$$

Ziel der folgenden Abschätzung ist es, eine E/A-Beschreibung

$$\mathbf{Y}(s) = (\hat{\mathbf{G}}_w(s) + \delta\mathbf{G}_w(s)) \mathbf{W}(s)$$

für den Regelkreis zu erhalten, in der $\hat{\mathbf{G}}_w(s)$ eine näherungsweise Beschreibung darstellt, bei der die Querkopplungen innerhalb der Regelstrecke vernachlässigt sind, und $\delta\mathbf{G}_w(s)$ den „Fehler“ beschreibt, der durch die Querkopplungen hervorgerufen wird. Für den Fehler soll nur eine obere Schranke $\hat{\mathbf{G}}_w(s)$ bestimmt werden.

Vernachlässigt man die Querkopplungen innerhalb der Regelstrecke, so gilt $\mathbf{F}(s) = \mathbf{0}$ und man erhält aus Gl. (9.20) die Beziehung

Näherungsmodell:

$$\hat{\mathbf{Y}}(s) = \mathbf{G}_{yw}(s)\mathbf{W}(s) = \text{diag } \left(\frac{G_{ii}(s)K_i(s)}{1 + G_{ii}(s)K_i(s)} \right) \mathbf{W}(s). \quad (9.25)$$

Erwartungsgemäß besteht das Näherungsmodell aus den entkoppelten einschleifigen Regelkreisen:

$$\hat{\mathbf{G}}_w(s) = \text{diag } \left(\frac{G_{ii}(s)K_i(s)}{1 + G_{ii}(s)K_i(s)} \right). \quad (9.26)$$

Der Approximationsfehler $\mathbf{Y}(s) - \hat{\mathbf{Y}}(s)$ kann entsprechend Gl. (9.20) durch

$$\mathbf{Y}(s) - \hat{\mathbf{Y}}(s) = \mathbf{G}_{yf}(s) \mathbf{F}(s)$$

dargestellt werden. Daraus und aus Gl. (9.19) erhält man

$$\begin{aligned} |\mathbf{Y}(s) - \hat{\mathbf{Y}}(s)| &\leq |\mathbf{G}_{yf}(s)| |\mathbf{F}(s)| \\ |\mathbf{F}(s)| &\leq |\delta \mathbf{G}_A(s)| |\mathbf{U}(s)| \\ &\leq \bar{\mathbf{G}}_A(s) |\mathbf{U}(s)| \end{aligned}$$

und

$$|\mathbf{Y}(s) - \hat{\mathbf{Y}}(s)| \leq |\mathbf{G}_{yf}(s)| \bar{\mathbf{G}}_A(s) |\mathbf{U}(s)|. \quad (9.27)$$

Andererseits folgt aus Gl. (9.21)

$$\begin{aligned} |\mathbf{U}(s)| &\leq |\mathbf{G}_{uw}(s)| |\mathbf{W}(s)| + |\mathbf{G}_{uf}(s)| |\mathbf{F}(s)| \\ &\leq |\mathbf{G}_{uw}(s)| |\mathbf{W}(s)| + |\mathbf{G}_{uf}(s)| \bar{\mathbf{G}}_A(s) |\mathbf{U}(s)| \end{aligned}$$

und

$$(\mathbf{I} - |\mathbf{G}_{uf}(s)| \bar{\mathbf{G}}_A(s)) |\mathbf{U}(s)| \leq |\mathbf{G}_{uw}(s)| |\mathbf{W}(s)|.$$

Die letzte Ungleichung kann mit $(\mathbf{I} - |\mathbf{G}_{uf}(s)| \bar{\mathbf{G}}_A(s))^{-1}$ multipliziert werden, weil unter der Voraussetzung, dass die Rückführdifferenzmatrix verallgemeinert diagonaldominant ist und folglich die Gl. (9.15) erfüllt, die Matrix $(\mathbf{I} - |\mathbf{G}_{uf}(s)| \bar{\mathbf{G}}_A(s))$ eine M-Matrix und deren Inverse deshalb eine nichtnegative Matrix ist:

$$(\mathbf{I} - |\mathbf{G}_{uf}(s)| \bar{\mathbf{G}}_A(s))^{-1} \geq \mathbf{O}$$

(vgl. Gl. (A2.95)). Man erhält

$$|\mathbf{U}(s)| \leq (\mathbf{I} - |\mathbf{G}_{uf}(s)| \bar{\mathbf{G}}_A(s))^{-1} |\mathbf{G}_{uw}(s)| |\mathbf{W}(s)|$$

und zusammen mit Gl. (9.27) schließlich die Beziehung

Fehlerabschätzung: $ \mathbf{Y}(s) - \hat{\mathbf{Y}}(s) \leq \mathbf{V}(s) \mathbf{W}(s) $ mit $\mathbf{V}(s) = \mathbf{G}_{yf}(s) \bar{\mathbf{G}}_A(s) (\mathbf{I} - \mathbf{G}_{uf}(s) \bar{\mathbf{G}}_A(s))^{-1} \mathbf{G}_{uw}(s) $.	(9.28)

Diese Ungleichung besagt, dass der Approximationsfehler $\delta \mathbf{G}_w(s)$ durch $\mathbf{V}(s)$ beschränkt ist:

$$|\delta \mathbf{G}_w(s)| \leq \mathbf{V}(s). \quad (9.29)$$

Satz 9.5 (Abschätzung des E/A-Verhaltens des Regelkreises)

Wenn der aus dem Regler $\text{diag } K_i(s)$ und der Regelstrecke $\mathbf{G}(s)$ bestehende Regelkreis die Stabilitätsbedingung aus Satz 9.3 erfüllt, so ist das Führungsverhalten durch

$$\mathbf{Y}(s) = \left(\text{diag} \left(\frac{G_{ii}(s) K_i(s)}{1 + G_{ii}(s) K_i(s)} \right) + \delta \mathbf{G}_w(s) \right) \mathbf{W}(s)$$

beschrieben, wobei für $\delta \mathbf{G}_w(s)$ die Beziehung (9.29) gilt.

Grafisch kann man dieses Ergebnis wiederum als Bänder um die Ortskurven von $\hat{G}_w(s) = \text{diag} \left(\frac{G_{ii}(s)K_i(s)}{1+G_{ii}(s)K_i(s)} \right)$ deuten, wobei die Radien der Kreise um $G_{wii}(j\omega)$ durch die Hauptdiagonalelemente $V_{ii}(j\omega)$ der Matrix $V(j\omega)$ gegeben sind. Für die Querkopplungen G_{wij} im Regelkreis wird mit dem Näherungswert null gerechnet ($\hat{G}_{wij} = 0$), so dass Kreise um den Nullpunkt mit den Radien $V_{ij}(j\omega)$ entstehen, in denen die wahren Werte der Querkopplungen liegen. Anschaulicher als diese Interpretation ist die Darstellung im Bodediagramm. Dort wird $|G_{wij}(j\omega)|$ durch den Amplitudengang von $V_{ij}(j\omega)$ nach oben begrenzt.

Man kann die Ungleichungen (9.28) und (9.29) auch für die Führungsübertragungsfunktionen G_{wii} im Bodediagramm verdeutlichen, wenn man die Ungleichungen

$$\begin{aligned} |G_{wii}(j\omega)|_{\text{dB}} &= 20 \log |G_{wii}(j\omega)| \\ &= 20 \log |\hat{G}_{wii}(j\omega) + \delta G_{wii}(j\omega)| \\ &\leq 20 \log (|\hat{G}_{wii}(j\omega)| + |\delta G_{wii}(j\omega)|) \\ &\leq 20 \log (|\hat{G}_{wii}(j\omega)| + |V_{ii}(j\omega)|) \end{aligned}$$

und

$$|G_{wii}(j\omega)|_{\text{dB}} \geq 20 \log (|\hat{G}_{wii}(j\omega)| - |V_{ii}(j\omega)|)$$

verwendet, die $|G_{wii}|$ nach oben und unten durch $|\hat{G}_{wii}|$ und $|V_{ii}|$ beschränken.

Ähnlich wie bei der Betrachtung der Integrität des Regelkreises kann man sich überlegen, dass die angegebene Abschätzung des E/A-Verhaltens des Regelkreises auch dann gilt, wenn Regler abgeschaltet werden bzw. Stell- oder Messsignale ausfallen. Das Verhalten der übrigen Regelkreise liegt dann in den durch die Ungleichung (9.28) beschriebenen Grenzen. Die beschriebenen Bänder um die Ortskurve bzw. den Amplitudengang gelten also auch bei Ausfall von Reglern.

Beispiel 9.2 Verbesserte Abschätzung des Verhaltens der Knotenspannungsregelung

Die im Beispiel 9.1 betrachtete Knotenspannungsregelung soll jetzt mit dem erweiterten Analyseverfahren untersucht werden. Wie Abb. 9.9 zeigt, ist die hinreichende Stabilitätsbedingung erfüllt, denn die Einzelregelkreise sind stabil und die Rückführdifferenzmatrix ist verallgemeinert diagonal dominant, denn es gilt

$$\lambda_P\{|G_{uf}(j\omega)| \tilde{G}_A(j\omega)\} < 1.$$

Abbildung 9.10 zeigt, dass die mit dem verallgemeinerten Gershgorintheorem berechneten Bänder nur geringfügig kleiner als die bisher berechneten Bänder sind. Diesen optischen Eindruck findet man z. B. bestätigt, wenn man den Abstand der Bänder vom kritischen Punkt -1 untersucht. Maßgebend dafür sind die in den Gln. (9.11) und (9.18) angegebenen Quotienten

$$\frac{\sum_{j=1, j \neq i}^m |F_{ij}(j\omega)|}{|F_{ii}(j\omega)|} \quad \text{und} \quad d(F(j\omega)).$$

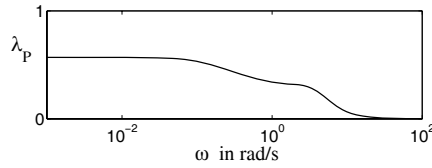


Abb. 9.9: Verlauf der Perronwurzel $\lambda_P \{ |G_{uf}(j\omega)| \tilde{G}_A(j\omega) \}$ zur Prüfung der verallgemeinerten Diagonaldominanz für die dezentrale Knotenspannungsregelung

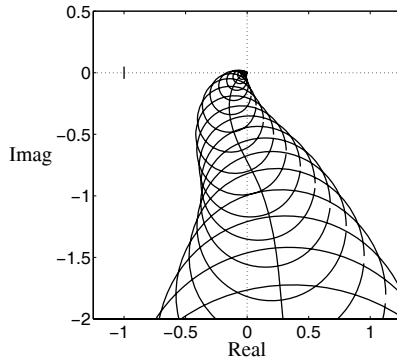


Abb. 9.10: Verbessertes Gershgorinband für den dritten Regelkreis

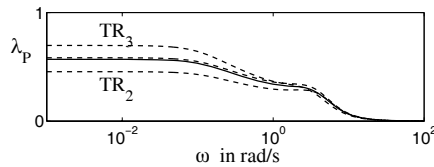


Abb. 9.11: Vergleich der Breiten der Gershgorinbänder (— λ_P)

In Abb. 9.11 sind diese Größen über der Frequenz aufgetragen, wobei das linke Maß für die drei Regelkreise getrennt berechnet werden muss (gestrichelte Linien), während das rechte Maß für alle Bänder dasselbe ist (durchgezogene Linie für λ_P). Es ist zu sehen, dass die über die verallgemeinerte Diagonaldominanz erhaltenen Beziehungen für den ersten und dritten Regelkreis zu einem schmaleren Gershgorinband führen, für den zweiten Regelkreis jedoch ein breiteres Band ergeben. Mit beiden Abschätzungen kann jedoch gleichermaßen die Stabilität und Integrität des Regelkreises nachgewiesen werden.

Mit Hilfe der Gln. (9.25) und (9.28) können ein Näherungswert und die in Abb. 9.12 gezeigten Fehlerschranken für die Führungsübertragungsfunktion $G_{wii}(j\omega)$ berechnet werden. Das daraus entstehende Toleranzband ist in Abb. 9.13 für den ersten Regelkreis aufgetragen. Die untere der beiden sehr eng beieinander liegenden Kurven zeigt den Amplitudengang von $\hat{G}_{w11}(j\omega)$, also den Amplitudengang derjenigen Führungsübertragungsfunktion, die man für den ersten Regelkreis erhält, wenn die anderen beiden Regler nicht angeschlossen

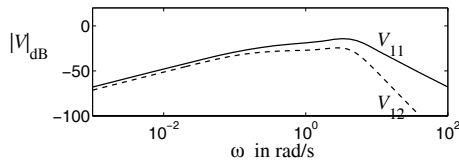


Abb. 9.12: Amplitudengang der Fehlerschranken V_{11} und V_{12}

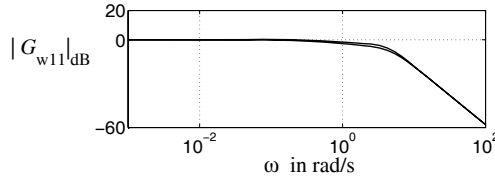


Abb. 9.13: Toleranzband für den Amplitudengang des ersten Regelkreises

sen sind. Die obere Kurve zeigt die Veränderung, die sich für das Verhalten des ersten Regelkreises ergeben kann, wenn einer oder beide anderen Regler in Betrieb genommen werden. Dass das Band sehr schmal ist, weist darauf hin, dass die Wirkung der anderen beiden Regelkreise auf den ersten Regelkreis bedeutungslos ist. Der Grund dafür liegt in der relativ kleinen Reglerverstärkung, derentwegen sich auch die Führungsübergangsfunktion relativ langsam dem Endwert eins nähert (Abb. 9.14).

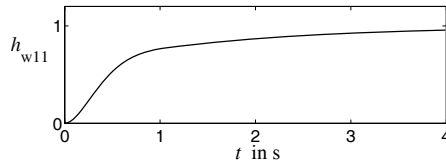


Abb. 9.14: Führungsübergangsfunktion des ersten Regelkreises

Die bisherigen Ergebnisse haben gezeigt, dass die Querkopplungen zwischen den einzelnen Regelkreisen der Knotenspannungsregelung vernachlässigbar sind. Dieses Ergebnis ist einerseits dadurch begründet, dass die Querkopplungen in der Regelstrecke relativ schwach sind, wie es aus der Übergangsfunktionsmatrix in Abb. 9.5 zu erkennen ist. Andererseits führt die Entwurfsforderung, dass die Regelkreise nicht überschwingen sollen, zu relativ schwach eingestellten Reglern, so dass die vorhandenen Querkopplungen über die Regler nur wenig verstärkt werden und, wie die Analyse ergeben hat, praktisch verschwindende Wirkungen haben.

Diese Verhältnisse ändern sich, wenn man die Reglerverstärkung erhöht, was im Folgenden dadurch demonstriert werden soll, dass die Analyse des Regelkreises für Regler mit der sechsfachen Verstärkung wiederholt wird:

$$K_i(s) = 6 \left(1 + \frac{2}{s} \right) \frac{1 + s}{0,22s + 1}.$$

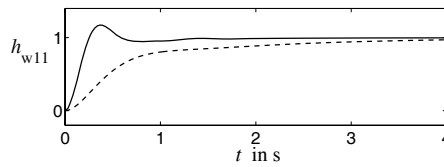


Abb. 9.15: Führungsübergangsfunktionen des ersten Regelkreises nach Vergrößerung der Reglerverstärkung (– entkoppelter Regelkreis, - - - dezentral geregeltes System)

Die Führungsübergangsfunktion erfüllt jetzt nicht mehr die an die Knotenspannung gestellten Dynamikforderungen. Die Reglereinstellung erzeugt das in Abb. 9.15 gezeigte schnelle Einschwingen und kann in einem anderen Anwendungsfall wünschenswert sein. Die Abbildung enthält die Führungsübergangsfunktion für den Fall, dass nur der erste Regler angeschlossen ist sowie das Verhalten aller drei Regelkreise bei Sollwertänderung im ersten Regelkreis.

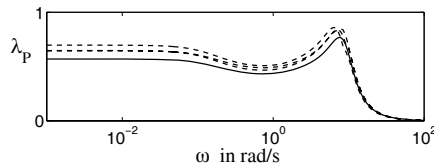


Abb. 9.16: Breiten der Gershgorinbänder nach Erhöhung der Reglerverstärkung

Die Stabilitätsanalyse zeigt, dass die Rückführdifferenzmatrix auch nach Erhöhung der Reglerverstärkung weiterhin verallgemeinert diagonal dominant ist und der Regelkreis folglich stabil ist und die Integritätseigenschaft besitzt. In Abb. 9.16 sind außer der für die Stabilitätsprüfung maßgebenden Perronwurzel $\lambda_p\{|G_{uf}(j\omega)| \bar{G}_A(j\omega)\}$ wiederum die Quotienten aufgetragen, die die Breite der Gershgorinbänder nach Satz 9.1 bestimmen und die kleiner als eins sein müssen, damit die Rückführdifferenzmatrix diagonal dominant ist. Hier ist zu sehen, dass bei den jetzt verwendeten Reglern mit großer Verstärkung das Regelkreisverhalten mit den verallgemeinerten Gershgorinbändern bzw. der verallgemeinerten Diagonaldominanz besser abgeschätzt wird als mit dem Gershgorintheorem.

In den Abbildungen 9.17 und 9.18 sind die oberen Schranken $V_{11}(j\omega)$ und $V_{12}(j\omega)$ für die Veränderungen, die das Zu- und Abschalten der Regler 2 und 3 für das Führungsverhalten des ersten Regelkreises mit sich bringt, sowie das Toleranzband für das Führungsverhalten des ersten Regelkreises zu sehen. Dabei wird offensichtlich, dass die Querkopplungen der Regelstrecke jetzt viel stärker auf den Regelkreis wirken. Das Zuschalten des zweiten und dritten Reglers bewirkt im ersten Regelkreis eine erhebliche Resonanzüberhöhung, die auf das Schwingen der Führungsübergangsfunktion in Abb. 9.15 führt. Da die Fehlerschranke $V_{11}(j\omega) = |G_{w11}(j\omega)|$ im mittleren Frequenzbereich die Größe von $|G_{11}(j\omega)|$ erreicht, ist die untere Schranke des Toleranzbandes sehr klein. □

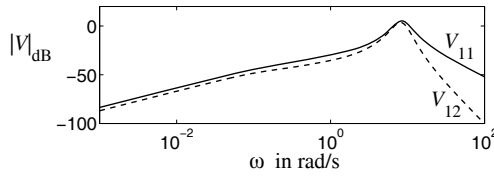


Abb. 9.17: Amplitudengang der Fehlerschranken V_{11} und V_{12} nach Erhöhung der Reglerverstärkung

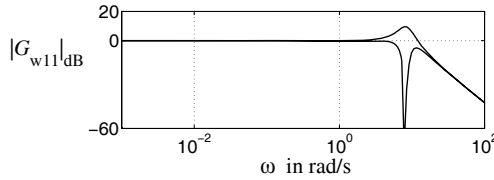


Abb. 9.18: Toleranzband für das Führungsverhalten des ersten Regelkreises nach Erhöhung der Reglerverstärkung

Entwurf von PI-Reglern. Die für die verallgemeinerte Diagonaldominanz zu erfüllende Forderung (9.15) kann bei stabilen Regelstrecken durch Wahl einer hinreichend kleinen Reglerverstärkung erfüllt werden. Für (P)I-Regler muss dafür wieder eine gesonderte Untersuchung für kleine Frequenzen durchgeführt werden. Mit

$$K_i(j\omega) = \frac{1}{j\omega T_{Ii}}$$

erhält man aus Gl. (9.15) die Forderung

$$\begin{aligned} & \lambda_P \left\{ \text{diag} \frac{1}{|F_{ii}(j\omega)|} \begin{pmatrix} 0 & |F_{12}(j\omega)| & \cdots & |F_{1m}(j\omega)| \\ |F_{21}(j\omega)| & 0 & \cdots & |F_{2m}(j\omega)| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |F_{m1}(j\omega)| & |F_{m2}(j\omega)| & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \lambda_P \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \frac{|F_{12}(j\omega)|}{|F_{11}(j\omega)|} & \cdots & \frac{|F_{1m}(j\omega)|}{|F_{11}(j\omega)|} \\ \frac{|F_{21}(j\omega)|}{|F_{22}(j\omega)|} & 0 & \cdots & \frac{|F_{2m}(j\omega)|}{|F_{22}(j\omega)|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{|F_{m1}(j\omega)|}{|F_{mm}(j\omega)|} & \frac{|F_{m2}(j\omega)|}{|F_{mm}(j\omega)|} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \lambda_P \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \frac{|G_{12}(j\omega)|}{|j\omega T_{I1} + G_{11}(j\omega)|} & \cdots & \frac{|G_{1m}(j\omega)|}{|j\omega T_{I1} + G_{11}(j\omega)|} \\ \frac{|G_{21}(j\omega)|}{|j\omega T_{I2} + G_{22}(j\omega)|} & 0 & \cdots & \frac{|G_{2m}(j\omega)|}{|j\omega T_{I2} + G_{22}(j\omega)|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{|G_{m1}(j\omega)|}{|j\omega T_{Im} + G_{mm}(j\omega)|} & \frac{|G_{m2}(j\omega)|}{|j\omega T_{Im} + G_{mm}(j\omega)|} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\} < 1, \end{aligned}$$

die für $\omega \rightarrow 0$ in

Existenzbedingung für PI-Regler mit Integritätseigenschaft:

$$\lambda_P \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \frac{|G_{12}(0)|}{|G_{11}(0)|} & \dots & \frac{|G_{1m}(0)|}{|G_{11}(0)|} \\ \frac{|G_{21}(0)|}{|G_{22}(0)|} & 0 & \dots & \frac{|G_{2m}(0)|}{|G_{22}(0)|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{|G_{m1}(0)|}{|G_{mm}(0)|} & \frac{|G_{m2}(0)|}{|G_{mm}(0)|} & \dots & 0 \end{pmatrix} \right\} < 1 \quad (9.30)$$

übergeht. Das heißt, die Vergleichsmatrix $C(\mathbf{K}_s)$ der statischen Verstärkungsmatrix muss eine M-Matrix sein (vgl. Anhang 2, S. 634).

Die Bedingung (9.30) ist schwächer als die aus der Forderung nach Diagonaldominanz abgeleiteten Bedingung (9.12). Sie sichert, dass ein PI-Regler mit hinreichend kleiner Verstärkung gefunden werden kann, für den der Regelkreis stabil ist und die Integritätseigenschaft besitzt.

Aufgabe 9.3* Reglerentwurf nach dem Direkten Nyquistverfahren

Gegeben ist die Übertragungsfunktionsmatrix

$$\mathbf{G}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{0.5}{s+3} \\ \frac{0.3}{s+2} & \frac{1}{s+4} \end{pmatrix}$$

der Regelstrecke.

1. Ist die Regelstrecke diagonaldominant?
2. Entwerfen Sie einen dezentralen Regler, mit dem der Regelkreis für sprungförmige Führungsgrößen die Forderung nach Sollwertfolge erfüllt und außerdem die Integritätseigenschaft besitzt. $\square$

9.5 Entkopplung der Regelkreise

Bisher wurden dezentrale Regelungen, die die i -te Regelgröße auf die i -te Stellgröße zurückführen, betrachtet. Obwohl die Regelstrecke verkoppelt ist, besteht der Regler aus voneinander unabhängigen Teilreglern. Voraussetzung für den Einsatz einer derartigen Regelung ist, dass sich die Hauptregelstrecken gegenseitig nur schwach beeinflussen. Was das bedeutet, ist für PI-Regler durch die Bedingungen (9.12) und (9.30) beschrieben.

Wenn diese Bedingungen nicht erfüllt sind oder wenn aus anderen Gründen abzusehen ist, dass die Rückführdifferenzmatrix bei Verwendung eines dezentralen Reglers nicht diagonaldominant sein wird, kann man zunächst ein Entkopplungsglied $L(s)$ entwerfen, so dass die um dieses Glied erweiterte Regelstrecke

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{L}(s)\tilde{\mathbf{U}}(s) \quad (9.31)$$

möglichst geringe Querkopplungen $\tilde{u}_j \mapsto y_i$ aufweist. Dieses Vorgehen ist in Abb. 9.19 für eine Zweigrößenregelung veranschaulicht.

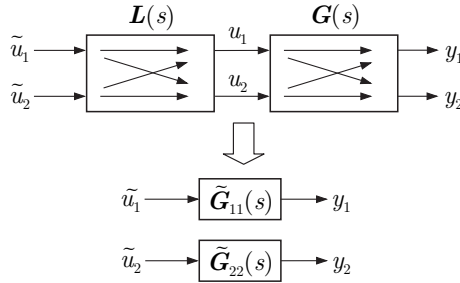


Abb. 9.19: Prinzip der Entkopplung mehrerer Regelkreise

Wenn durch diese Maßnahme eine gute Entkopplung der neuen Hauptregelstrecken $\tilde{u}_i \mapsto y_i$ gelingt, so kann für die Reihenschaltung von Strecke und Entkopplungsglied eine dezentrale Regelung

$$\tilde{U}_i(s) = -K_i(s) (Y_i(s) - W_i(s)) \quad (9.32)$$

verwendet werden. Der technisch zu realisierende Regler besteht dann aus dem Entkopplungsglied und den dezentralen Teilreglern. An seiner Beschreibung

$$\mathbf{U}(s) = -\mathbf{L}(s) \text{diag } K_i(s) (\mathbf{Y}(s) - \mathbf{W}(s)) \quad (9.33)$$

sieht man, dass er ein „richtiger“ Mehrgrößenregler ist, also nicht wie bei einer dezentralen Regelung durch unabhängige Rückführungen realisiert werden kann. Die Rückfuhrdifferenzmatrix heißt

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{L}(s) \text{diag } K_i(s). \quad (9.34)$$

Im Folgenden werden Wege angegeben, um das Entkopplungsglied $\mathbf{L}$ zu entwerfen.

Vollständige Entkopplung. Für eine vollständige Entkopplung der Hauptregelstrecken muss durch das Entkopplungsglied die Bedingung

$$\mathbf{G}(s)\mathbf{L}(s) = \text{diag } \tilde{G}_i(s)$$

für beliebige Funktionen $\tilde{G}_i(s)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) erfüllt werden, woraus man die Bedingung

$$\mathbf{L}(s) = \mathbf{G}(s)^{-1} \text{diag } \tilde{G}_i(s) \quad (9.35)$$

erhält, die auf zwei wichtige Konsequenzen führt. Erstens ist zu sehen, dass eine vollständige Entkopplung die Pole von $\mathbf{G}(s)$ in Nullstellen für $\mathbf{L}(s)$ überführt.

Die Entkopplung ist technisch nur realisierbar, wenn die Übertragungsfunktionen $\tilde{G}_i(s)$ einen genügend großen Polüberschuss aufweisen. Ein großer Polüberschuss führt jedoch auf zusätzliche Verzögerungen, wodurch die entkoppelte Regelstrecke $\text{diag } \tilde{G}_i(s)$ langsamer als die Originalregelstrecke $G(s)$ ist. Man wird sich also mit einer unvollständigen Entkopplung zufrieden geben, bei der dieser Mangel nicht auftritt.

Ein guter Kompromiss bei der Wahl von $L(s)$ entkoppelt die Strecke nur soweit, wie es für den Nachweis der Diagonaldominanz der Rückführdifferenzmatrix notwendig ist. Damit wird der Vorteil des Direkten Nyquistverfahrens genutzt, dass die Regelstrecke keineswegs vollständig entkoppelt sein muss und die Querkopplungen nicht heuristisch, sondern auf systematischem Wege in die Analyse des Regelkreises einbezogen werden.

Die zweite Konsequenz sieht man, wenn man das Entkopplungsglied für die Zweigrößenregelung ausrechnet. Aus Gl. (9.35) folgt

$$L(s) = \frac{1}{G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}} \begin{pmatrix} G_{22}\tilde{G}_1 & -G_{12}\tilde{G}_1 \\ -G_{21}\tilde{G}_2 & G_{11}\tilde{G}_2 \end{pmatrix}$$

und für $\tilde{G}_i(s) = G_{ii}(s)$

$$L_{11}(s) = \frac{1}{1 - \frac{G_{12}G_{21}}{G_{11}G_{22}}} = \frac{1}{1 - \kappa(G(s))}$$

und

$$L_{12}(s) = \frac{\frac{G_{12}G_{21}}{G_{11}G_{22}} \frac{G_{11}}{G_{21}}}{1 - \frac{G_{12}G_{21}}{G_{11}G_{22}}} = \frac{-\kappa(G(s))}{1 - \kappa(G(s))} \frac{G_{11}}{G_{21}}.$$

Diese Beziehungen zeigen, dass das Entkopplungsglied direkt von dem in Gl. (4.81) auf S. 190 definierten Koppelfaktor abhängt. Je größer κ ist, umso größer sind die Elemente von $L(s)$, insbesondere die nicht in der Diagonale stehenden Elemente $L_{ij}(s)$ ($j \neq i$).

Statische Entkopplung. Die genannten Argumente lassen es sinnvoll erscheinen, die Regelstrecke zunächst statisch zu entkoppeln und das dabei erhaltene Entkopplungsglied möglicherweise durch ein weiteres Glied für die Entkopplung des dynamischen Verhaltens zu ergänzen. Aus Gl. (9.35) erhält man für $s = 0$ und $\tilde{G}_i(0) = 1$

$$L = G(0)^{-1} = K_s^{-1}. \quad (9.36)$$

Mit diesem Entkopplungsglied hat die erweiterte Regelstrecke die statische Verstärkung

$$G(0)L = I.$$

Diese Entkopplung wurde übrigens schon einmal verwendet, dort aber auf ganz anderem Wege hergeleitet. Wenn man wie in Abb. 5.3 auf S. 218 den bei den Einstellregeln verwendeten I-Regler in den Tuningfaktor und die Matrix $\tilde{K}_I = K_s^{-1}$

zerlegt, so heißt das, dass die erweiterte, statische entkoppelte Strecke mit m dezentralen I-Reglern beaufschlagt wird.

In diesem Zusammenhang war auch erwähnt worden, dass diese Entkopplung für Regelstrecken, deren Übertragungsfunktionsmatrix sich näherungsweise aus

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{K}_s \mathbf{G}(s)$$

ergibt, auch für das dynamische Verhalten zu vernachlässigbaren Querkopplungen führt. Die im Beispiel 5.1 auf S. 221 betrachtete Anlage zur Herstellung von Ammoniumnitrat-Harnstoff-Lösung zeigt, dass es technische Anlagen gibt, die diese Bedingung (näherungsweise) erfüllen.

Dynamische Entkopplung. Wenn die Regelstrecke auch dynamisch entkoppelt werden soll, so müssen die nicht in der Hauptdiagonale liegenden Elemente von

$$\tilde{\mathbf{G}}(j\omega) = \mathbf{G}(j\omega)\mathbf{L}$$

möglichst klein gemacht werden. Wählt man für die Entkopplung zunächst wieder ein statisches Glied $\mathbf{L}$, betrachtet jetzt aber im Unterschied zum bisherigen Vorgehen das Verhalten der Regelstrecke bei einer festgelegten Frequenz ω , so müssen durch geeignete Wahl der Elemente l_{ij} von $\mathbf{L}$ die Elemente

$$\tilde{G}_{ij}(j\omega) = \sum_{k=1}^m G_{ik}(j\omega) l_{kj} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m)$$

möglichst klein gemacht werden. Was „möglichst klein“ heißt, wird durch die Breite der Gershgorinbänder vorgeschrieben. Da die Radien der Gershgorinkreise durch $D_i(j\omega)$ aus Gl. (9.4) bzw. $d(\mathbf{F}(j\omega))$ aus Gl. (9.17) bestimmt sind, kann man $\mathbf{L}$ als Lösung der Optimierungsaufgaben

$$\min_{\mathbf{L}} D_i(j\omega) \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad \text{bzw.} \quad \min_{\mathbf{L}} d(\mathbf{F}(j\omega))$$

für eine vorgegebene Frequenz ω erhalten. Dabei wird für ω eine Frequenz in der Nähe der Schnittfrequenzen der Elemente der offenen Kette vorgegeben.

Die angegebenen Optimierungsaufgaben führen zwar auf die bestmögliche Wahl des Entkopplungsgliedes im Sinne der beim Direkten Nyquistverfahren verwendeten Analyse des geschlossenen Kreises. Sie lassen sich jedoch aus zwei Gründen nicht ohne weiteres lösen. Erstens hängen diese Optimierungsprobleme von den gewählten Reglern ab, die während der Berechnung des Entkopplungsgliedes noch nicht entworfen sind. Zweitens lassen sich die angegebenen Optimierungsaufgaben nicht geschlossen lösen. Deshalb ersetzt man sie durch ähnliche Probleme, die nur von der Regelstrecke abhängig sind und für die man eine geschlossene Lösung angeben kann.

Da eine gute Entkopplung der Regelstrecke für die Erzeugung der Diagonaldominanz der Rückfuhrdifferenzmatrix günstig ist, soll im Folgenden $\mathbf{L}$ so gewählt

werden, dass $\tilde{\mathbf{G}}(j\omega)$ für die gewählte Frequenz diagonaldominant ist. Dabei wird die Spaltendominanz angestrebt, für die

$$|\tilde{G}_{ii}(j\omega)| > \sum_{j=1, j \neq i}^m |\tilde{G}_{ji}(j\omega)|$$

bzw.

$$\sum_{j=1, j \neq i}^m \frac{|\tilde{G}_{ji}(j\omega)|}{|\tilde{G}_{ii}(j\omega)|} = \sum_{j=1, j \neq i}^m \frac{|\sum_{k=1}^m G_{jk}(j\omega)l_{ki}|}{|\sum_{k=1}^m G_{ik}(j\omega)l_{ki}|} = \sum_{j=1, j \neq i}^m \frac{|\mathbf{G}'_j(j\omega)\mathbf{l}_i|}{|\mathbf{G}'_i(j\omega)\mathbf{l}_i|} < 1$$

gilt. Dabei ist $\mathbf{G}'_j(j\omega)$ die j -te Zeile von $\mathbf{G}(j\omega)$:

$$\mathbf{G}(j\omega) = \begin{pmatrix} \mathbf{G}'_1(j\omega) \\ \mathbf{G}'_2(j\omega) \\ \vdots \\ \mathbf{G}'_m(j\omega) \end{pmatrix}.$$

Der angegebene Quotient hängt nur von der i -ten Spalte

$$\mathbf{l}_i = \begin{pmatrix} l_{1i} \\ l_{2i} \\ \vdots \\ l_{mi} \end{pmatrix}$$

der Matrix $\mathbf{L}$ ab. Folglich können die angegebenen Quotienten durch Wahl von $\mathbf{l}_i$ für die Indizes $i = 1, 2, \dots, m$ unabhängig voneinander möglichst klein gemacht werden:

$$\min_{\mathbf{l}_i} \sum_{j=1, j \neq i}^m \frac{|\mathbf{G}'_j(j\omega)\mathbf{l}_i|}{|\mathbf{G}'_i(j\omega)\mathbf{l}_i|}.$$

Um das Optimierungsproblem geschlossen lösen zu können, wird es durch

$$\min_{\mathbf{l}_i} \sum_{j=1, j \neq i}^m \frac{|\mathbf{G}'_j(j\omega)\mathbf{l}_i|^2}{|\mathbf{G}'_i(j\omega)\mathbf{l}_i|^2}$$

und wegen

$$\sum_{j=1, j \neq i}^m \frac{|\mathbf{G}'_j(j\omega)\mathbf{l}_i|^2}{|\mathbf{G}'_i(j\omega)\mathbf{l}_i|^2} = \frac{\sum_{j=1}^m |\mathbf{G}'_j(j\omega)\mathbf{l}_i|^2}{|\mathbf{G}'_i(j\omega)\mathbf{l}_i|^2} - 1$$

durch

$$\min_{\mathbf{l}_i} \frac{\sum_{j=1}^m |\mathbf{G}'_j(j\omega)\mathbf{l}_i|^2}{|\mathbf{G}'_i(j\omega)\mathbf{l}_i|^2} \quad (9.37)$$

ersetzt. Die zuletzt angegebene Gütefunktion lässt sich folgendermaßen umformen:

$$J_i(\mathbf{l}_i) = \frac{\sum_{j=1}^m |\mathbf{G}'_j(j\omega) \mathbf{l}_i|^2}{|\mathbf{G}'_i(j\omega) \mathbf{l}_i|^2} = \frac{\mathbf{l}'_i \sum_{j=1}^m (\mathbf{G}_j(j\omega) \mathbf{G}'_j(j\omega)) \mathbf{l}_i}{\mathbf{l}'_i \mathbf{G}_i(j\omega) \mathbf{G}'_i(j\omega) \mathbf{l}_i}$$

$$\mathbf{l}'_i \mathbf{G}_i(j\omega) \mathbf{G}'_i(j\omega) \mathbf{l}_i J_i(\mathbf{l}_i) = \mathbf{l}'_i \sum_{j=1}^m (\mathbf{G}_j(j\omega) \mathbf{G}'_j(j\omega)) \mathbf{l}_i.$$

Leitet man sie nun nach $\mathbf{l}_i$ ab und setzt die Ableitung gleich null, so erhält man

$$\frac{dJ_i}{d\mathbf{l}_i} \mathbf{l}'_i \mathbf{G}_i(j\omega) \mathbf{G}'_i(j\omega) \mathbf{l}_i + 2J_i(\mathbf{l}_i) \mathbf{G}_i(j\omega) \mathbf{G}'_i(j\omega) \mathbf{l}_i = 2 \sum_{j=1}^m (\mathbf{G}_j(j\omega) \mathbf{G}'_j(j\omega)) \mathbf{l}_i$$

und

$$J_i(\mathbf{l}_i) \mathbf{G}_i(j\omega) \mathbf{G}'_i(j\omega) \mathbf{l}_i = \sum_{j=1}^m (\mathbf{G}_j(j\omega) \mathbf{G}'_j(j\omega)) \mathbf{l}_i.$$

Die letzte Gleichung beschreibt ein verallgemeinertes Eigenwertproblem (A2.52), denn es ist ein Vektor $\mathbf{l}_i$ zu finden, so dass sich die Abbildungen

$$\mathbf{G}_i(j\omega) \mathbf{G}'_i(j\omega) \mathbf{l}_i \quad \text{und} \quad \left(\sum_{j=1}^m (\mathbf{G}_j(j\omega) \mathbf{G}'_j(j\omega)) \right) \mathbf{l}_i$$

dieses Vektors nur um einen skalaren Faktor J_i unterscheiden. Der kleinste aus diesem verallgemeinerten Eigenwertproblem erhaltene Eigenwert

$$\lambda_{\min} \left\{ \sum_{j=1}^m (\mathbf{G}_j(j\omega) \mathbf{G}'_j(j\omega)), \mathbf{G}_i(j\omega) \mathbf{G}'_i(j\omega) \right\}$$

ist der bestmögliche Gütewert, der zugehörige Eigenvektor die Lösung $\mathbf{l}_i$ des Optimierungsproblems (9.37). Wie bereits erwähnt, kann man bei einer frequenzunabhängigen Entkopplungsmatrix dieses Optimierungsproblem nur für eine ausgewählte Frequenz ω lösen, wobei man typischerweise ω in der Nähe der angestrebten Schnittfrequenz des Regelkreises festlegt.

Verwendung eines dynamischen Entkopplungsgliedes. Wenn ein statisches Entkopplungsglied $\mathbf{L}$ nicht ausreicht, so kann auch ein dynamisches Glied $\mathbf{L}(j\omega)$ verwendet werden. Man muss dann das Optimierungsproblem (9.37) für alle ω lösen und erhält für die Elemente $L_{ij}(j\omega)$ der Matrix $\mathbf{L}(j\omega)$ Funktionen in ω . Diese Funktionen lassen sich nicht oder nur mit großem Aufwand realisieren. Man sucht deshalb im zweiten Schnitt nach möglichst einfachen Approximationen $\hat{L}_{ij}(j\omega)$ für die erhaltenen Funktionen, wobei man zweckmäßigerweise mit Approximationen erster Ordnung beginnt und die Ordnung nur dann erhöht, wenn es für eine ausreichende Entkopplung unbedingt notwendig ist. In vielen praktischen Anwendungsfällen kann die Entkopplungsmatrix $\mathbf{L}(j\omega)$ von niedriger Ordnung sein. Es muss ja keine vollständige Entkopplung erreicht werden, weil das anschließend verwendete Entwurfsverfahren die verbleibenden Querkopplungen nicht ignoriert, sondern bei der Analyse des Regelkreises berücksichtigt.

9.6 Entwurfsdurchführung mit MATLAB

Für die Durchführung des Reglerentwurfes nach dem Direkten Nyquistverfahren sind im Prinzip alle MATLAB-Funktionen bereits bekannt. Sie müssen nur in der richtigen Reihenfolge zusammengestellt werden. Neu sind lediglich die hier erstmals verwendeten `for`-Schleifen.

Obwohl die Darstellung des Direkten Nyquistverfahrens im Frequenzgang den großen Vorteil hat, dass die Formeln sehr kompakt und überschaubar sind, wird bei der Realisierung des Entwurfsverfahrens mit MATLAB mit der Zustandsraumdarstellung gearbeitet. Der Grund liegt darin, dass die Matrixrepräsentation der Zustandsraummodelle mit den in MATLAB verwendeten Datenstrukturen besser zusammenpasst. Wie die Erläuterung des Vorgehens im Zeitbereich zeigen wird, kann man alle im Frequenzbereich aufgeschriebenen Formeln ohne weiteres mit Zeitbereichsmodellen anwenden.

Im Folgenden wird der Entwurf unter der Annahme durchgeführt, dass die Regelstrecke stabil ist und die Regelung zur Gewährleistung der Sollwertfolge bei sprungförmigen Führungs- und Störsignalen dient. Damit vereinfachen sich die Formeln etwas gegenüber dem allgemeinen Fall, bei dem der Regler beispielsweise auch noch für die Stabilisierung der Regelstrecke eingesetzt werden muss. Das prinzipielle Vorgehen bleibt aber dasselbe.

Für die Regelstrecke wird das Zustandsraummodell (2.31), (2.32) mit skalaren Eingangsgrößen $u_i(t)$ und Ausgangsgrößen $y_i(t)$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^N \mathbf{b}_{si}u_i(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (9.38)$$

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{c}'_{s1} \\ \mathbf{c}'_{s2} \\ \vdots \\ \mathbf{c}'_{sm} \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (9.39)$$

verwendet. Als Regler werden hier einheitlich PI-Regler (4.33) angesetzt

$$\dot{x}_{ri}(t) = y_i(t) - w_i(t) \quad (9.40)$$

$$u_i(t) = -k_{Ii}x_{ri}(t) - k_{Pi}(y_i(t) - w_i(t)), \quad (9.41)$$

obwohl alle folgenden Schritte mit kleinen Erweiterungen auch für andere Regler durchgeführt werden können.

Der Entwurf des i -ten Teilreglers findet an der i -ten Hauptregelstrecke mit dem Eingang $u_i(t)$ und dem Ausgang $y_i(t)$ statt. Dafür erhält man aus den Gln. (9.38), (9.39) das Modell

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_{si}u_i(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (9.42)$$

$$y_i(t) = \mathbf{c}'_{si}\mathbf{x}(t). \quad (9.43)$$

Der i -te Hauptregelkreis (9.40) – (9.43) hat folglich die Beschreibung

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{x}_{ri}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}_{si}k_{Pi}\mathbf{c}'_{si} & -\mathbf{b}_{si}k_{Ii} \\ \mathbf{c}'_{si} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ x_{ri}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{si}k_{Pi} \\ -1 \end{pmatrix} w_i(t) \quad (9.44)$$

$$y_i(t) = (\mathbf{c}'_{si} \ 0) \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ x_{ri}(t) \end{pmatrix}. \quad (9.45)$$

Die Reglerparameter k_{Pi} und k_{Ii} werden so ausgewählt, dass die geschlossenen Kreise (9.44), (9.45) für $i = 1, \dots, m$ für sich stabil sind und ein gutes Übergangsverhalten haben.

Für die Stabilitäts- und Integritätsanalyse muss die Diagonaldominanz der Rückführdifferenzmatrix des geschlossenen Regelkreises nachgewiesen werden. Schneidet man die offene Kette beim Stellvektor $\mathbf{u}$ auf, so gilt

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{I} + \text{diag } K_i(s) \mathbf{G}(s),$$

wobei $\text{diag } K_i(s)$ eine Diagonalmatrix mit den dezentralen PI-Reglern $K_i(s)$ bezeichnet. Im Zustandsraummodell ist die offene Kette durch

$$\text{diag } K_i(s) \mathbf{G}(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{O} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} \\ \hline (\text{diag } k_{Pi} \ \mathbf{C} \quad \text{diag } k_{Ii}) & \mathbf{O} \end{array} \right]$$

und die Rückführdifferenzmatrix durch

$$\mathbf{F}(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{O} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} \\ \hline (\text{diag } k_{Pi} \ \mathbf{C} \quad \text{diag } k_{Ii}) & \mathbf{I} \end{array} \right], \quad (9.46)$$

also durch das Zustandsraummodell

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_r(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_r(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (9.47)$$

$$\mathbf{u}(t) = (\mathbf{K}_P \mathbf{C} \quad \mathbf{K}_I) \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_r(t) \end{pmatrix}. \quad (9.48)$$

mit

$$\mathbf{K}_P = \text{diag } k_{Pi} \quad \text{und} \quad \mathbf{K}_I = \text{diag } k_{Ii}$$

beschrieben. Für die verallgemeinerte Diagonaldominanz muss dann Gl. (9.17)

$$\lambda_P \left\{ \text{diag } \frac{1}{|F_{ii}(j\omega)|} \begin{pmatrix} 0 & |F_{12}(j\omega)| & \cdots & |F_{1m}(j\omega)| \\ |F_{21}(j\omega)| & 0 & \cdots & |F_{2m}(j\omega)| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |F_{m1}(j\omega)| & |F_{m2}(j\omega)| & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\} < 1 \quad (9.49)$$

gelten. Schließlich kann das Verhalten des geschlossenen Regelkreises mit Hilfe des Modells

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_r(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BK_P C & -BK_I \\ C & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_{ri}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} BK_P \\ -I \end{pmatrix} w(t) \quad (9.50)$$

$$y(t) = (C \ O) \begin{pmatrix} x(t) \\ x_{ri}(t) \end{pmatrix} \quad (9.51)$$

analysiert werden.

Mit MATLAB kann man diese Modelle folgendermaßen verwenden. Es wird davon ausgegangen, dass den Matrizen A , B , C sowie den Skalaren n und m die Modellparameter zugewiesen sind. Will man die Parameter des PI-Reglers (9.40), (9.41) mit dem Frequenzkennlinienverfahren bestimmen, so kann man mit dem Aufruf

```
>> System=ss(A, B, C, D);
>> bode(System);
```

die Bodediagramme des Systems zeichnen. Die Reglerparameter werden den i -ten Hauptdiagonalelementen der Matrizen K_P und K_I zugewiesen. Die Analyse des i -ten Regelkreises anhand der Führungsübergangsfunktion kann dann mit dem Aufruf

```
>> Ag = [A-B(:,i)*KP(i,i)*C(i,:) -B(:,i)*KI(i,i); ...
        C(i,:) 0];
>> Bg = [B(:,i)*KP(i,i); -1];
>> Cg = [C(i,:) 0];
>> Dg = 0;
>> Kreisi=ss(Ag, Bg, Cg, Dg);
>> step(Kreisi);
```

erfolgen (vgl. Gl. (9.44), (9.45)).

Zur Untersuchung der Diagonaldominanz der Rückführdifferenzmatrix muss zunächst das Zustandsraummodell (A_0, B_0, C_0, D_0) der offenen Kette (9.47), (9.48) gebildet und $D_0 = I$ gesetzt werden, womit man das Zustandsraummodell der Rückführdifferenzmatrix erhält (vgl. Gl. (9.46)):

```
>> A0 = [A zeros(n,m); C zeros(m,m)];
>> B0 = [B; zeros(m,m)];
>> C0 = [KP*C KI];
>> D0 = zeros(m,m);
>> Rueckfuehrdifferenzmatrix=...
    ss(A0, B0, C0, D0+eye(m,m));
```

Um die Bedingung (9.49) zu überprüfen, wird der Betrag $|F(j\omega)|$ mit der Funktion `bode` berechnet, nachdem ein Vektor W mit 100 logarithmisch verteilten Frequenzpunkten über ein geeignet gewähltes Frequenzintervall gebildet wurde (z. B. für den Frequenzbereich von 10^{-2} bis 10^1):

```

» W = logspace(-2, 1, 100);
» FBetrag = bode(Rueckfuehrdifferenzmatrix, W);

```

Dann kann die zur Prüfung der verallgemeinerten Diagonaldominanz notwendige Perronwurzel (9.49) für die einzelnen Frequenzen nacheinander berechnet und im Vektor `LambdaP` gespeichert werden:

```

» Wsize=max(size(W));
» for k=1:Wsize
    PMatrix=inv(diag(diag(FBetrag(:, :, k))))*...
        (FBetrag(:, :, k) - diag(diag(FBetrag(:, :, k))));
    LambdaP(k)=max(abs(eig(PMatrix)));
end;

```

Dabei wurde von der in MATLAB möglichen `for`-Schleife Gebrauch gemacht sowie mit `max` der Maximalwert des Vektors bestimmt, in dem die Absolutwerte der Eigenwerte der Matrix `PMatrix` stehen. Mit `diag` wird eine Diagonalmatrix mit den in einem Vektor angegebenen Elementen bzw. für eine gegebene Matrix ein Vektor mit den Diagonalelementen gebildet. Den Verlauf der Perronwurzel kann man sich mit

```

» semilogx(W, LambdaP);

```

über der logarithmischen Frequenzachse grafisch darstellen. Wenn die Perronwurzel für alle Frequenzen kleiner als eins ist, so ist der Regelkreis stabil und besitzt überdies die Integritätseigenschaft. Die Führungsübergangsfunktionsmatrix erhält man für den geschlossenen Kreis (9.50), (9.51) folgendermaßen:

```

» Ag = A0 - B0*C0;
» Bg = [B*KP; -eye(m,m)];
» Cg = [C zeros(m,m)];
» Dg = zeros(m,m);
» Kreis=ss(Ag, Bg, Cg, Dg);
» step(Kreis);

```

Dabei entstehen drei Bilder, in denen das Führungsverhalten bei sprungförmiger Erhöhung der ersten, der zweiten und der dritten Führungsgröße für jeweils alle Regelgrößen gezeigt ist. Das vollständige Entwurfsvorgehen ist im Programm 9.1 zusammengefasst.

Aufgabe 9.4* *Regelung einer Zuchtungsanlage für GaAs-Einkristalle*

Der in Abb. 9.20 dargestellte Mehrzonenrohrföfen dient der Züchtung von GaAs-Einkristallen. Das Galliumarsenid (GaAs) befindet sich in einer Ampulle in der Ofenmitte. Es wird auf 1245°C, also über seinen Schmelzpunkt von 1238°C, aufgeheizt. Dann kühlt man es „von

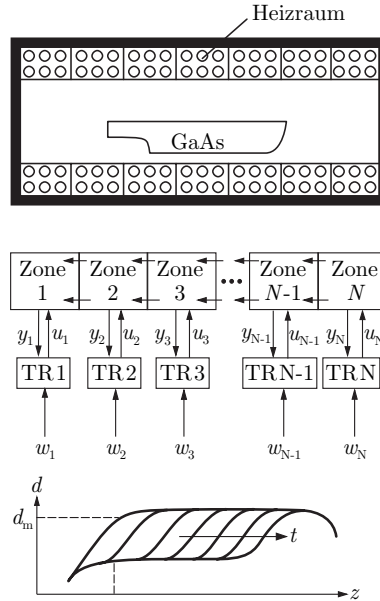


Abb. 9.20: Regelung eines Mehrzonenofens zur Züchtung von GaAs-Einkristallen

links nach rechts“ ab, wobei Verunreinigungen auf der Trennfläche von flüssigem und kristallinem GaAs „schwimmen“ und beim Wandern dieser Trennschicht an das Ende des Kristalls geschoben werden. Dieser Vorgang wird mehrfach wiederholt.

Regelungstechnisch besteht die Aufgabe darin, einen Regler für die 15 Heizzonen zu realisieren, mit dem der in Abb. 9.20 (unten) angegebene Temperaturverlauf erreicht werden kann. In diesem Bild ist der Temperaturverlauf über die Längsachse des Ofens aufgetragen. Die unterschiedlichen Kurven zeigen den gewünschten Verlauf für unterschiedliche Zeitpunkte.

Regelgrößen sind die Temperaturen innerhalb der Heizzonen, Stellgrößen die Spannung an den Heizwendeln. Da die einzelnen Heizzonen weitgehend unabhängig voneinander arbeiten sollen, ist es zweckmäßig, mit einer dezentralen Regelung zu arbeiten. Aus Sicherheitsgründen muss man dabei fordern, dass der Regelkreis die Integritätseigenschaft besitzt. Die Regelung soll so eingestellt sein, dass die Führungsübergangsfunktionen innerhalb von etwa 10 Minuten ohne Überschwüngen den Sollwert erreichen, wobei die Querkopplungen zu den anderen Heizzonen möglichst klein sein soll.

Das Modell der Regelstrecke wurde so aufgestellt, dass die Heizzonen zunächst entkoppelt voneinander betrachtet und durch ein System zweiter Ordnung beschrieben wurden, wobei für alle Heizzonen dieselben Parameterwerte gelten. Die Heizzonen beeinflussen sich vor allem aufgrund von Wärmestrahlung untereinander, wobei der Einfluss umso geringer ist, je weiter die Heizzonen voneinander entfernt sind. Diese Kopplung führt auch dazu, dass sich die Heizzonen dynamisch unterschiedlich verhalten. Dies ist auch zu erwarten, weil insbesondere die äußeren Heizzonen nur von einer Seite, die inneren von beiden Seiten durch andere Zonen mit aufgeheizt werden.

Das hier für nur fünf Zonen angegebene Modell (A, B, C, D) hat folgende Parameter, wenn die Zeit in Minuten gemessen wird:

$$A = \begin{pmatrix} -1,89 & -6,24 & 1,04 & 4,18 & 0,37 & 1,46 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,12 & -0,49 & 0,08 & 0,31 & 0,03 & 0,11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,04 & 4,18 & -2,67 & -9,34 & 0,88 & 3,51 & 0,42 & 1,66 & 0 & 0 \\ 0,08 & 0,31 & -0,18 & -0,73 & 0,07 & 0,26 & 0,03 & 0,12 & 0 & 0 \\ 0,37 & 1,46 & 0,88 & 3,51 & -2,79 & -9,81 & 0,88 & 3,51 & 0,37 & 1,46 \\ 0,03 & 0,11 & 0,07 & 0,26 & -0,18 & -0,76 & 0,07 & 0,26 & 0,03 & 0,11 \\ 0 & 0 & 0,42 & 1,66 & 0,88 & 3,51 & -2,67 & -9,34 & 1,04 & 4,18 \\ 0 & 0 & 0,03 & 0,12 & 0,07 & 0,26 & -0,18 & -0,73 & 0,08 & 0,31 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,37 & 1,46 & 1,04 & 4,18 & -1,89 & -6,24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,03 & 0,11 & 0,08 & 0,31 & -0,12 & -0,49 \end{pmatrix} \quad (9.52)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1,34 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,34 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,34 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,34 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,10 \end{pmatrix} \quad (9.53)$$

$$C = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,80 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,80 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0,80 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0,80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0,8 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.54)$$

$$D = O. \quad (9.55)$$

Aus den angegebenen Matrizen ist die Symmetrie der Regelstrecke bezüglich der mittleren Heizzone zu erkennen.

1. Berechnen Sie die Übergangsfunktionen der Regelstrecke und vergleichen Sie die daraus erkennbaren Zeitkonstanten mit den Zeitvorgaben, auf die sich die Güteforderungen beziehen. Halten Sie die Regelungsaufgabe für lösbar?
2. Untersuchen Sie, ob die Regelungsaufgabe durch eine dezentrale Regelung gelöst werden kann und entwerfen Sie andernfalls ein Entkopplungsglied.
3. Entwerfen Sie den PI-Regler der mittleren Zone, so dass die gestellten Güteforderungen für diese Eingrößenregelung erfüllt werden.
4. Verwenden Sie dasselbe Reglergesetz für die anderen Heizzone und überprüfen Sie die verallgemeinerte Diagonaldominanz der Rückführdifferenzmatrix. Wenn die Matrix nicht diagonaldominant ist, so korrigieren Sie die Regler, bis die Diagonaldominanzeigenschaft nachgewiesen werden kann.
5. Berechnen Sie die Führungsübergangsfunktionsmatrix und bewerten Sie sie bezüglich der gegebenen Güteforderungen. $\square$

Aufgabe 9.5* *Frequenz-Übergabeleistungsregelung eines Elektroenergienetzes*

Entwerfen Sie die im Beispiel 6.4 auf S. 264 beschriebene dezentrale Frequenz-Übergabeleistungsregelung mit dem Direkten Nyquistverfahren. Gehen Sie dabei in folgenden Schritten vor:

1. Entwerfen Sie die Teilregler einzeln anhand der Bodediagramme der drei Hauptregelstrecken, um die im Beispiel 6.4 angegebenen Güteforderungen für die Einzelregelkreise zu erfüllen. (Hinweis: Da bei diesem Beispiel das Störverhalten für die Reglerbemessung maßgebend ist, müssen Sie das Programm 9.1 modifizieren. Eine weitere Modifikation ist notwendig, da die Regelabweichungen $e_i(t)$ nicht in der üblichen Weise gebildet werden. Das Zustandsraummodell der Regelstrecke hat hier eine Ausgangsgleichung für den Vektor $e(t)$ und eine für den Vektor $y(t)$.)
2. Überprüfen Sie die Diagonaldominanz der Rückführdifferenzmatrix und verändern Sie gegebenenfalls die Reglerparameter, bis diese Eigenschaft nachgewiesen werden kann.
3. Beurteilen Sie die erreichte Regelgüte anhand der Störübergangsfunktionsmatrix des dezentral geregelten Gesamtsystems (Lasterhöhung um 100 MW). □

Literaturhinweise

Das Direkte Nyquistverfahren wurde von ROSENBROCK in dem 1974 erschienenen Buch [107] ausführlich beschrieben. Die mathematischen Grundlagen sind bereits in dem häufig zitierten Buch [105] enthalten.

Das Gershgorin-Theorem wurde 1931 in [32] veröffentlicht. Es ist ausführlich in [113] behandelt.

Die Erweiterung der Analyse unter Verwendung der verallgemeinerten Diagonaldominanz wurde durch NWOKAH in [89] beschrieben und in mehreren weiteren Arbeiten ausführlich untersucht. Wie die Forderung nach verallgemeinerter Diagonaldominanz durch geeignete Wahl des Reglers erfüllt werden kann, ist u. a. in [82] beschrieben.

In [70] ist erläutert, wie die Stabilitätsanalyse in ähnlicher wie der hier angegebenen Weise im Zeitbereich erfolgen kann. Die Erweiterung der Analyse auf Abschätzung des E/A-Verhaltens ist in [71] ausführlich dargestellt.

Eine ausführlichere Darstellung der Methoden zur Entkopplung von Regelkreisen, durch die man Diagonaldominanz der Regelstrecke erzeugen kann, findet man in [80].

Die Daten für das Beispiel 9.4 erhält man in Anlehnung an die Untersuchungen in [1].

Programm 9.1 Entwurf von PI-Reglern mit dem Direkten Nyquistverfahren

Voraussetzungen für die Anwendung des Programms:

- Den Matrizen A, B, C sowie den Parametern n und m sind bereits Werte zugewiesen.
- Die Regelstrecke ist stabil und nicht sprunghaft.

Entwurf der Eingrößenregler für $i=1, 2, \dots, m$

```

>> System=ss(A, B, C, D);
>> bode(System)                                ... erzeugt das Bodediagramm
                                                der i-ten Hauptregelstrecke

>> i = ...                                     Eingabe der Reglerparameter
>> KP(i,i) = ...
>> KI(i,i) = ...
>> Ag = [A-B(:,i)*KP(i,i)*C(i,:) -B(:,i)*KI(i,i); C(i,:) 0];
>> Bg = [B(:,i)*KP(i,i); -1];
>> Cg = [C(i,:) 0];
>> Dg = 0;
>> Kreisi=ss(Ag, Bg, Cg, Dg);    ... erzeugt die Führungsübergangsfunktion
>> step(Kreisi)                  des i-ten Regelkreises

```

Prüfung der Diagonaldominanz der Rückführdifferenzmatrix

```

>> A0 = [A zeros(n,m); C zeros(m,m)];
>> B0 = [B; zeros(m,m)];
>> C0 = [KP*C KI];
>> D0 = zeros(m,m);
>> Rueckfuehrdifferenzmatrix=ss(A0, B0, C0, D0+eye(m,m));
                                                Zustandsraummodell zu  $F(s)$ 

>> W = logspace(-2, 1, 100);
>> FBetrag = bode(Rueckfuehrdifferenzmatrix, W);
                                                Beträge der Elemente von  $F(s)$ 

>> Wsize = max(size(W));
>> for k=1:Wsize
    PMatrix=inv(diag(diag(FBetrag(:, :, k)))*...
                (FBetrag(:, :, k)-diag(diag(FBetrag(:, :, k)))));
    LambdaP(k,1) = max(abs(eig(PMatrix)));
    end;
>> semilogx(W, LambdaP);                    ... stellt  $\lambda_P\{.\}$  grafisch dar

```

Berechnung der Führungsübergangsfunktionen des Regelkreises

```

>> Ag = A0 - B0*C0;
>> Bg = [B*KP; -eye(m,m)];
>> Cg = [C zeros(m,m)];
>> Dg = zeros(m,m);
>> Kreis=ss(Ag, Bg, Cg, Dg);
>> step(Kreis);

```


10

Einführung in die digitale Regelung

Dieses Kapitel beschreibt die wichtigsten Veränderungen im Regelkreisverhalten, die sich durch die zeitdiskrete Realisierung des Reglers gegenüber der bisher betrachteten kontinuierlichen Regelung ergeben.

10.1 Digitaler Regelkreis

Regelungen werden heute immer häufiger mit moderner Gerätetechnik realisiert, bei der das Reglergesetz durch einen Algorithmus auf einem Rechner realisiert wird. Dies hat zur Folge, dass die Stellgröße nicht kontinuierlich zu jedem Zeitpunkt unter Nutzung des aktuellen Messwertes der Regelgröße und der Führungsgröße bestimmt werden kann, sondern dass sie nur zu bestimmten Zeitpunkten berechnet wird, wobei diese Zeitpunkte um mindestens die Rechenzeit für den Regelalgorithmus auseinander liegen. Üblicherweise geschieht die Verarbeitung der aktuellen Messwerte getaktet.

Dieses und die folgenden Kapitel untersuchen, zu welchen Veränderungen es im Systemverhalten kommen kann, wenn Regler zeitlich getaktet realisiert werden. Sie geben einen Einblick in die Theorie zeitdiskreter Regelungssysteme und zeigen, dass die verwendeten Modellformen, die Berechnung des Zeitverhaltens linearer Systeme, die Darstellung zeitdiskreter Systeme im Frequenzbereich und der Entwurf diskreter Regler den von der kontinuierlichen Regelung bekannten Modellen und Behandlungsmethoden sehr ähnlich sind. Die Stoffauswahl und die Darstellung stützen sich deshalb über weite Strecken auf einen Vergleich der für zeitdiskrete bzw. für

kontinuierliche Systeme anwendbaren Verfahren. Andererseits wird besonders herausgestellt, dass zeitdiskrete Systeme einige Eigenschaften aufweisen, die bei kontinuierlichen Systemen nicht auftreten können.

Digitaler Regelkreis. Abbildung 10.1 zeigt einen digitalen Regelkreis. Im Unterschied zu einem kontinuierlich arbeitenden Regler wird die Regelabweichung abgetastet und durch einen Analog-Digital-Wandler (A/D-Wandler) in ein digital codiertes Signal überführt. Der Abtaster sorgt dafür, dass der Wert der Regelabweichung $e(t)$ zu den diskreten Zeitpunkten $t = kT$, die untereinander den vorgegebenen zeitlichen Abstand T haben, vorliegt. An Stelle des kontinuierlichen Signals $e(t)$ steht dann eine Wertefolge $e(k)$ zur Verfügung. Durch den A/D-Wandler entsteht aus $e(k)$ ein Wert $\hat{e}(k)$, der digital dargestellt ist und im Rechner, der den Regler realisiert, verarbeitet werden kann.

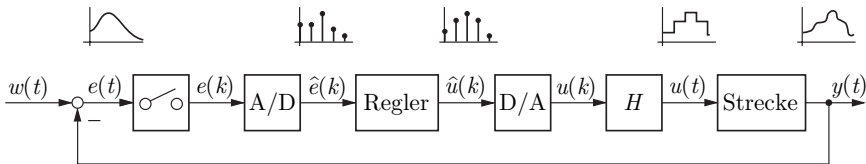


Abb. 10.1: Digitaler Regelkreis

Der vom Regler berechnete digitale Wert $\hat{u}(k)$ für die Stellgröße wird durch einen Digital-Analog-Wandler (D/A-Wandler) in ein analoges Signal überführt. Da die an die Regelstrecke anzulegende Stellgröße zu jedem Zeitpunkt t vorhanden sein muss, wird der vom Regler zu den Zeitpunkten $t = kT$ vorgegebene Wert $u(k)$ über die Zeitspanne T bis zum Auftreten des nächsten Wertes $u(k+1)$ durch ein Halteglied konstant gehalten. Dabei entsteht die Zeitfunktion $u(t)$.

Der Typ der im Regelkreis auftretenden Signale ist in der Abbildung durch kleine Diagramme veranschaulicht. Er wird im Abschn. 10.2 noch ausführlich behandelt. Wichtig ist zunächst nur, dass Signale unterschiedlichen Typs auftreten. Man spricht deshalb auch vom hybriden Charakter digitaler Regelkreise.

In den weiteren Betrachtungen können der A/D- und der D/A-Wandler vernachlässigt werden, weil moderne Reglerbausteine mit einer so großen Auflösung arbeiten, dass der Quantisierungsfehler der A/D-Wandlung nicht ins Gewicht fällt und das digital codierte Signal wie ein reellwertiges Signal behandelt werden kann. Für die technische Realisierung spielt diese Wandlung natürlich genauso eine Rolle wie die Anpassung der Signalpegel und die Verwendung von Filtern zur Unterdrückung von Messrauschen. Für das grundlegende Verständnis des Regelkreises und den Entwurf des Reglers müssen diese Einzelheiten jedoch nicht beachtet werden.

Wesentlich ist jedoch die Abtastung des Signals sowie die Verwendung des Haltegliedes. Beide Elemente führen dazu, dass nicht nur der Regler, sondern auch die Regelstrecke nur zu den durch den Abtaster vorgegebenen Zeitpunkten betrachtet werden. Da die Diskretisierung also ausschließlich in der Zeit und nicht bezüglich

der Signalwerte erfolgt, werden die Attribute „kontinuierlich“ und „diskret“ im Folgenden immer in Bezug zur Zeit verwendet. Alle Signale sind wie bisher reellwertig.

Eine wichtige Frage ist, inwieweit die von der kontinuierlichen Regelung bekannten Eigenschaften des Regelkreises trotz dieser beiden Elemente gelten bzw. ob aufgrund dieser Elemente sich das Verhalten eines zeitdiskreten Systems von dem eines kontinuierlichen Systems unterscheiden kann. Diese Frage steht im Mittelpunkt der folgenden Kapitel.

In den weiteren Betrachtungen wird bis auf wenige Ausnahmen davon ausgegangen, dass das betrachtete zeitdiskrete System durch Abtastung aus einem kontinuierlichen System hervorgeht. Man spricht deshalb auch von einem *Abtastsystem*. Wenn im Folgenden vom kontinuierlichen oder vom diskreten System gesprochen wird, so ist stets dasselbe System gemeint, nur dass einmal die kontinuierlichen Eingangs- und Ausgangsgrößen betrachtet und beim anderen Mal darauf Rücksicht genommen wird, dass das Eingangssignal durch ein Halteglied in ein treppenförmiges Eingangssignal geformt und dass das Ausgangssignal abgetastet wird.

Im Weiteren wird stets angenommen, dass die zeitdiskrete Betrachtung durch die Realisierung des Reglers begründet ist. Der Vollständigkeit halber sei jedoch vermerkt, dass eine derartige Betrachtungsweise auch durch Messprinzipien hervorgerufen sein kann. Wird beispielsweise die Zusammensetzung eines Gases gaschromatografisch bestimmt, so erfordert die Messung eine nicht vernachlässigbare Zeit. Die Messgrößen können also nur in bestimmten Zeitabständen T ermittelt werden, weswegen selbst bei einer kontinuierlich realisierten Regelung treppenförmige Messsignale entstehen.

10.2 Abtaster und Halteglied

10.2.1 Abtaster

Der Übergang vom kontinuierlichen Signal $y(t)$ zur Wertefolge $y(k)$ erfolgt durch den Abtaster, der zu den Zeitpunkten $t = kT$ den aktuellen Wert $y(kT)$ der Ausgangsgröße an den Regler überträgt. Grafisch gesehen wird aus dem im mittleren Teil von Abb. 10.2 angegebenen kontinuierlichen Verlauf eine Wertefolge, die durch die Kreise symbolisiert ist. Bei zeitdiskreten Systemen wird angenommen, dass die Abtastpunkte zeitlich äquidistant sind.

k ist die Nummer des betreffenden Abtastzeitpunktes. Zwischen der „natürlichen“ Zeit t und der Abtastzeit k besteht der Zusammenhang

$$t = kT. \quad (10.1)$$

Im Folgenden wird auch von „der Zeit k “ gesprochen, obwohl damit eigentlich die Nummer des Abtastzeitpunktes gemeint ist.

Eine wichtige Eigenschaft des Abtasters ist die gewählte Abtastzeit T , aus der auch die Abtaktfrequenz berechnet werden kann:

Abtastkreisfrequenz: $\omega_T = \frac{2\pi}{T}$.

(10.2)

Um die Darstellung zu vereinfachen und gleichzeitig die Parallelen zwischen kontinuierlichen und diskreten Systemen herauszustellen, wird für das kontinuierliche und das diskrete System mit denselben Formelzeichen gearbeitet. So bezeichnet $y(t)$ die kontinuierliche Ausgangsgröße, während $y(k)$ die durch den Abtaster erzeugte Wertefolge symbolisiert. Mathematisch gesehen sind beides zwei unterschiedliche Funktionen, denn $y(t)$ bildet die reelle Zeitachse in die Menge der reellen Zahlen ab, während bei $y(k)$ die Menge der ganzen Zahlen den Definitionsbereich darstellt. Wenn es auf die Unterscheidung beider Signale ankommt, wird von der *Funktion* $y(t)$ und der *Folge* $y(k)$ gesprochen.

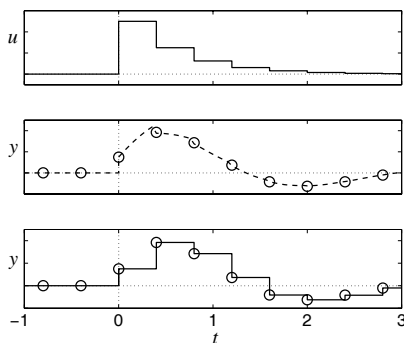


Abb. 10.2: Eingangs- und Ausgangsgrößen der Regelstrecke

Abtasttheorem. Durch die Abtastung erhält man nur eine unvollständige Information über das betrachtete Signal. Es gibt sehr viele Funktionen $y(t)$, die dieselben Abtastwerte $y(k)$ erzeugen. Betrachtet man beispielsweise die Signale

$$y_1(t) = \sin \omega_1 t$$

$$y_2(t) = \sin \omega_2 t,$$

die auf die Abtastfolgen

$$y_1(k) = \sin k\omega_1 T$$

$$y_2(k) = \sin k\omega_2 T,$$

führen, so sind die Abtastwerte für beide Funktionen an allen Abtastpunkten k gleich, wenn

$$\sin k\omega_1 T = \sin k\omega_2 T, \quad (k = 0, 1, \dots)$$

gilt, was in

$$\omega_1 = \omega_2 + l \frac{2\pi}{kT}$$

umgeformt werden kann und für alle ganzzahligen k und eine beliebige natürliche Zahl l erfüllt sein muss. Man kann sich leicht überlegen, dass diese Beziehung für alle k gilt, wenn sie für $k = 1$ erfüllt ist. Damit kann die letzte Gleichung in

$$\omega_1 = \omega_2 + l\omega_T, \quad l \text{ ganzzahlig} \quad (10.3)$$

umgeformt werden, wobei ω_T die Abtastkreisfrequenz darstellt.

Erfüllen zwei Kreisfrequenzen ω_1 und ω_2 die durch die Gl. (10.3) gegebene Beziehung, so können die von der Sinusschwingung mit der Kreisfrequenz ω_1 erzeugten Abtastwerte auch durch eine Sinusschwingung mit der Kreisfrequenz ω_2 erzeugt werden. Das heißt, die Signale mit diesen beiden Frequenzen können hinter dem Abtaster nicht mehr unterschieden werden. Abbildung 10.3 veranschaulicht diesen Sachverhalt für $T = 1$, $\omega_T = 2\pi$, $\omega_1 = 2\pi + 1$ und $\omega_2 = 1$.

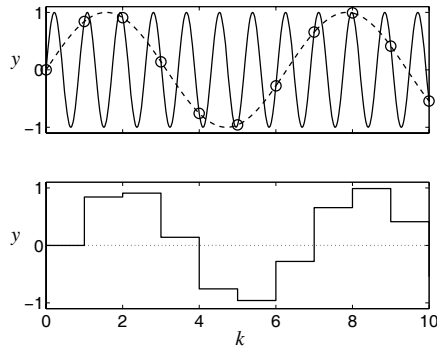


Abb. 10.3: Aliasing-Effekt

Die Sinusschwingung mit der hohen Frequenz ist aus den Abtastwerten nicht sichtbar. Man vermutet hinter den Abtastpunkten das niederfrequente Signal, das gestrichelt dargestellt ist. Verbindet man die Abtastwerte, um eine stückweise konstante Funktion zu erhalten, so entsteht die im unteren Teil der Abbildung dargestellte Funktion. Diese Reduktion der Frequenz eines Signals durch den Abtastvorgang nennt man *Aliasing* (Alias-Effekt).

Das 1948 von SHANNON¹ formulierte Abtasttheorem² fordert eine so schnelle Abtastung, dass Aliasing nicht auftreten kann. Wenn $\omega_{\max}$ die höchste Kreisfrequenz der in einem Signal $y(t)$ auftretenden Sinusfunktionen ist (vgl. Fouriertransformation), d. h., wenn

¹ CLAUDE ELWOOD SHANNON (1916 - 2001), Begründer der Informationstheorie

² Das Abtasttheorem wird auch als Nyquist-Theorem bezeichnet, da es bereits 1928 von H. NYQUIST beschrieben wurde; diese Bezeichnung wird hier vermieden, um Verwechslungen mit dem Nyquist-Stabilitätskriterium zu vermeiden.

$$Y(j\omega) = 0 \quad \text{für } \omega > \omega_{\max}$$

gilt, dann muss die Abtastfrequenz größer als $2\omega_{\max}$ gewählt werden:

$$\text{Abtasttheorem:} \quad \omega_T \stackrel{!}{>} 2\omega_{\max}. \quad (10.4)$$

Die Kreisfrequenz $\frac{\omega_T}{2}$ wird auch als *Nyquistfrequenz* bezeichnet. Um ein bandbegrenzt kontinuierliches Signal aus den Abtastwerten exakt rekonstruieren zu können, muss man also doppelt so schnell wie die höchste in $y(t)$ enthaltene Frequenz abtasten. Das zeitkontinuierliche Signal $y(t)$ kann unter dieser Voraussetzung aus dem abgetasteten Signal $y(k)$ entsprechend

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y(k) \frac{\sin\left(\frac{\pi(t-kT)}{T}\right)}{\frac{\pi(t-kT)}{T}} \quad (10.5)$$

berechnet werden.

Die Anwendung des Abtasttheorems in der Regelungstechnik ist problematisch, weil wichtige Signale nicht bandbegrenzt sind. Beispielsweise enthalten Sprungfunktionen oder Impulse Sinusfunktionen mit allen Frequenzen $\omega = -\infty, \dots, +\infty$. Man muss sich deshalb damit abfinden, dass diese Funktionen nicht eindeutig aus ihren Abtastwerten rekonstruiert werden können.

Versteckte Schwingungen. Für den Regelkreis hat das Abtasttheorem mehrere Konsequenzen. Wenn das Abtasttheorem nicht erfüllt ist, kann erstens aus Messungen, die besagen, dass $y(k) = 0$ für $k > \bar{k}$ ist, nicht darauf geschlossen werden, dass auch $y(t) = 0$ für $t > \bar{k}T$ gilt. Es können nämlich versteckte Schwingungen (*hidden oscillations*) auftreten, die aus den Abtastwerten nicht zu erkennen sind.

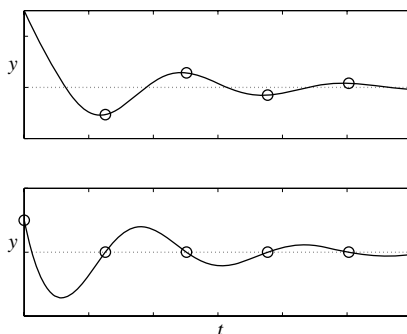


Abb. 10.4: Versteckte Schwingungen eines Systems dritter Ordnung

Beispiel 10.1 Versteckte Schwingungen

Abbildung 10.4 zeigt als Beispiel die Eigenbewegung des Systems

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,1 & 0,5 \\ 0 & -0,5 & -0,1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$y(t) = (1 \ 1 \ 1) \mathbf{x}(t)$$

für $\mathbf{x}_0 = (10 \ 10 \ 10)'$ (oben) und $\mathbf{x}_0 = (10 \ 10 \ -10)'$ (unten). Für die erste Anfangsbedingung ist das oszillierende Verhalten des Systems auch aus den Abtastwerten erkennbar, während man aus den Abtastwerten bei der zweiten Anfangsbedingung den Schluss ziehen könnte, dass sich das System im Ruhezustand befindet. Die Abtastzeit $T = 2\pi$ ist also in Bezug zur höchsten Frequenz $\omega_{\max} = 0,5$, die in der Eigenbewegung vorkommt, zu groß.

Die Abbildung zeigt allerdings auch, dass mit der schlecht gewählten Abtastzeit nicht zwangsläufig „schlechte“ Abtastwerte entstehen. Unter bestimmten Anfangsbedingungen wird das Ausgangssignal relativ gut wiedergegeben, bei anderen Anfangsbedingungen tritt aber der beschriebene Effekt ein. Durch die Forderung des Abtasttheorems wird gesichert, dass bei *beliebigen* Anfangsbedingungen die Bewegung des Systems aus dem abgetasteten Signal erkannt werden kann. $\square$

Auf versteckte Schwingungen kann der Regler nicht reagieren. Es gibt jedoch noch eine zweite Wirkung des Aliasing-Effektes, bei dem der Regler auf Regelabweichungen reagiert, dies jedoch im falschen Frequenzbereich tut. Wenn Störungen oder Messrauschen eine hohe Frequenz haben, die über der Grenzfrequenz der Regelstrecke liegt, so wird bei einer kontinuierlichen Regelung die über den Regler an den Streckeneingang übertragene Störung nur stark gedämpft am Ausgang wirksam. Bei der diskreten Regelung kann die hochfrequente Störung durch das Aliasing in einen viel tieferen Frequenzbereich transformiert werden. Der Regler versucht dann, die scheinbar aufgetretene niederfrequente Störung zu bekämpfen, und regt die Regelstrecke in diesem Frequenzbereich an. Im Gegensatz zu den versteckten Schwingungen erkennt der Regler jetzt, dass eine Störung auf das System einwirkt, aber er reagiert im falschen Frequenzbereich.

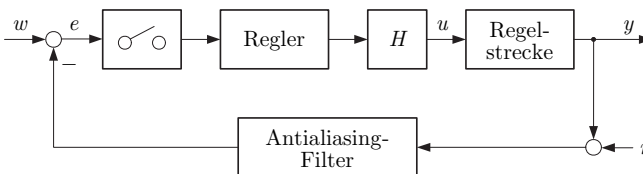


Abb. 10.5: Antialiasing-Filter zur Unterdrückung der Wirkung des hochfrequenten Messrauschens $r(t)$

Abhilfe schafft hier ein Filter (Antialiasing-Filter) vor dem Abtaster (Abb 10.5), der aus dem kontinuierlichen Signal die Frequenzanteile, die höher als $\frac{\omega_T}{2}$ sind, herausfiltert, so dass der Aliasing-Effekt nicht eintreten kann. Damit wird die Wirkung

hochfrequenter Störungen durch den zeitdiskreten Regler, genauso wie durch einen kontinuierlichen Regler, nicht verändert. Der zeitdiskrete Regler erhält keine Informationen über das „herausgefilterte“ Messrauschen und reagiert auf dieses hochfrequente Signal nicht (und insbesondere nicht in falscher Weise!).

Beispiel 10.2 Diskrete Regelung eines Gleichstrommotors

In diesem Beispiel wird untersucht, welche Auswirkungen die zeitdiskrete Realisierung des im Beispiel I-11.2 entworfenen Drehzahlreglers auf das Verhalten des geregelten Gleichstrommotors hat. Abbildung 10.6 zeigt den betrachteten Regelkreis, wobei $r(t)$ ein Messrauschen beschreibt. Als Abtastzeit wird $T = 0,05\text{s}$ gewählt.

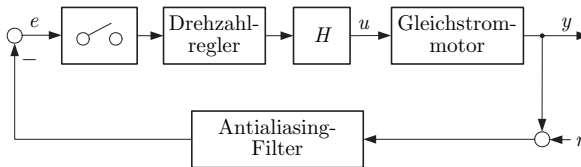


Abb. 10.6: Zeitdiskrete Realisierung einer Drehzahlregelung

Das Messrauschen ist sinusförmig mit der Kreisfrequenz $\omega_r = 138 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Offenbar überschreitet diese Frequenz die halbe Abtastfrequenz

$$\frac{\omega_T}{2} = \frac{\pi}{0,05} = 63 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

deutlich. Beim abgetasteten Rauschsignal tritt deshalb der Aliasing-Effekt ein (Abb. 10.7). Im oberen Teil der Abbildung ist das Rauschsignal zusammen mit den Abtastwerten aufgetragen, darunter die mit einem Halteglied veranschaulichte Rauschkurve.

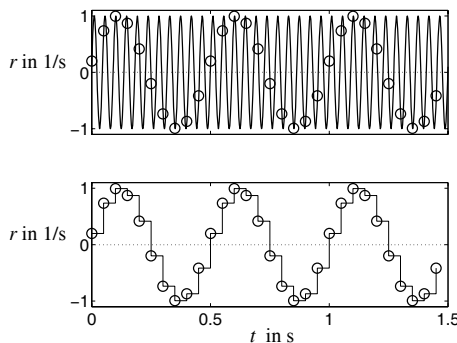


Abb. 10.7: Aliasing beim Abtasten des Rauschsignals

Die Abtastung erzeugt eine Störung, deren Periodendauer etwa bei der Abtastzeit von 0,05 s liegt und die deshalb eine Kreisfrequenz von $\frac{2\pi}{0,05} = 125 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ hat. Die hochfrequente Störung ist folglich in eine niederfrequente Störung transformiert worden.

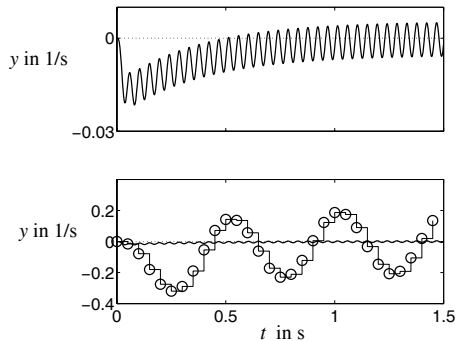


Abb. 10.8: Verhalten des gestörten Gleichstrommotors bei kontinuierlicher Regelung (oben) und bei zeitdiskreter Regelung (unten)

Abbildung 10.8 zeigt die Wirkung der Störung auf den Regelkreis. Im oberen Teil ist das Störverhalten bei kontinuierlicher Regelung dargestellt. Die Störung wird durch den Regler unterdrückt und nur mit sehr kleiner Amplitude im Regelkreis wirksam. Bei einer zeitdiskreten Realisierung führt die Störung zu erheblichen Regelabweichungen, denn die Drehzahl des Motors schwankt mit einer Amplitude von etwa $\pm 0,3 \frac{1}{\text{s}}$. Der im unteren Teil der Abbildung ebenfalls eingetragene Verlauf der Drehzahl bei kontinuierlicher Regelung erscheint aufgrund des veränderten Maßstabs als Linie, die sich fast gar nicht von der O-Linie unterscheidet.

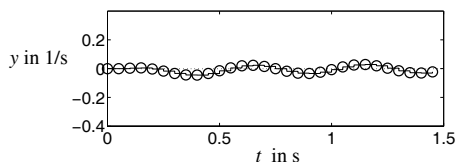


Abb. 10.9: Verbesserung des Störverhaltens des Gleichstrommotors bei Verwendung eines Antialiasing-Filters

Wenn man das Messrauschen mit einem Antialiasing-Filter herausfiltert, bevor die Regelgröße abgetastet wird, so kann nur noch das gefilterte Signal den Regelkreis beeinflussen. In diesem Beispiel wurde als Filter ein PT_1 -Glieder mit der Grenzfrequenz von $21 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ verwendet. Wie Abb. 10.9 zeigt, verbessert dieses Filter das Störverhalten des digital geregelten Gleichstrommotors erheblich. □

10.2.2 Halteglied

Das Halteglied sorgt dafür, dass aus der Wertefolge für die Stellgröße

$$u(0), u(1), u(2), u(3), \dots$$

ein kontinuierliches Signal $u(t)$ gemacht wird. Auf Grund des Haltegliedes gilt

$$u(t) = u(k) = \text{konst.} \quad \text{für } kT \leq t < (k+1)T, \quad (10.6)$$

wobei $u(k)$ der durch den Regler gegebene Wert der Stellgröße zum Zeitpunkt kT ist.

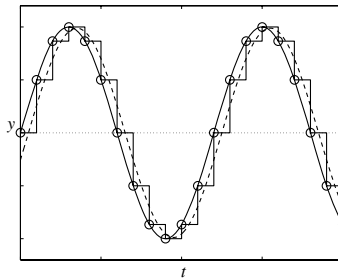


Abb. 10.10: Wirkung des Haltegliedes bei einem sinusförmigen Signal

Das Halteglied ist zwar ein lineares, aber ein zeitvariables System. Die Linearitätseigenschaft kann man sich leicht mit Hilfe des Superpositionsprinzips klarmachen. Die Zeitveränderung im Systemverhalten ergibt sich daraus, dass das Halteglied den zu einem Abtastzeitpunkt vorliegenden Wert $u(k)$ über das Zeitintervall T hält und dann in gleicher Weise mit dem nächsten Wert verfährt. Die Übertragungseigenschaft des Haltegliedes ändert sich folglich periodisch.

Diese Eigenschaft äußert sich darin, dass ein abgetastetes sinusförmiges Signal durch das Halteglied in ein Signal überführt wird, dessen Fourierzerlegung sinusförmige Signale vieler Frequenzen ergibt. Aus diesem Grund kann das Halteglied nicht durch eine Übertragungsfunktion dargestellt werden. Man könnte lediglich eine Beschreibungsfunktion bestimmen, die ähnlich der Vorgehensweise bei nichtlinearen Systemen die Übertragung eines sinusförmigen Signals in die Grundwelle am Ausgang des Haltegliedes beschreibt.

Im Folgenden spielt diese Schwierigkeit keine Rolle, weil nur das Systemverhalten zu den Abtastzeitpunkten betrachtet wird. Man kann sich jedoch die Wirkung des Haltegliedes auf das Verhalten der Regelstrecke anhand der Abb. 10.10 überlegen. Dort ist gezeigt, was passiert, wenn der Regler ein sinusförmiges Stellsignal vorgeben will. Da anstelle von $u(t) = \sin t$ nur $u(k) = \sin kT$ vorgegeben werden kann, entsteht die gezeigte stufenförmige Funktion. Wenn die Regelstrecke im Wesentlichen Tiefpasscharakter hat, kann man annehmen, dass sie nur die tiefen Frequenzen

überträgt, die in der Stufenfunktion enthalten sind. Nimmt man insbesondere an, dass die Abtastzeit in Bezug zur Bandbreite der Regelstrecke so festgelegt ist, wie es das Abtasttheorem fordert, dann kann man die bestmögliche Sinusfunktion bestimmen, die durch die Stufenfunktion vorgegeben wird. Diese Funktion heißt

$$\hat{u}(t) = \frac{2 \sin 0,5T}{T} \sin(t - 0,5T).$$

Sie ist als gestrichelte Linie in die Abbildung eingetragen.

Diese Betrachtungen zeigt, dass das Halteglied auf sinusförmige Signale näherungsweise wie ein Totzeitglied mit der Totzeit $T_t = \frac{T}{2}$ wirkt. Der zeitdiskrete Regelkreis unterscheidet sich also vom kontinuierlichen Kreis näherungsweise um das Totzeitglied

$$G_H(s) \approx e^{-\frac{sT}{2}}, \quad (10.7)$$

das bei kontinuierlicher Betrachtung des digitalen Regelkreises als Ersatz für das Halteglied eingefügt werden kann. Der kontinuierliche Regelkreis, in dem dieses Totzeitglied eingeführt ist, beschreibt also näherungsweise das Verhalten des digitalen Regelkreises. Das Totzeitglied bewirkt bei großen Abtastzeiten eine erhebliche Phasenverschiebung, die das Regelkreisverhalten verschlechtert. Kontinuierliche Regler können deshalb nur bei hinreichend schneller Abtastung unverändert durch einen zeitdiskreten Regler realisiert werden.

Es sei darauf hingewiesen, dass die bisherigen Betrachtungen lediglich das Halteglied betrafen. Wenn der Regelalgorithmus eine nicht vernachlässigbare Rechenzeit T_r erfordert, so tritt diese Zeit als zusätzliche Totzeit im Regelkreis auf. Der zeitdiskrete Regler wirkt dann näherungsweise wie das Totzeitglied

$$G_H(s) \approx e^{-s(\frac{T}{2} + T_r)}.$$

Abtast-Halteglied. Um die bei Abtastregelungen verfügbaren Informationen erkennen zu können, denkt man sich stets hinter ein Abtastglied ein Halteglied angeordnet, selbst wenn dies in dem in Abb. 10.1 gezeigten Regelkreis nicht der Fall ist. Der Reihenschaltung von Abtast- und Halteglied entspricht die Ausführung der Funktionen „Abtasten“ und „Speichern“. Der zuletzt gemessene Wert wird solange festgehalten, bis ein neuer Wert bekannt ist. Diese Überlegung führt dazu, dass man sich nicht nur die Stellgröße, sondern auch die Regelgröße als Stufenfunktion vorstellt.

Für die Eingangs- und Ausgangsgrößen der Regelstrecke gibt es die in Abb. 10.2 aufgeführten Darstellungsformen. Die Stellgröße $u(t)$ ist stufenförmig, wie es im oberen Teil der Abbildung gezeigt wird. Der dort angegebene Verlauf entspricht der tatsächlich an die Regelstrecke angelegten Stellgröße. Durch den Regler wird jeweils nur der Wert $u(k)$ vorgegeben.

Die Ausgangsgröße ist nur zu den Abtastzeitpunkten exakt bekannt. An Stelle des kontinuierlichen Messwertverlaufes kennt der Regler also nur die im mittleren Teil der Abbildung gekennzeichneten Abtastwerte. Obwohl sich die Ausgangsgröße $y(t)$ zwischen den Abtastzeitpunkten verändert, liegt für den Regler zwischen den

Abtastzeitpunkten nur ein konstanter Wert der Ausgangsgröße vor. Um dies zu verdeutlichen, stellt man auch die Ausgangsgröße durch eine stufenförmige Funktion dar, wie es im unteren Teil der Abbildung getan wurde. Man tut so, als ob auch zwischen Abtaster und Regler ein Halteglied angeordnet ist.

Für die Ausgangsgröße darf diese Darstellung jedoch nicht falsch interpretiert werden. $y(t)$ ändert sich kontinuierlich; was hier dargestellt ist, ist nur die Information, die über $y(t)$ vorhanden ist. Das Systemverhalten zwischen den Abtastzeitpunkten wird nicht gemessen und ist deshalb unbekannt, es sei denn, es wird mit einem Modell berechnet.

Im Folgenden wird die Ausgangsgröße grafisch als Wertefolge oder als Treppenfunktion dargestellt, je nachdem, ob es auf die Abtastwerte oder auf eine Veranschaulichung des Verlaufes ankommt. Wenn die Treppenfunktion zur Veranschaulichung verwendet wird, so werden stets die Abtastwerte durch Kreise hervorgehoben, um die Leser daran zu erinnern, dass es sich bei der Treppenfunktion nicht um den wahren Verlauf der entsprechenden Größe handelt. Die Kennzeichnung dieser Abtastwerte entfällt natürlich bei Stellgrößen, denn dort entspricht die Treppenfunktion dem wahren, an der kontinuierlichen Regelstrecke wirksamen Verlauf der Eingangsgröße.

10.2.3 Wahl der Abtastzeit

Der wesentliche Unterschied zwischen kontinuierlichen und zeitdiskreten Systemen besteht darin, dass aufgrund von Abtaster und Halteglied weniger Informationen von der Regelstrecke zum Regler und umgekehrt übertragen werden können. Diese Unterschiede werden umso größer, je größer die Abtastzeit T ist. Es stellt sich deshalb die Frage, nach welchen Kriterien die Abtastzeit auszuwählen ist. Dabei spielen eine Reihe technischer Randbedingungen und Güteforderungen für die Regelung die entscheidende Rolle.

- Aus regelungstechnischer Sicht soll die Abtastzeit so klein wie möglich gewählt werden, damit das zeitdiskrete System dieselben Eigenschaften haben kann wie das kontinuierliche.
- Um den Realisierungsaufwand so klein wie möglich zu halten, soll die Abtastzeit so groß wie möglich gewählt werden. Man kann dann langsame A/D- und D/A-Wandler verwenden, und mit dem eingesetzten Rechner mehr als einen Regelkreis realisieren.
- Wesentlich für die Wahl der Abtastzeit ist die größte im Regelkreis auftretende Frequenz ω_{Gr} . Diese kann durch das Führungssignal, die Störungen oder die Bandbreite der Regelstrecke bestimmt werden.
Das Abtasttheorem schreibt vor, dass die Abtastfrequenz $\omega_T = \frac{2\pi}{T}$ doppelt so groß sein muss wie ω_{Gr} :

$$\omega_T > 2 \omega_{Gr}.$$

Für gutes Führungsverhalten und schnelle Störunterdrückung muss jedoch mit

$$\omega_T \approx 6 \omega_{Gr} \dots 20 \omega_{Gr}$$

gearbeitet werden, wobei ω_{Gr} dann durch das Führungsgrößenmodell bzw. das Störgrößenmodell vorgegeben ist.

- Um den kontinuierlichen Regler ohne wesentliche Änderungen als zeitdiskreten Regler verwenden zu können, muss

$$\omega_T > 20 \omega_{Gr}$$

gelten.

- Die Abtastzeit darf nicht zu klein sein, weil sich dann aufeinanderfolgende Signalwerte nur wenig unterscheiden und die insbesondere bei dynamischen Mehrgrößenreglern auftretenden Datenmatrizen schlecht konditioniert sein können.

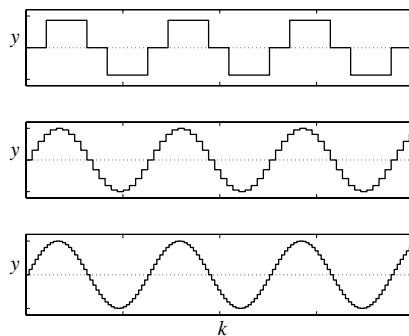


Abb. 10.11: Sinusförmiges Signal mit unterschiedlicher Abtastfrequenz

Was die angegebenen Richtwerte für die Abtastung eines sinusförmigen Ausgangssignals bedeuten, ist in Abb. 10.11 veranschaulicht. Die angegebenen Funktionen entstehen bei

$$\omega_T = 6 \omega_{Gr}, \quad 20 \omega_{Gr}, \quad 40 \omega_{Gr},$$

Es ist optisch gut zu erkennen, wie gut bzw. schlecht das kontinuierliche Signal durch die Stufenfunktion wiedergegeben wird.

Aufgabe 10.1 Abgetastete Systeme

Untersuchen Sie den zeitdiskreten Charakter der folgenden Beispiele, indem Sie ein Blockschaltbild zeichnen, Abtaster und Halteglied hervorheben und kennzeichnen, ob es sich bei

den Signalen um kontinuierliche oder zeitdiskrete handelt. Stellen Sie die durch die Abtastung erhaltene Folge $y(k)$ dar und tragen Sie in das Diagramm Funktionen $y(t)$ ein, die diese Abtastwerte erzeugen.

- **Flugüberwachung:** Mit Hilfe eines Radars werden sechsmal pro Minute die Positionen der sich einem Flughafen annähernden Flugzeuge bestimmt. Die Flugzeuge fliegen mit einer Geschwindigkeit von 600 km/h. Wie groß kann die Kursabweichung („Zickzack-Kurs“) sein, die von der Flugüberwachung nicht erkannt wird? Wodurch ist die Kursabweichung begrenzt?
- **Autorennen:** Wie groß ist die Abtastzeit, wenn beim Autorennen die Rundenzeit, die Durchschnittsgeschwindigkeit und der Rückstand der Fahrzeuge bei der Vorbeifahrt an den Boxen gemessen wird? Handelt es sich um ein abgetastetes System der hier betrachteten Form?
- **Biogasreaktor:** Zeichnen Sie das Blockschaltbild eines Biogasreaktors, bei dem der pH -Wert kontinuierlich, die Gasproduktion alle 10 Minuten und die Biomassekonzentration nur alle vier Stunden durch Laboruntersuchungen bestimmt werden kann. Welche Probleme für die Regelung treten aufgrund dieser messtechnischen Bedingungen auf? □

10.3 Vergleich von kontinuierlichem und zeitdiskretem Regelkreis

Im Mittelpunkt der folgenden Kapitel steht die Frage, wodurch sich zeitdiskrete Systeme von kontinuierlichen Systemen unterscheiden und inwieweit die von kontinuierlichen Systemen bekannten Analyse- und Entwurfsverfahren auch für zeitdiskrete Systeme eingesetzt werden können. Die Darstellung konzentriert sich dabei auf die folgenden vier Fragen:

1. *Unter welchen Bedingungen kann man einen Regler als kontinuierlichen Regler entwerfen und dann als zeitdiskreten Regler realisieren?*

Intuitiv wird man diese Frage damit beantworten, dass die Abtastung einfach schnell genug sein muss, damit der zeitdiskrete Regler „quasikontinuierlich“ ist. Es ist aber auch zu überlegen, wie das kontinuierliche Reglergesetz in ein zeitdiskretes überführt werden kann. Dabei wird sich u. a. herausstellen, dass die Reglerparameter von der Abtastzeit abhängen.

2. *Für welche Probleme können die von kontinuierlichen Systemen bekannten Methoden auf zeitdiskrete Systeme übertragen werden?*

Es wird sich zeigen, dass eine große Zahl von Begriffen, Eigenschaften, Analyse- und Entwurfsproblemen für zeitdiskrete Systeme ähnlich oder gar identisch mit denen für kontinuierliche Systeme sind, so dass die für kontinuierliche Systeme erläuterten Behandlungsmethoden ohne größere Veränderungen übernommen werden können und hier keiner ausführlichen Erläuterung mehr bedürfen. Dabei muss jedoch

beachtet werden, dass einige Analyse- und Entwurfsaufgaben wie die Steuerbarkeitsanalyse oder der Entwurf durch Polzuweisung zwar mathematisch für kontinuierliche und zeitdiskrete Systeme dieselben Probleme darstellen, ihre ingenieurtechnische Interpretation jedoch eine andere ist. So müssen die Eigenwerte beim Entwurf durch Polvorgabe in andere Gebiete der komplexen Ebene geschoben werden als bei der kontinuierlichen Regelung.

3. Welche neuen Analyse- und Entwurfsverfahren gibt es für zeitdiskrete Systeme?

Auf diese Frage gibt es zwei Antworten. Einerseits lassen sich einige der von kontinuierlichen Systemen bekannten Vorgehensweisen auch auf zeitdiskrete Systeme übertragen, wobei jedoch ihre mathematische Darstellung und damit ihre Durchführung eine andere wird. So lässt sich das Hurwitzkriterium erst nach Verwendung einer Transformation des charakteristischen Polynoms anwenden. Es hat für die transformierten Größen dann jedoch dieselbe Form wie für kontinuierliche Systeme. Andererseits hat der Optimalreglerentwurf zwar auch das Ziel, einen Regler zu finden, für den ein Gütefunktional minimal wird. Die Gleichungen für den Regler sind aber andere als bei kontinuierlichen Systemen.

Die zweite Antwort besteht in Analyse- und Entwurfsverfahren, die die zeitdiskrete Natur von Abtastsystemen ausnutzen, also speziell auf zeitdiskrete Systeme zugeschnitten sind und nicht auf kontinuierliche Systeme anwendbar wären. Als Beispiel wird der Regler mit endlicher Einstellzeit betrachtet.

4. Wodurch ist die Regelgüte bei zeitdiskreten Systemen beschränkt?

Da im digitalen Regelkreis nur stufenförmige Stellgrößen verwendet werden können und dem Regler nur in den durch die Abtastung vorgegebenen Zeitintervallen aktuelle Informationen über das Verhalten der Regelstrecke zur Verfügung steht, kann der zeitdiskrete Regelkreis nicht besser sein als ein kontinuierlicher. Deshalb ist es nicht überraschend, dass in den folgenden Kapiteln an mehreren Stellen Zusatzbedingungen für das zeitdiskrete System eingeführt werden müssen. Beispielsweise sind die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des kontinuierlichen Systems notwendig, aber nicht hinreichend für die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des zeitdiskreten Systems. Nur unter Zusatzbedingungen überträgt sich diese Eigenschaft vom kontinuierlichen System auf das Abtastsystem.

Man muss sich jedoch im Klaren sein, dass die bei der zeitdiskreten Analyse zu Tage tretenden Zusatzbedingungen bzw. Verschlechterungen der Regelgüte nicht durch ein Zurückgehen auf die kontinuierliche Betrachtungsweise vermieden werden kann, es sei denn, dass der Regler tatsächlich analog realisiert wird. Die Behandlung der Regelungsaufgabe als zeitdiskretes Problem bedeutet, dass Realisierungsbedingungen für den Regler berücksichtigt werden, die bisher ignoriert wurden. Die jetzt zu behandelnden Schwierigkeiten erscheinen als zusätzliche Probleme, weil sie die aufgrund der Vernachlässigung dieser Realisierungsbedingungen bisher nicht erkannt werden konnten. Diese Schwierigkeiten sind jedoch bei jeder Realisierung von Regelungen durch Rechner zu lösen.

Da die grundlegenden Unterschiede zwischen kontinuierlichen und zeitdiskreten Systemen bereits bei Systemen mit einem Eingang und einem Ausgang sichtbar

werden, werden im Folgenden häufig Eingrößensysteme bzw. einschleifige Regelkreise betrachtet. Nur wenn der Mehrgrößencharakter des Systems eine wichtige Rolle spielt oder die mathematische Behandlung des Mehrgrößensystems keine zusätzlichen Probleme aufwirft, wird mit Systemen mit mehreren Eingangs- und Ausgangsgrößen gearbeitet.

Literaturhinweise

Die Literatur zeitdiskreter Systeme geht einerseits davon aus, dass der Leser mit kontinuierlichen Systemen vertraut ist, und hebt die Unterschiede zum zeitdiskreten Verhalten hervor. In [56] und [61] werden kontinuierliche und zeitdiskrete Systeme parallel behandelt, wodurch sich diese Bücher weniger als Lehrbuch, aber umso mehr als Nachschlagewerke eignen.

Andererseits gibt es eine Reihe spezieller Lehrbücher, die sich ausschließlich zeitdiskreten Systemen widmen. Sie setzen i. Allg. weder die Kenntnis der Theorie kontinuierlicher Systeme voraus, noch zeigen sie durchgängig die Parallelität der kontinuierlichen und der zeitdiskreten Behandlungsmethoden auf. Dafür stellen sie den Stoff wesentlich ausführlicher dar als hier. Es sei insbesondere auf zwei deutschsprachige Lehrbücher hingewiesen. [3] behandelt außer dem hier verwendeten Stoff ausführlich den Entwurf robuster Regler. In [40] werden die Zustandsraummethoden umfassend dargestellt und es wird ein Einblick in stochastisch gestörte Systeme und den Entwurf adaptiver Regelungen gegeben.

Das erstmals in [90] und [110] beschriebene Abtasttheorem kann ausführlich in jedem Lehrbuch zur digitalen Signalverarbeitung nachgelesen werden.

11

Beschreibung und Analyse zeitdiskreter Systeme im Zeitbereich

In Analogie zu den Modellen für kontinuierliche Systeme werden die Differenzengleichung und das zeitdiskrete Zustandsraummodell eingeführt. Die Lösung dieser Gleichungen für eine vorgegebene Eingangsfolge beschreibt das Zeitverhalten des Systems. Wird der Einheitssprung oder der Einheitsimpuls als Eingangsgröße verwendet, so erhält man die Übergangsfolge bzw. die Gewichtsfolge als Systemantwort. Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit und Stabilität können in ähnlicher Weise wie bei kontinuierlichen Systemen geprüft werden.

11.1 Beschreibung zeitdiskreter Systeme

11.1.1 Modellbildungsaufgabe

Im Folgenden wird das in Abb. 11.1 oben gezeigte System vom Standpunkt des Reglers aus betrachtet. Der Regler gibt die Folge $u(k)$ der Stellgrößen vor und erhält als Antwort die Folge $e(k)$ der Regelabweichungen. Da jetzt zunächst mit $w(k) = 0$ gearbeitet wird, gilt $e(k) = -y(k)$.

Für die Analyse der Regelstrecke und für den Entwurf einer diskreten Regelung ist das Verhalten der Regelstrecke einschließlich des Halteglieders und des Abtasters

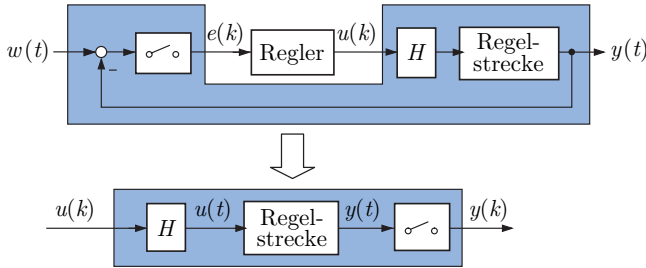


Abb. 11.1: Abtastsystem

maßgebend (Abb. 11.1 (unten)). In diesem Kapitel wird untersucht, wie das Übertragungsverhalten dieser drei Elemente beschrieben und analysiert werden kann.

Alle folgenden Untersuchungen befassen sich mit Abtastsystemen. Das heißt, es wird stets angenommen, dass es ein kontinuierliches System gibt, dessen Verhalten in Verbindung mit einem Halteglied und einem Abtaster zeitdiskret betrachtet wird. Dies entspricht dem praktischen Umstand, dass die Regelung ein sich kontinuierlich bewegendes System in vorgegebener Weise beeinflussen soll und die Zeitdiskretisierung nur eingeführt wird, weil der Regler mit Hilfe eines Rechners realisiert wird. Im Folgenden wird deshalb auch untersucht, welche speziellen Eigenschaften Abtastsysteme im Unterschied zu allgemeinen zeitdiskreten Systemen haben, und es wird an Beispielen gezeigt, dass es zeitdiskrete Systeme gibt, die sich nicht durch die Reihenschaltung Halteglied – kontinuierliches System – Abtaster darstellen lassen.

In der Anordnung der Komponenten in Abb. 11.1 (oben) kann es anwendungsspezifische Unterschiede geben, die aber für die Behandlung der grundlegenden Phänomene in Abtastsystemen unbedeutend sind. So kann der Abtaster nach der Summationsstelle liegen, weil der Sollwert $w(t)$ zeitkontinuierlich vorgegeben und erst die Regelabweichung $e(t)$ abgetastet wird. Auch kann anstelle des hier verwendeten Haltegliedes 0-ter Ordnung, das die Stellgröße zwischen den Abtastzeitpunkten konstant hält, mit Haltegliedern höherer Ordnung gearbeitet werden, die die Stellgröße zwischen den Abtastzeitpunkten als Funktionen höherer Ordnung approximieren.

11.1.2 Beschreibung zeitdiskreter Systeme durch Differenzengleichungen

Da das Abtastsystem aus einem kontinuierlichen System hervorgeht, das durch eine Differenzialgleichung beschrieben werden kann, bildet es den Verlauf der Eingangsgröße in den Verlauf der Ausgangsgröße ab. Bei der kontinuierlichen Betrachtungsweise gehen neben $y(t)$ und $u(t)$ auch die ersten n Ableitungen von $y(t)$ und die ersten q Ableitungen von $u(t)$ in das Modell ein.

Bei zeitdiskreter Betrachtungsweise stehen diese Ableitungen nicht zur Verfügung. Man kann die Ableitungen näherungsweise durch die Differenzenquotienten, also beispielsweise $\dot{y}$ durch

$$\Delta y(t) = \frac{y(t+T) - y(t)}{T}$$

ersetzen, so dass man vermuten kann, dass eine bestimmte Zahl aufeinanderfolgender Abtastwerte $y(t)$, $y(t+T)$, $y(t+2T)$ usw. in die Systembeschreibung eingeht. Es wird sich zeigen, dass diese Vermutung richtig ist. Abtastsysteme können durch Differenzengleichungen der Form

Differenzengleichung:

$$\begin{aligned} a_n y(k+n) + a_{n-1} y(k+n-1) + \dots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) \\ = b_q u(k+q) + b_{q-1} u(k+q-1) + \dots + b_1 u(k+1) + b_0 u(k) \end{aligned} \quad (11.1)$$

beschrieben werden.

Wie bei der Differenzialgleichung, werden die Koeffizienten der Differenzengleichung auf der linken Seite mit a_i und die auf der rechten Seite mit b_i bezeichnet. Zahlenmäßig stimmen diese Koeffizienten allerdings nicht mit denen der Differenzialgleichung des kontinuierlichen Systems überein! Der Koeffizient a_n vor $y(k+n)$ wird gleich eins gesetzt, was man gegebenenfalls durch Division der Gleichung durch a_n erreichen kann.

Für die Lösung der Differenzengleichung müssen die ersten n Werte des Ausgangs und die ersten q Werte der Eingangsgröße als Anfangsbedingungen

$$y(i) = y_{0i}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (11.2)$$

$$u(i) = u_{0i}, \quad i = 0, 1, \dots, q-1 \quad (11.3)$$

bekannt sein. Setzt man wie bei kontinuierlichen Systemen voraus, dass die Eingangsgröße für $t \geq 0$ bekannt ist, so sind die in Gl. (11.3) geforderten Werte bekannt und die Anfangsbedingungen beziehen sich nur auf die in Gl. (11.2) angegebenen Werte der Ausgangsgröße. Mit der Differenzengleichung (11.1) kann man dann das Systemverhalten für $k \geq n$ berechnen.

Gleichung (11.1) kann in der Form

$$y(k+n) = \sum_{i=0}^q b_i u(k+i) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i y(k+i) \quad (11.4)$$

geschrieben werden, in der offensichtlich wird, dass $y(k+n)$ rekursiv aus vorhergehenden Werten der Ausgangsgröße und der Eingangsgröße berechnet werden kann. Häufig führt man bei dieser Formel noch eine Verschiebung der Zeitachse durch, indem man k durch $k-n$ ersetzt, wobei sich

$$y(k) = \sum_{i=0}^q b_i u(k+i-n) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i y(k+i-n) \quad (11.5)$$

als Formel für $y(k)$ für $k \geq n$ ergibt.

Aus Gl. (11.5) geht hervor, dass der Ausgang zur Zeit k nur von Werten der Eingangsgröße abhängt, die mindestens $n - q$ Zeitschritte zurückliegen. Von sprunghaften bzw. „schnellen“ Systemen ist jedoch bekannt, dass die Eingangsgröße die Ausgangsgröße zum selben Zeitpunkt oder spätestens einen Abtastzeitpunkt später beeinflusst. Aus dieser Überlegung wird offensichtlich, dass bei vielen zeitdiskreten Systemen entweder $q = n - 1$ oder $q = n$ gilt, also auf beiden Seiten der Differenzengleichung (11.1) Summanden für dieselben Zeitverschiebungen auftreten.

Wichtige Systemeigenschaften. Aus der Differenzengleichung (11.1) werden mehrere Eigenschaften zeitdiskreter Systeme deutlich, die bereits von der kontinuierlichen Systembeschreibung bekannt sind und deshalb im Folgenden nur kurz erwähnt werden.

Ein dynamisches System bildet den *Verlauf* der Eingangsgröße in den *Verlauf* der Ausgangsgröße ab.

Die aktuelle Ausgangsgröße $y(k)$ kann nicht allein aus der zum selben Zeitpunkt anliegenden Eingangsgröße $u(k)$ berechnet werden, sondern es muss der Verlauf der Funktion u bekannt sein. Dies wird an der Differenzengleichung deutlich. Zur Bestimmung von $y(kT)$ müssen die Werte der Eingangsgröße zu den q vorherigen Abtastzeitpunkten bekannt sein.

Die Differenzengleichung beschreibt das Systemverhalten „lokal“ in dem Sinne, dass die Werte der Eingangs- und Ausgangsgrößen zu q bzw. n vergangenen Abtastzeitpunkten ausreichen, um den aktuellen Wert der Ausgangsgröße zu bestimmen.

Das heißt, aus einer *endlichen* Anzahl von Werten für $u(k)$ und $y(k)$ kann der jeweils nächste Wert der Ausgangsgröße bestimmt werden. Diese Vorgehensweise kann man rekursiv für unendlich viele Zeitpunkte anwenden, wobei man von Berechnungsschritt zu Berechnungsschritt die Zeit k um eins erhöht. Dabei erzeugt man mit Hilfe der lokalen Beschreibung des Systems das globale Verhalten.

Bei kontinuierlichen Systemen ist die Differenzialgleichung eine derartige „lokale“ Beschreibungsform. Dort wird das über die gesamte Zeitachse auftretende Systemverhalten durch das Verhalten über den kleinen Ausschnitt $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ festgelegt. In der theoretisch beliebig kleinen ε -Umgebung um den aktuellen Zeitpunkt t müssen jedoch nicht nur die Eingangsgröße u und die Ausgangsgröße y , sondern auch deren Ableitungen bis zur Ordnung q bzw. n bekannt sein. Da sich insbesondere die höheren Ableitungen nicht messtechnisch erfassen lassen, ist diese Betrachtungsweise zwar theoretisch richtig, aber praktisch nicht einsetzbar. Man kann nicht die Eingangs- und Ausgangsgröße einschließlich deren Ableitungen messen und daraus den Verlauf der Ausgangsgröße berechnen. Im Gegensatz dazu ist die gleichartige Überlegung für zeitdiskrete Systeme auch technisch einsetzbar, wenn man

die Eingangs- und Ausgangsgrößen zu q bzw. n vorhergehenden Abtastzeitpunkten misst und daraus entsprechend Gl. (11.5) die aktuelle Ausgangsgröße bestimmt.

Das zeitdiskrete System (11.1) mit $n \geq q$ ist kausal, denn in die Bestimmung von $y(k)$ gehen nur Werte von u und y ein, die zum selben Zeitpunkt k oder früher aufgetreten sind.

In der Differenzengleichung (11.1) ist deshalb die Zahl der von null verschiedenen Koeffizienten a_i auf der linken Seite meist größer als die Zahl der Koeffizienten b_i auf der rechten Seite ($n \geq q$).

Das System (11.1) ist linear, d. h., für verschwindende Anfangsbedingungen gilt

$$u(k) = ku_1(k) + lu_2(k) \mapsto y(k) = ky_1(k) + ly_2(k)$$

(vgl. Gl. (I-5.22)).

ARMA-Modell. Die Differenzengleichung (11.1) bezeichnet man auch als ARMA-Modell. Dieser Begriff erklärt sich aus zwei Spezialfällen, in denen die Differenzengleichung mit besonders „kurzer“ rechter oder linker Seite auftritt und auf die hier kurz eingegangen wird.

Hängt die Ausgangsgröße nur vom aktuellen und von den vorhergehenden Werten der Eingangsgröße ab, so kann die Differenzengleichung in der Form

$$y(k) = b_q u(k) + b_{q-1} u(k-1) + \dots + b_1 u(k-q+1) + b_0 u(k-q) \quad (11.6)$$

geschrieben werden. Dieses Modell wird auch MA-Modell (*moving average model*) genannt. Die Bezeichnung macht deutlich, dass die aktuelle Ausgangsgröße $y(k)$ aus dem gewichteten „Mittelwert“ der letzten $q+1$ Werte der Eingangsgröße berechnet wird. Das Zeitfenster, über das der Mittelwert gebildet wird, bewegt sich von Taktzeitpunkt zu Taktzeitpunkt um eine Abtastzeit vorwärts.

Steht andererseits auf der rechten Seite der Differenzengleichung (11.1) nur $u(k)$, so kann das Modell in der Form

$$y(k) + a_{n-1} y(k-1) + \dots + a_1 y(k-n+1) + a_0 y(k-n) = u(k) \quad (11.7)$$

geschrieben werden. Es wird als AR-Modell (*autoregressive model*) bezeichnet. Die Ausgangsgröße $y(k)$ wird unter Berücksichtigung der aktuellen Eingangsgröße aus den vorhergehenden Werten $y(k-1), \dots, y(k-n)$ berechnet.

Kombiniert man beide Modelle, so hängt der aktuelle Wert der Ausgangsgröße $y(k)$ vom „Mittelwert“ der q letzten Werte der Eingangsgröße und von den n letzten Werten der Ausgangsgröße ab. Diese Beschreibungsform wird als ARMA-Modell bezeichnet.

11.1.3 Zustandsraummodell

Das Zustandsraummodell zeitdiskreter Systeme hat die Form

$$\begin{aligned} \text{Zustandsraummodell: } \quad & \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ & y(k) = \mathbf{c}'\mathbf{x}(k) + du(k). \end{aligned} \quad (11.8)$$

Die erste Gleichung wird wieder als Zustandsgleichung oder auch als *Zustandsdifferenzengleichung* bezeichnet, obwohl sie im engeren Sinne nicht die Differenz aufeinanderfolgender Zustände, sondern die aufeinanderfolgenden Zustände selbst beschreibt. Die zweite Zeile ist die Ausgangsgleichung.

Das zeitdiskrete Zustandsraummodell ist dem kontinuierlichen Modell sehr ähnlich. $\mathbf{x}$ ist ein n -dimensionaler Zustandsvektor, $\mathbf{A}$ eine (n, n) -Matrix, $\mathbf{b}$ ein n -dimensionaler Spaltenvektor, $\mathbf{c}'$ ein n -dimensionaler Zeilenvektor und d ein Skalar. Wie später noch ausführlich behandelt wird, unterscheiden sich $\mathbf{A}$ und $\mathbf{b}$ von den entsprechenden Modellparametern der kontinuierlichen Systembeschreibung. Um Verwechslungen zu vermeiden, werden diese Modellelemente deshalb auch mit dem Index 'd' versehen, wenn aus dem Zusammenhang nicht eindeutig zu erkennen ist, ob es sich um Elemente eines kontinuierlichen oder eines zeitdiskreten Modells handelt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}_d\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}_d u(k), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y(k) &= \mathbf{c}'\mathbf{x}(k) + d u(k). \end{aligned}$$

Häufig kann diese Kennzeichnung jedoch weggelassen werden, wodurch die unmittelbaren Parallelen bei der Behandlung kontinuierlicher und zeitdiskreter Systeme besonders deutlich werden.

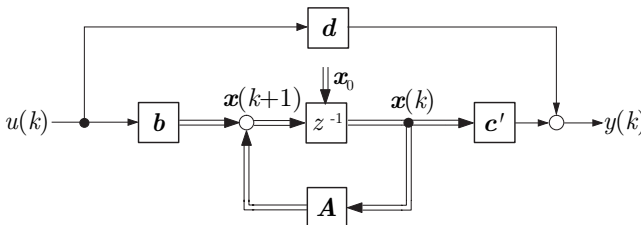


Abb. 11.2: Strukturbild des zeitdiskreten Systems

Das Strukturbild in Abb. 11.2 unterscheidet sich von dem kontinuierlicher Systeme dadurch, dass die n Integratoren durch n parallele Speicherelemente ersetzt werden, die den Zustandsvektor $\mathbf{x}(k+1)$ bis zum nächsten Taktzeitpunkt speichern und dann als aktuellen Zustand $\mathbf{x}(k)$ ausgeben. Man spricht auch von einem Laufzeitglied für den n -dimensionalen Zustandsvektor. In Anlehnung an die später behandelte Frequenzbereichsdarstellung wird das Laufzeitglied in der grafischen Darstellung durch den Verzögerungsoperator z^{-1} gekennzeichnet.

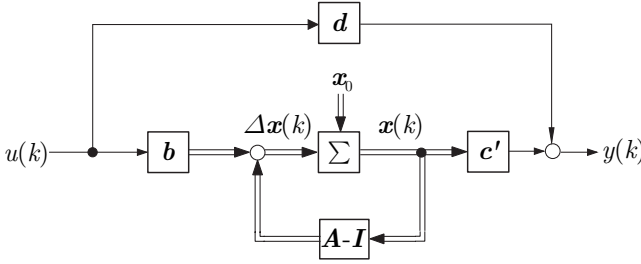


Abb. 11.3: Strukturbild des umgeformten Zustandsraummodells

Der Anfangszustand tritt hier nicht wie bei kontinuierlichen Systemen als zusätzlicher Summand auf der rechten Seite des Laufzeitgliedes auf. An Stelle dessen setzt man voraus, dass $x(0)$ für $k = 0$ auf den Anfangswert x_0 gesetzt ist. Eine noch größere Ähnlichkeit zur kontinuierlichen Beschreibung erhält man, wenn man tatsächlich die Zustandsdifferenzengleichung aufschreibt, die aus Gl. (11.8) durch eine kleine Umformung entsteht. Es gilt

$$x(k+1) - x(k) = Ax(k) - x(k) + bu(k)$$

und mit

$$\Delta x(k) = x(k+1) - x(k)$$

als neues Zustandsraummodell

$$\Delta x(k) = (A - I)x(k) + bu(k), \quad x(0) = x_0 \quad (11.9)$$

$$y(k) = c'x(k) + du(k). \quad (11.10)$$

In der angegebenen Zustandsgleichung steht auf der linken Seite die Änderung $\Delta x(k)$ des Zustandes, wodurch dieses Modell dem Modell kontinuierlicher Systeme mit der linken Seite $\dot{x}(t)$ sehr ähnlich ist. Den neuen Zustand erhält man gemäß

$$x(k+1) = x(k) + \Delta x(k) = x_0 + \sum_{j=0}^k \Delta x(j)$$

aus der Summe des aktuellen Zustandes und aller bisherigen Zustandsänderungen. An Stelle des Laufzeitgliedes steht dann im Strukturgraf ein Summand, also das diskrete Analogon des beim kontinuierlichen System auftretenden Integrators. Der Anfangszustand wird wie dort additiv zur Summe der Zustandsänderungen hinzugefügt (Abb. 11.3).

Zeitdiskrete Mehrgrößensysteme. Für Mehrgrößensysteme wird das Modell wie im kontinuierlichen Fall auf

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_d x(k) + B_d u(k), & x(0) &= x_0 \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

erweitert, wobei jetzt B_d , C und D Matrizen entsprechender Dimensionen sind.

Da das Modell zeitdiskreter Systeme dem kontinuierlicher Systeme sehr ähnlich ist, können viele Analyse- und Reglerentwurfsmethoden von den kontinuierlichen Systemen entweder direkt übernommen oder in Analogie dazu entwickelt werden. Es wird sich im Folgenden zeigen, dass die von den kontinuierlichen Systemen bekannten Transformationen in Normalformen, die Lösung der Zustandsgleichung und die Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsanalyse denen für kontinuierliche Systeme sehr ähnlich sind.

11.1.4 Ableitung des Zustandsraummodells aus der Differenzengleichung

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass das Zustandsraummodell aus einer Differenzengleichung (11.1)

$$\begin{aligned} & y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \dots + a_1y(k+1) + a_0y(k) \\ &= b_q u(k+q) + b_{q-1}u(k+q-1) + \dots + b_1u(k+1) + b_0u(k) \end{aligned}$$

abgeleitet werden kann. Dabei wird offensichtlich, dass beide Beschreibungsformen äquivalent sind. Der eingeschlagene Rechenweg ist ähnlich dem im Abschn. I-4.4.1 beschriebenen, der von der Differenzialgleichung zum kontinuierlichen Zustandsraummodell führte.

Es wird wiederum zunächst ein sehr einfacher Fall behandelt und angenommen, dass nur der Koeffizient b_0 auf der rechten Seite nicht verschwindet, die Differenzengleichung also in

$$y(k+n) = b_0 u(k) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i y(k+i) \quad (11.11)$$

umgeformt werden kann. Die Wahl der Zustandsvariablen fällt hier sehr leicht, weil die Differenzengleichung zeigt, dass man sich die Folge $y(k), y(k+1), \dots, y(k+n-1)$ der Ausgangsgrößen merken muss, um den nächsten Wert $y(k+n)$ berechnen zu können. Deshalb verwendet man die Zustandsvariablen

$$\begin{aligned} x_1(k) &= y(k) \\ x_2(k) &= y(k+1) \\ x_3(k) &= y(k+2) \\ &\vdots \\ x_n(k) &= y(k+n-1), \end{aligned}$$

für die man die im Zustandsraummodell stehenden Beziehungen

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) \\ x_2(k+1) &= x_3(k) \\ &\vdots \\ x_{n-1}(k+1) &= x_n(k) \end{aligned}$$

unmittelbar ablesen kann. Für die letzte Zustandsvariable erhält man die Differenzengleichung aus (11.11)

$$\begin{aligned} x_n(k+1) &= y(k+n) \\ &= b_0 u(k) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i y(k+i) \\ &= b_0 u(k) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_{i+1}(k). \end{aligned}$$

und damit ein Zustandsraummodell (11.8) mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c}' = (1 \quad 0 \quad 0 \dots 0), \quad d = 0.$$

Die Systemmatrix hat Frobeniusform. Der Anfangszustand ist

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} y_{00} \\ y_{01} \\ \vdots \\ y_{0n-1} \end{pmatrix}$$

(vgl. Gl. (11.2)).

Um das Zustandsraummodell in Regelungsnormform zu erhalten, muss in Modifikation der bisherigen Wahl der Zustandsgrößen mit

$$x_i(k) = \frac{1}{b_0} y(k+i-1)$$

gearbeitet werden. Dadurch verändern sich nur die Vektoren $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}'$ in

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{c}' = (b_0 \quad 0 \dots 0).$$

Erweitert man die beschriebene Vorgehensweise für beliebige Differenzengleichung, so erhält man das Zustandsraummodell in Regelungsnormform:

$$\mathbf{x}_R(k+1) = \mathbf{A}_R \mathbf{x}_R(k) + \mathbf{b}_R u(k) \quad (11.12)$$

$$y(k) = \mathbf{c}'_R \mathbf{x}_R(k) + du(k) \quad (11.13)$$

mit

$$\mathbf{A}_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad (11.14)$$

$$\mathbf{b}_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (11.15)$$

$$\mathbf{c}'_R = (b_0 - b_n a_0, b_1 - b_n a_1, \dots, b_{n-1} - b_n a_{n-1}) \quad (11.16)$$

$$d = b_n. \quad (11.17)$$

Der Index „R“ dient wieder zur Kennzeichnung der Regelungsnormalform.

Charakteristische Gleichung. Da die Systemmatrix $\mathbf{A}_R$ eine Begleitmatrix ist, kann aus ihr das charakteristische Polynom direkt abgelesen werden:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_R) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0. \quad (11.18)$$

Die Polynomkoeffizienten a_i sind die Koeffizienten der linken Seite der Differenzengleichung (11.1).

Aufgabe 11.1* *Zeitdiskrete Zustandsraumbeschreibung einer Rinderzucht*

In einer vereinfachten Betrachtung kann eine Rinderzucht durch folgende Sachverhalte beschrieben werden:

- Einjährige Rinder haben keine Nachkommen.
- Zweijährige Rinder haben im Mittel 0,8 Kälber als Nachkommen.
- 30 % der dreijährigen und älteren Rinder sterben pro Jahr.
- Es werden nur dreijährige oder ältere Rinder geschlachtet.

Für die Behandlung der Rinderzucht als Steuerungsproblem wird die Zahl der pro Jahr geschlachteten Rinder als Eingangsgröße und die Gesamtzahl der lebenden Rinder am Ende jeden Jahres als Ausgangsgröße verwendet. Stellen Sie das zeitdiskrete Zustandsraummodell auf. □

Aufgabe 11.2 *Zeitdiskrete Zustandsraumbeschreibung der Lagerhaltung*

Stellen Sie ein Zustandsraummodell für das Lagerhaltungsproblem aus Beispiel I-3.4 für die Abtastzeit $T = 1$ Tag auf. □

Aufgabe 11.3 Zustandsraummodell der Fußball-Bundesliga

Betrachten Sie die Fußball-Bundesliga als zeitdiskretes System, bei dem die von den (alphabetisch geordneten) Mannschaften an jedem Spieltag erhaltenen Punkte den Eingangsvektor und der Punktestand nach jedem Spieltag den Ausgangsvektor darstellen.

1. Was beschreibt den Zustand x dieses Systems?
2. Stellen Sie ein zeitdiskretes Zustandsraummodell auf. □

11.1.5 Zeitdiskrete Systeme mit Totzeit

Im Gegensatz zur kontinuierlichen Systembeschreibung lassen sich Totzeitsysteme bei zeitdiskreter Betrachtung auch mit einem „gewöhnlichen“ Zustandsraummodell beschreiben. Wenn die Totzeit ein ganzzahliges Vielfaches der Abtastzeit ist, so ist die Aufstellung des Modells besonders einfach. Wie die im Abschn. 11.1.4 beschriebene Ableitung des Zustandsraummodells aus der Differenzengleichung zeigt, muss man zur Darstellung der Totzeit T_t nur $\frac{T_t}{T}$ Zustandsvariablen einführen, in denen das Signal gespeichert, wie in einem Schieberegister von Taktzeit zu Taktzeit verschoben und nach Ablauf der Totzeit am Ausgang ausgegeben wird.

Beispiel 11.1 Zeitdiskretes Zustandsraummodell eines Totzeitgliedes

Für das kontinuierliche Totzeitglied

$$y(t) = k_2 u(t - T_t)$$

erhält man in der zeitdiskreten Darstellung mit der Abtastzeit $T = \frac{T_t}{3}$ die Differenzengleichung

$$y(k+3) = k_2 u(k)$$

und nach Einführen der Zustandsvariablen

$$\begin{aligned} x_1(k) &= y(k) \\ x_2(k) &= y(k+1) \\ x_3(k) &= y(k+2) \end{aligned}$$

das Zustandsraummodell

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_2 \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix}.$$

Diskussion. Die Systemmatrix dieses Systems ist nicht diagonalähnlich. Der bei kontinuierlichen Systemen sehr selten auftretende Umstand, dass die Systemmatrix nicht in Diagonalform transformiert werden kann und deshalb mit ihrer Jordan-Form gerechnet werden muss, tritt bei zeitdiskreten Systemen also mindestens dann auf, wenn Totzeiten durch das Modell erfasst werden müssen. □

Modelle für Totzeitsysteme, für die T_t kein ganzzahliges Vielfaches der Abtastzeit ist, werden im Abschn. 11.1.6 behandelt.

Approximation beliebiger Systeme durch Totzeitglieder. Totzeitsysteme treten bei der zeitdiskreten Betrachtung nicht nur auf, wenn die Totzeit durch die physikalischen Wirkprinzipien innerhalb des betrachteten Systems, also beispielsweise durch Transportvorgänge, begründet ist. Auch wenn man die Abtastzeit T wesentlich größer als die größte Zeitkonstante des Systems wählt, treten Totzeiten auf. Sind nämlich nach Ablauf der Abtastzeit alle Übergangsvorgänge (näherungsweise) abgeklungen, so befindet sich das System in der Nähe des statischen Endwertes $k_s u$ der Ausgangsgröße. Man kann das System dann näherungsweise durch ein Totzeitsystem mit dem statischen Verstärkungsfaktor k_s darstellen:

$$y(k+1) \approx k_s u(k). \quad (11.19)$$

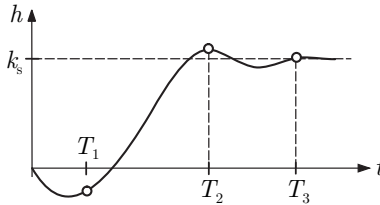


Abb. 11.4: Modell für sehr große Abtastzeit

Abbildung 11.4 macht deutlich, wie sich das Verhalten des zeitdiskreten Systems bei Vergrößerung der Abtastzeit verändert. Die Abbildung zeigt die Übergangsfunktion eines stabilen Systems, wobei die Abtastwerte für drei unterschiedliche Abtastzeiten eingetragen sind. Bei der großen Abtastzeit T_3 sind weder das nichtminimalphasige Verhalten noch das Schwingungsverhalten des Systems zu erkennen. Für diese Abtastzeit gilt

$$y(k) = k_s \quad k = 1, 2, \dots,$$

was wegen der hier gewählten Eingangsgröße $u(t) = \sigma(t)$ auch als

$$y(k) = k_s u(k-1)$$

geschrieben werden kann. Da bei der zeitdiskreten Betrachtung die Eingangsgröße stets über ein Abtastintervall konstant bleibt und bei Verwendung der Abtastzeit T_3 innerhalb dieser Zeit stets der Übergangsvorgang abgeklungen ist, gilt die aufgeschriebene Differenzgleichung für beliebige Eingangsfolge $u(k)$. Das System wirkt bei zeitdiskreter Betrachtung mit der Abtastzeit T_3 wie ein Totzeitglied.

11.1.6 Ableitung des Zustandsraummodells eines Abtastsystems aus dem Modell des kontinuierlichen Systems

In diesem Abschnitt wird untersucht, wie das zeitdiskrete Zustandsraummodell

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{b}_d u(k), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y(k) &= \mathbf{c}' \mathbf{x}(k) + du(k) \end{aligned}$$

aus dem kontinuierlichen Modell

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y(t) &= \mathbf{c}' \mathbf{x}(t) + du(t) \end{aligned}$$

unter Beachtung der Eigenschaften des Abtasters und des Haltegliedes aufgestellt werden kann. Dabei sind zwei Überlegungen maßgebend. Erstens ist die Eingangsgröße aufgrund des Haltegliedes zwischen den Abtastzeitpunkten konstant, d. h., es gilt Gl. (10.6):

$$u(t) = u(kT) = \text{konst.} \quad \text{für } kT \leq t < (k+1)T. \quad (11.20)$$

Zweitens ist nur die zu den Abtastzeitpunkten $t = kT$ vorhandene Ausgangsgröße von Interesse. Das kontinuierliche Zustandsraummodell wird deshalb für die Abtastzeitpunkte angewendet, wobei man für die Ausgabegleichung

$$y(kT) = \mathbf{c}' \mathbf{x}(kT) + du(kT)$$

erhält. Mit der üblichen Abkürzung $y(k)$ für $y(kT)$ usw. zeigt diese Gleichung, dass es berechtigt war, von vornherein mit demselben Vektor $\mathbf{c}'$ und demselben Skalar d in den Ausgabegleichungen des kontinuierlichen und des diskreten Modells zu arbeiten.

Um den Zustand $\mathbf{x}(kT)$ zu berechnen, wendet man die Bewegungsgleichung (I-5.13) für $t = kT$ und für $t = (k+1)T$ an:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(kT) &= e^{\mathbf{A}kT} \mathbf{x}_0 + \int_0^{kT} e^{\mathbf{A}(kT-\tau)} \mathbf{b} u(\tau) d\tau \\ \mathbf{x}((k+1)T) &= e^{\mathbf{A}(k+1)T} \mathbf{x}_0 + \int_0^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}((k+1)T-\tau)} \mathbf{b} u(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Unter Beachtung von Gl. (11.20) folgt aus der zweiten Gleichung

$$\begin{aligned} \mathbf{x}((k+1)T) &= e^{\mathbf{A}T} \left(e^{\mathbf{A}kT} \mathbf{x}_0 + \int_0^{kT} e^{\mathbf{A}(kT-\tau)} \mathbf{b} u(\tau) d\tau \right) \\ &\quad + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}((k+1)T-\tau)} \mathbf{b} u(kT) d\tau \\ &= e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}((k+1)T-\tau)} \mathbf{b} u(kT) d\tau. \end{aligned} \quad (11.21)$$

Der zweite Summand kann mit Hilfe der Substitution $\alpha = (k+1)T - \tau$, aus der $d\alpha = -d\tau$ folgt, umgeformt werden

$$\int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}((k+1)T - \tau)} \mathbf{b}u(kT) d\tau = - \int_T^0 e^{\mathbf{A}\alpha} d\alpha \mathbf{b}u(kT),$$

so dass man die zeitdiskrete Zustandsgleichung

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \left(e^{\mathbf{A}T} \right) \mathbf{x}(kT) + \left(\int_0^T e^{\mathbf{A}\alpha} d\alpha \mathbf{b} \right) u(kT)$$

erhält. Die in den Klammern stehenden Beziehungen beschreiben die Matrix $\mathbf{A}_d$ bzw. den Vektor $\mathbf{b}_d$:

Parameter des zeitdiskreten Zustandsraummodells:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_d &= e^{\mathbf{A}T}, & \mathbf{b}_d &= \int_0^T e^{\mathbf{A}\alpha} d\alpha \mathbf{b} \\ \mathbf{c}'_d &= \mathbf{c}', & d_d &= d. \end{aligned} \quad (11.22)$$

Der Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ stimmt bei beiden Modellen überein.

Die angegebenen Formeln können ohne Schwierigkeiten auf Mehrgrößensysteme erweitert werden. Auch dort sind die Matrizen $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ in der Ausgabegleichung sowie der Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ dieselben wie beim kontinuierlichen System. Die Systemmatrix $\mathbf{A}_d$ erhält man wie in Gl. (11.22). Nur die Beziehung für $\mathbf{B}_d$ verändert sich in

$$\mathbf{B}_d = \int_0^T e^{\mathbf{A}\alpha} d\alpha \mathbf{B}. \quad (11.23)$$

Für kontinuierliche Systeme mit $\det \mathbf{A} \neq 0$ kann man das Integral ausrechnen, wobei man

$$\mathbf{B}_d = \mathbf{A}^{-1} (e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{I}) \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{A}_d - \mathbf{I}) \mathbf{B} \quad (11.24)$$

erhält.

Wichtig für Abtastsysteme ist die Tatsache, dass die Matrix

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}T}$$

für beliebige Abtastzeit T und beliebige Matrix $\mathbf{A}$ regulär ist. Das Abtastsystem hat also keinen verschwindenden Eigenwert. Diese Tatsache ist ein Kriterium, um Abtastsysteme von allgemeinen zeitdiskreten Systemen zu unterscheiden, bei denen das zeitdiskrete Zustandsraummodell „beliebig“ aussehen kann (vgl. Beispiel 11.3).

Totzeitsysteme. Die angegebene Vorgehensweise kann man auch für Totzeitsysteme anwenden, wobei die Totzeit T_t kein ganzzahliges Vielfaches der Abtastzeit sein muss. Dies wird anhand des Systems

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t - T_t), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y(t) &= \mathbf{c}'\mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

demonstriert, wobei

$$T_t = lT, \quad 0 < l < 1$$

gilt. Für Systeme mit größerer Totzeit oder für Systeme, deren Eingang einige Zustandsvariablen ohne und andere mit Totzeit beeinflusst, kann man das zeitdiskrete System durch Kombination der bisher beschriebenen und der nachfolgend angegebenen Methode bilden.

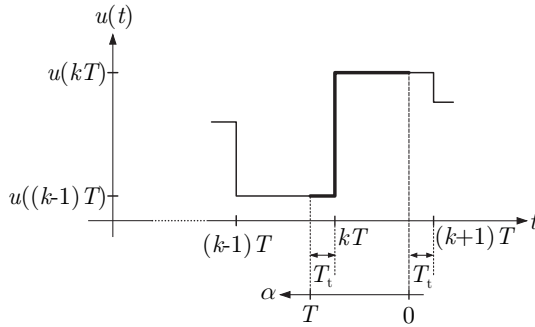


Abb. 11.5: Verlauf von $u(t)$ in dem für die Integration wichtigen Zeitintervall

In Analogie zu Gl. (11.21) erhält man für das totzeitbehaftete System

$$\mathbf{x}(k+1) = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}((k+1)T - \tau)} \mathbf{b}u(\tau - T_t) d\tau$$

und nach Substitution $\alpha = (k+1)T - \tau$

$$\mathbf{x}(k+1) = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) + \int_0^T e^{\mathbf{A}\alpha} \mathbf{b}u((k+1)T - \alpha - T_t) d\alpha.$$

Abbildung 11.5 zeigt den Verlauf von $u((k+1)T - \alpha - T_t)$ für das bei der Integration betrachtete Zeitintervall $0 \leq \alpha \leq T$. Zwischen $t = kT - T_t$ und $t = kT$ nimmt die Eingangsgröße $u(t)$ den Wert $u((k-1)T)$ und zwischen $t = kT$ und $t = kT + T_t$ den Wert $u(kT)$ an. Dementsprechend zerfällt das Integral in zwei Summanden, so dass man für $\mathbf{x}(k+1)$ die Beziehung

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) + \int_0^{T-T_t} e^{\mathbf{A}\alpha} \mathbf{b}u(kT) d\alpha + \\ &\quad + \int_{T-T_t}^T e^{\mathbf{A}\alpha} \mathbf{b}u((k-1)T) d\alpha \\ &= e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(k) + \mathbf{b}_0 u(k) + \mathbf{b}_{-1} u(k-1)\end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{b}_0 = \int_0^{T-T_t} e^{\mathbf{A}\alpha} d\alpha \mathbf{b} \quad (11.25)$$

$$\mathbf{b}_{-1} = \int_{T-T_t}^T e^{\mathbf{A}\alpha} d\alpha \mathbf{b} = e^{\mathbf{A}(T-T_t)} \int_0^{T_t} e^{\mathbf{A}\alpha} d\alpha \mathbf{b} \quad (11.26)$$

erhält. Der Zustand $\mathbf{x}(k+1)$ hängt also aufgrund der Totzeit nicht nur von $u(k)$, sondern auch von $u(k-1)$ ab. Um ein Zustandsraummodell in der bekannten Form zu erhalten, muss

$$x_{n+1}(k) = u(k-1)$$

als zusätzliche Zustandsvariable eingeführt werden. Das Zustandsraummodell mit dem $(n+1)$ -dimensionalen Zustandsvektor

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(k) \\ x_{n+1}(k) \end{pmatrix}$$

heißt dann

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ x_{n+1}(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{b}_{-1} \\ \mathbf{0}' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k) \\ x_{n+1}(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{b}_0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = (\mathbf{c}' \ 0) \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k) \\ x_{n+1}(k) \end{pmatrix}.$$

Das System hat die dynamische Ordnung $n+1$.

Zusammenfassung. Die Untersuchungen dieses und der vorhergehenden Abschnitte zeigen mehrere wichtige Eigenschaften der zeitdiskreten Betrachtungsweise:

- Ein totzeitfreies kontinuierliches System n -ter Ordnung bleibt bei der zeitdiskreten Betrachtungsweise ein System n -ter Ordnung. Die dynamische Ordnung wird also durch Abtaster und Halteglied nicht erhöht, wenn man Eingang, Zustand und Ausgang nur zu den Abtastzeitpunkten beschreiben will.
- Wählt man dieselben Zustandsvariablen bei der kontinuierlichen und der zeitdiskreten Betrachtung, so unterscheiden sich nur die Zustandsgleichungen, während die Ausgangsgleichung unverändert bleibt. Der Zusammenhang beider Modelle ist durch die Gl. (11.22) beschrieben.
- Die Parameter des zeitdiskreten Modells sind von der Abtastzeit T abhängig. Ändert man also im Laufe der Analyse und des Reglerentwurfes die Abtastzeit, so müssen die Modellparameter angepasst und die Analyse- und Entwurfsergebnisse entsprechend revidiert werden.

- Das zeitdiskrete Modell beschreibt das Verhalten des kontinuierlichen Systems an den Abtastzeitpunkten $t = kT$ *exakt*, d. h., es gelten für einen beliebigen Anfangszustand x_0 und eine beliebige Eingangsgröße, die auch für das kontinuierliche System die Eigenschaft (11.20) erfüllt, die Beziehungen

$$\begin{aligned}x(k) &= x(t = kT) \\ y(k) &= y(t = kT),\end{aligned}$$

in denen die linken Seiten die mit dem zeitdiskreten Modell und die rechten Seiten die mit dem kontinuierlichen Modell berechneten Größen x und y bezeichnen.

- Auch für nichtlineare Systeme gilt: Aus einem kontinuierlichen Modell kann ein zeitdiskretes Modell abgeleitet werden, das das zeitkontinuierliche Verhalten an den Abtastzeitpunkten exakt beschreibt, aber nicht jedes zeitdiskrete System kann durch ein zeitkontinuierliches Modell mit Abtaster und Halteglied realisiert werden.

Beispiel 11.2 Zeitdiskrete Beschreibung eines PT_1 -Gliedes

Das PT_1 -Glied mit dem Zustandsraummodell

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\frac{1}{T_1}x(t) + \frac{1}{T_1}u(t), & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= k_s x(t)\end{aligned}$$

kann unter Verwendung von Gl. (11.22) in die zeitdiskrete Form überführt werden, wobei man

$$a_d = e^{-\frac{1}{T_1}T}$$

und

$$b_d = \int_0^T e^{-\frac{1}{T_1}\alpha} d\alpha \frac{1}{T_1} = -T_1 \left(e^{-\frac{T}{T_1}} - 1 \right) \frac{1}{T_1} = (1 - a_d)$$

erhält. Das zeitdiskrete Zustandsraummodell lautet also

$$\begin{aligned}x(k+1) &= a_d x(k) + (1 - a_d)u(k), & x(0) &= x_0 \\ y(k) &= k_s x(k).\end{aligned}$$

Aus diesem Modell kann auch eine Differenzgleichung der Form (11.1) für das PT_1 -Glied abgeleitet werden, wenn man die Zustandsgleichung mit k_s multipliziert

$$y(k+1) - a_d y(k) = k_s (1 - a_d) u(k).$$

Aus dem Anfangszustand $x(0) = x_0$ erhält man als Anfangsbedingung der Differenzgleichung

$$y(0) = k_s x_0.$$

Diskussion. Dieses Beispiel erster Ordnung zeigt auch, dass sich beim Übergang von der kontinuierlichen zur zeitdiskreten Betrachtungsweise die Art der Abhängigkeit der Zustandsgleichung von Systemparametern ändert. Schreibt man die Zustandsgleichung des PT_1 -Gliedes für $u = 0$ in der Form

$$\dot{x} = -ax(t),$$

so hängt $\dot{x}$ linear vom Parameter a ab. In der zeitdiskreten Form heißt diese Gleichung

$$x(k+1) = e^{aT}x(k).$$

Der Zustand $x(k+1)$ ist also nichtlinear von a abhängig. $\square$

Beispiel 11.3 Schwingungsfähiges System erster Ordnung

Das Zustandsraummodell eines zeitdiskreten Systems erster Ordnung heißt

$$\begin{aligned} x(k+1) &= a_d x(k) + b_d u(k), & x(0) &= x_0 \\ y(k) &= cx(k) + du(k), \end{aligned}$$

wobei die Parameter a_d , b_d , c und d beliebige Werte annehmen können. Für Abtastsysteme, die aus einem kontinuierlichen System mit Halteglied und Abtaster bestehen, erhält man Einschränkungen für den Wertebereich der Parameter a_d und b_d aus Gl. (11.22). Da

$$a_d = e^{aT}$$

gilt, kommen für a_d nur positive Werte in Frage. Mit anderen Worten, es gibt kein kontinuierliches System erster Ordnung, für dessen zeitdiskretes Modell die Beziehung $a_d < 0$ gilt.

Ein System mit negativem Parameter a_d hat die Eigenschaft, dass die Eigenbewegung schwingt. Dies ist für ein System mit $a_d = -0,7$ in Abb. 11.6 gezeigt. Diese Abbildung enthält die freie Bewegung, die das ungestörte System ($u = 0$) erster Ordnung für die Anfangsbedingung $x_0 = 1$ ausführt. Eine derartig oszillierende Bewegung ist für kontinuierliche Systeme nur für eine Systemordnung $n \geq 2$ möglich.

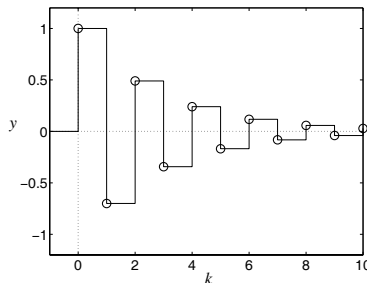


Abb. 11.6: Eigenbewegung eines Systems erster Ordnung mit $a_d = -0,7$

Als Regler kann ein System mit $a_d < 0$ eingesetzt werden, denn der Regler muss nicht aus einem kontinuierlichen System durch Abtastung entstehen, sondern er wird durch ein

Rechenprogramm dargestellt. Da die Eingangsgröße des Reglers die Regelabweichung $e(k)$ und die Ausgangsgröße die Stellgröße $u(k)$ ist, hat das Zustandsraummodell die Form

$$\begin{aligned}x(k+1) &= a_d x(k) + b_d e(k), & x(0) &= x_0 \\ u(k) &= c x(k) + d e(k).\end{aligned}$$

Für die Realisierung des Reglers kann es entweder direkt angewendet oder in die Differenzengleichung

$$u(k) = a_d u(k-1) + d e(k) + (c b_d - d a_d) e(k-1)$$

überführt werden. Der Regler bestimmt den aktuellen Wert der Stellgröße $u(k)$ aus dem vorherigen Wert $u(k-1)$ sowie dem aktuellen und dem vorherigen Wert der Regelabweichung. $\square$

Aufgabe 11.4* *Ableitung des zeitdiskreten Modells*

1. Gegeben ist das kontinuierliche Zustandsraummodell

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t).\end{aligned}$$

Leiten Sie daraus das zeitdiskrete Modell für die Abtastzeit $T = 0,1$ ab. (Hinweis: Mit Hilfe der Laplacetransformation können Sie eine analytische Darstellung für $e^{\mathbf{A}T}$ erhalten und daraus $\int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} d\tau$ bestimmen.)

2. Durch Abtastung welches kontinuierlichen Systems entsteht das zeitdiskrete System

$$\begin{aligned}x(k+1) &= x(k) + u(k), & x(0) &= x_0 \\ y(k) &= -x(k)? & \square\end{aligned}$$

Aufgabe 11.5 *Zeitdiskretes Modell der Klärschlammverbrennungsanlage*

Stellen Sie ein zeitdiskretes Zustandsraummodell der in Abb. 4.25 auf S. 195 gezeigten Klärschlammverbrennungsanlage auf, indem Sie aus der Übertragungsfunktionsmatrix aus Gl. (4.88) zunächst ein kontinuierliches Zustandsraummodell ableiten, dann eine geeignete Abtastzeit wählen und schließlich die Parameter des zeitdiskreten Modells ermitteln. $\square$

11.1.7 Kanonische Normalform

Für das zeitdiskrete Modell lassen sich mit denselben Transformationsvorschriften wie bei kontinuierlichen Systemen die von dort bekannten Normalformen des Zustandsraummodells herleiten. Dies wird hier nur für die kanonische Normalform gezeigt, wobei vorausgesetzt wird, dass die Matrix $\mathbf{A}$ diagonalähnlich ist.

Aus den Eigenvektoren $\mathbf{v}_i$ von $\mathbf{A}$ wird die Matrix

$$\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n)$$

gebildet und bei der Bildung des kanonischen Zustandsvektors

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{x}(k)$$

als Transformationsmatrix verwendet. Für die transformierte Zustandsgleichung erhält man

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} \tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{V}^{-1} \mathbf{b} u(k)$$

und aufgrund von

$$\mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} = \text{diag } \lambda_i \{ \mathbf{A} \}$$

zusammen mit der transformierten Ausgangsgleichung das

Zustandsraummodell in kanonischer Normalform:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(k+1) &= \text{diag } \lambda_i \tilde{\mathbf{x}}(k) + \tilde{\mathbf{b}} u(k) \\ y(k) &= \tilde{\mathbf{c}}' \tilde{\mathbf{x}}(k) + du(k) \end{aligned} \quad (11.27)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{b} \quad (11.28)$$

$$\tilde{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}' \mathbf{V}. \quad (11.29)$$

11.2 Verhalten zeitdiskreter Systeme

11.2.1 Lösung der Zustandsgleichung

Es wird jetzt untersucht, wie aus dem Zustandsraummodell

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{b} u(k), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y(k) &= \mathbf{c}' \mathbf{x}(k) + du(k) \end{aligned}$$

für einen gegebenen Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ und eine gegebene Eingangsfolge $u(k)$ die Zustands- und die Ausgangsfolge bestimmt werden. Dabei wird die Bewegungsgleichung des zeitdiskreten Systems abgeleitet.

Die Zustandsfolge erhält man durch wiederholte Anwendung der Zustandsgleichung, wobei

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(1) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(0) + \mathbf{b} u(0) \\ \mathbf{x}(2) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(1) + \mathbf{b} u(1) = \mathbf{A}^2 \mathbf{x}(0) + \mathbf{A} \mathbf{b} u(0) + \mathbf{b} u(1) \\ \mathbf{x}(3) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(2) + \mathbf{b} u(2) = \mathbf{A}^3 \mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^2 \mathbf{b} u(0) + \mathbf{A} \mathbf{b} u(1) + \mathbf{b} u(2) \\ &\dots \\ \mathbf{x}(k) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{b} u(k-1) \\ &= \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{b} u(0) + \mathbf{A}^{k-2} \mathbf{b} u(1) + \dots + \mathbf{b} u(k-1) \end{aligned}$$

entsteht. Die letzte Gleichung kann man übersichtlicher in der Form

$$\text{Bewegungsgleichung:} \quad \mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-1-j} \mathbf{b} u(j) \quad (11.30)$$

schreiben.

Ein Vergleich mit der kontinuierlichen Bewegungsgleichung (I-5.13)

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t - \tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau$$

zeigt erstens, dass sich die Übergangsmatrix (Fundamentalmatrix) $\Phi(k)$ des zeitdiskreten Systems aus

$$\Phi(k) = \mathbf{A}^k \quad (11.31)$$

berechnet. Diese Matrix erfüllt die Differenzengleichung

$$\Phi(k+1) = \mathbf{A} \Phi(k), \quad \Phi(0) = \mathbf{I}. \quad (11.32)$$

Zweitens wird offensichtlich, dass sich die Bewegung des zeitdiskreten Systems ebenfalls aus der durch den Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ erregten freien Bewegung

$$\mathbf{x}_{\text{frei}}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0 = \Phi(k) \mathbf{x}_0$$

und der durch die Eingangsfolge $u(k)$ erzwungenen Bewegung

$$\mathbf{x}_{\text{erzw}}(k) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-1-j} \mathbf{b} u(j) = \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(k-1-j) \mathbf{b} u(j)$$

zusammensetzt. Die erzwungene Bewegung berechnet sich aus einer Summe, die das Integral in der Bewegungsgleichung des kontinuierlichen Systems ersetzt. Beachtet man, dass $(k-1)$ die obere Summationsgrenze ist, so kann man sich das Argument von Φ leicht merken, denn dieses setzt sich wie das Argument $t - \tau$ aus der Differenz der oberen Summations/Integrationsgrenze und der Summations/Integrationsvariablen zusammen.

Für die Ausgangsgröße y erhält man unter Verwendung der Ausgangsgleichung folgende Beziehung:

$$\text{Bewegungsgleichung für den Ausgang:} \quad y(k) = \mathbf{c}' \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{c}' \mathbf{A}^{k-1-j} \mathbf{b} u(j) + d u(k). \quad (11.33)$$

Auch hier stellt der erste Summand die am Ausgang beobachtbare freie Bewegung und der zweite Summand die erzwungene Bewegung dar. Die Gleichung gilt mit

B , C und D anstelle von b , c' bzw. d sowie $u(k)$ und $y(k)$ anstelle von $u(k)$ und $y(k)$ auch für Mehrgrößensysteme. Gleiches trifft auf alle im Weiteren abgeleiteten Gleichungen zu.

Mit $x_0 = 0$ erhält man schließlich für das E/A-Verhalten die Beziehung

$$\text{E/A-Verhalten:} \quad y(k) = \sum_{j=0}^{k-1} c' A^{k-1-j} b u(j) + d u(k). \quad (11.34)$$

11.2.2 Bewegungsgleichung in kanonischer Darstellung

Eine besonders einfache Darstellung der Bewegungsgleichung erhält man, wenn das Zustandsraummodell in kanonischer Normalform (11.27) vorliegt. Die Bewegungsgleichung für den Zustand heißt dann

$$\tilde{x}(k) = \text{diag } \lambda_i^k \tilde{x}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \text{diag } \lambda_i^{k-1-j} \tilde{b} u(j). \quad (11.35)$$

Die freie Bewegung der kanonischen Zustandsvariablen zerfällt in unabhängige Ausdrücke:

$$\tilde{x}_{\text{frei}}(k) = \begin{pmatrix} \lambda_1^k \tilde{x}_1(0) \\ \lambda_2^k \tilde{x}_2(0) \\ \vdots \\ \lambda_n^k \tilde{x}_n(0) \end{pmatrix}.$$

Nach Rücktransformation erhält man für die freie Bewegung des Zustandes $x(k)$ die Beziehung

$$x_{\text{frei}}(k) = v_1 \lambda_1^k \tilde{x}_1(0) + \dots + v_n \lambda_n^k \tilde{x}_n(0) = \sum_{i=1}^n v_i \lambda_i^k \tilde{x}_i(0), \quad (11.36)$$

die eine direkte Analogie zur Gl. (I-5.64)

$$x_{\text{frei}}(t) = v_1 e^{\lambda_1 t} \tilde{x}_1(0) + \dots + v_n e^{\lambda_n t} \tilde{x}_n(0) = \sum_{i=1}^n v_i e^{\lambda_i t} \tilde{x}_i(0)$$

darstellt. Die freie Bewegung des zeitdiskreten Systems setzt sich aus Summanden der Form $v_i \lambda_i^k \tilde{x}_i(0)$ zusammen, wobei der Vektor v_i bestimmt, wie stark die Funktion λ_i^k in die einzelnen Komponenten $x_i(k)$ des Vektors $x(k)$ eingeht. Die Ausdrücke $v_i \lambda_i^k$ werden deshalb wie beim kontinuierlichen System als *Modi* oder *Eigenvorgänge* bezeichnet.

Für die freie Bewegung des Systemausganges gilt

$$y_{\text{frei}}(k) = \mathbf{c}' \mathbf{v}_1 \lambda_1^k \tilde{x}_1(0) + \dots + \mathbf{c}' \mathbf{v}_n \lambda_n^k \tilde{x}_n(0) = \sum_{i=1}^n \mathbf{c}' \mathbf{v}_i \lambda_i^k \tilde{x}_i(0). \quad (11.37)$$

Auch die erzwungene Bewegung kann für die kanonischen Zustandsvariablen unabhängig voneinander berechnet werden, wie aus der Darstellung

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\text{erzw}}(k) = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_1^{k-1-j} \tilde{b}_1 u(j) \\ \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_2^{k-1-j} \tilde{b}_2 u(j) \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_n^{k-1-j} \tilde{b}_n u(j) \end{pmatrix} \quad (11.38)$$

hervorgeht. Dabei bezeichnet $\tilde{b}_i$ das i -te Element des Vektors $\tilde{\mathbf{b}}$. Erst wenn man die erzwungene Bewegung des Ausgangs bestimmen will, treten wieder alle Funktionen λ_i^k gemeinsam auf:

$$\begin{aligned} y_{\text{erzw}}(k) &= \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{c}' \mathbf{v}_i \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_i^{k-1-j} \tilde{b}_i u(j) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\tilde{c}_i \tilde{b}_i \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_i^{k-1-j} u(j) \right), \end{aligned} \quad (11.39)$$

wobei $\tilde{c}_i$ und $\tilde{b}_i$ die Elemente der Vektoren $\tilde{\mathbf{c}}$ und $\tilde{\mathbf{b}}$ bezeichnen.

Berechnung der Übergangsmatrix. Die Berechnung der Übergangsmatrix bereitet bei zeitdiskreten Systemen weniger Schwierigkeiten als bei kontinuierlichen Systemen, denn die Übergangsmatrix

$$\Phi(k) = \mathbf{A}^k$$

ist eine ganzzahlige Potenz der Matrix $\mathbf{A}$. In der kanonischen Darstellung ist dies noch einfacher, weil $\tilde{\Phi}$ entsprechend

$$\tilde{\Phi}(k) = \text{diag } \lambda_i^k$$

eine Diagonalmatrix ist. Durch Rücktransformation erhält man nach Zerlegung der Matrix $\mathbf{V}^{-1}$ entsprechend

$$\mathbf{V}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}'_1 \\ \mathbf{w}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{w}'_n \end{pmatrix}$$

in die Linkseigenvektoren $\mathbf{w}'_i$ der Matrix $\mathbf{A}$ mit

$$\begin{aligned}
\Phi(k) &= V \operatorname{diag} \lambda_i^k V^{-1} = \begin{pmatrix} v_1 \lambda_1^k & v_2 \lambda_1^k & \dots & v_n \lambda_n^k \end{pmatrix} V^{-1} \\
&= \sum_{i=1}^n v_i w_i' \lambda_i^k
\end{aligned} \tag{11.40}$$

eine Darstellung, in der die Abhängigkeit der Übergangsmatrix von den Eigenwerten der Matrix A und von den Eigenvorgängen $v_i \lambda_i^k$ zu erkennen ist.

Eigenwerte zeitdiskreter Systeme. Wie die angegebenen Gleichungen zeigen, haben die Eigenwerte der Matrix A dieselbe wichtige Bedeutung wie bei kontinuierlichen Systemen, denn sie bestimmen die dynamischen Eigenschaften des Systems in entscheidender Weise. So erkennt man sofort, dass die Eigenbewegung des Systems nur dann für $k \rightarrow \infty$ verschwindet, das System also asymptotisch stabil ist, wenn

$$|\lambda_i| < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

gilt. Diese Bedingung wird im Abschn. 11.5 noch genauer untersucht.

Mit Hilfe des Zusammenhangs (11.22)

$$A_d = e^{AT}$$

zwischen den Systemmatrizen des kontinuierlichen und des zeitdiskreten Systems kann man erkennen, in welcher Beziehung die Eigenwerte beider Systemdarstellungen zueinander stehen. Wenn V die Matrix der Eigenvektoren von A bezeichnet, so kann man diese Gleichung in

$$A_d = V V^{-1} e^{AT} V V^{-1} = V \operatorname{diag} e^{\lambda_i \{A\} T} V^{-1} \tag{11.41}$$

umformen, wenn man dabei Gl. (I-5.85)

$$e^{At} = V \operatorname{diag} e^{\lambda_i t} V^{-1}$$

verwendet. Aus Gl. (11.41) erkennt man, dass zwischen den Eigenwerten der kontinuierlichen und der zeitdiskreten Darstellung desselben Systems die Beziehung

$$\lambda_i \{A_d\} = e^{\lambda_i \{A\} T} \tag{11.42}$$

besteht. Andererseits kann man die verwendete Abtastzeit aus

$$T = \frac{\ln \lambda_i \{A_d\}}{\lambda_i \{A\}} \tag{11.43}$$

berechnen.

11.2.3 Übergangsfolge und Gewichtsfolge

Wie beim kontinuierlichen System spielen die Systemantworten auf eine sprungförmige bzw. eine impulsförmige Eingangsgröße eine besondere Rolle. Darauf wird im Folgenden eingegangen.

Übergangsfolge. Betrachtet man das System für verschwindenden Anfangszustand $x_0 = 0$ und sprungförmige Eingangsfolge

$$u(k) = \sigma_d(k) = \begin{cases} 0 & \text{für } k < 0 \\ 1 & \text{für } k \geq 0, \end{cases} \quad (11.44)$$

so erhält man aus der Bewegungsgleichung (11.33) die Übergangsfolge

$$\text{Übergangsfolge: } h(k) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{c}' \mathbf{A}^j \mathbf{b} + d. \quad (11.45)$$

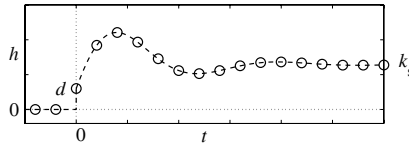


Abb. 11.7: Vergleich von Übergangsfolge und Übergangsfunktion eines Systems zweiter Ordnung

Abbildung 11.7 zeigt als Beispiel die Übergangsfolge eines Systems zweiter Ordnung. Wie die gestrichelt eingetragene Übergangsfunktion der kontinuierlichen Systemdarstellung zeigt, stimmt die Übergangsfolge zu den Abtastzeitpunkten mit der Übergangsfunktion überein

$$h_d(k) = h(kT). \quad (11.46)$$

Diese Tatsache ist nicht verwunderlich, denn es wurde schon betont, dass das zeitdiskrete Modell das kontinuierliche System zu den Abtastzeitpunkten exakt beschreibt.

Das Beispielsystem ist sprungfähig ($d \neq 0$). Die Übergangsfolge springt deshalb zum nullten Abtastschritt sofort auf den Wert d .

Statische Verstärkung. Wenn das System asymptotisch stabil ist, so nähert sich die Übergangsfolge für $k \rightarrow \infty$ dem statischen Endwert k_s . Diesen Endwert kann man aus dem Zustandsraummodell ausrechnen. Das System hat seinen statischen Endwert angenommen, sobald

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}_s$$

gilt. Aus der Zustandsgleichung folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s &= \mathbf{A}\mathbf{x}_s + \mathbf{b} \\ \mathbf{x}_s &= (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}, \end{aligned}$$

wobei die angegebene inverse Matrix existiert, weil für asymptotisch stabile Systeme die Ungleichung $|\lambda_i| < 1$ gilt. Setzt man $\mathbf{x}_s$ in die Ausgangsgleichung ein, so erhält man die

Statische Verstärkung: $k_s = \mathbf{c}'(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d.$

(11.47)

Ein Vergleich mit Gl. (11.45) zeigt, dass dieser Wert der Endwert der Übergangsfolge ist:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(k) = k_s$$

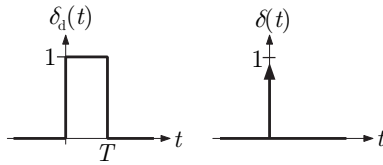


Abb. 11.8: Diskreter Einheitsimpuls (links) und Dirac-Impuls (rechts)

Gewichtsfolge. Die Gewichtsfolge $g(k)$ ist die Antwort des Systems auf den diskreten Einheitsimpuls (Abb. 11.8)

$$u(k) = \delta_d(k) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (11.48)$$

Aus der Bewegungsgleichung erhält man die

Gewichtsfolge: $g(k) = \begin{cases} d & \text{für } k = 0 \\ \mathbf{c}'\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b} & \text{für } k \geq 1. \end{cases}$

(11.49)

Nur für sprunghafte Systeme ist die Gewichtsfolge für $k = 0$ von null verschieden.

Markovparameter. Die ersten n Werte der Gewichtsfolge werden auch als die Markovparameter des Systems bezeichnet. Sie haben eine für die Modellbildung wichtige Bedeutung. Auf Grund des Cayley-Hamilton-Theorems (A2.45) kann man $\mathbf{A}^k$ für $k \geq n$ als gewichtete Summe von $\mathbf{A}^0, \mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{A}^{n-1}$ darstellen. Folglich ist jeder Wert $g(k)$ der Gewichtsfolge für $k \geq n$ von seinen n Vorgängern $g(k-1)$,

$g(k-2), \dots, g(k-n)$ abhängig. Multipliziert man nämlich die Gl. (A2.45) mit $\mathbf{c}'\mathbf{A}^{k-1-n}$ von links und mit $\mathbf{b}$ von rechts, so erhält man die Beziehung

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{c}'\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b} + a_{n-1}\mathbf{c}'\mathbf{A}^{k-2}\mathbf{b} + \dots + a_1\mathbf{c}'\mathbf{A}^{k-n}\mathbf{b} + a_0\mathbf{c}'\mathbf{A}^{k-1-n}\mathbf{b} \\ &= g(k) + a_{n-1}g(k-1) + \dots + a_1g(k-n-1) + a_0g(k-n), \end{aligned} \quad (11.50)$$

mit der man $g(k)$ aus den n Vorgängerwerten berechnen kann, wenn man die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms des Systems kennt. Für das Systemverhalten liefern also nur die ersten n Werte der Gewichtsfolge neue Informationen. Diese Tatsache wird noch bei mehreren Analyse- und Entwurfsaufgaben in dieser oder ähnlicher Form eine Rolle spielen, beispielsweise beim Nachweis der Tatsache, dass ein zeitdiskretes System durch eine geeignet gewählte Eingangsfolge in n Schritten in einen beliebig gegebenen Zielzustand überführt werden kann.

Die Berechnung von $g(k)$ für $k \geq n$ aus den Markovparametern erfordert die Kenntnis des Modells. Andererseits kann aus der Gewichtsfolge das Modell bestimmt werden. Schreibt man die Gl. (11.50) für n unterschiedliche Zeitpunkte $k > n$ untereinander, so erhält man ein Gleichungssystem zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten a_i des charakteristischen Polynoms. Mit diesen Koeffizienten und der statischen Verstärkung des Systems kann das Zustandsraummodell (11.12), (11.13) aufgeschrieben werden.

Gewichtsfolge in kanonischer Darstellung. Wenn die Matrix $\mathbf{A}$ diagonalähnlich ist, so kann man die Gewichtsfolge in Abhängigkeit von den Eigenvorgängen aufschreiben. Aus der Bewegungsgleichung (11.39) erhält man für $u(k) = \delta_a(k)$

$$g(k) = \begin{cases} d & \text{für } k = 0 \\ \sum_{i=1}^n g_i \lambda_i^{k-1} & \text{für } k > 0 \end{cases} \quad (11.51)$$

mit

$$g_i = \tilde{c}_i \tilde{b}_i.$$

In der Gewichtsfolge kommt der i -te Term λ_i^k nicht vor, wenn

$$g_i = \tilde{c}_i \tilde{b}_i = 0 \quad (11.52)$$

gilt. Wie beim kontinuierlichen System ist dies eine Bedingung dafür, dass der i -te Eigenvorgang entweder nicht steuerbar ($\tilde{b}_i = 0$) oder nicht beobachtbar ($\tilde{c}_i = 0$) ist, λ_i also eine Eingangsentkopplungsnullstelle oder eine Ausgangsentkopplungsnullstelle (oder beides) ist.

Systeme mit endlicher Gewichtsfolge. Wenn die Matrix $\mathbf{A}$ nilpotent ist, gibt es eine Zahl $\bar{k}$, für die $\mathbf{A}^{\bar{k}} = \mathbf{O}$ gilt. Das bedeutet, dass die Gewichtsfolge (11.49) nur für $k \leq \bar{k}$ nichtverschwindende Werte hat:

$$g(k) = 0 \quad \text{für } k \geq \bar{k}. \quad (11.53)$$

Wie die Darstellung des E/A-Verhaltens als Faltungssumme im Abschn. 11.2.4 zeigen wird, hängt bei derartigen Systemen die Ausgangsgröße zum Zeitpunkt k nur

von den $\bar{k}$ letzten Werten der Eingangsgröße ab. Man spricht dann von Systemen mit endlicher Gewichtsfolge, wobei sich das Attribut „endlich“ nicht auf den Betrag der Werte der Gewichtsfolge, sondern auf die Tatsache bezieht, dass die Gewichtsfolge nur für eine endliche Anzahl von Zeitpunkten von null verschieden ist.

Derartige Gewichtsfunktionen können nur bei zeitdiskreten Systemen auftreten, die nicht durch eine Abtastung aus kontinuierlichen Systemen hervorgehen, denn für Abtastsysteme gilt die Beziehung (11.22), die diese Eigenschaft der Matrix $\mathbf{A}_d$ unterbindet.

Beispiel 11.4 Zustandsraummodell eines Filters

Ein Filter soll den Mittelwert der jeweils drei letzten Werte der Eingangsgröße $u(k)$ bestimmen, also den Algorithmus

$$y(k) = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^2 u(k-i)$$

verwenden. Der Zustand des Filters ist durch die letzten beiden Eingabewerte bestimmt, denn diese Größen muss sich das Filter „merken“:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{pmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man die geforderte Ausgangsgröße aus der Beziehung

$$y(k) = \frac{1}{3}(1 \ 1) \mathbf{x}(k) + \frac{1}{3}u(k).$$

Der Zustand wird entsprechend der Zustandsgleichung

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(k)$$

aktualisiert.

Die Gewichtsfolge erhält man aus Gl. (11.49):

$$g(0) = \frac{1}{3}, \quad g(1) = \frac{1}{3}, \quad g(2) = \frac{1}{3}, \quad g(3) = 0, \quad g(4) = 0, \quad g(5) = 0, \dots$$

Das Filter hat eine endliche Gewichtsfolge. Es ist nicht durch ein abgetastetes kontinuierliches System darstellbar. $\square$

Zusammenhang zwischen Gewichtsfolge und Übergangsfolge. Vergleicht man die Beziehungen (11.45) und (11.49), so wird offensichtlich, dass zwischen der Gewichtsfolge und der Übergangsfolge die Relationen

$$h(k) = \sum_{j=0}^k g(j) \tag{11.54}$$

$$g(k) = h(k) - h(k-1) \tag{11.55}$$

bestehen. Dieselben Relationen gelten übrigens auch für die bei der Berechnung der Gewichtsfolge bzw. der Übergangsfolge verwendeten Eingangsgrößen $\delta_d(k)$ und $\sigma_d(k)$:

$$\sigma_d(k) = \sum_{j=0}^k \delta_d(j) \quad (11.56)$$

$$\delta_d(k) = \sigma_d(k) - \sigma_d(k-1). \quad (11.57)$$

Die statische Verstärkung

$$k_s = h(\infty) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{c}' \mathbf{A}^j \mathbf{b} + d$$

kann man entsprechend

$$k_s = \sum_{j=0}^{\infty} g(j)$$

aus der Gewichtsfolge ausrechnen. Hier sieht man eine weitere Analogie zum kontinuierlichen System, bei dem die statische Verstärkung das Integral der Gewichts-funktion darstellt. Da jedoch beim diskreten Impuls die Fläche unter der Kurve nicht gleich eins, sondern gleich T ist, stimmen weder die Integrale unter der Gewichts-funktion und der Gewichtsfolge noch die kontinuierliche Gewichts-funktion mit der diskreten Gewichtsfolge überein.

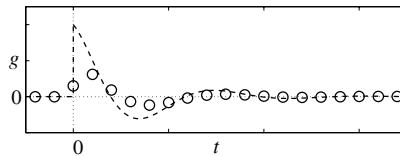


Abb. 11.9: Gewichts-funktion und Gewichtsfolge desselben Systems

Vergleich von Gewichtsfolge und Gewichts-funktion. Vergleicht man die in Gl. (11.49) beschriebene und hier in der Form

$$g_d(k) = \begin{cases} d & \text{für } k = 0 \\ \mathbf{c}' \mathbf{A}_d^{k-1} \mathbf{b}_d & \text{für } k > 0 \end{cases}$$

angegebene Gewichtsfolge des zeitdiskreten Systems mit der Gewichts-funktion

$$g(t) = \mathbf{c}' e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b} + d\delta(t)$$

des kontinuierlichen Systems, so fällt auf, dass beide Größen am Abtastzeitpunkt $k = 0$ nicht übereinstimmen können, denn in $g_d(0)$ kommt kein Dirac-Impuls vor.

Berechnet man die Gewichtsfunktion $g(t)$ zum ersten Abtastzeitpunkt $t = T$, so erhält man

$$g(T) = \mathbf{c}' e^{\mathbf{A}T} \mathbf{b},$$

was offensichtlich auch nicht mit

$$g_d(1) = \mathbf{c}' \mathbf{b}_d$$

übereinstimmt. Im Allgemeinen gilt also

$$g_d(k) \neq g(kT). \quad (11.58)$$

Abbildung 11.9 zeigt als Beispiel die Gewichtsfunktion und die Gewichtsfolge eines Systems, die erwartungsgemäß in vielen Abtastzeitpunkten nicht übereinstimmen.

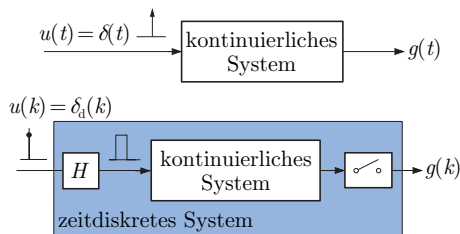


Abb. 11.10: Vergleich von Gewichtsfunktion und Gewichtsfolge

Steht die Ungleichung (11.58) im Widerspruch zur Behauptung, dass das zeitdiskrete Modell das kontinuierliche System in den Abtastzeitpunkten exakt beschreibt? Nein! Dieser scheinbare Widerspruch lässt sich anhand von Abb. 11.10 aufklären. Da das Halteglied eines zeitdiskreten Systems die Eingangsgröße zwischen den Abtastzeitpunkten konstant hält, wird der „kontinuierliche Kern“ bei der Bestimmung der Gewichtsfolge mit einem endlichen Impuls der Länge T und Höhe 1 beaufschlagt, also mit einer vollkommen anderen Eingangsgröße als bei der Berechnung der Gewichtsfunktion. Die Ausgangsgröße $y(t)$ folgt deshalb auch nicht der Gewichtsfunktion $g(t)$, so dass nach Abtastung auch keine Ausgangsfolge entstehen kann, die mit den Abtastwerten der Gewichtsfunktion übereinstimmt.

Die bei der Berechnung der Gewichtsfolge eingesetzte Eingangsgröße wurde so gewählt, dass die Gewichtsfolge dieselbe Bedeutung wie die Gewichtsfunktion für die Beschreibung des Systemverhaltens hat. Wie im Abschn. 11.2.4 gezeigt wird, kann man das E/A-Verhalten eines zeitdiskreten Systems genauso wie das eines kontinuierlichen Systems durch eine Faltung der Gewichtsfolge mit der Eingangsgröße darstellen. Bei der Definition der Gewichtsfolge steht diese Analogie im Vordergrund. Dass man aufgrund der in Abb. 11.10 gezeigten Unterschiede in der Eingangsgröße die Gewichtsfolge nicht durch Abtastung der Gewichtsfunktion bestimmen kann, fällt dabei nicht ins Gewicht.

Bei der Bestimmung der Übergangsfolge trat dieser scheinbare Widerspruch nicht auf, weil bei Verwendung der Sprungfunktion beim zeitdiskreten wie beim

kontinuierlichen System mit derselben Eingangsgröße $u(t)$ gearbeitet wird. Deshalb gilt die Gleichheit (11.46).

Aufgabe 11.6 Berechnung der Gewichtsfolge aus der Differenzengleichung

Berechnen Sie die Gewichtsfolge $g(k)$ aus der Differenzengleichung (11.1). Unter welcher Bedingung an die Koeffizienten der Differenzengleichung ist das System sprunghfähig, d. h. gilt $g(0) \neq 0$? □

Aufgabe 11.7* Verhalten von Systemen zweiter Ordnung

Abbildung 11.11 zeigt die Lage von Eigenwerten in der komplexen Ebene sowie fünf Übergangsfolgen. Welche Eigenwertpaare gehören zu welchem Beispielsystem zweiter Ordnung? □

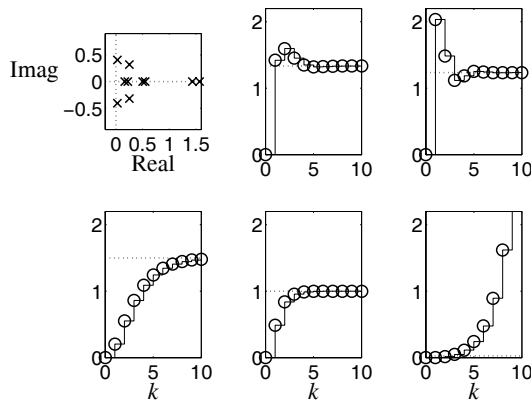


Abb. 11.11: Lage der Eigenwerte sowie Übergangsfolgen für fünf Systeme zweiter Ordnung

11.2.4 Darstellung des E/A-Verhaltens durch eine Faltungssumme

Die in Gl. (11.34) angegebene Darstellung des E/A-Verhaltens kann man mit Hilfe der Gewichtsfolge in die Form

$$\begin{aligned}
 y(k) &= \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{c}' \mathbf{A}^{k-1-j} \mathbf{b} u(j) + d u(k) \\
 &= \sum_{j=0}^k g(k-j) u(j) = \sum_{j=0}^k g(j) u(k-j)
 \end{aligned} \tag{11.59}$$

bringen. In der zweiten Zeile steht die *Faltungssumme* der Gewichtsfolge und der Eingangsfolge. Verwendet man auch für das zeitdiskrete System den Stern $*$ zur Kennzeichnung der Faltung, so erhält die E/A-Beschreibung dieselbe Form, wie sie vom kontinuierlichen System bekannt ist:

$$\text{E/A-Verhalten: } y(k) = g * u. \quad (11.60)$$

Wie bei kontinuierlichen Systemen wird bei dieser Darstellung der Faltung das Argument „ (k) “ bei g und u weggelassen, weil nicht nur die zu einem einzelnen Zeitpunkt k auftretenden Werte $g(k)$ und $u(k)$, sondern der gesamte Verlauf der Folgen g und u im Zeitintervall $0 \dots k$ in die Faltungssumme eingehen.

Aus dem rechten Teil von Gl. (11.59) ist zu erkennen, dass die Gewichtsfolge dieselbe Bedeutung hat wie die Gewichtsfunktion kontinuierlicher Systeme. Durch den Wert $g(j)$ der Gewichtsfolge wird der Wert, den die Eingangsgröße j Zeitschritte vor dem betrachteten Abtastzeitpunkt k hatte, gewichtet. Die Summe der so gewichteten Eingangsfolge ergibt den aktuellen Wert $y(k)$ der Ausgangsgröße. Dieser in Abb. I-5.19 für kontinuierliche Systeme veranschaulichte Sachverhalt trifft also auch auf das zeitdiskrete System zu.

Für Systeme mit einer endlichen Gewichtsfolge ist die Summation auf die $\bar{k}$ letzten Werte der Eingangsgröße beschränkt, denn aufgrund von Gl. (11.53) vereinfacht sich die Faltungssumme (11.59) zu

$$y(k) = \sum_{j=k-\bar{k}+1}^k g(k-j) u(j) = \sum_{j=0}^{\bar{k}-1} g(j) u(k-j). \quad (11.61)$$

Das heißt, dass die mehr als $\bar{k}$ Zeitschritte zurückliegenden Werte des Eingangs keinen Einfluss auf den aktuellen Wert der Ausgangsgröße haben.

Aufgabe 11.8 Interpretation der Gewichtsfolge

Verändern Sie die Abb. I-5.19 so, dass Sie mit Hilfe dieser Abbildung die Bedeutung der Gewichtsfolge für das E/A-Verhalten eines zeitdiskreten Systems erläutern können. $\square$

11.2.5 Übergangsverhalten und stationäres Verhalten

Die für kontinuierliche Systeme im Abschn. I-5.6 beschriebene Zerlegung der erzwungenen Bewegung in das Übergangsverhalten und das stationäre Verhalten kann auch für das zeitdiskrete System angewendet werden. Dafür wird die Eingangsfolge

$$u(k) = \sum_{j=1}^m u_j \mu_j^k$$

mit $\mu_j \neq \lambda_i \{A\}$ für alle i, j betrachtet und die Ausgangsgröße aus der Faltungssumme (11.60) berechnet. Setzt man die Gewichtsfolge eines nicht sprungfähigen Systems in kanonischer Darstellung ein, so erhält man

$$\begin{aligned} y(k) &= \sum_{l=0}^k g(k-l) u(l) \\ &= \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m g_i u_j \lambda_i^{k-1-l} \mu_j^l \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m g_i u_j \lambda_i^{k-1} \sum_{l=0}^{k-1} \lambda_i^{-l} \mu_j^l, \end{aligned}$$

wobei mit l der Laufindex der Faltungssumme bezeichnet wurde. Die Summe

$$\sum_{l=0}^{k-1} \lambda_i^{-l} \mu_j^l = \sum_{l=0}^{k-1} \left(\frac{\mu_j}{\lambda_i} \right)^l$$

kann wegen der Voraussetzung $\mu_j \neq \lambda_i$ entsprechend der Beziehung

$$\sum_{l=0}^{k-1} q^l = \frac{1 - q^k}{1 - q}$$

für die Partialsummen geometrischer Folgen in

$$\sum_{l=0}^{k-1} \left(\frac{\mu_j}{\lambda_i} \right)^l = \frac{1 - \left(\frac{\mu_j}{\lambda_i} \right)^k}{1 - \frac{\mu_j}{\lambda_i}}$$

zusammengefasst werden. Damit erhält man

$$\begin{aligned} y(k) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m g_i u_j \lambda_i^{k-1} \frac{1 - \left(\frac{\mu_j}{\lambda_i} \right)^k}{1 - \frac{\mu_j}{\lambda_i}} \\ &= \sum_{i=1}^n g_i \left(\sum_{j=1}^m \frac{u_j}{\lambda_i - \mu_j} \right) \lambda_i^k + \sum_{j=1}^m u_j \left(\sum_{i=1}^n \frac{g_i}{\mu_j - \lambda_i} \right) \mu_j^k. \end{aligned}$$

Die in den Klammern stehenden Ausdrücke, die übrigens mit denen bei kontinuierlichen Systemen auftretenden Ausdrücken übereinstimmen, werden wieder mit $y_{\ddot{u}i}$ bzw. y_{sj} abgekürzt, wodurch man für die erzwungene Bewegung die Beziehung

$$y_{\text{erzw}}(k) = \sum_{i=1}^n y_{\ddot{u}i} g_i \lambda_i^k + \sum_{j=1}^m y_{sj} u_j \mu_j^k. \quad (11.62)$$

erhält. Die erzwungene Bewegung setzt sich also aus dem Übergangsverhalten

$$y_{\ddot{u}}(k) = \sum_{i=1}^n y_{\ddot{u}i} g_i \lambda_i^k \quad (11.63)$$

und dem stationären Verhalten

$$y_s(k) = \sum_{j=1}^m y_{sj} u_j \mu_j^k \quad (11.64)$$

zusammen:

Zerlegung der erzwungenen Bewegung:
 $y_{\text{erzw}}(k) = y_{\ddot{u}}(k) + y_s(k).$

(11.65)

Wenn das System asymptotisch stabil ist, also $|\lambda_i| < 1$ gilt, so klingt das Übergangsverhalten ab und das Systemverhalten wird für große k durch das stationäre Verhalten bestimmt:

$$y(k) \rightarrow y_s(k) \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Das Übergangsverhalten ist ausschließlich durch Terme der Form $y_{\ddot{u}i} g_i \lambda_i^k$, also durch die Systemeigenschaften bestimmt. Im Gegensatz dazu hängt das stationäre Verhalten von dem die Eingangsgröße beschreibenden Parameter μ_j^k ab. Verändert hat sich im stationären Verhalten gegenüber der Eingangsgröße jedoch die Amplitude, mit der die einzelnen Terme μ_j^k auftreten. Die „Verstärkungsfaktoren“ y_{sj} sind von den Systemeigenschaften abhängig. Insbesondere tritt ein Term μ_j^k gar nicht im stationären Verhalten auf, wenn

Nullstelle μ_j : $\sum_{i=1}^n \frac{g_i}{\mu_j - \lambda_i} = 0$

(11.66)

gilt. Diese Bedingung, die dieselbe wie bei kontinuierlichen Systemen ist, beschreibt, wann eine Eingangsgröße der Form $u_j \mu_j^k$ nicht durch das System übertragen wird. Die reellen oder komplexen Zahlen μ_j , für die diese Bedingung erfüllt ist, sind die *Nullstellen* des Systems.

Aufgabe 11.9* Verhalten eines Systems erster Ordnung

1. Berechnen Sie für das System

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + u(t), & x(0) &= 0 \\ y(t) &= x(t) \end{aligned}$$

für $a = -1$, $a = 0$ sowie $a = 1$ die Gewichtsfunktion und die Übergangsfunktion und tragen Sie diese über die Zeit grafisch auf.

2. Ermitteln Sie für dieses System eine zeitdiskrete Beschreibung für die Abtastzeit $T = 0,5$.
3. Bestimmen Sie für das zeitdiskrete System die Gewichtsfolge und die Übergangsfolge. Tragen Sie die erhaltenen Folgen in die Diagramme des kontinuierlichen Systems ein und vergleichen Sie die jeweils zusammengehörigen Kurven.
4. Berechnen Sie für $a = -1$ die durch die Eingangsfolge $u(k) = (-0,5)^k$ erzwungene Bewegung des Systems aus der Ruhelage und zerlegen Sie diese Bewegung in das Übergangsverhalten und das stationäre Verhalten. $\square$

11.3 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit zeitdiskreter Systeme

11.3.1 Definitionen und Kriterien

Die Eigenschaften der Steuerbarkeit und der Beobachtbarkeit, die sich bei kontinuierlichen Systemen als fundamental für die erreichbaren Regelungsziele erwiesen haben, können ohne große Veränderungen auf das zeitdiskrete System übertragen werden. Im Folgenden wird deshalb nur kurz auf diese Eigenschaften eingegangen, wobei die Definitionen und die Kriterien in diesem Abschnitt zusammengestellt und in den nachfolgenden Abschnitten erläutert werden.

In Analogie zu den Definitionen 3.1 und 3.2 werden die Steuerbarkeit und die Beobachtbarkeit eines zeitdiskreten Systems

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (11.67)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k), \quad (11.68)$$

das hier als nicht sprungfähiges Mehrgrößensystem angesetzt wird, folgendermaßen definiert:

Definition 11.1 (Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit)

Ein zeitdiskretes System (11.67), (11.68) heißt vollständig steuerbar, wenn es in endlicher Zeit k_e von jedem beliebigen Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ durch eine geeignet gewählte Eingangsfolge $\mathbf{u}_{[0, k_e]}$ in einen beliebig vorgegebenen Endzustand $\mathbf{x}(k_e)$ überführt werden kann. Das System heißt vollständig beobachtbar, wenn der Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ aus dem über ein endliches Intervall $[0, k_e]$ bekannten Verlauf der Eingangsfolge $\mathbf{u}_{[0, k_e]}$ und der Ausgangsfolge $\mathbf{y}_{[0, k_e]}$ bestimmt werden kann.

Dabei bezeichnet k_e einen genügend groß gewählten Abtastzeitpunkt.

Die in den nachfolgenden Abschnitten vorgenommene Analyse wird zeigen, dass sich die Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitskriterien kontinuierlicher Systeme ohne Veränderung übernehmen lassen. Insbesondere sind die Steuerbarkeits- und die Beobachtbarkeitsmatrizen dieselben:

$$S_S = (B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B) \quad (11.69)$$

$$S_B = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}. \quad (11.70)$$

Satz 11.1 (Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitskriterium von KALMAN)

Das zeitdiskrete System (A, B, C) ist genau dann vollständig steuerbar und vollständig beobachtbar, wenn die Steuerbarkeitsmatrix S_S und die Beobachtbarkeitsmatrix S_B den Rang n haben:

$$\text{Rang } S_S = n \quad (11.71)$$

$$\text{Rang } S_B = n. \quad (11.72)$$

Für die Bestimmung derjenigen Eigenvorgänge bzw. Eigenwerte, die nicht steuerbar bzw. nicht beobachtbar sind, kann man wiederum das Hautuskriterium verwenden:

Satz 11.2 (Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitskriterium von HAUTUS)

Das zeitdiskrete System (A, B, C) ist genau dann vollständig steuerbar und vollständig beobachtbar, wenn die Bedingungen

$$\text{Rang } (\lambda_i I - A \ B) = n \quad (11.73)$$

$$\text{Rang } \begin{pmatrix} \lambda_i I - A \\ C \end{pmatrix} = n \quad (11.74)$$

für alle Eigenwerte λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) der Matrix A erfüllt sind.

Auch die Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitskriterien von GILBERT können ohne Veränderung für das zeitdiskrete System übernommen werden.

11.3.2 Steuerbarkeitsanalyse

Beweis des Kalmankriteriums. Im Folgenden wird das Kalmankriterium bewiesen, wobei der Einfachheit halber ein System mit einem Eingang betrachtet wird. Aus der Bewegungsgleichung (11.30) erhält man für das Steuerbarkeitsproblem die Forderung

$$\mathbf{x}_e \stackrel{!}{=} \mathbf{x}(k_e) = \mathbf{A}^{k_e} \mathbf{x}_0 + \sum_{j=0}^{k_e-1} \mathbf{A}^{k_e-1-j} \mathbf{b} u(j)$$

und daraus die Bedingung

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_e - \mathbf{A}^{k_e} \mathbf{x}_0 &= \sum_{j=0}^{k_e-1} \mathbf{A}^{k_e-1-j} \mathbf{b} u(j) \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \dots & \mathbf{A}^{k_e-1}\mathbf{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(k_e-1) \\ u(k_e-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Das System ist genau dann steuerbar, wenn die Matrix $\begin{pmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \dots & \mathbf{A}^{k_e-1}\mathbf{b} \end{pmatrix}$ regulär ist, die Spalten dieser Matrix also den n -dimensionalen Zustandsraum aufspannen. Da sich entsprechend dem Cayley-Hamilton-Theorem (A2.45) alle höheren Potenzen von $\mathbf{A}$ als Linearkombination von $\mathbf{A}^0, \mathbf{A}^1, \dots, \mathbf{A}^{n-1}$ darstellen lassen, können die für $k_e > n$ zusätzlich zu den ersten n Spalten $\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}$ auftretenden Spalten keine Rangerhöhung der Matrix bewirken. Deshalb reicht es aus, die Matrix für $k_e = n$ zu betrachten. Dies stellt gerade die Steuerbarkeitsmatrix dar, so dass hiermit die Notwendigkeit des Kalmankriteriums nachgewiesen ist.

Wenn das Kalmankriterium erfüllt ist, so ist die quadratische Matrix $\mathbf{S}_S$ regulär. Die für die Umsteuerung erforderliche Steuerfolge erhält man aus

$$\begin{pmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{pmatrix} = -\mathbf{S}_S^{-1} (\mathbf{x}_e - \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0), \quad (11.75)$$

womit auch die Hinlänglichkeit des Kalmankriteriums gezeigt und gleichzeitig eine geeignete Steuerfolge ermittelt ist.

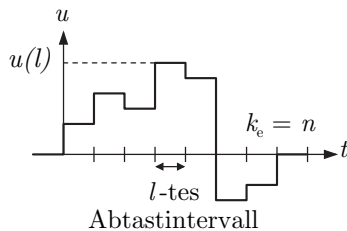


Abb. 11.12: Eingangsfolge zur Umsteuerung eines zeitdiskreten Systems

Auf Grund des Haltegliedes erhält das kontinuierliche System eine stückweise konstante Steuergröße, die in Abb. 11.12 veranschaulicht ist. Für einen beliebigen

Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ genügt eine Steuerfolge mit n Abtastzeitpunkten, um das System in jeden beliebigen Zustand $\mathbf{x}_e$ zu überführen. Für spezielle Paare $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_e)$ kann die Steuerfolge kürzer sein.

GRAMSCHE Steuerbarkeitsmatrix. Für kontinuierliche Mehrgrößensysteme wurde gezeigt, dass die Steuerbarkeit auch anhand der gramschen Matrix (3.7)

$$\mathbf{W}_S = \int_0^{t_e} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{B}' e^{\mathbf{A}'t} dt$$

nachgewiesen werden kann. Diese Matrix muss regulär sein. Eine geeignete Steuerung erhält man dann aus der Beziehung (3.6)

$$\mathbf{u}_{[0,t_e]}(t) = -\mathbf{B}' e^{\mathbf{A}'(t_e - t)} \mathbf{W}_S^{-1} \left(e^{\mathbf{A}t_e} \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e \right).$$

Denselben Weg kann man bei der Steuerbarkeitsanalyse zeitdiskreter Systeme einschlagen. Als gramsche Steuerbarkeitsmatrix erhält man für ein zeitdiskretes Mehrgrößensystem $(\mathbf{A}_d, \mathbf{B}_d)$ die Beziehung

$$\mathbf{W}_{Sd} = \sum_{j=0}^{k_e-1} \mathbf{A}_d^j \mathbf{B}_d \mathbf{B}_d' \mathbf{A}_d^{j'} \quad (11.76)$$

Das System ist genau dann vollständig steuerbar, wenn die gramsche Matrix für $k_e \geq n$ regulär ist. Dann kann man die Steuerfolge entsprechend

$$\mathbf{u}_{[0,k_e]}(k) = -\mathbf{B}_d' \left(\mathbf{A}_d^{(k_e-1-k)} \right)' \mathbf{W}_{Sd}^{-1} \left(\mathbf{A}_d^{k_e} \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e \right) \quad (11.77)$$

bestimmen. Für $k_e = \infty$ ergibt sich die gramsche Matrix als Lösung der Gleichung

$$\mathbf{A} \mathbf{W}_{Sd\infty} \mathbf{A}' - \mathbf{W}_{Sd\infty} = -\mathbf{B} \mathbf{B}' \quad (11.78)$$

Beispiel 11.5 Steuerbarkeit gekoppelter Rührkesselreaktoren

Die Steuerbarkeit der im Beispiel 3.1 auf S. 68 betrachteten Rührkesselreaktoren wird jetzt für die zeitdiskrete Steuerung untersucht, wobei die Abtastzeit zunächst auf $T = 0,8$ min festgelegt wird. Das Zustandsraummodell erhält man aus dem im Beispiel 3.1 angegebenen mit Hilfe der Gl. (11.22). Das System hat zwei einfache reelle Eigenwerte. Das Steuerbarkeitskriterium ist auch für das zeitdiskrete Modell erfüllt.

Es wird jetzt eine Eingangsfolge ermittelt, mit der die Reaktoren aus der Ruhelage $\mathbf{x}_0 = (0 \frac{\text{mol}}{1} \quad 0 \frac{\text{mol}}{1})'$ in den Zustand $\mathbf{x}_e = (1 \frac{\text{mol}}{1} \quad 5 \frac{\text{mol}}{1})'$ überführt werden. Da es sich bei den Reaktoren um ein System zweiter Ordnung handelt, ist die Umsteuerung in $k_e = 2$ Zeitschritten möglich. Aus den Gln. (11.76) und (11.77) erhält man die in Abb. 11.13 (unten) angegebene Steuerfolge. In den Kurven darüber sind die hinter dem Abtaster gemessenen Folgen der Zustandsvariablen x_1 und x_2 dargestellt. Da sich das System zur Zeit $t = 0$ in der Ruhelage befindet, ist die Wirkung der zu dieser Zeit beginnenden Steuerfolge erst

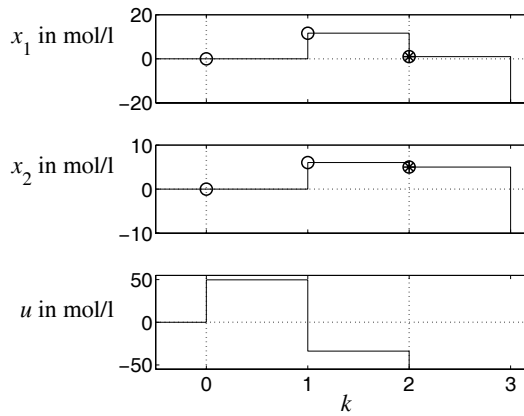


Abb. 11.13: Steuer- und Ausgangsfolge der Rührkesselreaktoren bei einer Abtastzeit $T = 0,8$ min

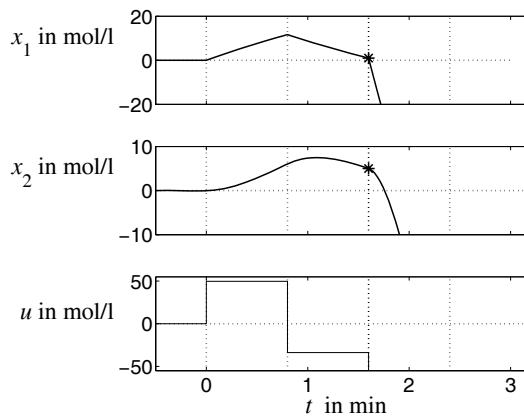


Abb. 11.14: Verhalten des Reaktors bei der Umsteuerung

nach Ablauf einer Abtastzeit erkennbar. Zur Zeit $t = 2T = 1,6$ min haben die Reaktoren die geforderten Konzentrationen.

Im Unterschied zu der in Abb. 3.6 auf S. 74 dargestellten stückweise konstanten Eingangsgröße sind die Umschaltzeitpunkte t_i hier durch die Abtastzeitpunkte vorgegeben, so dass sich der Wert der Eingangsgröße in gleichmäßigen Zeitabständen ändert.

In Abb. 11.13 wurden die Zustandsgrößen durch stückweise konstante Funktionen beschrieben. Diese grafische Darstellung entsteht aus der Gewohnheit, die abgetasteten Werte zwischen den Abtastzeitpunkten durch eine Linie zu verbinden. In Wirklichkeit verändern sich die Zustandsvariablen stetig.

Abbildung 11.14 zeigt das kontinuierliche Verhalten der Reaktoren bei Anwendung der angegebenen Steuerfolge. Auf der Zeitachse ist jetzt die Zeit t in Minuten aufgetragen. Um die Beziehung zur Abtastung herzustellen, sind die Abtastzeitpunkte durch gepunktete senkrechte Linien markiert. Vergleicht man diese Kurven mit denen aus Abb. 3.2, so

wird offensichtlich, dass die zeitdiskrete Steuerfolge ein ähnliches Verhalten wie die im Beispiel 3.1 ermittelte kontinuierliche Steuerung erzeugt.

Die beiden oberen Kurven aus Abb. 11.13 entstehen aus den beiden oberen Kurven von Abb. 11.14, indem man aus den Werten der Zustandsgrößen zu den Abtastzeitpunkten stückweise stetige Funktionen bildet. Im Gegensatz dazu entspricht die stückweise konstante Funktion im unteren Teil von Abb. 11.13 der wahren Stellgröße, weil die Stellgröße durch ein Halteglied erzeugt wird, dessen Wert sich nur zu den Abtastzeitpunkten verändert.

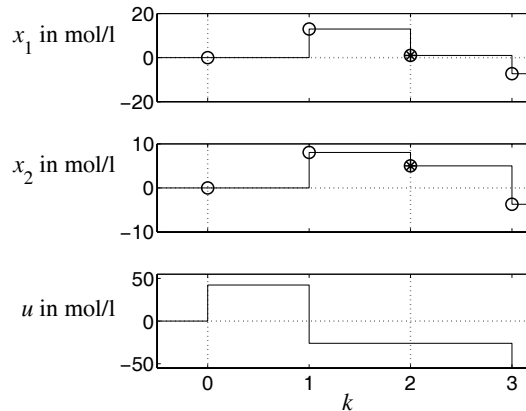
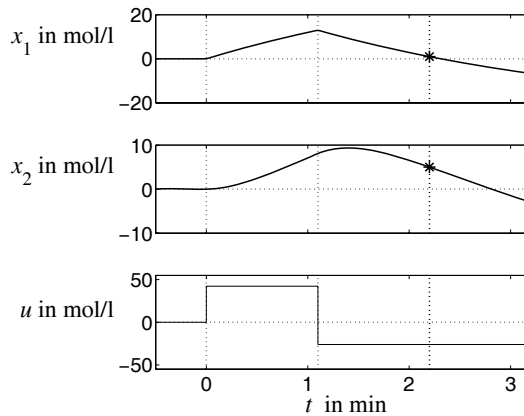
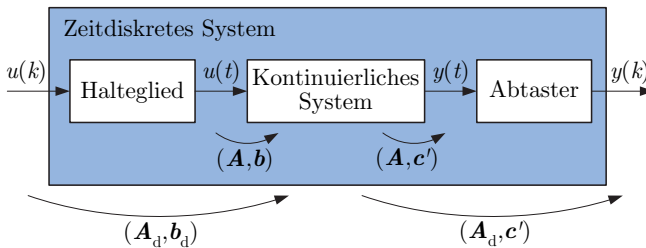


Abb. 11.15: Steuer- und Ausgangsfolge der Rührkesselreaktoren bei einer Abtastzeit $T = 0,8$ min

Die für die Umsteuerung notwendigen Stellausschläge sind auch von der gewählten Abtastzeit abhängig. Abbildung 11.15 zeigt die Umsteuerung bei vergrößerter Abtastzeit $T = 1,1$ min. Es ist offensichtlich, dass die Stellausschläge wesentlich geringer sind. Abbildung 11.16 zeigt – wie Abb. 11.14 – den wahren Verlauf der Zustandsvariablen.

Der angegebene Endzustand x_e wird nur für den angegebenen Zeitpunkt $t = k_e T$ erreicht und anschließend sofort wieder verlassen. Diese Tatsache wurde bereits bei der kontinuierlichen Steuerung erläutert. Sie ist also nicht durch den zeitdiskreten Charakter der Steuerfolge begründet, sondern durch das allgemeine Problem, dass mit einer skalaren Steuergröße das System nicht an jedem beliebigen Punkt im Zustandsraum gehalten werden kann. $\square$

Steuerbarkeit des kontinuierlichen und des zeitdiskreten Systems. Da das zeitdiskrete System durch Abtastung eines kontinuierlichen Systems entsteht, ist es interessant zu wissen, in welchem Zusammenhang die Steuerbarkeit des kontinuierlichen und des zeitdiskreten Systems stehen (Abb. 11.17). Offensichtlich ist die Steuerbarkeit des kontinuierlichen Systems (A, b) notwendig für die Steuerbarkeit des zeitdiskreten Systems (A_d, b_d) , denn wenn durch eine beliebig vorgegebene Steuerung $u_{[0, t_e]}$ der gewünschte Endzustand nicht erreicht werden kann, so kann er durch eine mit Hilfe eines Haltegliedes erzeugte stückweise konstante Steuerung (11.20) erst recht nicht erzeugt werden.

**Abb. 11.16:** Verhalten des Reaktors bei der Umsteuerung**Abb. 11.17:** Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des kontinuierlichen und des zeitdiskreten Systems

Die durch das Haltglied aus einer Wertefolge $u(k)$ erzeugten stückweise konstanter Eingangsgrößen stellen für die Steuerbarkeit eine zusätzliche Einschränkung dar, weil der Wert der Eingangsgröße nur in regelmäßigen, durch die Abtastzeit T festgelegten Zeitabständen geändert werden kann. Das ist der Unterschied zu dem in Abb. 3.4 auf S. 72 gezeigten Verlauf der Größe $u(t)$, bei der die Umschaltzeitpunkte t_i beliebig gewählt werden können. Diese Einschränkung in der Wahl von $u_{[0,k_e]}$ führt auf eine zusätzliche Forderung an die Abtastzeit T , die im folgenden Satz aufgeführt ist und verhindert, dass die Steuerbarkeit durch die Verwendung des Haltgliedes am Eingang des Systems verloren geht.

Satz 11.3 (Steuerbarkeit des kontinuierlichen und des zeitdiskreten Systems)

Das zeitdiskrete System $(\mathbf{A}_d, \mathbf{b}_d)$, das aus dem kontinuierlichen System $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ durch Abtastung mit der Abtastzeit T entsteht, ist genau dann vollständig steuerbar, wenn das System $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ vollständig steuerbar ist und wenn alle Eigenwertpaare λ_i und λ_j ($i \neq j$) der Matrix $\mathbf{A}$ die Bedingung

$$e^{\lambda_i T} \neq e^{\lambda_j T} \quad (11.79)$$

erfüllen.

Die Bedingung (11.79) fordert, dass unterschiedliche Eigenwerte λ_i und λ_j des kontinuierlichen Systems auf unterschiedliche Eigenwerte des zeitdiskreten Systems führen (vgl. Gl. (11.42)). Sie ist für alle einfach auftretenden reellen Eigenwerte erfüllt, so dass die im Beispiel 11.5 betrachteten Rührkessel die Zusatzbedingung (11.79) erfüllen und für jede beliebige Abtastzeit vollständig steuerbar sind.

Da für die Steuerbarkeit des kontinuierlichen Systems $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ mit einer Eingangsgröße sämtliche Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ entsprechend dem Steuerbarkeitskriterium von GILBERT (Satz 3.2 auf S. 80) einfach auftreten müssen, kann die Bedingung (11.79) nur durch zwei komplexe Eigenwerte

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \delta + j\omega_1 \\ \lambda_2 &= \delta + j\omega_2 \end{aligned}$$

verletzt werden, die denselben Realteil haben. Damit die Steuerbarkeit verloren geht, muss die Abtastzeit so gewählt werden, dass die Gleichung

$$e^{j\omega_1 T} = e^{j\omega_2 T}$$

und folglich

$$(\omega_1 - \omega_2)T = 2k\pi, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

gilt.

Für ein konjugiert komplexes Eigenwertpaar λ_1, λ_2 gilt $\omega_2 = -\omega_1$ und die Steuerbarkeit ist gewährleistet, wenn die Bedingung

$$\omega_1 T \neq k\pi, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

erfüllt ist. Setzt man für k den kleinsten Wert ein, so sieht man, dass das zeitdiskrete System für

$$\omega_T > 2\omega_1 \quad (11.80)$$

vollständig steuerbar ist. Diese Bedingung ist äquivalent der Forderung des *Abtasttheorems*, das somit auch für die Steuerbarkeit des zeitdiskreten Systems maßgebend ist. Folglich gilt:

Aus einem vollständig steuerbaren kontinuierlichen System entsteht bei geeigneter Wahl der Abtastzeit ein vollständig steuerbares zeitdiskretes System.

Beispiel 11.6 Verlust der Steuerbarkeit durch Abtastung

Das kontinuierliche System

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$$

ist vollständig steuerbar. Verwendet man die Abtastzeit $T = 1$, so ist das zeitdiskrete System

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0,637 \\ -0,637 \end{pmatrix} u(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$$

nicht vollständig steuerbar, wie man mit Hilfe des Kalmankriteriums überprüfen kann. Das System verletzt die Bedingung (11.79), denn die beiden Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm j\pi$ des kontinuierlichen Systems führen auf den zweifachen Eigenwert $\lambda_{d1,2} = -1$.

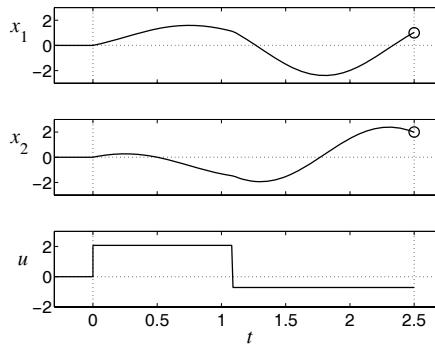


Abb. 11.18: Stückweise konstante Eingangsgröße zur Steuerung des Systems in den Endzustand $\mathbf{x}_e = (1 \ 2)'$

Das kontinuierliche System kann durch eine stückweise konstante Eingangsgröße in jeden beliebigen Endzustand überführt werden, wie Abb. 11.18 für den Endzustand $\mathbf{x}_e = (1 \ 2)'$ zeigt. Die dabei verwendeten Umschaltzeitpunkte $t_1 = 1,1$ und $t_2 = t_e = 2,2$ liegen jedoch nicht auf den Abtastzeitpunkten des zeitdiskreten Systems. Eine Verschiebung dieser Zeitpunkte auf die Abtastzeitpunkte $t_1 = T = 1$ und $t_2 = 2T = 2$ führt in Gl. (3.12) auf S. 72 zu den beiden linear abhängigen Vektoren

$$\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} -0,637 \\ 0,637 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 0,637 \\ -0,637 \end{pmatrix} = -\mathbf{p}_0,$$

was zeigt, dass das Umsteuerungsproblem nicht lösbar ist.

Verwendet man nun die Abtastzeit $T = 1,1$, so ist das entstehende zeitdiskrete System

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{pmatrix} -0,951 & -0,309 \\ 0,309 & -0,951 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0,523 \\ -0,719 \end{pmatrix} u(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$$

vollständig steuerbar. Die Eigenwerte des kontinuierlichen Systems führen auf zwei unterschiedliche Eigenwerte $\lambda_{d1,2} = -0,951 \pm j0,309$ des zeitdiskreten Systems und erfüllen folglich die Bedingung (11.79). Die im unteren Teil von Abb. 11.18 gezeigte Eingangsgröße kann mit Hilfe des Haltegliedes erzeugt werden. Bei ihrer Berechnung mit Gl. (3.12) erhält man die linear unabhängigen Vektoren

$$\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} -0,275 \\ 0,846 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 0,523 \\ -0,719 \end{pmatrix}.$$

Wie dieses System kann man alle vollständig steuerbaren kontinuierlichen Systeme durch eine geeignete Wahl der Abtastzeit in vollständig steuerbare zeitdiskrete Systeme überführen. $\square$

Beispiel 11.7 Steuerbarkeit einer Verladebrücke

Als Beispiel wird die Steuerbarkeit der in Aufgabe 3.15 auf S. 130 betrachteten Verladebrücke untersucht. Die kontinuierliche Verladebrücke ist steuerbar, wie auf S. 561 gezeigt wurde. Wird die Verladebrücke nun über ein Halteglied mit der Abtastzeit T angesteuert, so kann die Steuerbarkeit verloren gehen, wenn die Bedingung (11.79) für das Eigenwertpaar

$$\lambda_{3/4} = \pm j\sqrt{|a_{43}|} = \pm j\sqrt{\frac{m_G + m_K}{m_K} \frac{g}{l}}$$

verletzt ist. Dies ist dann der Fall, wenn die Abtastzeit die Bedingung

$$2\sqrt{|a_{43}|}T = 2k\pi, \quad \text{für ein } k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

erfüllt. Da $|a_{43}|$ auch von der Last abhängig ist und seinen größten Wert $|a_{43,\max}|$ annimmt, wenn m_G das Gewicht des Greifers und der durch die Tragfähigkeit bestimmten größten Last beschreibt, kann man die Steuerbarkeit der Verladebrücke durch die Verwendung einer Abtastzeit sichern, die die Ungleichung

$$T < \frac{\pi}{\sqrt{|a_{43,\max}|}}$$

erfüllt. Das heißt, durch hinreichend schnelle Abtastung wird die Steuerbarkeit des zeitdiskreten Systems bei allen möglichen Belastungen gesichert. Ist beispielsweise $l = 5 \text{ m}$, $m_K = 1000 \text{ kg}$ und $m_G = 0 \dots 5m_K = 0 \dots 5000 \text{ kg}$ und erfüllt die Abtastzeit die Bedingung

$$T < \frac{\pi}{\sqrt{\frac{6 \cdot 981}{5}}} = 0,9 \text{ s},$$

so ist die Steuerbarkeit des zeitdiskreten Systems gesichert. $\square$

Aufgabe 11.10** Zustandswechsel mit stückweise konstanten Eingangsgrößen

Zeigen Sie, dass die Vorschrift (3.12) zur Berechnung der Amplituden bei stückweise konstanten Eingangsgrößen für kontinuierliche Systeme in die Beziehung (11.75) übergeht, wenn die erhaltene Eingangsgröße mit einem Halteglied realisiert werden soll. Warum entstehen linear abhängige Vektoren p_i , wenn die Bedingung (11.79) verletzt ist? $\square$

11.3.3 Beobachtbarkeitsanalyse

Die Beobachtbarkeit kann man mit einer Methode untersuchen, die der in Aufgabe 8.1 behandelten sehr ähnlich ist, hier jedoch das zeitdiskrete System betrifft und damit – wie sich herausstellen wird – technisch direkt angewendet werden kann. Aus dem Zustandsraummodell erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \\
 \mathbf{y}(k+1) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\
 \mathbf{y}(k+2) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k+2) = \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{x}(k) + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(k+1) \\
 &\vdots \\
 \mathbf{y}(k+n-1) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k+n-1) \\
 &= \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x}(k) + \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \dots + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(k+n-2),
 \end{aligned}$$

die in

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{y}(k) \\ \mathbf{y}(k+1) \\ \mathbf{y}(k+2) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(k+n-1) \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{y}}(k)} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{C}\mathbf{B} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{B} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-3}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-4}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{C}\mathbf{B} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{u}(k+1) \\ \mathbf{u}(k+2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k+n-2) \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{u}}(k)}$$

überführt und als

$$\tilde{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{S}_B \mathbf{x}(k) + \mathbf{H} \tilde{\mathbf{u}}(k)$$

abgekürzt werden. Die Vektoren $\tilde{\mathbf{y}}$ und $\tilde{\mathbf{u}}$ können aus dem Verlauf der Ausgangs- bzw. Eingangsgröße gebildet werden. $\mathbf{H}$ bezeichnet eine Matrix, in die die Markovparameter des Systems eingehen.

Diese Beziehung zeigt, dass der Zustand $\mathbf{x}(k)$ aus dem Verlauf der Eingangs- und Ausgangsgrößen berechnet werden kann, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathbf{S}_B$ den Rang n hat. Dann kann die angegebene Gleichung nach $\mathbf{x}(k)$ umgestellt werden:

$$\mathbf{x}(k) = (\mathbf{S}'_B \mathbf{S}_B)^{-1} \mathbf{S}'_B (\tilde{\mathbf{y}}(k) - \mathbf{H} \tilde{\mathbf{u}}(k)). \quad (11.81)$$

Damit ist nicht nur die Hinlänglichkeit des Kalmankriteriums nachgewiesen, sondern gleichzeitig ein Weg gezeigt, wie man den Zustand $\mathbf{x}(k)$ berechnen kann.

Um Gl. (11.81) anzuwenden, muss man den Systemausgang fehlerfrei messen, ihn für jeweils n Zeitschritte speichern und daraus den Vektor $\tilde{\mathbf{y}}$ bilden. Dasselbe muss mit der Eingangsgröße geschehen. Dann kann zum Zeitpunkt $k + n - 1$ der Zustand $\mathbf{x}(k)$ berechnet werden. Anschließend ist es möglich, mit Hilfe des Modells und der bekannten Eingangsfolge den aktuellen Zustand $\mathbf{x}(k + n - 1)$ zu ermitteln, für den man sich häufig mehr interessiert als für den n Zeitschritte zurückliegenden Zustand $\mathbf{x}(k)$. In einer anderen Darstellung des beschriebenen Lösungsweges kann man auch direkt $\mathbf{x}(k + n - 1)$ berechnen. Entscheidend ist jedoch für die technische Anwendung nicht in erster Linie, wieviele Rechenschritte notwendig sind, sondern wie empfindlich die Lösung gegenüber Messstörungen ist. Man wird deshalb auch bei zeitdiskreten Systemen i. Allg. nicht die angegebene Gleichung, sondern wiederum einen Beobachter einsetzen, der ähnlich wie der im Kap. 8 beschriebene aufgebaut ist.

Die Matrix $\mathbf{H}$ hat zwei bemerkenswerte Eigenschaften. Erstens stehen bei ihr auf allen der Hauptdiagonalen parallelen Linien dieselben Elemente, wobei sich das Wort „Element“ bei dem hier betrachteten Mehrgrößensystem nicht auf einzelne Elemente, sondern auf (r, m) -Blöcke bezieht. Derartige Matrizen werden als Toeplitz-Matrizen bezeichnet. Zweitens erscheint in der ersten Spalte die Gewichtsfolgema-trix des betrachteten Systems. Die Elemente $\mathbf{O}$, $\mathbf{CB}$, $\mathbf{CAB}$ usw. entsprechen den in Gl. (11.49) angegebenen Elementen für Mehrgrößensysteme.

GRAMSche Beobachtbarkeitsmatrix. Für die Beobachtbarkeit zeitdiskreter Systeme gibt es eine Analogie zur Beobachtbarkeitsanalyse kontinuierlicher Systeme mit Hilfe der gramschen Matrix (3.36)

$$\mathbf{W}_B = \int_0^{t_e} e^{\mathbf{A}'t} \mathbf{C} \mathbf{C}' e^{\mathbf{A}t} dt.$$

Ist die Matrix $\mathbf{W}_B$ für eine Endzeit $t_e > 0$ regulär, so kann der Anfangszustand aus Gl. (3.37) ermittelt werden:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{W}_B^{-1} \int_0^{t_e} e^{\mathbf{A}'t} \mathbf{C}' \mathbf{y}_{\text{frei}}(t) dt.$$

Für zeitdiskrete Systeme $(\mathbf{A}_d, \mathbf{C}_d)$ heißt die gramsche Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{W}_{Bd} = \sum_{j=0}^{k_e-1} \mathbf{A}_d^{j'} \mathbf{C}_d' \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^j. \quad (11.82)$$

Das System ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn diese Matrix für $k_e \geq n$ regulär ist. Den Systemzustand kann man dann berechnen, indem man zunächst aus der gemessenen Bewegung $\mathbf{y}(k)$ die freie Bewegung bestimmt

$$\mathbf{y}_{\text{frei}}(k) = \mathbf{y}(k) - \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{k-1-j} \mathbf{B}_d \mathbf{u}(j)$$

(vgl. Gl. (11.33)) und diese dann in die Beziehung

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{W}_{\text{Bd}}^{-1} \sum_{j=0}^{k_e-1} \mathbf{A}_d^{j'} \mathbf{C}_d' \mathbf{y}_{\text{frei}}(j) \quad (11.83)$$

einsetzt. Für $k_e = \infty$ ergibt sich die gramsche Matrix als Lösung der Gleichung

$$\mathbf{A}' \mathbf{W}_{\text{Bd}\infty} \mathbf{A} - \mathbf{W}_{\text{Bd}\infty} = -\mathbf{C}' \mathbf{C}. \quad (11.84)$$

Beobachtbarkeit des kontinuierlichen und des zeitdiskreten Systems. Wie bei der Steuerbarkeit so ist auch bei der Beobachtbarkeit die Frage interessant, inwieweit durch die Abtastung Informationen verloren gehen, so dass ein beobachtbares kontinuierliches System auf ein nicht vollständig beobachtbares zeitdiskretes System führt (Abb. 11.17). Auch hier gilt die Bedingung aus Satz 11.3, dass für zwei beliebige Eigenwerte λ_i und λ_j der Matrix $\mathbf{A}$ des kontinuierlichen Systems mit der gewählten Abtastzeit T die Ungleichung

$$e^{\lambda_i T} \neq e^{\lambda_j T} \quad (11.85)$$

erfüllt werden muss, damit auch das zeitdiskrete System vollständig beobachtbar ist.

Beispiel 11.8 Verlust der Beobachtbarkeit durch Abtastung

Die Bedingung (11.85) hat eine sehr anschauliche Interpretation, die an einem System zweiter Ordnung, das in kanonischer Normalform vorliegt, erläutert werden soll. Es gilt

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix}$$

$$y(k) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix},$$

wobei nur die Eigenbewegung betrachtet wird, weil diese aus der gemessenen Gesamtbewegung aufgrund der Kenntnis der Eingangsgröße ermittelt werden kann. Das kontinuierliche System ist für $c_1 \neq 0$ und $c_2 \neq 0$ beobachtbar, und man kann x_0 beispielsweise entsprechend Gl. (3.34)

$$\begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t_1} & c_2 e^{\lambda_2 t_1} \\ c_1 e^{\lambda_1 t_2} & c_2 e^{\lambda_2 t_2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y(t_1) \\ y(t_2) \end{pmatrix}$$

berechnen, wobei t_1 und t_2 zwei geeignet gewählte Zeitpunkte sind. „Geeignet“ heißt, dass die angegebene Matrix regulär ist. Gerade diese Auswahl kann man in einem zeitdiskreten System nicht treffen, denn die Zeitpunkte müssen ganzzahlige Vielfache der Abtastzeit sein. Nimmt man die ersten beiden Abtastzeitpunkte $t_1 = T$ und $t_2 = 2T$, so erhält man

$$\begin{pmatrix} y(t_1) \\ y(t_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 T} & c_2 e^{\lambda_2 T} \\ c_1 e^{2\lambda_1 T} & c_2 e^{2\lambda_2 T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix}.$$

Wenn nun die Bedingung (11.85) verletzt ist, also

$$e^{\lambda_1 T} = e^{\lambda_2 T}$$

gilt, dann kann die angegebene Gleichung in

$$\begin{pmatrix} y(t_1) \\ y(t_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 T} & c_2 e^{\lambda_1 T} \\ c_1 e^{2\lambda_1 T} & c_2 e^{2\lambda_1 T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix}$$

umgeformt werden. Aus dieser Beziehung sieht man, dass die auf der rechten Seite stehende Matrix nicht invertierbar ist, der Anfangszustand also nicht aus den gemessenen Größen berechnet werden kann. Dieses Problem tritt bei einer beliebigen Wahl der Zeiten $t_1 = kT$ und $t_2 = lT$ auf. $\square$

Aufgabe 11.11* *Beobachtbarkeit eines Oszillators*

Ein Oszillator

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y(t) &= (1 \ 0) \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

wird über einen Abtaster mit der Abtastzeit T beobachtet. Für welche Abtastzeit ist er vollständig beobachtbar und für welche nicht? Skizzieren Sie die Ausgangsgröße und interpretieren Sie anhand dieser Kurve Ihr Ergebnis. $\square$

11.3.4 Weitere Ergebnisse zur Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Die bisherigen Betrachtungen zur Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit zeitdiskreter Systeme haben gezeigt, dass diese Eigenschaften bis auf wenige Änderungen in genau derselben Weise untersucht werden können wie bei kontinuierlichen Systemen. Deshalb können auch viele weitere, im Kap. 3 für kontinuierliche Systeme behandelte Analyseaufgaben für zeitdiskrete Systeme in direkter Analogie gelöst werden, u. a. die folgenden:

- **Dualität.** Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit sind auch bei zeitdiskreten Systemen duale Eigenschaften.
- **Steuerbare bzw. beobachtbare Unterräume.** Wenn das System nicht vollständig steuerbar oder nicht vollständig beobachtbar ist, dann lässt sich der Zustandsraum zeitdiskreter Systeme ähnlich dem kontinuierlicher Systeme in Unterräume zerlegen, die steuerbar bzw. nicht steuerbar und beobachtbar bzw. nicht beobachtbar sind.
- **Kalmanzerlegung.** Die Kalmanzerlegung des Zustandsraummodells kann auf zeitdiskrete Systeme übertragen werden. Auf Grund der Zusatzforderungen für die Steuerbarkeit bzw. Beobachtbarkeit des zeitdiskreten Systems können die nicht steuerbaren bzw. nicht beobachtbaren Teilsysteme eines Abtastsystems möglicherweise eine größere Dimension haben als die entsprechenden Teilsysteme der kontinuierlichen Beschreibung.
- **Strukturelle Analyse.** Die strukturelle Betrachtung der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit kann direkt von den kontinuierlichen auf die zeitdiskreten Systeme übertragen werden. Die Darstellung der Verkopplungen zwischen den einzelnen Signalen hat bei zeitdiskreten Systemen auch eine zeitliche Bedeutung. Wenn die Zustandsvariable x_1 nur über einen Pfad mit zwei Kanten (z. B. $u \rightarrow x_2$, $x_2 \rightarrow x_1$) mit der Eingangsgröße u eingangsverbunden ist, dann dauert es zwei Takte, bis die aktuelle Eingangsgröße $u(k)$ die Zustandsvariable x_1 beeinflusst. Je länger also die Pfade von u zu einem x_i bzw. von einem x_i zu y sind, desto mehr Zeittakte dauert es, bis der Zustand x_i durch die Eingangsgröße u beeinflusst wird bzw. sich auf die Ausgangsgröße y auswirkt.

11.4 Pole und Nullstellen

Die Gln. (11.52) und (11.66) beschreiben Bedingungen, unter denen Eigenvorgänge des Systems nicht im E/A-Verhalten auftreten bzw. Terme des Eingangssignals nicht durch das System übertragen werden. Diese Bedingungen für zeitdiskrete Systeme und die entsprechenden Bedingungen für kontinuierliche Systeme stellen nicht

nur Analogien dar, sondern sie sind mathematisch sogar äquivalent.¹ Deshalb sind die Definition und die Berechnungsvorschriften für Pole und Nullstellen für beide Systemklassen identisch. Auf diese Tatsache wird im Folgenden hingewiesen.

Es sei jedoch betont, dass die mathematischen Beziehungen zwar äquivalent sind, sich die Bedeutung der mit ihnen berechneten Systemparameter jedoch unterscheidet. Während für das kontinuierliche System Eigenvorgänge $e^{\lambda_i t}$ nicht in der Gewichtsfunktion bzw. Terme $e^{\mu_j t}$ der Eingangsgröße nicht im Ausgangssignal $y(t)$ auftreten, treten beim zeitdiskreten System Eigenvorgänge λ_i^k nicht in der Gewichtsfolge bzw. Terme μ_j^k nicht in der Ausgangsfolge $y(k)$ auf. Das bedeutet auch, dass für ein Abtastsystem die Eigenwerte $\lambda_i\{\mathbf{A}_d\}$ nicht mit den Eigenwerten $\lambda_i\{\mathbf{A}\}$ des kontinuierlichen Systems übereinstimmen und dieselbe Aussage auch für die Parameter μ_j der Eingangsgrößen gilt.

Die im Abschn. 2.5 behandelten Definitionen und Sätze können also für das zeitdiskrete System direkt übernommen werden, was im Folgenden für ein zeitdiskretes Mehrgrößensystem $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ zusammengefasst wird.

Pole. Die Pole sind die steuerbaren und beobachtbaren Eigenwerte der Systemmatrix $\mathbf{A}$, also diejenigen Eigenwerte $\lambda_i\{\mathbf{A}\}$, für die sowohl

$$\text{Rang}(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A} \quad \mathbf{B}) = n$$

als auch

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} = n$$

gilt. Für die im Kap. 12 eingeführte Frequenzbereichsdarstellung erfüllen die Pole dieselben Bedingungen, wie sie für kontinuierliche Systeme in der Definition 2.1 auf S. 48 angegeben sind, wenn $G(z)$ anstelle von $G(s)$ gesetzt wird.

Nullstellen. In Analogie zur Definition 2.3 auf S. 53 sind die invarianten Nullstellen diejenigen Frequenzen z_0 , für die die Rosenbrocksystemmatrix

$$\mathbf{P}(z) = \begin{pmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$$

eine der Bedingungen

$$\det \mathbf{P}(z_0) = 0 \quad \text{für } m = r$$

$$\text{Rang } \mathbf{P}(z_0) < \max_z \text{Rang } \mathbf{P}(z) \quad \text{für } m \neq r$$

¹ Unter einer Analogie versteht man Bedingungen, die für beide Systemklassen, ausgehend von dem selben Ansatz, formuliert sind wie beispielsweise die Berechnungsvorschrift für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ mit Hilfe der gramschen Matrix. Der Ansatz, die gramsche Matrix und daraus $\mathbf{x}_0$ zu berechnen, ist derselbe, aber die Berechnungsvorschriften unterscheiden sich. Bedingungen sind äquivalent, wenn sie sich darüber hinaus auf dieselben Berechnungsvorschriften beziehen [43].

erfüllt. Die Nullstellen werden mit dem Symbol z_0 anstelle von s_0 versehen, weil, wie im Kap. 12 noch ausführlich erläutert wird, die komplexe Frequenz bei zeitdiskreten Systemen mit z bezeichnet wird.

Für die invarianten Nullstellen gilt dieselbe Einteilung wie bei kontinuierlichen Systemen:

- Die invariante Nullstelle z_0 ist eine Übertragungsnullstelle, wenn sie kein Eigenwert der Matrix $\mathbf{A}$ ist.
- Die invariante Nullstelle ist eine Entkopplungsnullstelle, wenn sie auch ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{A}$ ist: $z_0 = \lambda_i$.

Für eine Nullstelle $z_0 = \lambda_i$ gilt dann entweder

$$\text{Rang} (z_0 \mathbf{I} - \mathbf{A} \ \mathbf{B}) < n$$

oder

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} z_0 \mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} < n.$$

Im ersten Fall bezeichnet man die Nullstelle als Eingangsentkopplungsnullstelle und im zweiten Fall als Ausgangsentkopplungsnullstelle. Gelten beide Beziehungen, so ist z_0 eine Eingangs-Ausgangsentkopplungsnullstelle.

Wie bei kontinuierlichen Systemen blockieren Nullstellen die Übertragung eines Signals durch das betrachtete System. Übertragungsnullstellen sind Frequenzen z_0 , für die der Term z_0^k in der Eingangsfolge nicht an den Systemausgang übertragen wird. Entkopplungsnullstellen verhindern, dass der Eigenvorgang z_0^k durch die Eingangsgrößen angeregt bzw. durch den Systemausgang beobachtet werden kann.

11.5 Stabilität

11.5.1 Zustandsstabilität

Ein System

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

kann entsprechend der Definition I-8.1 auf Zustandsstabilität untersucht werden, wenn anstelle der Zeitfunktion $\mathbf{x}(t)$ die Zustandsfolge $\mathbf{x}(k)$ eingesetzt wird. Aus der Bewegungsgleichung erhält man für die freie Bewegung des Zustandes

$$\mathbf{x}_{\text{frei}}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0.$$

Deshalb gelten folgende Stabilitätsaussagen:

Satz 11.4 (Kriterium für die Zustandsstabilität)

- Der Gleichgewichtszustand $\mathbf{x}_g = \mathbf{0}$ des Systems

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (11.86)$$

ist stabil, wenn die Matrix $\mathbf{A}$ diagonalähnlich ist und alle Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ die Bedingung

$$|\lambda_i| \leq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

erfüllen.

- Der Gleichgewichtszustand $\mathbf{x}_g = \mathbf{0}$ des Systems (11.86) ist genau dann asymptotisch stabil, wenn die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ die Bedingung

$$|\lambda_i| < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

erfüllen.

Vergleicht man die Zustandsstabilität eines kontinuierlichen Systems mit der Zustandsstabilität des aus diesem System entstehenden Abtastsystems, so wird aufgrund der Beziehung (11.42) für die Eigenwerte beider Systeme offensichtlich, dass beide Eigenschaften äquivalent sind. Das heißt, dass das zeitdiskrete System genau dann die Bedingungen des Satzes 11.4 erfüllt, wenn das kontinuierliche System die entsprechenden Stabilitätsbedingungen aus dem Satz I-8.1 erfüllt.

Jurykriterium. Für kontinuierliche Systeme wurden das Hurwitz- und das Routhkriterium angegeben, um die Stabilität eines Systems prüfen zu können, ohne die Eigenwerte berechnen zu müssen. Eine ähnliche Testmöglichkeit stellt das von JURY angegebene Kriterium dar. Es wird die charakteristische Gleichung

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

betrachtet, dessen Koeffizienten die ersten beiden Zeilen des Juryschemas darstellen:

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_0
a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_n

Aus diesen beiden Zeilen werden jetzt nacheinander die nächsten Zeilen folgendermaßen berechnet:

Erste Zeile:	$\mathbf{a}_n$	a_{n-1}	... a_0
Zweite Zeile:	a_0	a_1	... a_n

$$t_1 = \frac{a_0}{a_n}$$

Dritte Zeile:	$\mathbf{b}_{n-1} = a_n - t_1 a_0$	$b_{n-2} = a_{n-1} - t_1 a_1$	... $b_0 = a_1 - t_1 a_{n-1}$
Vierte Zeile:	b_0	b_1	... b_{n-1}

$$t_2 = \frac{b_0}{b_{n-1}}$$

Fünfte Zeile:	$\mathbf{c}_{n-2} = b_{n-1} - t_2 b_0$	$c_{n-3} = b_{n-2} - t_2 b_1$	... $c_0 = b_1 - t_2 b_{n-2}$
Sechste Zeile:	c_0	c_1	... c_{n-2}

usw.

(11.87)

Die Berechnungsvorschrift merkt man sich am besten, wenn man sich die Position der zu verknüpfenden Elemente in der Tabelle ansieht. Das Juryschema bricht ab, wenn in einer Zeile nur noch ein von null verschiedenes Element vorkommt. Das System ist stabil, wenn alle ersten Elemente ungeradzahliger Zeilen positiv sind, wenn also gilt

$$a_n > 0, \quad b_{n-1} > 0, \quad c_{n-2} > 0, \quad \text{usw.}$$

(vgl. die hervorgehobenen Elemente in der o. a. Tabelle).

Beispiel 11.9 Stabilität eines Systems zweiter Ordnung

Für kontinuierliche Systeme zweiter Ordnung ist die Stabilitätseigenschaft sofort am charakteristischen Polynom ablesbar, denn das System ist genau dann stabil, wenn alle drei Koeffizienten positiv sind. Beim zeitdiskreten System ist dies schwieriger. Aus der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0,$$

in der der Koeffizient vor λ^2 gleich eins ist, erhält man das folgende Juryschema:

1	a_1	a_0
a_0	a_1	1

$1 - a_0^2$	$a_1 - a_1 a_0$
$a_1 - a_1 a_0$	$1 - a_0$

$$\frac{(1 - a_0^2)^2 - a_1^2(1 - a_0)^2}{1 - a_0^2}$$

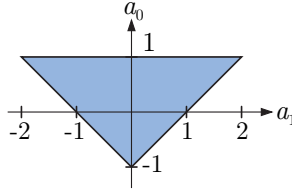


Abb. 11.19: Menge der Koeffizienten, die auf ein stabiles System führen

Das System ist genau dann stabil, wenn gilt

1. $1 - a_0^2 > 0$
2. $(1 - a_0^2)^2 - a_1^2(1 - a_0)^2 > 0$.

Die zweite Bedingung kann man entsprechend

$$\begin{aligned} (1 - a_0^2)^2 - a_1^2(1 - a_0)^2 &= [(1 - a_0)(1 + a_0)]^2 - a_1^2(1 - a_0)^2 \\ &= (1 - a_0)^2[(1 + a_0)^2 - a_1^2] \end{aligned}$$

umformen, so dass die Stabilitätsbedingung in

$$\begin{aligned} -1 &< a_0 < 1 \\ (1 + a_0)^2 - a_1^2 &> 0 \end{aligned}$$

und schließlich in

$$\begin{aligned} -1 &< a_0 < 1 \\ -1 - a_0 &< a_1 < a_0 + 1 \end{aligned}$$

umgeformt werden kann. Die Menge der Koeffizienten, die diese Bedingungen erfüllen, ist in Abb. 11.19 angegeben. Liegen die Koeffizienten a_0 und a_1 in der grauen Fläche, so ist das System stabil. $\square$

Hurwitzkriterium. Abschließend soll erwähnt werden, dass man das Stabilitätsproblem des zeitdiskreten Systems durch eine Transformation in eines für ein kontinuierliches System überführen und dann mit dem Hurwitzkriterium lösen kann. Entsprechend Satz 11.4 ist das System genau dann asymptotisch stabil, wenn alle Nullstellen λ_i des charakteristischen Polynoms betragsmäßig kleiner als eins sind. Es ist üblich, bei der Darstellung der im Folgenden beschriebenen Vorgehensweise das charakteristische Polynom in der komplexen Variablen z zu schreiben:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0.$$

An Stelle dieses Polynom zu untersuchen, bildet man die komplexe z -Ebene durch die Transformation

$$w = \frac{z - 1}{z + 1} \quad (11.88)$$

in eine w -Ebene ab. Diese Abbildung ist eineindeutig, so dass man auch umgekehrt die w -Ebene durch

$$z = \frac{w+1}{1-w} \quad (11.89)$$

in die z -Ebene abbilden kann. Die Zuordnungsvorschrift (11.88) hat die Eigenschaft, dass alle Punkte z mit $|z| < 1$ in w mit $\operatorname{Re}\{w\} < 0$ abgebildet werden und umgekehrt. Das heißt, „stabile“ z im zeitdiskreten Sinne werden „stabilen“ w im kontinuierlichen Sinne zugeordnet.

Wendet man die Transformationsbeziehung auf das charakteristische Polynom an, so erhält man

$$a_n \left(\frac{w+1}{1-w} \right)^n + a_{n-1} \left(\frac{w+1}{1-w} \right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\frac{w+1}{1-w} \right) + a_0 = 0$$

und nach Umformung ein Polynom n -ten Grades in w

$$\tilde{a}_n w^n + \tilde{a}_{n-1} w^{n-1} + \dots + \tilde{a}_1 w + \tilde{a}_0 = 0,$$

dessen Koeffizienten $\tilde{a}_i$ sich aus den Koeffizienten a_i des gegebenen Polynoms berechnen lassen. Auf dieses Polynom kann das Hurwitzkriterium angewendet werden. Genau dann, wenn das Hurwitzkriterium erfüllt ist, ist das zeitdiskrete System asymptotisch stabil.

11.5.2 E/A-Stabilität

Für die E/A-Stabilität wird wie in Definition I-8.2 gefordert, dass ein in der Ruhelage befindliches System auf eine beschränkte Eingangsgröße mit einer beschränkten Ausgangsgröße antwortet. Aus der Darstellung des zeitdiskreten Systems durch eine Faltungssumme erhält man in Analogie zum Satz I-8.2 das folgende Stabilitätskriterium:

Satz 11.5 (Kriterium für die E/A-Stabilität)

Das System

$$y(k) = g * u$$

ist genau dann E/A-stabil, wenn seine Gewichtsfolge $g(k)$ die Bedingung

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g(k)| < \infty \quad (11.90)$$

erfüllt.

Wie bei der Zustandsstabilität gilt, dass das zeitdiskrete System E/A-stabil ist, wenn das kontinuierliche System E/A-stabil ist. Die Umkehrung gilt nur dann,

wenn die steuerbaren und beobachtbaren Eigenvorgänge des kontinuierlichen Systems auch beim zeitdiskreten System steuerbar und beobachtbar sind. Andernfalls ist es denkbar, dass instabile Eigenvorgänge des kontinuierlichen Systems das E/A-Verhalten des zeitdiskreten Systems nicht beeinflussen und das abgetastete instabile System deshalb E/A-stabil ist.

Aufgabe 11.12* <i>Zeitdiskrete Realisierung einer kontinuierlichen Regelung</i>

Betrachten Sie einen Regelkreis, der aus der instabilen Regelstrecke

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t) + u(t), & x(0) &= 0 \\ y(t) &= x(t)\end{aligned}$$

und dem P-Regler

$$u(t) = -2y(t)$$

besteht.

1. Ist das geregelte kontinuierliche System stabil?
2. Unter welchen Bedingungen an die Abtastzeit T ist der geschlossene Kreis stabil, wenn der Regler mit dem zeitdiskreten Reglergesetz

$$u(k) = -2y(k)$$

realisiert wird? Wodurch entsteht das unterschiedliche Verhalten bei kontinuierlicher und diskreter Regelung?

3. Wie muss der zeitdiskrete P-Regler gewählt werden, damit sowohl der kontinuierliche als auch der zeitdiskrete Regelkreis stabil ist? $\square$

Aufgabe 11.13 <i>Stabilitätsanalyse eines Bankkontos</i>

Betrachten Sie Ihr Bankkonto zum ersten Tag eines jeden Monats. Einzahlungen und Auszahlungen können als gemeinsame Eingangsgröße $u(k)$, der Kontostand als Ausgangsgröße $y(k)$ betrachtet werden.

1. Stellen Sie ein Zustandsraummodell Ihres Bankkontos auf, wobei Sie alle Ein- und Auszahlungen eines Monats zu einem Wert der Eingangsgröße zusammenfassen.
2. Unter welcher Bedingung ist Ihr Bankkonto ein autonomes System?
3. Ist Ihr Bankkonto stabil?

(Hinweis: Banken rechnen jeden Monat mit 30 Tagen; es handelt sich bei Ihrem Bankkonto deshalb trotz unterschiedlicher Länge der Monate eines Jahres um ein zeitdiskretes System mit einer konstanten Abtastzeit). $\square$

Aufgabe 11.14* *Preisdynamik in der Landwirtschaft*

Der Markt "regelt" die Preise. Dabei wirken Rückführungen, denn eine hohe Nachfrage führt auf einen hohen Preis, folglich zum Anstieg der Produktion und damit zu einer Preissenkung infolge des erhöhten Angebotes. Da in diesem Regelkreis Verzögerungen wirken, kann er – wie jeder Regelkreis – stabiles oder instabiles Verhalten aufweisen. Durch eine sehr einfache Betrachtung sollen diese Verhaltensformen untersucht werden.

In der Landwirtschaft hängt die für das $(k+1)$ -te Jahr festgelegte Aussaatmenge $q(k+1)$ von dem im k -ten Jahr erreichten Preis $p(k)$ pro verkaufter Einheit ab, wobei hier zur Vereinfachung der Betrachtungen mit einem linearen Zusammenhang

$$q(k+1) = l_1 p(k) - l_1 p_0 \quad (11.91)$$

gerechnet werden soll. p_0 beschreibt die pro Gewichtseinheit angegebenen Kosten, die beim Verkauf als Mindestpreis angesetzt werden muss. Es wird angenommen, dass Aussaat und Ernte direkt proportional sind.

Bekanntlich fällt der Marktpreis, wenn das Verhältnis von Angebot und Nachfrage größer wird. Auch hier wird ein linearer Ansatz verwendet

$$p(k) = -l_2 h(k) + p_e, \quad (11.92)$$

wobei $h(k)$ die Erntemenge beschreibt und eine gleichbleibende Nachfrage angenommen wird. p_e ist ein Grenzwert, der bei $h(k) = 0$ angenommen wird und beispielsweise durch den Importpreis des betrachteten Produktes festgelegt ist.

1. Zeichnen Sie ein Blockschaltbild, das die beschriebenen Zusammenhänge darstellt, und stellen Sie ein lineares zeitdiskretes Modell auf, mit dem man den Verlauf von Preis und Erntemenge berechnen kann.
2. Von welchen Parametern hängt die Stabilität des Systems ab? Geben Sie die Parameterbereiche an, in denen das System instabil, grenzstabil bzw. asymptotisch stabil ist.
3. Zeichnen Sie für die ermittelten Parameterbereiche qualitativ den Verlauf von Ernte und Preis.
4. Was muss an dem hier verwendeten Modell verändert werden, wenn die Anbaumenge nicht nur von dem im letzten Jahr erzielten Preis, sondern auch von der Preisentwicklung $p(k)$, $p(k-1)$, $p(k-2)$ abhängig gemacht wird?
5. Wie kann in dem Modell berücksichtigt werden, dass mehrere unabhängige landwirtschaftliche Betriebe auf dem Markt konkurrieren? $\square$

11.6 MATLAB-Funktionen für die Analyse des Zeitverhaltens zeitdiskreter Systeme

Im Folgenden werden die Funktionen der *Control System Toolbox* beschrieben, mit denen zeitdiskrete Systeme analysiert werden können. Diese Beschreibung kann sehr kurz gehalten werden, weil diese Funktionen in Analogie zu denen für kontinuierliche Systeme arbeiten. In vielen Fällen unterscheiden sich die Funktionsnamen nur um ein vorangestelltes *d*.

Zustandsraummodell. Mit der von den kontinuierlichen Systemen bekannten Funktion `ss` kann ein zeitdiskretes Modell definiert werden, wenn man gleichzeitig die Abtastzeit T angibt:

```
>> dSystem = ss(A, B, C, D, T);
```

Wenn die Abtastzeit nicht bekannt ist, kann man für T den Wert -1 angeben. Die Funktion `ssdata` gibt dann neben den Systemmatrizen auch die Abtastzeit zurück:

```
>> [A, B, C, D, T] = ssdata(dSystem);
```

Transformationen zwischen kontinuierlicher und zeitdiskreter Beschreibungsform. Die Transformation (11.22), mit der das zeitdiskrete System `dSystem` für die Abtastzeit T aus dem kontinuierlichen Zustandsraummodell `kontSystem` bestimmt werden kann, ist in der Funktion

```
>> dSystem = c2d(kontSystem, T);
```

realisiert. Den Funktionsnamen kann man sich anhand der englischen Übersetzung *continuous to (two) discrete* merken. Wenn man das Zustandsraummodell von `dSystem` haben will, schreibt man

```
>> [Ad, Bd, Cd, Dd]=ssdata(dSystem)
```

Umgekehrt kann das kontinuierliche Modell aus dem zeitdiskreten durch

```
>> kontSystem = d2c(dSystem, T);
```

ermittelt werden.

Berechnung des Zeitverhaltens. Das betrachtete Mehrgrößensystem wird durch die Matrizen A_d , B_d , C_d und D_d beschrieben. Dann kann die statische Verstärkung k_s bzw. die Verstärkungsmatrix K_s mit

```
>> ddcgain(Ad, Bd, Cd, Dd)
```

berechnet werden. Zur Berechnung und grafischen Darstellung des Zeitverhaltens stehen die Funktionen

```
>> dstep(Ad, Bd, Cd, Dd);
>> dimpulse(Ad, Bd, Cd, Dd);
```

für die Übergangsfolge bzw. die Gewichtsfolge zur Verfügung. Beide Funktionen können auch auf Mehrgrößensysteme angewendet werden. Die grafische Darstellung geht davon aus, dass die abgetasteten Ausgangssignale durch ein Halteglied in eine Stufenfunktion umgeformt werden. Zur Darstellung dieser stückweise konstanten Zeitverläufe eignet sich die Funktion

```
»stairs(Y);
```

die eine stückweise konstante Funktion mit der im Vektor Y stehenden Wertefolge grafisch darstellt.

Die Eigenbewegung eines zeitdiskreten Systems kann man mit

```
» dinitial(Ad, Bd, Cd, Dd, x0);
```

ermitteln. Gibt man in der Matrix U spaltenweise den Verlauf der Eingangsgröße zu den aufeinander folgenden Abtastzeitpunkten an, so kann man mit

```
» dlsim(Ad, Bd, Cd, Dd, U, x0);
```

das Systemverhalten für eine beliebig gewählte Eingangsfolge und den Anfangszustand x_0 bestimmen und grafisch ausgeben.

Für die Analyse der Pole und Nullstellen sowie der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit können die von kontinuierlichen Systemen bekannten Funktionen verwendet werden, weil die Berechnungsvorschriften dieselben sind. Mit

```
» tzero(Ad, Bd, Cd, Dd)
```

oder

```
» tzero(dSystem)
```

erhält man die Übertragungsnullstellen, mit

```
» ctrb(Ad, Bd)
```

```
» obsv(Ad, Cd)
```

oder

```
» ctrb(dSystem)
```

```
» obsv(dSystem)
```

die Steuerbarkeitsmatrix S_S bzw. die Beobachtbarkeitsmatrix S_B , deren Rang mit der Funktion `rank` bestimmt werden können. Die gramischen Matrizen $W_{Sd\infty}$ und $W_{Bd\infty}$ nach Gl. (11.78) bzw. (11.84) erhält man durch die Funktionsaufrufe

```
» WSd = gram(dSystem, 'c');
```

```
» WBd = gram(dSystem, 'o');
```

Literaturhinweise

Die Übungsaufgaben 11.1 und 11.4 sind [54] entnommen.

12

Beschreibung und Analyse zeitdiskreter Systeme im Frequenzbereich

Die Betrachtung zeitdiskreter Systeme im Frequenzbereich beruht auf der $\mathcal{Z}$ -Transformation, deren wichtigste Eigenschaften hier zusammengestellt sind. Anschließend wird gezeigt, dass Abtastsysteme in direkter Analogie zu kontinuierlichen Systemen im Frequenzbereich dargestellt und analysiert werden können.

12.1 $\mathcal{Z}$ -Transformation

12.1.1 Definition

In Analogie zur Laplacetransformation für kontinuierliche Signale $f(t)$ gibt es für Folgen $f(k)$ die $\mathcal{Z}$ -Transformation, deren wichtigste Eigenschaften in diesem Abschnitt zusammengestellt sind. Man beschreibt die abgetastete Funktion $f(k)$ durch eine Folge von Dirac-Impulsen

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT), \quad (12.1)$$

wie es in Abb. 12.1 veranschaulicht ist. $f^*(t)$ ist eine Funktion der kontinuierlichen Zeit t , die jedoch nur zu den Abtastzeitpunkten $t = kT$ von null verschieden ist.

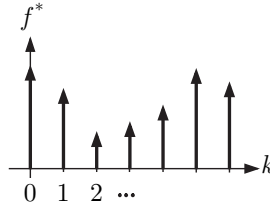


Abb. 12.1: Darstellung der Abtastfolge durch Dirac-Impulse

Wendet man die Laplacetransformation auf $f^*(t)$ an, so erhält man

$$\begin{aligned} F^*(s) &= \mathcal{L}\{f^*(t)\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \mathcal{L}\{\delta(t - kT)\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-ksT}. \end{aligned}$$

Die in der Summe stehenden Werte e^{-ksT} sind komplexe Zahlen, die von der Abtastzeit T und dem Summationsindex k abhängig sind. Dabei gilt

$$e^{-ksT} = (e^{-sT})^k.$$

Für e^{-sT} führt man die komplexe Variable z ein

$$z = e^{-sT} \quad (12.2)$$

und erhält damit für $F^*(s)$ die Darstellung

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k},$$

in der wieder $f(k)$ anstelle von $f(kT)$ geschrieben wurde. Da $F^*(s)$ nun nicht von s , sondern von z abhängt, führt man die neue Funktion

$$F(z) = F^*(s)|_{e^{-sT}=z}$$

ein und erhält damit die $\mathcal{Z}$ -Transformierte der Folge $f(k)$:

$\mathcal{Z}\text{-Transformation:} \quad F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}.$

(12.3)

Aus der Definition geht hervor, dass die $\mathcal{Z}$ -Transformation eine spezielle Art der Laplacetransformation ist, denn sie entsteht aus der Anwendung der Laplacetransformation auf eine Impulsfolge $f^*(t)$. Man bezieht die $\mathcal{Z}$ -Transformation jedoch auf die Folge $f(k)$ – und nicht auf die Funktion $f^*(t)$ – und schreibt dafür

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f(k)\}$$

oder

$$F(z) \stackrel{\mathcal{Z}}{\bullet-\circ} f(k).$$

Die angegebenen Schreibweisen machen deutlich, dass die $\mathcal{Z}$ -Transformation auf eine beliebige Zahlenfolge $f(k)$ angewendet werden kann, vollkommen unabhängig davon, ob diese Folge durch Abtastung einer kontinuierlichen Funktion $f(t)$ entstanden ist oder nicht. Wenn jedoch $F(z)$ in der oben beschriebenen Weise aus einer Impulsfolge bestimmt wird, die durch Abtastung einer Funktion $f(t)$ erhalten wurde, so schreibt man auch

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f(t)\}$$

oder

$$F(z) \stackrel{\mathcal{Z}}{\bullet-\circ} f(t), \quad (12.4)$$

obwohl dies mathematisch nicht ganz korrekt ist, denn die $\mathcal{Z}$ -Transformation ist für die Folge $f(k)$ und nicht auf die Funktion $f(t)$ definiert.

Wie bei der Laplacetransformation spricht man bei $F(z)$ von der Funktion im *Frequenzbereich* oder Bildbereich bzw. bei $f(k)$ von der Funktion im *Zeitbereich* oder Originalbereich. Die $\mathcal{Z}$ -Transformierte wird durch einen großen Buchstaben gekennzeichnet, wobei das Argument „ (z) “ gleichzeitig dazu dient, um die $\mathcal{Z}$ -Transformierte von der Laplacetransformierten zu unterscheiden.

Die $\mathcal{Z}$ -Transformation ordnet einer Folge $f(k)$ eineindeutig eine Funktion $F(z)$ zu. Man kann deshalb eine Folge $f(k)$ wahlweise im Zeitbereich oder im Frequenzbereich darstellen. Für einige Folgen sind die $\mathcal{Z}$ -Transformierten im Anhang 7 angegeben. Wichtige Korrespondenzen für die folgenden Betrachtungen sind

$$\begin{aligned} \delta(t) &\stackrel{\mathcal{Z}}{\circ-\bullet} 1 \\ \sigma(t) &\stackrel{\mathcal{Z}}{\circ-\bullet} \frac{z}{z-1} \\ e^{\lambda t} &\stackrel{\mathcal{Z}}{\circ-\bullet} \frac{z}{z - e^{\lambda T}}. \end{aligned}$$

Durch die $\mathcal{Z}$ -Transformation wird aus einer gegebenen Zahlenfolge $f(k)$ eine Potenzreihe in z gebildet. Ist beispielsweise

$$f(k) = (1, -1, 1, -1, \dots)$$

gegeben, so erhält man aus Gl. (12.3) die $\mathcal{Z}$ -Transformierte

$$F(z) = 1 - z^{-1} + z^{-2} - z^{-3} + \dots \quad (12.5)$$

An diesem Beispiel sieht man, dass z^{-1} eine Zeitverschiebung um eine Abtastzeit bedeutet, denn auf den Wert $f(0) = 1$ folgt nach einer Zeitdauer von einer Abtastzeit der zweite Wert $f(1) = -1$, der in der $\mathcal{Z}$ -Transformierten als Koeffizient vor z^{-1}

steht. Der Ausdruck z^{-2} bedeutet das Warten auf den zweiten Abtastwert usw. Dies erklärt das Symbol z^{-1} in Abb. 11.2 auf S. 430, das im Blockschaltbild zeitdiskreter Systeme den Integrator ersetzt. Dieser Block hat die Übertragungsfunktion $z^{-1} = e^{-sT}$ eines Totzeitgliedes mit der Totzeit T .

Dieser Interpretation entsprechend spricht man in der englischsprachigen Literatur vom *backward shift*-Operator z^{-1} und bezeichnet diesen gelegentlich auch mit $d = z^{-1}$. z ist dementsprechend der *forward shift*-Operator (Verschiebeoperator).

Für eine beliebige Folge

$$f(k) = (f(0), f(1), f(2), \dots)$$

erhält man die $\mathcal{Z}$ -Transformierte entsprechend Gl. (12.3) einfach dadurch, dass man die Werte der Folge als Koeffizienten eines Polynoms in z^{-1} schreibt:

$$F(z) = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \dots$$

Da man häufig an einem geschlossenen Ausdruck für $F(z)$ interessiert ist, besteht das eigentliche Problem der $\mathcal{Z}$ -Transformation in der Zusammenfassung der entstehenden Reihe. So kann für die Folge (12.5) die Potenzreihe in der Form

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-z)^k = \frac{z}{z+1}$$

zusammengefasst werden, sofern $|z| < 1$ ist.

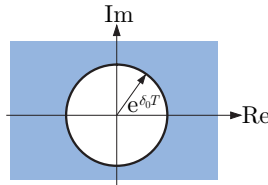


Abb. 12.2: Konvergenzgebiet der $\mathcal{Z}$ -Transformation (graue Fläche)

Konvergenz der $\mathcal{Z}$ -Transformation. Auf der rechten Seite von Gl. (12.3) steht eine Laurentreihe, die konvergiert, wenn für die Folge $f(k)$ die Beziehung

$$|f(k)| \leq a e^{k\delta_0 T} \quad (k = 0, 1, \dots)$$

mit entsprechend gewählten Konstanten a und δ_0 gilt. Die Folge $f(k)$ darf also nicht stärker wachsen als eine e-Funktion. Der Konvergenzbereich der Reihe ist das Gebiet der komplexen Ebene, das außerhalb des Kreises mit dem Radius $e^{\delta_0 T}$ liegt (Abb. 12.2). Für diese Werte von z gilt

$$|z| > e^{\delta_0 T},$$

so dass für die Reihe eine obere Schranke angegeben werden kann

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} a \left(\frac{e^{\delta_0 T}}{|z|} \right)^k,$$

die wegen

$$\frac{e^{\delta_0 T}}{|z|} < 1$$

konvergiert.

Wie bei der Laplacetransformation braucht man sich im praktischen Gebrauch der $\mathcal{Z}$ -Transformation keine Gedanken um dieses Konvergenzgebiet zu machen, weil die Funktion $F(z)$ über die gesamte z -Ebene analytisch fortgesetzt werden kann, so dass man die $\mathcal{Z}$ -Transformierten als Funktionen auffassen kann, die über die gesamte z -Ebene definiert sind, unabhängig davon, wie groß das Konvergenzgebiet ist.

$\mathcal{Z}$ -Rücktransformation. Für die Rücktransformation gibt es folgende Umkehrformel

$$\mathcal{Z}\text{-Rücktransformation: } f(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint F(z) z^{k-1} dz, \quad (12.6)$$

wobei der Integrationsweg ein Kreis in der z -Ebene ist, der alle Singularitäten von $F(z)$ einschließt. Ähnlich wie bei der Laplacetransformation wird man dieses Integral i. Allg. nicht auswerten, sondern die gegebene $\mathcal{Z}$ -Transformierte $F(z)$ entweder in eine Reihe entwickeln, aus der $f(k)$ ablesbar ist, oder $F(z)$ durch Partialbruchzerlegung in Summanden zerlegen, die mit Hilfe der Korrespondenztabelle zurücktransformiert werden können.

Schreibt man Gl. (12.6) in der Form

$$f(k) = \oint \tilde{f}(k, z) dz,$$

so erkennt man, dass eine gegebene Folge $f(k)$ mit Hilfe der $\mathcal{Z}$ -Transformation in Elementarfolgen

$$\tilde{f}(k, z) = \frac{F(z)}{2\pi j} z^{k-1} = \frac{F(e^{sT})}{2\pi j} e^{(k-1)sT}$$

zerlegt wird. Die Elementarfolgen werden für die Werte der komplexen Frequenz

$$z = e^{sT} = e^{\delta T} e^{j\omega T}$$

gebildet, die auf einem Kreis in der z -Ebene liegen und für die folglich

$$\begin{aligned} \delta &= \text{konst} \\ \omega &\in [0, \omega_T] \end{aligned} \quad (12.7)$$

gilt. Für die so festgelegten Werte $s = \delta + j\omega$ entstehen die Elementarfolgen aus den Funktionen e^{st} durch Abtastung, wobei $\frac{F(e^{sT})}{2\pi j}$ die Amplitude bestimmt. Für ein gegebenes k ist $\tilde{f}(k, z)$ der Abtastwert zum Zeitpunkt $t = (k - 1)T$. $\tilde{f}(k, z)$ beschreibt also abgetastete sinusförmige Signale mit konstanter, ansteigender oder abklingender Amplitude (Abb. 12.3). Dabei treten nur Frequenzen ω aus dem in Gl. (12.7) angegebenen Intervall auf, weil die Abtastwerte einer Funktion $e^{(\delta + j\omega_1)T}$ mit $\omega_1 > \omega_T$ dieselben sind wie die Abtastwerte der Funktion $e^{(\delta + j\omega_2)T}$, wobei

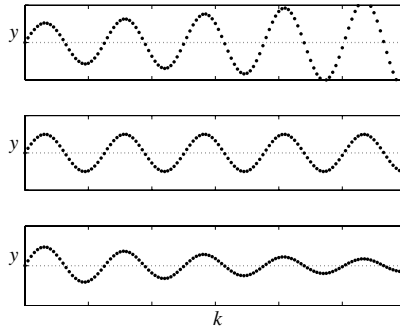


Abb. 12.3: Elementarfolgen der $\mathcal{Z}$ -Transformation

$$\omega_2 = \omega_1 - l\omega_T$$

gilt und die ganze Zahl l so gewählt ist, dass ω_2 im Intervall (12.7) liegt (vgl. Gl. (10.3)).

12.1.2 Eigenschaften

Da die $\mathcal{Z}$ -Transformation im vorhergehenden Abschnitt aus der Laplacetransformation abgeleitet wurde, ist es nicht verwunderlich, dass sie ähnliche Eigenschaften wie die Laplacetransformation besitzt. Diese Eigenschaften werden im Folgenden zusammengestellt. Dabei wird wie bisher verfahren, dass Funktionen, die mit demselben Buchstaben und Index bezeichnet sind, durch die $\mathcal{Z}$ -Transformation ineinander überführt werden können, beispielsweise

$$F_1(z) \stackrel{\mathcal{Z}}{\bullet-\circ} f_1(k).$$

Alle Folgen $f(k)$ verschwinden voraussetzungsgemäß für $k < 0$.

Überlagerungssatz. Die $\mathcal{Z}$ -Transformation ist eine lineare Transformation, d. h., es gilt

$$a_1 f_1(k) + a_2 f_2(k) \stackrel{\mathcal{Z}}{\circ-\bullet} a_1 F_1(z) + a_2 F_2(z), \quad (12.8)$$

wobei a_1 und a_2 beliebige reelle oder komplexe Konstanten sind.

Verschiebungssatz. Verschiebt man die Folge $f(k)$ um m Zeitschritte nach rechts, wobei m eine positive ganze Zahl ist, so entsteht aus

$$f(k) = (f(0), f(1), f(2), f(3), \dots)$$

die Folge

$$f(k-m) = (0, 0, \dots, 0, f(0), f(1), f(2), \dots),$$

in der am Anfang m Nullen stehen. An Stelle der $\mathcal{Z}$ -Transformierten $F(z)$ von $f(k)$ erhält man die Transformierte $z^{-m}F(z)$ für $f(k-m)$:

$$f(k-m) \stackrel{\mathcal{Z}}{\circ-\bullet} z^{-m}F(z). \quad (12.9)$$

Wird die Folge durch Verwendung eines negativen m nach links verschoben, so muss sie für die ersten m Zeitpunkte gleich null sein, damit die verschobene Folge die Voraussetzung erfüllt, für $k < 0$ zu verschwinden. Dann kann man den Verschiebungssatz mit negativem m anwenden.

Betrachtet man die Zeitfunktion $f(t)$, aus der $f(k)$ durch Abtastung entsteht, so bedeutet die Zeitverschiebung, dass anstelle des Argumentes t mit $t - mT$ gerechnet werden muss. Mit der Schreibweise (12.4) führt dies auf

$$f(t-mT) \stackrel{\mathcal{Z}}{\circ-\bullet} z^{-m}F(z).$$

Der Verschiebungssatz ist die Begründung dafür, dass z als Verschiebeoperator bezeichnet wird. Da Systeme i. Allg. verzögernden Charakter haben, wird häufig mit negativen Potenzen von z gerechnet. Die Multiplikation von $F(z)$ mit z^{-1} bedeutet, dass die Folge $f(k)$ um einen Abtastschritt nach rechts verschoben wird. z^{-1} ist also ein Verzögerungsoperator.

Dämpfungssatz. Der Dämpfungssatz betrifft Funktionen, die mit einem Faktor a^{-k} multipliziert werden. Es gilt

$$a^{-k}f(k) \stackrel{\mathcal{Z}}{\circ-\bullet} F(az). \quad (12.10)$$

Dieser Satz kann angewendet werden, wenn die abgetastete Funktion $f(t)$ mit einer e-Funktion multipliziert wird, denn dann erhält man für die abgetastete Folge

$$e^{\alpha t}f(t)|_{t=kT} = e^{k\alpha T}f(kT) = a^{-k}f(k)$$

mit

$$a = e^{-\alpha T}.$$

Differenzensatz. Dem Differenziationssatz der Laplacetransformation entspricht bei der $\mathcal{Z}$ -Transformation der Differenzensatz, denn die Differenziation von $f(t)$ muss bei Folgen $f(k)$ durch die Differenzenbildung ersetzt werden. Es gilt

$$f(k+1) - f(k) \stackrel{\mathcal{Z}}{\circ-\bullet} (z-1)F(z) - zf(0). \quad (12.11)$$

In diesen Satz geht die Anfangsbedingung $f(0)$ ein. Nur wenn $f(0) = 0$ ist, hat der Differenzensatz die häufig gebrauchte Form

$$f(k+1) - f(k) \stackrel{\mathcal{Z}}{\circ-\bullet} (z-1)F(z),$$

bei der die Differenzenbildung im Zeitbereich durch Multiplikation der Bildfunktion mit $z-1$ ersetzt wird. Will man mit diesem Satz $f(k+1)$ transformieren, so erhält man aus

$$f(k+1) = (f(k+1) - f(k)) + f(k)$$

unter Anwendung des Überlagerungssatzes die Beziehung

$$f(k+1) \stackrel{\mathcal{Z}}{\circ-\bullet} zF(z) - zf(0). \quad (12.12)$$

Summensatz. Dem Integrationssatz der Laplacetransformation entspricht der Summensatz der $\mathcal{Z}$ -Transformation. Dabei wird die aus der Folge $f(k)$ durch Summenbildung erhaltene Folge

$$f_{\Sigma}(k) = \sum_{j=0}^k f(j)$$

betrachtet:

$$\sum_{j=0}^k f(j) \stackrel{\mathcal{Z}}{\circ-\bullet} \frac{z}{z-1} F(z). \quad (12.13)$$

Differenziation der Bildfunktion. Wird anstelle von $F(z)$ mit der Ableitung

$$F'(z) = \frac{dF(z)}{dz}$$

gearbeitet, so gilt

$$kf(k) \stackrel{\mathcal{Z}}{\circ-\bullet} -zF'(z). \quad (12.14)$$

Faltungssatz. Die Faltung zweier Folgen ist gemäß Gl. (11.59) folgendermaßen definiert:

$$f_1 * f_2 = \sum_{j=0}^k f_1(k-j) f_2(j).$$

Im Frequenzbereich wird die Faltung durch die Multiplikation ersetzt:

$$f_1 * f_2 \overset{\mathcal{Z}}{\circ} \bullet F_1(z) F_2(z). \quad (12.15)$$

Grenzwertsätze. Der *Satz vom Anfangswert* besagt, dass $f(0)$ aus $F(z)$ für $z \rightarrow \infty$ bestimmt werden kann, vorausgesetzt, dass dieser Grenzwert existiert:

$$f(0) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} F(z). \quad (12.16)$$

Der *Satz vom Endwert* gilt unter der Voraussetzung, dass die beiden angegebenen Grenzwerte existieren:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)F(z). \quad (12.17)$$

Die beiden Werte $f(0)$ und $f(\infty)$ der Folge können also aus der $\mathcal{Z}$ -Transformierten $F(z)$ berechnet werden. Da diese Abtastfolgen die Zeitfunktion $f(t)$ nur zu den Abtastzeitpunkten wiedergeben, kann von diesen Funktionswerten nicht auf die Existenz und den Wert des Grenzwertes $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ geschlossen werden. Um dies zu verstehen, kann man sich eine Sinusfunktion $f(t) = \sin t$ vorstellen, die mit $T = \pi$ abgetastet wird. Zwar gilt dann $f(k) = 0$ für alle k , aber $f(t)$ hat keinen Grenzwert für $t \rightarrow \infty$.

12.2 $\mathcal{Z}$ -Übertragungsfunktion

12.2.1 Definition

In Analogie zur Übertragungsfunktion kontinuierlicher Systeme definiert man die $\mathcal{Z}$ -Übertragungsfunktion als Quotienten der $\mathcal{Z}$ -Transformierten des Ausganges und des Einganges:

$\mathcal{Z}\text{-Übertragungsfunktion: } G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}.$

(12.18)

Für ein beliebiges komplexes Argument z ist $G(z)$ eine komplexe Zahl, die in Betrag und Phase zerlegt werden kann:

$$G(z) = \operatorname{Re}\{G(z)\} + j \operatorname{Im}\{G(z)\} = |G(z)| e^{j\phi(z)}.$$

Frequenzgang. Wie bei kontinuierlichen Systemen beschreibt der Frequenzgang das Übertragungsverhalten eines Systems bei sinusförmigen Eingangssignalen. Aus der $\mathcal{Z}$ -Übertragungsfunktion erhält man den Frequenzgang deshalb für

$$z = e^{j\omega T}.$$

Es gilt also

$$G(e^{j\omega T}) = \frac{Y(e^{j\omega T})}{U(e^{j\omega T})}. \quad (12.19)$$

Der Frequenzgang zeitdiskreter Systeme betrifft also Werte der $\mathcal{Z}$ -Übertragungsfunktion für Werte der komplexen Frequenz z , die auf dem Einheitskreis der komplexen z -Ebene liegen. Aufgrund dieser Tatsache gehen wesentliche Vorteile der Frequenzbereichsbetrachtung kontinuierlicher Systeme verloren. Dort liegen die wichtigen Frequenzen $s = j\omega$ bekanntlich auf der Imaginärachse. Insbesondere kann für diskrete Systeme die Frequenzkennlinie nicht mehr so einfach per Hand gezeichnet werden, denn die für kontinuierliche Systeme nützliche Geradenapproximation gilt nur für rein imaginäre Frequenzen. Mit diesen Approximationen geht auch der einfache Zusammenhang zwischen Polen und Nullstellen der Übertragungsfunktion und dem Verlauf des Amplituden- und des Phasenganges verloren.

Auch gibt es für zeitdiskrete Systeme keine so einfachen Konstruktionsvorschriften, mit denen der Phasengang aus dem Amplitudengang bestimmt werden kann. Dieser einfache Zusammenhang war die Grundlage dafür, dass beim Reglerentwurf vorrangig der Amplitudengang betrachtet wurde. Für zeitdiskrete Systeme müssen beide Bestandteile der Frequenzkennlinie beachtet werden.

Erhalten bleiben zwei Eigenschaften des Frequenzganges. Erstens kann die Stabilität nach wie vor aus der Ortskurve bestimmt werden, wobei das Nyquistkriterium sogar unverändert gilt. Die Ortskurve ist jedoch anders zu konstruieren. Darauf wird im Abschn. 13.2 eingegangen. Zweitens kann das stationäre Verhalten des Regelkreises, insbesondere bezüglich sprungförmiger Führungs- und Störgrößen aus dem Frequenzkennliniendiagramm abgelesen werden.

Insgesamt spielen die Frequenzbereichsbetrachtungen bei zeitdiskreten Systemen eine wesentlich kleinere Rolle für die Analyse des Übertragungsverhaltens dynamischer Systeme und den Reglerentwurf als bei kontinuierlichen Regelungen.

12.2.2 Berechnung

Berechnung der $\mathcal{Z}$ -Übertragungsfunktion aus der Gewichtsfolge. Aus der E/A-Beschreibung

$$y(k) = g * u$$

und dem Faltungssatz (12.15) der $\mathcal{Z}$ -Transformation erhält man

$$Y(z) = G(z) U(z).$$

Vergleicht man diese Beziehung mit der Definitionsgleichung (12.18), so sieht man, dass die $\mathcal{Z}$ -Übertragungsfunktion die $\mathcal{Z}$ -Transformierte der Gewichtsfolge ist:

$$G(z) = \mathcal{Z}\{g(k)\}. \quad (12.20)$$

Setzt man die Definitionsgleichung (12.3) in diese Beziehung ein

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k},$$

so erkennt man, dass die Werte $g(k)$ der Gewichtsfolge als Koeffizienten in der durch eine Potenzreihe dargestellten $\mathcal{Z}$ -Übertragungsfunktion auftreten. Aus der Beziehung $Y(z) = G(z)U(z)$ mit

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k) z^{-k}$$

sieht man schließlich, dass $Y(z)$ eine Potenzreihe

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k) z^{-k}$$

ist, deren Koeffizienten sich aus der Faltungssumme der Koeffizienten $u(k)$ und $g(k)$ der beiden auf der rechten Seite stehenden Potenzreihen zusammensetzen:

$$y(k) = \sum_{j=1}^k g(k-j) u(j).$$

Hier erkennt man die E/A-Beschreibung des Systems wieder. Verwendet man die Gewichtsfolge in kanonischer Darstellung (11.51)

$$g(k) = \sum_{i=1}^n g_i \lambda_i^{k-1} + d \delta_d(k),$$

dann erhält man die $\mathcal{Z}$ -Übertragungsfunktion in kanonischer Darstellung:

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_{i=1}^n g_i \mathcal{Z}\{\lambda_i^{k-1}\} + d \mathcal{Z}\{\delta_d(k)\} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{g_i}{z - \lambda_i} + d. \end{aligned} \quad (12.21)$$

Berechnung der $\mathcal{Z}$ -Übertragungsfunktion aus der Differenzengleichung. Aus der Differenzengleichung (11.1)

$$\begin{aligned} y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \dots + a_1y(k+1) + a_0y(k) \\ = b_q u(k+q) + b_{q-1}u(k+q-1) + \dots + b_1u(k+1) + b_0u(k) \end{aligned}$$

erhält man durch $\mathcal{Z}$ -Transformation

$$\begin{aligned}
& z^n Y(z) + a_{n-1} z^{n-1} Y(z) + \dots + a_1 z Y(z) + a_0 Y(z) \\
& = b_q z^q U(z) + b_{q-1} z^{q-1} U(z) + \dots + b_1 z U(z) + b_0 U(z)
\end{aligned}$$

und nach Umstellung

$$\boxed{G(z) = \frac{b_q z^q + b_{q-1} z^{q-1} + \dots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}}. \quad (12.22)$$

Diese Gleichung zeigt, dass die $\mathcal{Z}$ -Übertragungsfunktion eine gebrochen rationale Funktion in z ist, wobei die Koeffizienten des Zählerpolynoms aus der rechten Seite der Differenzengleichung und die Koeffizienten des Nennerpolynoms aus der linken Seite der Differenzengleichung stammen.

Hat die Differenzengleichung die Form eines MA-Modells (11.6)

$$y(k) = b_q u(k) + b_{q-1} u(k-1) + \dots + b_1 u(k-q+1) + b_0 u(k-q),$$

dann erhält man nach Anwendung der $\mathcal{Z}$ -Transformation die Beziehung

$$Y(z) = (b_q + b_{q-1} z^{-1} + \dots + b_1 z^{-q+1} + b_0 z^{-q}) U(z) \quad (12.23)$$

und daraus die Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned}
G(z) &= \frac{b_q + b_{q-1} z^{-1} + \dots + b_1 z^{-q+1} + b_0 z^{-q}}{1} \\
&= \frac{b_q z^q + b_{q-1} z^{q-1} + \dots + b_1 z + b_0}{z^q}.
\end{aligned} \quad (12.24)$$

Liegt ein AR-Modell (11.7)

$$y(k) + a_{n-1} y(k-1) + \dots + a_1 y(k-n+1) + a_0 y(k-n) = u(k)$$

vor, so erhält man

$$Y(z) (1 + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n}) = U(z)$$

und daraus die Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned}
G(z) &= \frac{1}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n}} \\
&= \frac{z^n}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}.
\end{aligned} \quad (12.25)$$

Berechnung der Übertragungsfunktion aus dem Zustandsraummodell. Das Zustandsraummodell

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{0} \\
y(k) &= \mathbf{c}'\mathbf{x}(k) + du(k)
\end{aligned}$$

wird für verschwindenden Anfangszustand betrachtet. Durch $\mathcal{Z}$ -Transformation folgt aus der ersten Gleichung

$$\begin{aligned} z\mathbf{X}(z) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{b}U(z) \\ \mathbf{X}(z) &= (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}U(z). \end{aligned}$$

Setzt man dies in die aus der Ausgabegleichung erhaltene Beziehung

$$Y(z) = \mathbf{c}'\mathbf{X}(z) + dU(z)$$

ein, so bekommt man für die Übertragungsfunktion die Gleichung

$$G(z) = \mathbf{c}'(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d. \quad (12.26)$$

Übertragungsfunktion in kanonischer Darstellung. Wenn das Zustandsraummodell in kanonischer Normalform vorliegt, so erhält man aus Gl. (12.26) die Beziehung

$$G(z) = \tilde{\mathbf{c}}'(z\mathbf{I} - \text{diag } \lambda_i)^{-1}\tilde{\mathbf{b}} + d,$$

die man in die bereits in Gl. (12.21) dargestellte Form

$$G(z) = \sum_{i=1}^n \frac{g_i}{z - \lambda_i} + d \quad (12.27)$$

mit

$$g_i = \tilde{c}_i \tilde{b}_i$$

umrechnen kann, wobei $\tilde{b}_i$ und $\tilde{c}_i$ die Elemente der Vektoren $\tilde{\mathbf{b}}$ und $\tilde{\mathbf{c}}$ sind. Man bezeichnet Gl. (12.27) auch als kanonische Darstellung von $G(z)$.

Vergleicht man Gl. (12.27) mit der kanonischen Darstellung (I-6.71) der (kontinuierlichen) Übertragungsfunktion, so erkennt man, dass beide Darstellung mathematisch dieselbe Form haben. Wie beim kontinuierlichen System ist der Faktor g_i gleich null, wenn der Eigenwert λ_i der Systemmatrix $\mathbf{A}_d$ nicht steuerbar oder nicht beobachtbar ist.

12.2.3 Eigenschaften und grafische Darstellung

Aus der Übertragungsfunktion stabiler Systeme kann man wie bei kontinuierlichen Systemen die statische Verstärkung ablesen, nur dass jetzt anstelle von $s = 0$ mit dem Argument $z = 1$ gearbeitet werden muss:

$$G(1) = \frac{\sum_{i=0}^q b_i}{\sum_{i=0}^n a_i} = k_s. \quad (12.28)$$

Diese Beziehung kann man aus dem Grenzwertsatz der $\mathcal{Z}$ -Transformation herleiten, wenn man beachtet, dass

$$H(z) = G(z) \frac{z}{z-1}$$

die $\mathcal{Z}$ -Transformierte der Übergangsfunktion ist.

Bei Betrachtung sehr hoher Frequenzen z kann man aus $G(z)$ ablesen, ob das System sprungfähig ist, denn es gilt

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} G(z) = d, \quad (12.29)$$

wobei d den Parameter aus der Ausgangsgleichung des Zustandsraummodells darstellt.

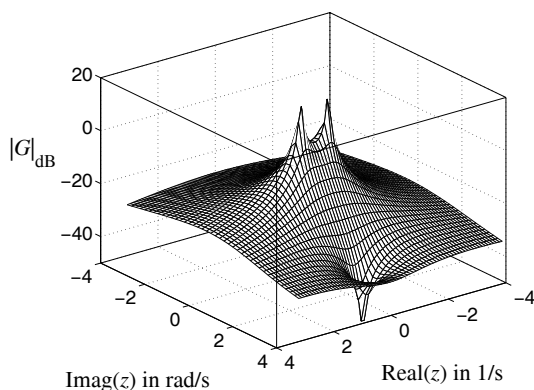


Abb. 12.4: Dreidimensionale Darstellung von $|G(z)|$

Grafische Darstellung. Den Betrag der Übertragungsfunktion kann man grafisch als Fläche über der z -Ebene darstellen, wie es in Abb. 12.4 zu sehen ist. Als Beispiel wurde das zeitdiskrete System

$$G(z) = \frac{0,123z - 0,33}{z^2 - 0,934z + 0,45}$$

mit den beiden Polen bei $0,467 \pm 0,48j$ und einer Nullstelle bei $2,67$ verwendet.

Wie bei kontinuierlichen Systemen wird bei der Analyse i. Allg. nicht die gesamte z -Ebene betrachtet, sondern nur der Ausschnitt der „reinen Sinusfunktionen“. Bei kontinuierlichen Systemen entsprach dieser Ausschnitt den Frequenzen $s = j\omega$, die auf der Imaginärachse der komplexen Ebene liegen. Entsprechend der Definition (12.2) der komplexen Frequenz z ist dieser Ausschnitt für zeitdiskrete Systeme durch die Frequenzen

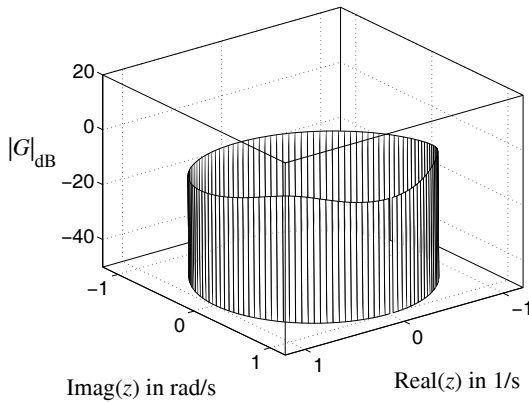


Abb. 12.5: Dreidimensionale Darstellung des Frequenzganges

$$z = e^{j\omega T}$$

beschrieben, die auf dem Einheitskreis liegen. Für diesen Ausschnitt ist der Betrag der Übertragungsfunktion in Abb. 12.5 aufgezeichnet. I. Allg. verwendet man anstelle dieser perspektivischen Darstellung, die den entsprechenden Ausschnitt aus Abb. 12.4 verdeutlichen soll, das Bodediagramm, in dem die Frequenz ω logarithmisch aufgetragen und $|G(e^{j\omega T})|$ in Dezibel angegeben ist (Abb. 12.6 (oben)).

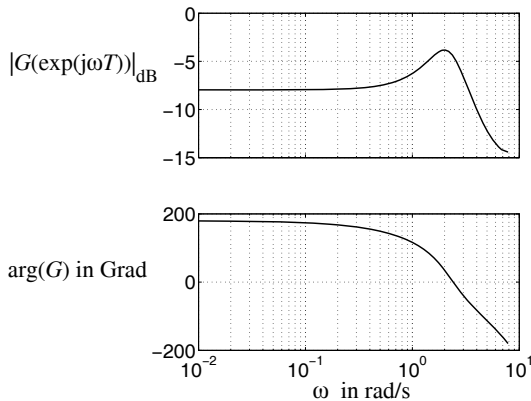


Abb. 12.6: Frequenzkennliniendiagramm

Die grafische Darstellung ist nur für Frequenzen $-\frac{\omega_T}{2} < \omega < \frac{\omega_T}{2}$ sinnvoll, weil für höhere Frequenzen die Eingangsgröße aufgrund des Aliasing-Effekts in einen niederfrequenten Bereich transformiert wird. Dabei ergeben sich für den Amplitudengang für ω und $-\omega$ dieselben Werte, so dass nur der Bereich

$$0 \leq \omega \leq \frac{\omega_T}{2} = \frac{\pi}{T}$$

betrachtet wird, dem der Bereich

$$e^{j\omega_T} = e^{j\phi} \quad 0 \leq \phi \leq \pi,$$

also gerade die obere Hälfte des Einheitskreises in der komplexen z -Ebene entspricht.

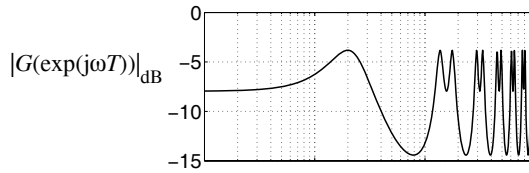


Abb. 12.7: Frequenzkennliniendiagramm, das auch den über der Abtastfrequenz liegenden Bereich zeigt

Was passiert, wenn man dieses Frequenzintervall überschreitet, zeigt Abb. 12.7. Im Amplitudengang wird periodisch der Verlauf für

$$-\frac{\omega_T}{2} \leq \omega \leq \frac{\omega_T}{2}$$

wiederholt, wobei die gedrängte Darstellung durch den logarithmischen Frequenzmaßstab hervorgerufen wird.

12.2.4 Pole und Nullstellen

Die Übertragungsfunktion (12.22)

$$G(z) = \frac{b_q z^q + b_{q-1} z^{q-1} + \dots + b_1 z^1 + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z^1 + a_0}$$

kann in Pol-Nullstellen-Form überführt werden, wenn man die Nullstellen z_{0i} von $G(z)$ als Nullstellen des Zählerpolynoms und die Pole z_i von $G(z)$ als Nullstellen des Nennerpolynoms berechnet. Dann erhält man

$$G(z) = k \frac{\prod_{i=1}^q (z - z_{0i})}{\prod_{i=1}^n (z - z_i)}. \quad (12.30)$$

Für Pole und Nullstellen gelten dieselben Aussagen wie bei kontinuierlichen Systemen:

- Die Pole von $G(z)$ sind Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ des Zustandsraummodells.
- Die Nullstellen von $G(z)$ sind Übertragungsnullstellen des Systems. Hat das Eingangssignal die durch eine Nullstelle vorgegebene Frequenz, so verschwindet das stationäre Verhalten, d. h., das Eingangssignal wird durch das System nicht übertragen.
- Wenn das System vollständig steuerbar und beobachtbar ist, dann stimmt die Menge der Pole von $G(z)$ mit der Menge der Eigenwerte von $\mathbf{A}$ überein. Andernfalls kürzen sich die zu den nicht steuerbaren oder nicht beobachtbaren Eigenwerten gehörenden Linearfaktoren in $G(z)$ heraus.

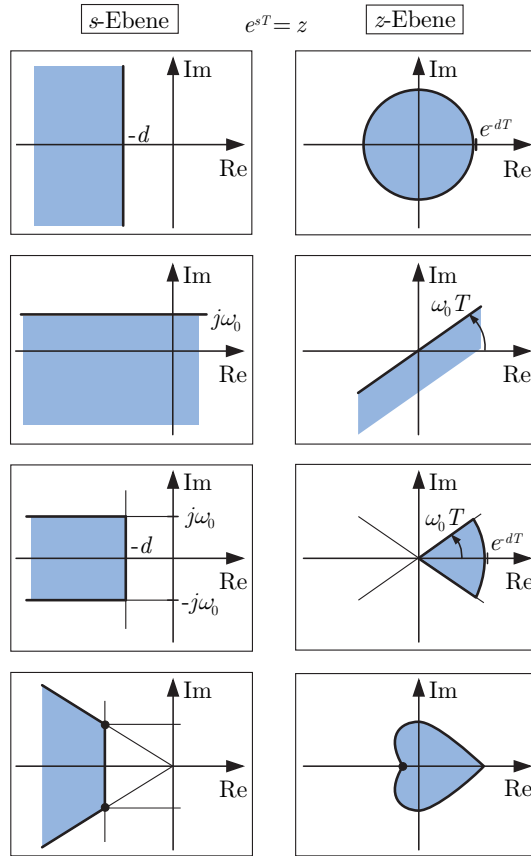
Der Zusammenhang zwischen den Polen der Übertragungsfunktion des kontinuierlichen Systems und den Polen der $\mathcal{Z}$ -Übertragungsfunktion ergibt sich aus Gl. (11.42):

$$z_i = e^{s_i T}. \quad (12.31)$$

Diese Beziehung beschreibt eine Abbildung der s -Ebene in die z -Ebene. Sie ist nicht eineindeutig, weil Werte von $s = \delta + j\omega$, deren Imaginärteile sich um ganzzahlige Vielfache der Abtastfrequenz ω_T unterscheiden, in dieselben Punkte der z -Ebene abgebildet werden. Der Grund dafür ist wiederum die Wirkung des Aliasing bei zu großer Abtastzeit. Wird mit hinreichend schneller Abtastung gearbeitet, so tritt die beschriebene Mehrdeutigkeit der Zuordnung in dem für das System maßgebenden Teil der komplexen Ebene nicht auf.

Die Beziehung (12.31) kann genutzt werden, um die Abhängigkeit des Übertragungsverhaltens des zeitdiskreten Systems von der Lage seiner Pole in der z -Ebene zu untersuchen. Da die Bedeutung der Lage der Pole s_i in der s -Ebene bekannt ist, muss man sich nur vorstellen, was mit diesen Polen beim Übergang zum zeitdiskreten System passiert. Für wichtige Pollagen ist dies in Abb. 12.8 veranschaulicht.

- Ein vorgegebener Stabilitätsgrad d liegt vor, wenn der Realteil aller Pole s_i kleiner als $-d$ ist. Das Abtastsystem mit demselben Stabilitätsgrad hat ausschließlich Pole, die in einem Kreis mit dem Radius $e^{-dT} < 1$ liegen.
- Die Begrenzung der Frequenz der Pole auf ω_0 bedeutet, dass die Pole einen kleineren Imaginärteil als $j\omega_0$ haben (und die konjugiert komplexen Pole einen größeren als $-j\omega_0$). Diese Pole führen beim zeitdiskreten System auf Pole, die unterhalb der in der zweiten Zeile von Abb. 12.8 gezeigten Geraden liegen.
- Die Kombination der ersten beiden Bedingungen betrifft Pole, die sowohl einen geforderten Stabilitätsgrad als auch eine Maximalfrequenz haben. Die Überlagerung der Bedingungen führt in der z -Ebene auf den Sektor eines Kreises.
- Fordert man neben einem Stabilitätsgrad auch eine bestimmte Mindestdämpfung, so liegen die Pole in der s -Ebene in dem in der letzten Zeile der Abb. 12.8 gezeigten Gebiet.

Abb. 12.8: Vergleich von s -Ebene und z -Ebene

Diese Betrachtungen sind nicht nur für die Bestimmung der Eigenschaften eines gegebenen Systems, sondern auch für die Wahl der Eigenwerte beim Reglerentwurf durch Polverschiebung maßgebend.

Beispiel 12.1 Pole mit vorgegebener Dämpfung

Die Lage zusammengehöriger Pole in der s - und z -Ebene wird in Abb. 12.9 für Pole mit einer vorgegebenen Dämpfung veranschaulicht. In der links gezeigten s -Ebene liegen die Pole auf einer Dämpfungsgeraden, die zur reellen Achse einen Winkel von 45 Grad hat. Diese Polen entsprechen im abgetasteten System den Polen, die auf der im rechten Teil der Abbildung dargestellten Kurve liegen.

Pole mit kleinerer Dämpfung liegen in der s -Ebene in dem von den beiden Geraden aufgespannten Sektor, während sie in der z -Ebene innerhalb der durch die Linie umrandeten Menge liegen. $\square$

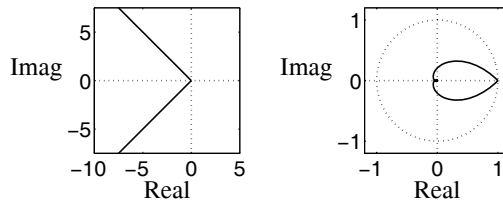


Abb. 12.9: Lage der Pole vorgegebener Dämpfung in der s - und der z -Ebene

Aufgabe 12.1* Berechnung der Übergangsmatrix

Die Übergangsmatrix $\Phi(k)$ erfüllt die Differenzengleichung

$$\Phi(k+1) = A\Phi(k), \quad \Phi(0) = I,$$

aus der man durch $\mathcal{Z}$ -Transformation unter Beachtung des Differenzensatzes (12.12) die Beziehung

$$z\Phi(z) - z\Phi(0) = A\Phi(z)$$

und daraus

$$\Phi(z) = z(zI - A)^{-1} = (I - \frac{1}{z}A)^{-1} \quad (12.32)$$

erhält. Berechnen Sie auf diesem Wege die Übergangsmatrizen $\Phi(k)$, die zu folgenden Systemmatrizen gehören:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \delta & \omega \\ -\omega & \delta \end{pmatrix}.$$

Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen aus Aufgabe I-6.16. $\square$

Aufgabe 12.2 Übertragungsfunktionen technisch realisierbarer Systeme

Die Übertragungsfunktionen technisch realisierbarer (kausaler) kontinuierlicher Systeme haben höchstens so viele Nullstellen wie Pole (vgl. Gl. (I-4.39)). Begründen Sie, dass diese Eigenschaft auch auf zeitdiskrete Systeme zutrifft, indem sie eine $\mathcal{Z}$ -Übertragungsfunktion betrachten, die mehr Nullstellen als Pole besitzt, und zeigen, dass man für die Berechnung der Ausgangsgröße $y(k)$ des zugehörigen Systems zukünftige Werte ($u(k+1)$, $u(k+2)$ usw.) der Eingangsgröße benötigt. $\square$

12.2.5 Übertragungsfunktion zusammengesetzter Übertragungsglieder

Für die Zusammenschaltung von Übertragungsgliedern gelten dieselben Regeln wie für kontinuierliche Systeme. Aus den Übertragungsfunktionen $G_1(z)$ und $G_2(z)$ kann die Übertragungsfunktion einer Reihen-, Parallel- und Rückführschaltung auf sehr einfache Weise gebildet werden:

$$\text{Reihenschaltung: } G_R(z) = G_1(z) G_2(z)$$

$$\text{Parallelschaltung: } G_P(z) = G_1(z) + G_2(z)$$

$$\text{Rückführschaltung: } G_F(z) = \frac{G_1(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)}.$$

Bei der Rückführschaltung wird angenommen, dass das Übertragungsglied $G_1(z)$ im Vorwärtszweig und das Übertragungsglied $G_2(z)$ in der Rückführung liegt und dass das System gegengekoppelt ist.

12.3 MATLAB-Funktionen für die Analyse zeitdiskreter Systeme im Frequenzbereich

Ähnlich wie kontinuierliche Systeme können zeitdiskrete Systeme im Frequenzbereich mit der Funktion `tf` definiert und mit der Funktion `tfdata` ausgelesen werden:

```
>> dSystem = tf(Z, N, T);
>> [Z, N, T] = tfdata(dSystem);
```

Z und N sind dabei zwei Felder mit den Koeffizienten der Elemente der Z -Übertragungsfunktion und T ist die Abtastzeit.

Die Namen der wichtigsten MATLAB-Funktionen für die Frequenzbereichsanalyse zeitdiskreter Systeme erhält man aus den entsprechenden Funktionsnamen für kontinuierliche Systeme durch das Davorsetzen des Buchstabens `d`. Die Funktionsaufrufe

```
>> dbode(Ad, Bd, Cd, Dd, T);
>> dbode(z, n, T)
```

erzeugen das Bodediagramm, wobei der erste Aufruf für Mehrgrößensysteme, der zweite nur für Eingrößensysteme mit der Übertragungsfunktion $G(z) = \frac{z}{n}$ möglich ist. Im ersten Aufruf müssen übrigens im Gegensatz zum Aufruf `bode(System)` für kontinuierliche Systeme die Matrizen einzeln angegeben werden. Mit den Funktionen

```
>> dnyquist(Ad, Bd, Cd, Dd, T);
>> dnyquist(z, n, T)
```

erhält man die Ortskurven grafisch dargestellt. Die Abtastzeit T muss in allen Fällen angegeben werden, denn in diesem Kapitel wurde gezeigt, dass sich die Berechnungsvorschriften für die zu erzeugenden Diagramme von denen kontinuierlicher Systeme unterscheiden und dass sie von der Abtastzeit abhängen.

Literaturhinweise

Ausführliche Erläuterungen zur Frequenzbereichsbetrachtung zeitdiskreter Systeme im Hinblick auf die Realisierung von Reglern sind in [29] und [54] zu finden.

13

Digitaler Regelkreis

Die Regelkreisstrukturen der digitalen Regelung unterscheiden sich nicht von denen der kontinuierlichen Regelung. Da auch ihre mathematische Beschreibung der der kontinuierlichen Regelung sehr ähnlich ist, können die wichtigsten Aussagen über die Regelkreiseigenschaften und Analysemethoden direkt übernommen werden. Das Kapitel stellt diese Ergebnisse zusammen.

13.1 Regelkreisstrukturen

Die Regelstrecke wird durch ein Zustandsraummodell

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{E}\mathbf{d}(k), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (13.1)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (13.2)$$

oder durch ein E/A-Modell im Frequenzbereich

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{G}(z)\mathbf{U}(z) + \mathbf{G}_{\text{yd}}(z)\mathbf{D}(z) \quad (13.3)$$

beschrieben. Als wichtigste Reglerstrukturen kommen die von der kontinuierlichen Regelung bekannten in Frage:

- **PID-Regler:**

$$\begin{aligned} K_{\text{PID}}(z) &= k_P + \frac{k_I(z+1)}{z-1} + k_D(z-1) \\ &= k_P \left(1 + \frac{z+1}{T_I(z-1)} + (z-1)T_D \right) \end{aligned} \quad (13.4)$$

- **PI-Regler:**

$$\mathbf{x}_r(k+1) = \mathbf{x}_r(k) + \mathbf{y}(k) - \mathbf{w}(k), \quad \mathbf{x}_r(0) = \mathbf{x}_{r0} \quad (13.5)$$

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}_I \mathbf{x}_r(k) - \mathbf{K}_P (\mathbf{y}(k) - \mathbf{w}(k)) \quad (13.6)$$

bzw.

$$K_{\text{PI}}(z) = k_P + \frac{k_I(z+1)}{z-1} \quad (13.7)$$

- **Zustandsrückführung:**

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K} \mathbf{x}(k) + \mathbf{V} \mathbf{w}(k) \quad (13.8)$$

- **Ausgangsrückführung:**

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}_y \mathbf{y}(k) + \mathbf{V} \mathbf{w}(k). \quad (13.9)$$

Auch die vor allem bei einschleifigen Regelkreisen eingesetzten Korrekturglieder können für die zeitdiskrete Regelung verwendet werden. Bei diesen Korrekturgliedern wie beim I-Anteil des PI-Reglers muss jedoch darauf geachtet werden, dass die dynamischen Reglerelemente in der richtigen Weise in zeitdiskrete Elemente übertragen werden. So führt die Integration auf die Zustandsgleichung (13.5) bzw. die Frequenzbereichsdarstellung (13.7), in der $\frac{z}{z-1}$ anstelle von s steht. Einzelheiten hierzu werden im Abschn. 14.2.1 behandelt.

I-erweiterte Regelstrecke. Zur Vereinfachung des Entwurfes wird auch bei zeitdiskreten Systemen der I-Anteil (13.5) eines PI-Reglers häufig zur Regelstrecke (13.1), (13.2) hinzugerechnet, wodurch die I-erweiterte Regelstrecke entsteht:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{x}_r(k+1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}_r(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} \mathbf{u}(k) + \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} \mathbf{d}(k) + \\ &\quad + \begin{pmatrix} \mathbf{O} \\ -\mathbf{I} \end{pmatrix} \mathbf{w}(k) \end{aligned} \quad (13.10)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{x}_r(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_{r0} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}(k) = (\mathbf{C} \quad \mathbf{O}) \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}_r(k) \end{pmatrix} \quad (13.11)$$

$$\begin{pmatrix} -e(k) \\ x_r(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & O \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ x_r(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -I \\ O \end{pmatrix} w(k). \quad (13.12)$$

Regelkreiseigenschaften. Im Kap. 4 wurden eine Reihe von Eigenschaften untersucht, die der Regelkreis aufgrund der gewählten Regelungsstruktur, aber weitgehend unabhängig von den verwendeten Reglerparametern besitzt. Diese Eigenschaften lassen sich ohne Veränderung auf das zeitdiskrete System übertragen. An die wichtigsten sei in der folgenden Zusammenstellung erinnert:

- Sämtliche Nullstellen der Regelstrecke bezüglich des Stelleinganges erscheinen im Führungsverhalten des Regelkreises, Nullstellen bezüglich des Störeinganges im Störverhalten. Durch den Regler können zusätzliche Nullstellen in den Regelkreis gebracht werden.
- Eigenwerte der Regelstrecke sind durch den Regler frei verschiebbar, wenn sie steuerbar und beobachtbar sind.
- Ausgangsrückführungen ändern nichts an der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit der Eigenvorgänge.
- Zustandsrückführungen ändern nichts an der Steuerbarkeit, beeinflussen jedoch die Beobachtbarkeit von Eigenvorgängen.

Wahl der Regelungsstruktur. Für die Wahl der Regelungsstruktur gelten die im Abschn. 4.5 angegebenen Richtlinien. Es können dieselben Kopplungsmaße wie bei kontinuierlichen Systemen verwendet werden.

13.2 Stabilitätsprüfung digitaler Regelkreise

13.2.1 Stabilitätsprüfung anhand der Pole des geschlossenen Kreises

Die Stabilitätskriterien für kontinuierliche Regelkreise können mit geringen Modifikationen auf Abtastsysteme übertragen werden. Von besonderem Interesse sind auch hier Prüfverfahren, bei denen die Stabilität des geschlossenen Kreises anhand der offenen Kette untersucht wird.

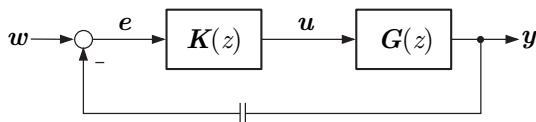


Abb. 13.1: Digitaler Regelkreis

Wenn der Regelkreis aus der Regelstrecke mit der Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(z)$ und dem Regler $\mathbf{K}(z)$ besteht (Abb. 13.1), so kann die charakteristische Gleichung anhand der Übertragungsfunktionsmatrix der offenen Kette

$$\mathbf{G}_0(z) = \mathbf{G}(z)\mathbf{K}(z)$$

gebildet werden:

Charakteristische Gleichung des Regelkreises: $\det(\mathbf{I} + \mathbf{G}_0(z)) = 0.$

 (13.13)

Die Lösungen z_i dieser Gleichung sind die Pole des Regelkreises. Der geschlossene Kreis ist genau dann E/A-stabil, wenn alle Pole betragsmäßig kleiner als eins sind:

$$|z_i| < 1 \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (13.14)$$

13.2.2 Nyquistkriterium

Das Nyquistkriterium kann von kontinuierlichen Systemen auf zeitdiskrete Systeme übertragen werden, wenn man die Nyquistkurve ändert. Jetzt muss nachgewiesen werden, dass kein Pol des geschlossenen Kreises außerhalb des Einheitskreises liegt. Man muss deshalb untersuchen, wie sich die Determinante der Rückführdifferenzmatrix

$$\mathbf{F}(z) = \mathbf{I} + \mathbf{G}_0(z) \quad (13.15)$$

für z entlang der in Abb. 13.2 gezeigten Kurve verhält. Der äußere Kreis ist so groß gewählt, dass er alle außerhalb des Einheitskreises liegenden Pole der offenen Kette und des Regelkreises umschließt. Der innere Teil der Kurve verläuft auf dem Einheitskreis.

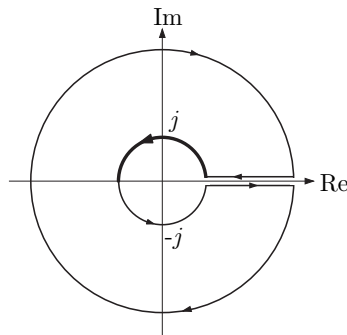


Abb. 13.2: Nyquistkurve für zeitdiskrete Systeme

Da wie bei kontinuierlichen Systemen davon ausgegangen wird, dass die offene Kette nicht sprunghaft ist, gilt für alle z auf dem äußeren Kreis

$$\det \mathbf{F}(z) = 1.$$

Der äußere Kreis muss deshalb nicht weiter betrachtet werden.

Eine weitere Vereinfachung der Betrachtung ergibt sich, weil die Abbildung der oberen, in der Zeichnung hervorgehobenen Hälfte des Einheitskreises symmetrisch ist zur Abbildung der unteren Hälfte. Es muss deshalb nur der hervorgehobene Halbkreis betrachtet werden, der durch

$$z = e^{j\phi} \quad \text{mit } 0 \leq \phi \leq \pi$$

beschrieben ist.

In Analogie zu Satz 4.2 heißt das Nyquistkriterium für zeitdiskrete Mehrgrößensysteme folgendermaßen:

Satz 13.1 (Nyquistkriterium für zeitdiskrete Systeme)

Eine offene Kette mit der Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}_0(z)$ führt genau dann auf einen E/A-stabilen Regelkreis, wenn

$$\Delta \arg \det \mathbf{F}(z) = -2n^+ \pi$$

gilt, d. h., wenn die Abbildung $\det \mathbf{F}(z) = \det(\mathbf{I} + \mathbf{G}_0(z))$ der Nyquistkurve für zeitdiskrete Systeme den Ursprung der komplexen Ebene $-n^+$ -mal im Uhrzeigersinn umschließt. Dabei bezeichnet n^+ die Zahl der Pole von $\mathbf{G}_0(z)$, die betragsmäßig größer als eins sind.

Es gelten dieselben Folgerungen wie bei kontinuierlichen Systemen:

- Wenn die offene Kette stabil ist, so ist der Regelkreis genau dann stabil, wenn $\det \mathbf{F}(z)$ den Ursprung der komplexen Ebene nicht umschlingt.
- Hat der Regelkreis nur eine Regelgröße, so dass $G_0(z)$ eine skalare Übertragungsfunktion ist, und ist die offene Kette stabil, so erhält man genau dann einen stabilen Regelkreis, wenn die Ortskurve von $G_0(e^{j\phi})$ für $0 \leq \phi \leq \pi$ den kritischen Punkt -1 nicht umschlingt.

Beispiel 13.1 Stabilitätsanalyse mit dem Nyquistkriterium

Das System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} -0,8 & 2 \\ -2 & -0,8 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= (1 \quad 1) \mathbf{x}(t) + 0,3 u(t) \end{aligned}$$

führt zu einem stabilen Regelkreis, wenn die Einheitsrückführung

$$u(t) = -y(t) + w(t)$$

angewendet wird. Es soll untersucht werden, ob der Regelkreis auch bei zeitdiskreter Realisierung des Reglers entsprechend

$$u(k) = -y(k) + w(k)$$

mit der Abtastzeit $T = 0,4$ stabil ist.

Für die betrachtete Abtastzeit erhält man das zeitdiskrete Modell

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{pmatrix} 0,506 & 0,521 \\ -0,521 & 0,506 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{pmatrix} 0,866 \\ 0,374 \end{pmatrix} u(k) \\ y(k) &= (1 \quad 1) \mathbf{x}(k) + 0,6 u(k). \end{aligned}$$

Für die Stabilitätsprüfung gibt es mehrere Wege. Erstens kann man das Zustandsraummodell des geschlossenen Kreises aufstellen, wofür man mit Hilfe der Ausgabegleichung zunächst

$$u(k) = -(0,769 \quad 0,769) \mathbf{x}(k) + 0,769 w(k)$$

für die Rückführung und aus der Zustandsgleichung dann für $w = 0$ das Modell

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{pmatrix} 0,160 & -0,145 \\ -0,808 & 0,219 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k)$$

erhält. Die Eigenwerte der Systemmatrix des geschlossenen Kreises haben die Werte

$$-0,362 \quad \text{und} \quad 0,4207.$$

Sie sind beide betragsmäßig kleiner als eins, woraus die Zustandsstabilität des Regelkreises folgt.

Zweitens kann man die Übertragungsfunktion der offenen Kette aufstellen

$$G(z) = \frac{0,6z^2 + 0,632z - 0,567}{z^2 - 1,01z + 0,527}$$

und aus der charakteristischen Gleichung (13.13) die Pole des Regelkreises ausrechnen. Dabei erhält man die Pole

$$z_1 = -0,362 \quad \text{und} \quad z_2 = 0,4207,$$

die mit den Eigenwerten der Systemmatrix des geschlossenen Kreises übereinstimmen und die E/A-Stabilität des Regelkreises erkennen lassen.

Der dritte Weg führt über das Nyquistkriterium, wofür die Ortskurve der Übertragungsfunktion für die in der Nyquistkurve gezeigten Frequenzen aufgezeichnet wird. Abbildung 13.3 (links) zeigt das Ergebnis. Da die offene Kette stabil ist und die Ortskurve den kritischen Punkt -1 nicht umschlingt, ist der Regelkreis stabil.

Diskussion. Obwohl das Nyquistkriterium für kontinuierliche und zeitdiskrete Systeme den gleichen Wortlaut hat, sind die Ergebnisse, die für ein gegebenes System erhalten werden, durchaus unterschiedlich. Dies erkennt man daran, dass die für den kontinuierlichen Regelkreis entstehende Ortskurve von $G_0(j\omega)$ nicht mit der für das Abtastsystem erhaltenen Ortskurve übereinstimmt. Um dies zu illustrieren, ist in Abb. 13.3 rechts die Ortskurve des kontinuierlichen Beispielsystems aufgetragen. Offensichtlich liegt die zeitdiskrete Ortskurve weiter links, also näher am kritischen Punkt -1 .

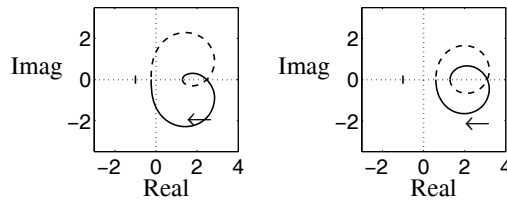


Abb. 13.3: Ortskurve des zeitdiskreten Systems (links) und des kontinuierlichen Systems (rechts)

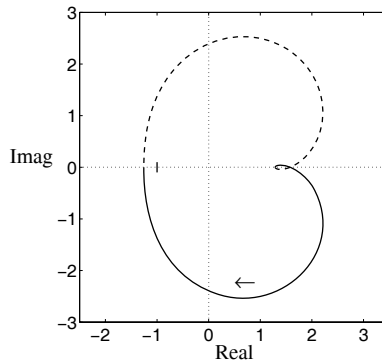


Abb. 13.4: Ortskurve bei verdoppelter Abtastzeit

Bekanntlich kann ein stabiles System zweiter Ordnung durch eine proportionale, kontinuierliche Rückführung nicht instabil gemacht werden, wenn Strecke und Regler wie in diesem Beispiel gegengekoppelt sind. Mit einer zeitdiskreten Regelung ist dies jedoch möglich. Ändert man für das hier betrachtete Beispiel die Abtastzeit, beispielsweise auf $T = 0,8$, so verändert sich die Ortskurve des zeitdiskreten Systems. Abbildung 13.4 zeigt, dass der geschlossene Kreis durch die Vergrößerung der Abtastzeit instabil wird. Rechnet man aus der charakteristischen Gleichung die Pole aus, so erhält man

$$z_1 = -1,451 \quad \text{und} \quad z_2 = 0,1828.$$

Das System zweiter Ordnung führt mit einem zeitdiskreten proportionalen Regler zu einem instabilen Regelkreis. $\square$

Die im Beispiel erhaltene Aussage, dass aus einem stabilen kontinuierlichen Regelkreis durch eine zeitdiskrete Realisierung möglicherweise ein instabiler Kreis entsteht, gilt allgemein:

|| Für die Stabilität des zeitdiskreten Regelkreises ist notwendig, aber nicht hinreichend, dass der kontinuierliche Regelkreis stabil ist.

Diese Aussage kann man sich plausibel machen, wenn man den Abtaster und das Halteglied für eine kontinuierliche Betrachtung des Regelkreises näherungsweise durch ein Totzeitglied mit der Totzeit $T_t = \frac{T}{2}$ ersetzt. Dieses Totzeitglied bringt eine zusätzliche Phasenverschiebung mit sich, die die Stabilität des kontinuierlichen Regelkreises zerstören kann. Abbildung 13.5 zeigt diesen Sachverhalt für das System aus Beispiel 13.1. Die Ortskurve umschlingt jetzt den kritischen Punkt -1 , erfüllt also die Forderungen des Nyquistkriteriums für den stabilen Regelkreis nicht mehr. Während der kontinuierliche Regelkreis stabil ist, ist der zeitdiskrete Regelkreis instabil.

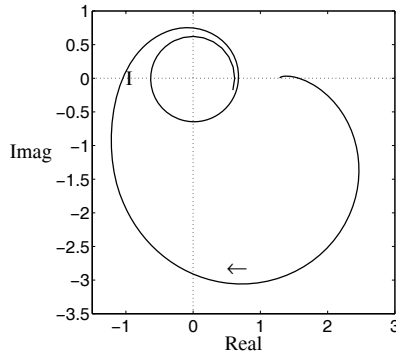


Abb. 13.5: Ortskurve der kontinuierlichen offenen Kette mit Totzeitglied zur Approximation der Wirkungen von Abtaster und Halteglied

Weiterführende Fragestellungen wie beispielsweise die Stabilitätsanalyse bei kleiner Kreisverstärkung oder die Analyse der robusten Stabilität können mit denselben Verfahren behandelt werden wie bei kontinuierlichen Systemen.

13.3 Stationäres Verhalten digitaler Regelkreise

Die Forderung nach Sollwertfolge

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (w(k) - y(k)) = 0 \quad (13.16)$$

kann auch beim zeitdiskreten Regelkreis nur dann erfüllt werden, wenn der Regelkreis entsprechend dem Inneren-Modell-Prinzip ein Modell der auf ihn einwirkenden Führungs- und Störsignale besitzt. Die vom kontinuierlichen Regelkreis bekannte Vorgehensweise kann auch hier übernommen werden:

- Die Klassen der betrachteten Führungs- und Störsignale werden durch ein Führungsgrößenmodell bzw. ein Störgrößenmodell beschrieben. Durch den Regler

soll die Forderung (13.16) für diese Signalklassen erfüllt werden.

- Um die Sollwertfolge zu sichern, muss im Regelkreis ein inneres Modell der Führungs- und Störgrößen enthalten sein. Der Regler setzt sich deshalb aus einem Servokompensator, der dieses Modell repräsentiert, sowie aus einem stabilisierenden Kompensator zusammen, mit Hilfe dessen die Stabilität des Regelkreises gesichert werden muss.
- Besitzt der Regelkreis ein inneres Modell, so wird die Sollwertfolge mit großer Robustheit erfüllt, nämlich solange, wie die Parameteränderungen der Regelstrecke die Stabilität des Regelkreises nicht gefährden.
- Werden sprungförmige Führungs- und Störsignale betrachtet, so besteht das innere Modell aus einem Integrator, der für jede Regelgröße im Regelkreis vorkommen muss.
- Für sprungförmige Führungs- und Störsignale kann die Sollwertfolge auch mit Hilfe eines Vorfilters und einer Störgrößenaufschaltung realisiert werden. Diese Lösung ist jedoch nicht robust gegenüber Änderungen der Regelstrecke. Sie setzt die Messbarkeit der Störung voraus.

Aufgabe 13.1 Zustandsraummodell eines PI-Regelkreises

Die Regelstrecke

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k) \\ y(k) &= \mathbf{c}'\mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

wird durch den PI-Regler mit der diskreten Übertragungsfunktion

$$K_{PI}(z) = k_P \left(1 + \frac{T}{2T_I} \frac{z+1}{z-1} \right)$$

geregelt.

1. Stellen Sie das Zustandsraummodell des PI-Reglers auf.
2. Zeichnen Sie das Blockschaltbild des Regelkreises.
3. Bestimmen Sie das Zustandsraummodell des geschlossenen Kreises.
4. Zeigen Sie, dass der stabile Regelkreis für sprungförmige Führungsgrößen keine bleibende Regelabweichung besitzt. $\square$

14

Entwurf von Abtastreglern

Für den Entwurf von Abtastreglern gibt es zwei Wege, die in diesem Kapitel behandelt werden. Ist die Abtastzeit sehr klein im Vergleich zu den maßgebenden Zeitkonstanten des Regelkreises, so kann der Regler als kontinuierlicher Regler entworfen und dann als zeitdiskreter Regler realisiert werden. Andererseits gibt es Verfahren zum Entwurf zeitdiskreter Regler für die durch ein zeitdiskretes Modell dargestellte Regelstrecke. Der Entwurf verläuft nach denselben Methoden wie bei kontinuierlichen Reglern. Eine Sonderstellung nimmt der Regler mit endlicher Einstellzeit ein.

14.1 Entwurfsvorgehen

Für den Entwurf von Abtastreglern gibt es zwei Wege. Der erste Weg geht vom Umstand aus, dass eine gegebene Regelungsaufgabe am besten mit einem kontinuierlichen Regler gelöst werden kann, weil dieser Regler schnellstmöglich auf Regelabweichungen reagieren kann. Die Abtastung wird nur eingeführt, um das erhaltene Reglergesetz mit Hilfe eines Rechners realisieren zu können. Wählt man dabei eine sehr kurze Abtastzeit, so ist der Abtastregler eine gute Approximation des kontinuierlichen Reglers, den man realisieren will. Deshalb entwirft man zunächst einen kontinuierlichen Regler mit Hilfe eines kontinuierlichen Modells der Regelstrecke und geht bei der Realisierung zu einem zeitdiskreten Regler über. Der Entwurf selbst erfolgt mit Methoden, die in diesem Buch für kontinuierliche Systeme ausführlich erläutert wurden.

Dieses Vorgehen ist problemlos möglich, wenn die Abtastzeit klein genug ist, also beispielsweise die Ungleichung

$$\omega_T = \frac{2\pi}{T} \geq 30 \omega_{Gr}$$

erfüllt, wobei ω_{Gr} die Grenzfrequenz des Regelkreises darstellt. Abgesehen davon, dass der Regler mit Hilfe bekannter Methoden für kontinuierliche Systeme entworfen werden kann, hat dieses Vorgehen den Vorteil, dass man bei der Betrachtung des kontinuierlichen Regelkreises erfährt, welche Regelgüte prinzipiell mit einer linearen Regelung erreicht werden kann. Im Folgenden wird auf diesen Entwurfsweg zeitdiskreter Regler eingegangen. Als wichtigstes Problem wird dabei untersucht, auf welche Weise kontinuierliche Reglergesetze durch zeitdiskrete Reglergesetze approximiert werden können.

Ein häufig auftretender Mangel dieses Entwurfsvorgehens besteht darin, dass der entstehende digitale Regelkreis zu wenig gedämpft ist, obwohl der kontinuierliche Kreis die Güteforderungen erfüllt. Der Grund dafür ist die zusätzliche Phasenverschiebung, die durch den Abtaster und das Halteglied in den Regelkreis hineingebracht wird. Die genannte Phasenverschiebung kann man durch Einfügen eines differenzierenden Korrekturgliedes, das die Phase wieder anhebt, ausgleichen. Dieses Vorgehen ist jedoch auf kleine Abtastzeiten begrenzt.

Für größere Abtastzeiten oder wenn von vornherein ein zeitdiskretes Streckenmodell vorliegt, wird der Regler direkt als Abtastregler entworfen („direkter Entwurf“). Dieser zweite Entwurfsweg geht davon aus, dass beim Entwurf des Reglers der zeitdiskrete Charakter der Regelung berücksichtigt werden muss, damit das mit einem Abtastregler bestmögliche Ergebnis gefunden werden kann. Auf diesen Entwurfsweg wird im Abschn. 14.3 eingegangen.

14.2 Zeitdiskrete Realisierung kontinuierlicher Regler

14.2.1 Approximation kontinuierlicher Regler durch Verwendung von Methoden der numerischen Integration

Proportionale Eingrößenregler

$$u(t) = -k_P (y(t) - w(t))$$

oder Zustandsrückführungen

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$$

können als zeitdiskrete Regler aufgefasst und mit den durch k_P bzw. $\mathbf{K}$ gegebenen Parametern realisiert werden, denn aus den angegebenen Gleichungen folgen für die zeitdiskrete Realisierung die Beziehungen

$$u(k) = -k_P (y(k) - w(k))$$

bzw.

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k).$$

Diese einfache Ersetzung des kontinuierlichen durch einen zeitdiskreten Regler bedeutet jedoch nicht, dass die Regelkreiseigenschaften dabei unverändert bleiben. Welche Probleme auftreten können, wurde z. B. in Aufgabe 11.12 und Beispiel 13.1 behandelt, wobei dieses Ersetzen von einem stabilen kontinuierlichen zu einem instabilen zeitdiskreten Regelkreis führte.

Problematischer wird der Übergang vom kontinuierlichen zum Abtastregler, wenn das Reglergesetz eine eigene Dynamik enthält. Der Hauptgedanke der Approximation besteht dann darin, Differenziationen und Integrationen durch Differenzenbildung bzw. Summation zu ersetzen, wobei die aus der numerischen Mathematik bekannten Methoden verwendet werden.

Approximation des Differenzialquotienten durch den Differenzenquotienten. Treten im Reglergesetz Differenziationen auf, wie es beispielsweise beim D-Anteil eines Reglers

$$u(t) = k_D \dot{e}(t)$$

der Fall ist, so ersetzt man im zeitdiskreten Regler den Differenzialquotienten

$$\dot{e}(t) = \frac{de}{dt}$$

durch den Differenzenquotienten

$$\Delta e(k) = \frac{e(k) - e(k-1)}{T}.$$

Da zum Abtastzeitpunkt k nur $e(k)$ und $e(k-1)$ bekannt sind, ist dieses Vorgehen (fast) das beste, was man auf Grund der vorhandenen Messinformationen machen kann. Auf den Frequenzbereich übertragen heißt das, dass die Übertragungsfunktion

$$K(s) = k_D s$$

durch die Z -Übertragungsfunktion

$$K(z) = k_D \frac{1 - z^{-1}}{T} = \frac{k_D}{T} \frac{z - 1}{z}$$

ersetzt wird.

Bemerkenswert ist, dass der Parameter des zeitdiskreten Reglers von der Abtastzeit abhängt. Dieser Parameter muss also verändert werden, wenn man bei der Inbetriebnahme des Reglers die Abtastzeit variiert!

Die Wirkung des zeitdiskreten Reglers unterscheidet sich von der des kontinuierlichen. Der kontinuierliche Regler bringt eine positive Phasenverschiebung mit sich und wirkt deshalb bei vielen Regelstrecken stabilisierend. Demgegenüber bewirkt

der zeitdiskrete Regler eine Phasennacheilung, denn er hat einen Pol bei null. Der Grund liegt in der Tatsache, dass der Regler einen Takt „warten“ muss, bevor er die Differenzenbildung ausführen kann.

Der diskrete D-Regler ist technisch realisierbar, weil bei der Bildung des Reglergesetzes auf die tatsächlich verfügbaren Informationen Rücksicht genommen wird. Der kontinuierliche D-Regler in der o.a. Form ist demgegenüber nicht realisierbar. Seine Realisierung bringt weitere Pole mit sich, die nicht im Reglergesetz zu sehen sind, aber bei der praktischen Anwendung auftreten.

Approximation der Integration. Für die zeitdiskrete Realisierung des I-Anteiles eines Reglers

$$u(t) = \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau$$

können die Verfahren der numerischen Integration eingesetzt werden. Verwendet man die Rechteckregel, wobei die Rechtecke mit der jeweils „rechten“ Stützstelle gebildet werden, so berechnet sich die Stellgröße nach der Formel

$$u(kT) = \frac{T}{T_I} \sum_{i=1}^k e(iT),$$

die in

$$u(k) = u(k-1) + \frac{T}{T_I} e(k)$$

umgeformt werden kann. In den Frequenzbereich transformiert erhält man die Beziehung

$$(1 - z^{-1})U(z) = \frac{T}{T_I} E(z)$$

und für den I-Regler folglich die $\mathcal{Z}$ -Übertragungsfunktion

$$K_I(z) = \frac{T}{T_I} \frac{z}{z-1}.$$

Vergleicht man diese Übertragungsfunktion mit der des kontinuierlichen I-Reglers

$$K_I(s) = \frac{1}{T_I s}$$

so sieht man, dass der Ausdruck $\frac{1}{s}$ durch $T \frac{z}{z-1}$ ersetzt wurde, wie es (abgesehen von der Multiplikation mit T) auch die Korrespondenztabelle im Anhang 7 nahelegt.

Verwendet man die Trapezregel

$$u(kT) = \frac{T}{T_I} \left(\frac{e(0)}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} e(iT) + \frac{e(kT)}{2} \right),$$

so kann das Reglergesetz rekursiv in der Form

$$u(k) = u(k-1) + \frac{T}{2T_I} (e(k-1) + e(k))$$

dargestellt werden, was für den Regler auf die $\mathcal{Z}$ -Übertragungsfunktion

$$K(z) = \frac{T}{2T_I} \frac{z+1}{z-1}$$

führt. Hier ist im Vergleich zum kontinuierlichen Regler der Ausdruck $\frac{1}{s}$ durch $\frac{T}{2} \frac{(z+1)}{z-1}$ ersetzt. In dieser Form wird der I-Regler im Folgenden verwendet.

Bei beiden Formen des I-Reglers ist der Reglerparameter von der Abtastzeit T abhängig.

Approximation allgemeiner dynamischer Reglergesetze. Bei der zweiten für den I-Anteil angegebenen Approximation wurde die komplexe Frequenz s in der Übertragungsfunktion durch den Ausdruck $\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$ ersetzt, um auf die $\mathcal{Z}$ -Übertragungsfunktion zu kommen. Diese Vorgehensweise lässt sich auf beliebige Reglergesetze anwenden. Man ersetzt in der Übertragungsfunktion $K(s)$ die komplexe Frequenz s durch den angegebenen Ausdruck

$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

und erhält damit eine zeitdiskrete Approximation $\hat{K}(z)$.

Um die Eigenschaften dieser Approximation zu erkennen, stellt man die angegebene Gleichung nach z um:

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s}.$$

Diese Beziehung zeigt, dass die linke komplexe s -Ebene in den Einheitskreis der komplexen z -Ebene abgebildet wird. Das heißt, aus stabilen Eigenwerten des kontinuierlichen Reglers werden stabile Eigenwerte des zeitdiskreten Reglers. Die angegebene Approximation ist also auch aus der Sicht der Stabilitätseigenschaften des Reglers zweckmäßig. Damit ist jedoch nicht gesichert, dass auch der Regelkreis seine Stabilitätseigenschaften beibehält!

Die hier angegebene Approximation ist nicht die einzig mögliche. Wenn man beispielsweise die Integration mit Hilfe der Rechteckregel approximiert oder die oben angegebene Approximation des Differenzialquotienten verwendet, so erhält man andere Ersetzungsregeln für s durch z . Beispielsweise wurde im Zusammenhang mit der Stabilitätsanalyse die Transformation (11.88) verwendet, die wie die hier angegebene die linke s -Halbebene in den z -Einheitskreis abbildet und umgekehrt.

Zeitdiskrete PID-Regler. Mit den angegebenen Approximationen kann der PID-Regler

$$u(t) = k_P \left(e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + k_D \dot{e}(t) \right)$$

in einen zeitdiskreten Regler überführt werden. Man muss nur die drei Summanden einzeln in der angegebenen Weise behandeln:

$$\text{P-Anteil: } K_P(s) = k_P \mapsto K_P(z) = k_P$$

$$\text{I-Anteil: } K_I(s) = \frac{1}{T_I s} \mapsto K_I(z) = \frac{T}{2T_I} \frac{z+1}{z-1}$$

$$\text{D-Anteil: } K_D(s) = k_D s \mapsto K_D(z) = \frac{k_D}{T} \frac{z-1}{z}.$$

Zusammengefasst erhält man dann für den PID-Regler die zeitdiskrete Approximation

$$U(z) = k_P \left(1 + \frac{T}{2T_I} \frac{z+1}{z-1} + \frac{k_D}{T} \frac{z-1}{z} \right) E(z). \quad (14.1)$$

Der Regler hat also eine $\mathcal{Z}$ -Übertragungsfunktion zweiter Ordnung

$$K_{\text{PID}}(z) = \frac{c_2 z^2 + c_1 z + c_0}{z(z-1)} \quad (14.2)$$

mit

$$c_2 = k_P + \frac{k_P T}{2T_I} + \frac{k_P k_D}{T} \quad (14.3)$$

$$c_1 = -k_P + \frac{k_P T}{2T_I} - \frac{2k_P k_D}{T} \quad (14.4)$$

$$c_0 = \frac{k_P k_D}{T}. \quad (14.5)$$

Für die Realisierung wird die zu der angegebenen Übertragungsfunktion gehörige Differenzengleichung aufgestellt

$$u(k+2) - u(k+1) = c_2 e(k+2) + c_1 e(k+1) + c_0 e(k),$$

nach $u(k+2)$ umgestellt und durch Zeitverschiebung auf $u(k)$ umgerechnet. Dabei erhält man

$$u(k) = u(k-2) + c_2 e(k) + c_1 e(k-1) + c_0 e(k-2).$$

In dieser Darstellung wird aus gegebenen Werten für die Regelabweichung und einem „alten“ Wert der Stellgröße die Stellgröße zum aktuellen Zeitpunkt k berechnet. Diese Berechnungsvorschrift für $u(k)$ wird deshalb als *Stellungsalgorithmus* oder *Positionsalgorithmus* bezeichnet. Eine andere gebräuchliche Darstellung des PID-Reglers erhält man durch Übergang zur Differenz

$$\begin{aligned} \Delta u(k) &= u(k) - u(k-1) \\ &= c_2 e(k) + c_1 e(k-1) + c_0 e(k-2). \end{aligned}$$

Diese Darstellung nennt man *Geschwindigkeitsalgorithmus*. Sie wird bei integral-wirkenden Stellgliedern verwendet, beispielsweise, wenn ein Stellventil über einen Stellmotor angesteuert wird.

Beispiel 14.1 Zeitdiskrete Realisierung einer Drehzahlregelung

Im Beispiel I-11.2 wurde der PI-Regler

$$K(s) = k_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right) \quad \text{mit} \quad k_P = 0,4, \quad T_I = 0,0777 \text{ s}$$

entworfen. Jetzt wird die diskrete Realisierung dieses Reglers untersucht.

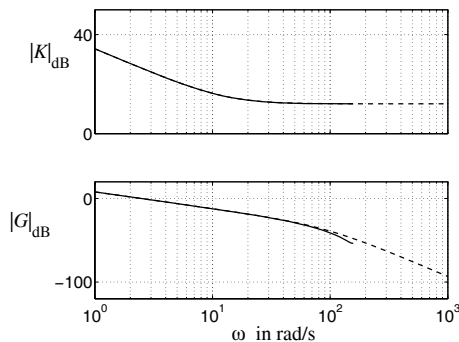


Abb. 14.1: Bodediagramm des kontinuierlichen und des zeitdiskreten Reglers bei $T = 0,02 \text{ s}$

Bei einer Abtastzeit von $T = 0,02 \text{ s}$ erhält man aus Gl. (14.2) einen zeitdiskreten PI-Regler

$$K(z) = k_P \left(1 + \frac{T}{2T_I} \frac{z+1}{z-1} \right) = \frac{4,51z - 3,49}{z - 1}.$$

Die Frequenzkennlinien beider Regler sind in Abb. 14.1 (oben) dargestellt, wobei die gestrichelte Linie zum kontinuierlichen Regler gehört. Beide Kurven liegen fast vollständig übereinander, was auch auf den im unteren Teil der Abbildung dargestellten Amplitudengang der zugehörigen offenen Ketten zutrifft. Die durchgezogenen Linien für die zeitdiskreten Systeme endet bei $\frac{\omega_T}{2} = 157 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Aufgrund der guten Übereinstimmung des Verhaltens beider Regler stimmt das Führungsverhalten des kontinuierlichen und des zeitdiskreten Regelkreises sehr gut überein (Abb. 14.2).

Bei einer Vergrößerung der Abtastzeit werden die Unterschiede größer. Für $T = 0,2 \text{ s}$ sind die Ergebnisse in den Abb. 14.3 und 14.4 dargestellt. Der zeitdiskrete Regler ist nur eine grobe Näherung des kontinuierlichen Reglers, denn der dargestellte Teil des Amplitudenganges erreicht gar nicht die Nullstelle des kontinuierlichen Reglers und gibt deshalb den charakteristischen „Knick“ des Amplitudenganges von PI-Reglern nicht wieder. Dementsprechend verschlechtert sich das Führungsverhalten des Regelkreises. □

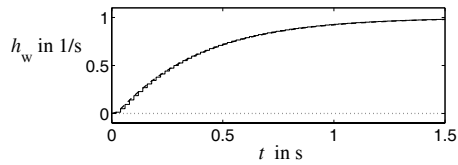


Abb. 14.2: Führungsübergangsfunktion des drehzahlgeregelten Gleichstrommotors mit der Abtastzeit $T = 0,02$ s

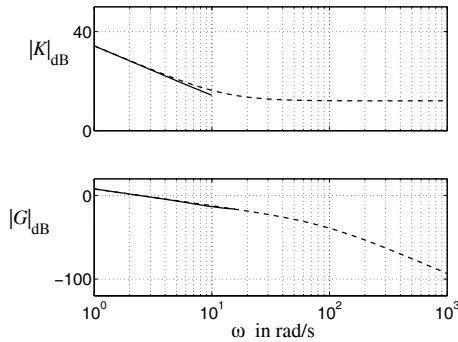


Abb. 14.3: Bodediagramm des kontinuierlichen und des zeitdiskreten Reglers mit der Abtastzeit $T = 0,2$ s

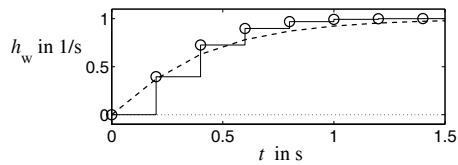


Abb. 14.4: Führungsübergangsfunktion des drehzahlgeregelten Gleichstrommotors mit der Abtastzeit $T = 0,2$ s

Aufgabe 14.1* *Approximation kontinuierlicher Regler mit der Rechteckregel*

Ein kontinuierliches Reglergesetz soll mit Hilfe der Rechteckregel der numerischen Integration in ein zeitdiskretes Reglergesetz überführt werden.

1. Welches Reglergesetz erhält man dabei für einen I-Regler?
2. Wie heißt die allgemeine Beziehung, mit der man die komplexe Frequenz s in der Übertragungsfunktion eines Reglers ersetzen muss, um auf die z -Übertragungsfunktion zu kommen?
3. In welches Gebiet der z -Ebene wird bei dieser Approximation die linke komplexe s -Ebene abgebildet? Welche Bedeutung hat das Ergebnis für die Stabilitätseigenschaft des Reglers? □

Aufgabe 14.2 Zeitdiskrete Realisierung des PI-Reglers für die AHL-Anlage

Wie sieht die zeitdiskrete Realisierung des PI-Reglers der AHL-Anlage mit den in Gln. (5.37) und (5.38) auf S. 223 angegebenen Reglerparametern aus? □

14.2.2 Approximation des PN-Bildes

Die zweite Methode zur Approximation eines kontinuierlichen durch einen zeitdiskreten Regler beruht auf der Beziehung

$$z = e^{sT} \quad (14.6)$$

zwischen den Polen und Nullstellen beider Realisierungen. Die Berechnung der Übertragungsfunktion $K(z)$ des zeitdiskreten Reglers erfolgt in den folgenden Schritten:

Entwurfsverfahren 14.1 Approximation kontinuierlicher Regler durch zeitdiskrete Regler

Gegeben: Regler $K(s)$

1. Zu den Polen und Nullstellen des kontinuierlichen Reglergesetzes $K(s)$ werden Pole und Nullstellen des zeitdiskreten Systems entsprechend Gl. (14.6) ermittelt. Daraus erhält man Linearfaktoren $(z - z_i)$ bzw. $(z - z_{oi})$ im Nenner bzw. Zähler von $K(z)$.
2. Es ist zweckmäßig, mit einer zeitdiskreten Realisierung $K(z)$ zu arbeiten, die einen Polüberschuss von lediglich eins hat. Hat $K(s)$ n Pole und nur q Nullstellen, so werden $n - q - 1$ Nullstellen bei $s_{oi} = \infty$ ergänzt. Zu diesen unendlichen Nullstellen gehören $n - q - 1$ zeitdiskrete Nullstellen $z_{oi} = -1$, die durch Linearfaktoren $(z + 1)$ im Zähler von $K(z)$ eingeführt werden.
3. Die Verstärkung $K(z = 1)$ wird so gewählt, dass sie gleich der statischen Verstärkung $K(s = 0)$ des kontinuierlichen Reglergesetzes ist.

Ergebnis: zeitdiskreter Regler $K(z)$

Beispiel 14.2 Approximation eines P-Reglers

Gegeben ist das Reglergesetz

$$K(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)},$$

das keine Nullstelle und zwei Pole bei -1 und -3 besitzt. Für diesen Regler soll durch Approximation des PN-Bildes ein zeitdiskreter Regler gefunden werden. Entsprechend dem Entwurfsverfahren erhält man $K(z)$ in drei Schritten:

1. Es werden die Pole und Nullstellen von $K(z)$ bestimmt. Zu den Polen gehören bei der Abtastzeit $T = 0,05$ die zeitdiskreten Pole

$$z_1 = e^{-0,05} = 0,951 \quad \text{und} \quad z_2 = e^{-0,15} = 0,861.$$

2. Es wird eine Nullstelle bei $z_{01} = -1$ ergänzt, so dass das Reglergesetz

$$K(z) = k \frac{z + 1}{(z - 0,951)(z - 0,861)}$$

entsteht.

3. Es wird die statische Verstärkung durch Wahl des Parameters k angepasst, damit $K(z = 1) = K(s = 0) = \frac{1}{3}$ ist. Damit erhält man für das zeitdiskrete Reglergesetz

$$K(z) = \frac{0,00113z + 0,00113}{z^2 - 1,81z + 0,819}.$$

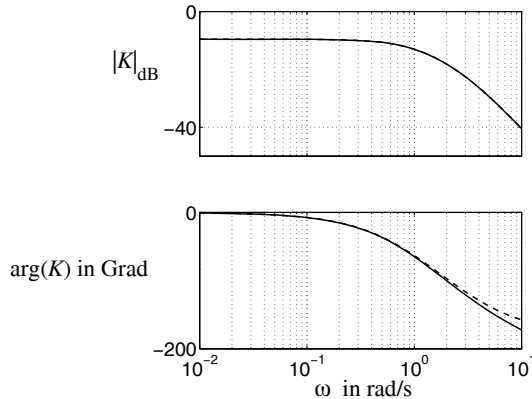


Abb. 14.5: Vergleich der Frequenzkennlinien des kontinuierlichen - - und des zeitdiskreten Reglers –

Abbildung 14.5 zeigt die Amplitudengänge und die Phasengänge des kontinuierlichen und des zeitdiskreten Reglers. Bis auf eine geringe Phasenabweichung bei hohen Frequenzen sind beide Diagramme identisch. $\square$

Das angegebene Approximationsverfahren kann theoretisch bei jeder beliebigen Abtastzeit angewendet werden. In jedem Fall werden die Pole und Nullstellen des kontinuierlichen Reglers exakt durch die entsprechenden Pole und Nullstellen des zeitdiskreten Reglers realisiert. Das bedeutet jedoch nicht, dass sich deshalb auch der kontinuierliche und der zeitdiskrete Regelkreis gleichartig verhalten. Abweichungen sind unvermeidbar, weil der zeitdiskrete Regler eine Stellgröße erzeugt, die innerhalb des Abtastintervalls konstant ist. Das E/A-Verhalten des zeitdiskreten Regelkreises kann deshalb wesentlich von dem des kontinuierlichen Regelkreises abweichen. Im

Beispiel 14.2 ist die Approximation des Amplituden- und des Phasenganges sehr gut, weil die Abtastzeit klein genug gewählt wurde.

14.2.3 Anwendungsgebiet

Die in diesem Abschnitt behandelten Approximationsverfahren für kontinuierliche durch zeitdiskrete Reglergesetze sind daran gebunden, dass die Abtastung schnell genug ist, damit der erhaltene zeitdiskrete Regler den kontinuierlichen Regler hinreichend gut wiedergibt. Erfahrungen zeigen, dass es für die Abtastzeit in Bezug zur Grenzfrequenz ω_{Gr} des Regelkreises folgende Bereiche gibt:

- Für $\frac{1}{T} \approx 20 \dots 30 \omega_{Gr}$ erhält man mit den behandelten Approximationsverfahren sehr gute Ergebnisse, denn das Verhalten des zeitdiskreten Reglers entspricht mit guter Näherung dem des kontinuierlichen Reglers.
- Für $\frac{1}{T} \approx 5 \dots 20 \omega_{Gr}$ ist die Dämpfung des digitalen Regelkreises aufgrund der durch die Abtastung entstehenden „Totzeit“ deutlich schlechter als beim kontinuierlichen Regelkreis. Eine Korrektur des durch die Approximation erhaltenen Reglergesetzes, beispielsweise durch phasenanhebende Korrekturglieder, ist angebracht.
- Für $\frac{1}{T} < 5 \omega_{Gr}$ ist die Approximation schlecht und kann sogar zu einem instabilen Regelkreis führen (vgl. Aufgabe 11.12 auf S. 480).

14.3 Reglerentwurf anhand des zeitdiskreten Streckenmodells

14.3.1 Entwurf einschleifiger Regelungen anhand des PN-Bildes des geschlossenen Kreises

In diesem Abschnitt werden Entwurfsverfahren behandelt, die von der zeitdiskreten Beschreibung der Regelstrecke ausgehen und den Regler sofort als zeitdiskretes Übertragungsglied zu berechnen gestatten. Das erste Verfahren beruht auf der im Kap. I-10 beschriebenen Idee, Eingrößenregler so zu entwerfen, dass der Regelkreis vorgegebene Pole aufweist. Als Hilfsmittel war dort die Wurzelortskurve beschrieben worden, die auch im Folgenden zur Ableitung der Entwurfsentscheidungen eingesetzt wird.

Die charakteristische Gleichung des Regelkreises mit der Strecke $G(z)$ und dem Regler $K(z)$ lautet

$$1 + G(z)K(z) = 1 + G_0(z) = 0.$$

Zerlegt man den Regler in einen festgelegten dynamischen Teil $\hat{K}(z)$ und einen veränderlichen Verstärkungsfaktor k

$$K(z) = k \hat{K}(z),$$

dann heißt die charakteristische Gleichung

$$1 + k \hat{K}(z)G(z) = 1 + k \hat{G}_0(z) = 0.$$

Diese Beziehung ist dieselbe wie in Gl. (I-10.12). Das heißt, die Pole des geschlossenen digitalen Regelkreises hängen in derselben Weise von der Reglerverstärkung k ab wie bei einem kontinuierlichen Regelkreis. Dies hat folgende Konsequenzen:

- Die Eigenschaften und Konstruktionsprinzipien für die Wurzelortskurve zeitdiskreter Regelkreise sind dieselben wie bei kontinuierlichen Regelkreisen.
- Der Entwurf von Eingrößenreglern anhand des PN-Bildes des geschlossenen Kreises verläuft in derselben Weise wie bei kontinuierlichen Systemen.

Unterschiedlich sind jedoch die Gütevorgaben und die Interpretation der Entwurfsergebnisse, denn die „Zielgebiete“, in die die Pole des geschlossenen Kreises gelegt werden müssen, unterscheiden sich.

Zusammenhang zwischen dem dominierenden Polpaar und dem Regelkreisverhalten. Um die gewünschte Pollage zu ermitteln, wird wie im Kap. I-10 mit der Näherung (I-10.1) zweiter Ordnung für die Führungsübertragungsfunktion des Regelkreises gearbeitet:

$$G_w(s) \approx \hat{G}_w(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2dT s + 1}. \quad (14.7)$$

T bezeichnet hier eine Zeitkonstante, die im Folgenden durch die Frequenz $\omega_0 = \frac{1}{T}$ ersetzt wird.

Um die angegebene Näherung verwenden zu können, muss der Regelkreis ein dominierendes Polpaar besitzen, für das

$$s_{1/2} = -\omega_0 d \pm \omega_0 \sqrt{d^2 - 1}$$

gilt.

Die für kontinuierliche Systeme bekannten Beziehungen zwischen der Lage des Polpaares und den Regelkreiseigenschaften können im Folgenden mit Hilfe der Beziehung

$$z = e^{sT}$$

in Forderungen an das dominierende Polpaar $z_{1/2}$ des zeitdiskreten Regelkreises umgerechnet werden. Für die Beruhigungszeit des kontinuierlichen Systems gilt Gl. (I-10.6)

$$T_{5\%} \approx \frac{3}{\delta_e} = \frac{3}{d\omega_0}.$$

Dieses Gütemerkmal ist nur vom Realteil $-d\omega_0$ des Polpaares abhängig. Pole $s_{1/2}$ des kontinuierlichen Systems mit diesem Realteil entsprechen Polen $z_{1/2}$ des zeitdiskreten Systems mit dem Abstand

$$r = e^{-d\omega_0 T}$$

vom Ursprung der komplexen Ebene. Damit eine vorgegebene Beruhigungszeit nicht überschritten wird, müssen die Pole des zeitdiskreten Systems also in einem Kreis mit dem angegebenen Radius r liegen.

Die Überschwingweite Δh hängt entsprechend Gl. (I-10.5) nur von der Dämpfung d ab:

$$\Delta h = e^{-\frac{\pi d}{\sqrt{1-d^2}}}.$$

Pole, die eine vorgegebene Mindestdämpfung haben, führen im zeitdiskreten System auf Pole, die in dem in Abb. 12.8 (unten) gezeigten Gebiet liegen. Dieses Gebiet wird umso kleiner und nähert sich dabei einem etwa elliptisch geformten Gebiet um das Intervall $[0, 1]$ auf der positiven reellen Achse, wenn die Dämpfung größer wird.

Sollen Vorgaben für die Beruhigungszeit und die Überschwingweite gleichzeitig erfüllt werden, so muss das dominierende Polpaar $z_{1/2}$ in die Durchschnittsmenge des genannten Kreises und des durch die Dämpfung bestimmten Gebietes der komplexen Ebene gelegt werden.

Entwurfsdurchführung. Für den Reglerentwurf kann das Entwurfsverfahren I-10.1 direkt übernommen werden. Die Güteforderungen werden in ein Gebiet für die Lage des dominierenden Polpaares überführt. Das qualitative Aussehen der Wurzelortskurve wird durch geeignete Wahl des dynamischen Anteils $\hat{K}(z)$ des Reglers festgelegt, wobei die für die kontinuierliche Regelung erläuterten Entwurfsregeln gelten. Die Wurzelortskurve wird dann in Bezug auf den verbleibenden Reglerparameter k gezeichnet. Nach Festlegung von k wird die Erfüllung der Güteforderungen an das Regelkreisverhalten durch Simulation überprüft.

14.3.2 Entwurf von Mehrgrößenreglern durch Polzuweisung

Der Reglerentwurf durch Polzuweisung verfolgt das Ziel, für die Regelstrecke

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

eine Zustandsrückführung

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$$

zu finden, so dass der Regelkreis

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(k), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

vorgegebene Eigenwerte besitzt. Offensichtlich hängt die Systemmatrix des Regelkreises

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$$

in derselben Weise von der Regelstrecke und dem Regler ab wie bei kontinuierlichen Systemen, so dass hier die im Kap. 6 angegebenen Entwurfsverfahren ohne Veränderungen angewendet werden können. Unterschiedlich sind wiederum nur die Richtlinien, nach denen die Pole des Regelkreises ausgewählt werden müssen. Hierfür gilt das im Abschn. 14.3.1 Gesagte.

14.3.3 Zeitdiskrete optimale Regelung

Um die Idee der im Kap. 7 behandelten optimalen Regelung auf zeitdiskrete Systeme übertragen zu können, muss dem diskreten Charakter der Stell- und Regelgrößen Rechnung getragen werden. An Stelle des Gütefunktional (7.15) wird mit

$$J(x_0, u(k)) = \sum_{k=0}^{\infty} (x'(k)Qx(k) + u'(k)Ru(k))$$

gearbeitet. Die Lösung des Optimierungsproblems

$$\min_u J(x_0, u(k))$$

erhält man wieder über eine Riccatigleichung, die hier die Form

$$P = Q + A'PA - A'PB(R + B'PB)^{-1}B'PA \quad (14.8)$$

hat. Mit der positiv definiten Lösung P dieser Gleichung erhält man den Optimalregler

$$K^* = (R + B'PB)^{-1}B'PA. \quad (14.9)$$

Für die Eigenschaften des Regelkreises mit Optimalregler gelten die im Satz 7.2 auf S. 291 gemachten Aussagen auch für das zeitdiskrete System. Insbesondere ist der Regelkreis unter der angegebenen Beobachtbarkeitsbedingung, die durch die Wahl der Wichtungsmatrix Q erfüllt werden muss, asymptotisch stabil.

Die Ljapunowgleichung für zeitdiskrete Systeme $x(k+1) = Ax(k)$ heißt

$$A'PA - P = -Q. \quad (14.10)$$

(vgl. Gl.(7.16)). Wendet man sie auf die Systemmatrix $\bar{A} = A - BK^*$ des optimal geregelten Systems an, so stimmt die Lösung P mit der aus Gl. (14.8) erhaltenen Lösung überein.

14.3.4 Beobachter für zeitdiskrete Systeme

Um den Systemzustand $x(k)$ aus den bekannten Folgen von Eingangs- und Ausgangsgrößen rekonstruieren zu können, kann ein zeitdiskreter Beobachter

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + u_B(k), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \quad (14.11)$$

$$\hat{y}(k) = C\hat{x}(k) \quad (14.12)$$

verwendet werden. Für den Korrekturterm $u_B(k)$, der die Konvergenz des Beobachters sichern soll, verwendet man die Beziehung

$$u_B(k) = L(y(k) - \hat{y}(k)).$$

Ist die Regelstrecke beobachtbar und liegen die Eigenwerte der Matrix $A - CL$ im Einheitskreis, so verschwindet der Beobachtungsfehler

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k) - \hat{x}(k)\| = 0. \quad (14.13)$$

Der Entwurf der Matrix L kann wie beim kontinuierlichen Beobachter auf ein Polzuweisungsproblem zurückgeführt und mit den dafür entwickelten Methoden gelöst werden. Auch für den zeitdiskreten Beobachter gilt das Separationstheorem.

Zu beachten ist, dass die in Gl. (14.13) beschriebene Konvergenz des Beobachters für die Abtastzeitpunkte gilt. Damit ist nicht gesichert, dass auch zwischen den Abtastzeitpunkten der Beobachterzustand eine gute Näherung für den Streckenzustand ist. Diese zusätzliche Forderung kann man nur bei hinreichend schneller Abtastung erfüllen.

Beim zeitdiskreten Beobachter kann man über die Eigenschaft (14.13) hinaus erreichen, dass der Beobachtungsfehler nach n Abtastzeitpunkten verschwindet, indem man bei der Wahl der Beobachterrückführung den im Abschn. 14.4 beschriebenen Reglerentwurf auf endliche Einstellzeit anwendet. Im ungestörten Fall gilt dann

$$x(k) = \hat{x}(k) \quad \text{für } k \geq n.$$

Die angegebenen Beobachtergleichungen haben die bemerkenswerte Eigenschaft, dass die zum Zeitpunkt k vorliegenden Messinformationen $u(k)$ und $y(k)$ verwendet werden, um den zum nächsten Zeitpunkt vorhandenen Systemzustand zu schätzen. Der Regler, der den Beobachter sowie eine Zustandsrückführung einschließt, hat also gerade die Abtastzeit T zur Verfügung, um die zum Zeitpunkt $k+1$ an die Regelstrecke anzuwendende Stellgröße zu ermitteln. Solange die für die Realisierung des Reglers notwendige Rechenzeit kleiner als T ist, liegen die Stellgrößen rechtzeitig vor.

Der Beobachter (14.11) macht dabei eine Prädiktion $\hat{x}(k+1)$ für den Systemzustand $x(k+1)$. Wenn die für den Zeitpunkt k berechnete Ausgangsgröße $\hat{y}(k)$ mit der gemessenen Ausgangsgröße $y(k)$ übereinstimmt, entsteht diese Vorhersage aus einer reinen Simulation, denn der Beobachter verwendet einfach das Streckenmodell, um den Nachfolgezustand zu bestimmen:

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k).$$

Dies entspricht übrigens genau dem in Abb. 8.2 auf S. 334 gezeigten Vorgehen. Stimmen jedoch $\hat{x}(k)$ und $y(k)$ nicht überein, so wird diese Vorhersage um $u_B(k) =$

$L(\mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k))$ korrigiert. In das Beobachtungsergebnis geht dann nicht nur die aktuelle Eingangsgröße $\mathbf{u}(k)$, sondern auch die gemessene Ausgangsgröße $\mathbf{y}(k)$ ein, so dass der Beobachter wie üblich in der in Abb. 8.1 auf S. 332 gezeigten Weise arbeitet.

14.4 Regler mit endlicher Einstellzeit

Dem Regler mit endlicher Einstellzeit liegt ein Entwurfsprinzip zu Grunde, das den zeitdiskreten Charakter des Regelkreises nutzt und – wie gleich zu sehen sein wird – auf einen Regelkreis führt, der mit einem kontinuierlichen Regler nicht realisierbar ist. Das Prinzip wird hier für die Regelstrecke mit einem Eingang und einem Ausgang

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y(k) &= \mathbf{c}'\mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

erläutert.

Güteforderungen. Es wird angenommen, dass die Führungsgröße über einen längeren Zeitraum konstant ist, so dass mit

$$w(k) = \bar{w}$$

gerechnet werden kann, und es wird gefordert, dass die Regelgröße den vorgegebenen Wert $\bar{w}$ nach n Abtastschritten annimmt:

$$y(k) = \bar{w} \quad \text{für } k \geq n. \quad (14.14)$$

Diese Forderung soll für die kontinuierliche Ausgangsgröße auch zwischen den Abtastzeitpunkten gelten:

$$y(t) = \bar{w} \quad \text{für } t \geq nT. \quad (14.15)$$

Ein Regler, der diese Forderungen erfüllt, bringt die Regelgröße in *endlicher* Zeit auf den geforderten Wert. Man spricht deshalb von einem Regler mit endlicher Einstellzeit (*dead-beat controller*).

Reglerentwurf. Als Regler wird die Zustandsrückführung

$$u(k) = -\mathbf{k}'\mathbf{x}(k) + vw(k) \quad (14.16)$$

verwendet, mit der der Regelkreis durch die Zustandsgleichung

$$\mathbf{x}(k+1) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}v\bar{w}$$

mit

$$\bar{A} = A - bk'$$

beschrieben wird. Für die Berechnung des Vorfilters v , das hier lediglich ein skalarer Verstärkungsfaktor ist, kann man den von der kontinuierlichen Regelung bekannten Weg anwenden. Der für die Führungsgröße $w(k) = \bar{w}$ entstehende stationäre Zustand ist

$$\bar{x} = (I - \bar{A})^{-1}bv\bar{w}.$$

Für die Regelgröße in diesem Zustand gilt

$$\bar{y} = c'(I - \bar{A})^{-1}bv\bar{w}.$$

Dieser Ausdruck soll forderungsgemäß gleich $\bar{w}$ sein:

$$\bar{y} = c'(I - \bar{A})^{-1}bv\bar{w} \stackrel{!}{=} \bar{w}.$$

Daraus erhält man für den Verstärkungsfaktor v den Ausdruck

$$v = \frac{1}{c'(I - \bar{A})^{-1}b}, \quad (14.17)$$

in den die Systemmatrix $\bar{A}$ des Regelkreises eingeht. Wenn man die Zustandsrückführung k' festgelegt hat, so ergibt sich v aus Gl. (14.17).

Die Rückführung k' soll nun so bestimmt werden, dass der Zustand den statischen Endwert $\bar{x}$ nach höchstens n Abtastschritten annimmt. Man kann dies erreichen, indem man sämtliche Pole des geschlossenen Regelkreises in den Ursprung der komplexen Ebene verschiebt, also mit der Entwurfsforderung

$$\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 = \dots = \bar{\lambda}_n = 0 \quad (14.18)$$

arbeitet. Für diese Eigenwertvorgabe heißt die charakteristische Gleichung des Regelkreises $\lambda^n = 0$. Die Zustandsrückführung erhält man aus der Ackermann-Formel (6.22), die sich für die hier verwendete Entwurfsforderung zu

$$k' = s'_R A^n \quad (14.19)$$

vereinfacht. s'_R ist die letzte Zeile der invertierten Steuerbarkeitsmatrix der Regelstrecke.

Begründung des Entwurfsweges. Dass man mit der Eigenwertvorgabe (14.18) die angegebenen Güteforderungen erfüllt, erkennt man an folgender Überlegung. Betrachtet man zunächst die Führungsgröße $\bar{w} = 0$, so besagt die Güteforderung, dass das System nach spätestens n Abtastschritten von einer Anfangsbedingung x_0 in den Nullzustand überführt werden muss:

$$x(n) = \bar{A}^n x_0 = 0.$$

Da diese Forderung für eine beliebige Anfangsbedingung x_0 erfüllt sein soll, muss

$$\bar{\mathbf{A}}^n = \mathbf{O} \quad (14.20)$$

gelten. Wendet man das Cayley-Hamilton-Theorem (A2.45) auf die Matrix $\bar{\mathbf{A}}$ an, so erhält man die Beziehung

$$\bar{\mathbf{A}}^n + \bar{a}_{n-1}\bar{\mathbf{A}}^{n-1} + \dots + \bar{a}_1\bar{\mathbf{A}} + \bar{a}_0\bar{\mathbf{A}}^0 = \mathbf{O},$$

aus der zu sehen ist, dass für $\bar{a}_{n-1} = \dots = \bar{a}_0 = 0$ die geforderte Eigenschaft für $\bar{\mathbf{A}}$ folgt.

Für $\bar{w} \neq 0$ überlagern sich die durch die Führungsgröße hervorgerufene erzwungene Bewegung mit der bisher betrachteten Eigenbewegung. Auch hier gilt, dass nach n Abtastschritten der stationäre Zustand $\bar{x}$ erreicht ist. Da die Zustandsrückführung in diesem Gleichgewichtszustand eine konstante Eingangsgröße $u(t)$ erzeugt, nimmt die Regelgröße auch zwischen den Abtastzeitpunkten den geforderten Wert $\bar{w}$ an.

Die genannten Eigenschaften der Regelung mit endlicher Einstellzeit lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

Ein Regelkreis mit einem Regler mit endlicher Einstellzeit folgt einer sprungförmigen Änderung der Führungsgröße nach (höchstens) n Abtastzeitpunkten. Die freie Bewegung des Regelkreises ist nach n Abtastzeitpunkten vollständig abgeklungen. Impulsförmige Störungen werden innerhalb von n Abtastzeitpunkten abgebaut.

Reglerentwurf für Systeme in Regelungsnormform. Wenn das Zustandsraummodell der Regelstrecke in der Regelungsnormform (11.12), (11.13)

$$\mathbf{x}_R(k+1) = \mathbf{A}_R \mathbf{x}_R(k) + \mathbf{b}_R u(k) \quad (14.21)$$

$$y(k) = \mathbf{c}'_R \mathbf{x}_R(k) \quad (14.22)$$

mit

$$\mathbf{A}_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

vorliegt, so erhält man für den Regler

$$u(k) = -\mathbf{k}_R \mathbf{x}_R(k) + v_R w(k)$$

aus den Gln. (14.17), (14.19) die Beziehungen

$$\mathbf{k}_R = (-a_0, -a_1, \dots, -a_{n-1}) \quad (14.23)$$

$$v_R = \frac{1}{\mathbf{c}'_R (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_R)^{-1} \mathbf{b}_R} \quad (14.24)$$

mit

$$\bar{\mathbf{A}}_{\text{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (14.25)$$

Die Reglerparameter stimmen folglich mit den Koeffizienten des charakteristischen Polynoms der Regelstrecke überein (vgl. hierzu Gl. (6.17) auf S. 237). Bei der Berechnung von v_{R} kann man ausnutzen, dass die in der Berechnungsvorschrift vorkommende inverse Matrix eine einfache Struktur hat:

$$(\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{\text{R}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Interpretation des Regelungsverfahrens. Mit Hilfe der Regelungsnormalform erhält man auch eine anschauliche Interpretation der Regelung mit endlicher Einstellzeit. Die in Gl. (14.25) angegebene Matrix $\bar{\mathbf{A}}$ des Regelkreises hat die Frobeniusform und für den Regelkreis gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\text{R}}(k+1) &= \bar{\mathbf{A}}_{\text{R}} \mathbf{x}_{\text{R}}(k) + \mathbf{b}_{\text{R}} v \bar{w} \\ y(k) &= \mathbf{c}'_{\text{R}} \mathbf{x}_{\text{R}}(k). \end{aligned}$$

Wieder kann man die Wirkungsweise am besten verstehen, wenn man zunächst mit $\bar{w} = 0$ rechnet. Der Regelkreis arbeitet dann wie ein Schieberegister, bei dem der Wert der i -ten Zustandsvariablen $x_i(k)$ zum Zeitpunkt $k+1$ der $(i-1)$ -ten Zustandsvariablen zugewiesen wird. Da die Eingangsgröße verschwindet, gilt $x_n(k+1) = 0$ für alle Zeitpunkte k und sämtliche Zustandsvariablen sind nach spätestens n Abtastschritten gleich null, was damit auch für die Regelgröße $y(k)$ für $k \geq n$ gilt.

Für nicht verschwindende Führungsgröße wird der Wert $v\bar{w}$ der Zustandsvariablen x_n und von dort wiederum nach dem Funktionsprinzip eines Schieberegisters den anderen Zustandsvariablen zugewiesen, so dass auch hier nach n Abtastschritten der Endzustand erreicht ist, für den $y(k) = \bar{w}$ für $k \geq n$ gilt.

Das Phänomen der endlichen Einstellzeit hat bezüglich des E/A-Verhaltens eine interessante Konsequenz. Diese wird offensichtlich, wenn man das Führungsverhalten des Regelkreises in der Form

$$y(k) = \sum_{j=0}^k g_{\text{w}}(k-j) w(j) = g_{\text{w}} * w$$

dargestellt, in der $g_{\text{w}}(k)$ die zum Führungsverhalten gehörende Gewichtsfolge bezeichnet. Entsprechend Gl. (11.49) auf S. 450 haben Gewichtsfolgen i. Allg. für alle

$k = 0, 1, \dots, \infty$ nicht verschwindende Werte. Da aufgrund der endlichen Einstellzeit hier jedoch die Beziehung (14.20) gilt, verschwindet die Gewichtsfolge $g_w(k)$ für $k \geq n$:

$$g_w(k) = \begin{cases} 0 & \text{für } k = 0 \\ \mathbf{c}' \bar{\mathbf{A}}^{k-1} \mathbf{b} & \text{für } 1 \leq k \leq n-1 \\ 0 & \text{für } k \geq n. \end{cases} \quad (14.26)$$

Der Regelkreis hat also eine *endliche Gewichtsfolge*

(vgl. Gl. (11.53) auf S. 451). Für derartige Gewichtsfolgen ist die Faltungssumme stets endlich:

$$y(k) = \sum_{j=k-n+1}^{k-1} g_w(k-j) w(j) \quad \text{für } k \geq n. \quad (14.27)$$

Aufgrund der Eigenschaft (14.26) der Gewichtsfolge beginnt die Summe für große Zeiten k nicht bei null, sondern bei $k - n + 1$ und enthält folglich immer nur $n - 2$ Summanden. Das heißt insbesondere, dass in den Wert der Ausgangsgröße y zur Zeit k nur die Werte der Eingangsgröße $w(k)$ im Zeitintervall $[k - n + 1, k - 1]$ eingehen. Dasselbe gilt für das Störverhalten des Regelkreises.

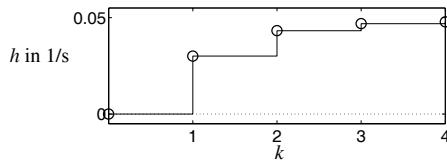
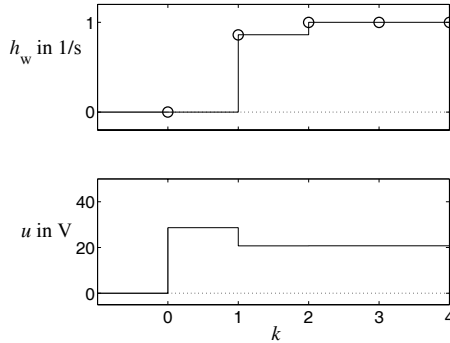
Vergleich mit kontinuierlichen Regelungen. Dass das Regelungsprinzip mit endlicher Einstellzeit nicht durch eine kontinuierliche lineare Regelung bewerkstelligt werden kann, erkennt man bei einer einfachen Überlegung. Da sämtliche Eigenwerte der Systemmatrix $\bar{\mathbf{A}}$ des geschlossenen Regelkreises verschwinden, gilt $\det \bar{\mathbf{A}} = 0$. Eine derartige Matrix kann nicht im zeitdiskreten Modell eines abgetasteten Systems auftreten, da für derartige Systeme die Beziehung (11.22) gilt und folglich $\mathbf{A}_d$ regulär ist. Das Prinzip der Regelung mit endlicher Einstellzeit ist deshalb nur durch eine zeitdiskrete Regelung realisierbar.

Beispiel 14.3 Regler mit endlicher Einstellzeit für einen Gleichstrommotor

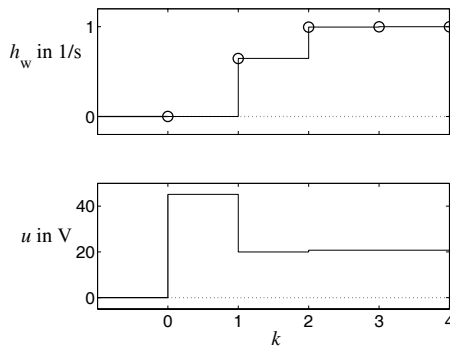
Für den im Beispiel I-11.2 betrachteten Gleichstrommotor soll ein Regler mit endlicher Einstellzeit entworfen werden. Der Motor wird um einen Drehzahlgeber, der durch ein PT₁-Glied mit der Zeitkonstante 0,008 s angenähert wird, erweitert. Für den Entwurf wird das Zustandsraummodell für die auf S. I-137 angegebenen Parameter und für die Abtastzeit $T = 0,1$ s in ein zeitdiskretes Modell überführt. Die Übergangsfolge ist in Abb. 14.6 gezeigt. Der statische Endwert wird näherungsweise zum vierten Abtastzeitpunkt erreicht.

Der Regler wird mit Gln. (14.17), (14.19) berechnet. Wie Abb. 14.7 zeigt, erreicht der geregelte Gleichstrommotor nach drei Abtastzeitpunkten den Sollwert, was der Systemordnung $n = 3$ entspricht. Da die Zeitkonstante des Drehzahlgebers und die kleinere der beiden Zeitkonstanten des Motors ($T_1 = 0,014$ s) wesentlich kleiner als die Abtastzeit sind, sind die beiden letzten "Korrekturschritte" sehr klein und die Regelgröße erreicht den Sollwert praktisch schon nach zwei Abtastschritten.

Die Angabe, dass der Sollwert spätestens nach n Abtastzeitpunkten erreicht wird, bedeutet bezüglich der kontinuierlichen Zeitachse, dass y den Endwert zur Zeit nT erreicht. Man kann deshalb auf die Idee kommen, dass die Überführung in beliebig kurzer Zeit möglich ist, wenn man die Abtastzeit T hinreichend klein macht. Um zu veranschaulichen, was

**Abb. 14.6:** Übergangsfolge des Gleichstrommotors**Abb. 14.7:** Führungsübergangsfolge des geregelten Gleichstrommotors

dabei passiert, ist in Abb. 14.8 die Führungsübergangsfolge für den Fall angegeben, dass der Entwurf mit der Abtastzeit $T = 0,05$ s wiederholt wird.

**Abb. 14.8:** Führungsübergangsfolge des geregelten Gleichstrommotors nach Verkleinerung der Abtastzeit

Die Abbildung zeigt, dass die Führungsübergangsfolge erwartungsgemäß wiederum nach drei Abtastzeitpunkten den Endwert erreicht, die dafür notwendige Stellamplitude jedoch um ein Vielfaches größer ist als vorher. Die Möglichkeit, den Sollwert in beliebig kur-

zer Zeit zu erreichen, wird also durch Stellgrößenbeschränkungen zunichte gemacht. Man muss bei der Anwendung von Reglern mit endlicher Einstellzeit die Abtastzeit so wählen, dass die Stellgrößen in vertretbarer Größenordnung bleiben. Unabhängig von der Abtastzeit ist lediglich der statische Endwert

$$u(\infty) = \frac{1}{k_s} = 37,04,$$

den die Stellgröße nach drei Abtastintervallen annimmt. $\square$

Eigenschaften der Regelung aus praktischer Sicht. Die Forderung nach einer endlichen Einstellzeit ist aus praktischer Sicht sehr zweckmäßig. Allerdings ist diese Forderung nur unter einschränkenden Bedingungen erfüllbar, von denen hier die wichtigsten genannt werden sollen.

Der Regelkreis hat die gewünschte Eigenschaft nur dann, wenn seine Systemmatrix nilpotent ist (siehe Gl. (14.20)). Diese Eigenschaft wird sehr schnell verletzt, wenn sich die Parameter der Regelstrecke von denen des beim Entwurf verwendeten Modells unterscheiden. Regler mit endlicher Einstellzeit sind deshalb sehr empfindlich in Bezug auf Parameteränderungen.

Ähnliches gilt in Bezug auf Störungen. Wenn der Zustandsvektor $x(k)$ für die Realisierung der Zustandsrückführung nur mit einem erheblichen stochastischen Fehler gemessen (oder mit einem Beobachter rekonstruiert) werden kann, versucht der Regler, den Wirkungen der Störung in jeweils n Abtastschritten entgegenzuwirken. Da sich in diesem Zeitraum die Störung ständig verändert, bewirkt die Regelung ein ständiges „Umsteuern“ der Regelstrecke, wodurch die Störwirkung verstärkt statt abgebaut wird.

Schließlich erzeugen Regler mit endlicher Einstellzeit Stellsignale großer Amplitude. Wie das Beispiel 14.3 gezeigt hat, gilt dies insbesondere bei kurzen Abtastzeiten. Dies führt in der Praxis häufig zu einer Überschreitung der Stellgrößenbeschränkung, womit das Funktionsprinzip der Regelung mit endlicher Einstellzeit außer Kraft gesetzt wird.

Eine Begründung für diese Eigenschaft erhält man bei einem Vergleich mit dem Verhalten kontinuierlicher Regelungen. Den dem digitalen Regelkreis zugewiesenen Eigenwerten $\lambda_{di} = 0$ entsprechen im kontinuierlichen Kreis die Eigenwerte $\lambda_i = -\infty$ (vgl. Gl. (11.42) auf S. 448), die einen unendlich schnell wirkenden Regelkreis auszeichnen. Die schnelle Regelkreisdynamik kann nur mit großen Stellamplituden erzeugt werden. Wie das Beispiel gezeigt hat, ist insbesondere der Wert $u(0)$ sehr groß (oder allgemeiner die Werte der Stellgröße, die den Sollwertänderungen unmittelbar folgen). Dieses Verhalten kann man vermeiden, indem man den Verstärkungsfaktor v durch ein Vorfilter (beispielsweise ein PT_1 -Glied) ersetzt, das sprungförmige Führungsgrößenänderungen in kontinuierliche Veränderungen überführt. Der Regelkreis hat dann für das verzögerte Signal eine endliche Einstellzeit, so dass die Regelgröße spätestens n Abtastzeitpunkte, nachdem die gefilterte Führungsgröße ihren Endwert erreicht hat, den Sollwert annimmt.

Aufgabe 14.3 Raumtemperaturregelung mit fester Einstellzeit

Für die Regelstrecke einer Raumtemperaturregelung wurde in Aufgabe I-5.10 ein einfaches Modell angegeben:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -0,2x(t) + 0,2u(t), & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= 5x(t)\end{aligned}$$

Bei der Festlegung der Modellparameter wurde die Zeit in Minuten, der Ventilhub u des Heizkörpers in Millimetern und die Raumtemperatur y in Grad Celsius gemessen.

Entwerfen Sie für dieses System einen Regler, der die Raumtemperatur innerhalb einer endlichen Einstellzeit von 20 Minuten vom aktuellen Wert von 20 Grad auf den neuen Sollwert von 23 Grad bringt. Zeichnen Sie die Stellgröße auf und interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Vergleich zu den Steuereingriffen, mit denen Sie als Nutzer des Raumes (ohne regelungstechnische Kenntnisse) diese Temperaturerhöhung bewirken würden. $\square$

Aufgabe 14.4 Stabilisierung der Rollbewegung eines Flugzeugs in endlicher Zeit

Für die Stabilisierung der Rollbewegung wird das im Beispiel I-5.6 angegebene Zustandsraummodell (I-5.67) für die Abtastzeit T in eine zeitdiskrete Darstellung überführt:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x(k+1) \\ P(k+1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ P(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{kT}{I_{xx}} \end{pmatrix} u(k) \\ y(k) &= (1 \quad 0) \begin{pmatrix} x(k) \\ P(k) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Entwerfen Sie einen Regler mit endlicher Einstellzeit und zeichnen Sie den Verlauf der Regelgröße und der Stellgröße für die ersten vier Abtastzeitpunkte, wenn sich das Flugzeug zur Zeit $k = 0$ im Anfangszustand $x(0) = 0,1$, $P(0) = 0$ befindet (Rollwinkel etwa 6°). Wie verändert sich der Verlauf, wenn die Abtastzeit halbiert bzw. verdoppelt wird? $\square$

Aufgabe 14.5 Kurze Einstellzeiten

Untersuchen Sie einen Regelkreis vierter Ordnung mit Dead-beat-Regler in Regelungsnormalform und bestimmen Sie Anfangszustände x_0 , für die der Regelkreis bereits beim ersten, zweiten bzw. dritten Abtastzeitpunkt den Ruhezustand $x = 0$ erreicht hat. $\square$

Aufgabe 14.6** Dynamische Ausgangsrückführung mit endlicher Einstellzeit

Als Regler mit endlicher Einstellzeit kann man auch dynamische Rückführungen

$$U(z) = -K(z)(Y(z) - W(z))$$

verwenden, für deren Realisierung nur die Regelgröße $y(k)$ und nicht der Zustand $x(k)$ gemessen werden muss. Vom Regelkreis wird gefordert, dass bei der Führungsgröße

$w(k) = 1$ die Regelabweichung $e(k)$ für alle $k \geq N$ (mit hinreichend groß gewähltem N) verschwindet und die Stellgröße $u(k)$ für all $k \geq N$ konstant ist. Wie muss die Übertragungsfunktion $K(z)$ des Reglers gewählt werden?

Ermitteln Sie die gesuchte Beziehung für $K(z)$ in folgenden Schritten, wobei Sie die genannten Güteforderungen durch

$$y(k) = \begin{cases} 0 & \text{für } k = 0 \\ y_k & \text{für } 1 \leq k < N \\ 1 & \text{für } k \geq N \end{cases}, \quad u(k) = \begin{cases} u_k & \text{für } 0 \leq k < N \\ \bar{u} & \text{für } k \geq N \end{cases}$$

mit unbekannten Größen y_k und u_k darstellen:

1. Bestimmen Sie die Führungsübertragungsfunktion $G_w(z)$ und zeigen Sie, dass sie sich durch ein endliches Polynom $P(z)$ darstellen lässt.
2. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G_{uw}(z) = \frac{U(z)}{W(z)}$ und zeigen Sie, dass sie sich durch ein endliches Polynom $Q(z)$ darstellen lässt.
3. Ermitteln Sie den Regler aus der Beziehung

$$K(z) = \frac{U(z)}{W(z) - Y(z)} = \frac{Q(z)}{1 - P(z)}.$$

Welche Bedingung muss die Zahl N erfüllen? Hat der Regelkreis wie bei der in diesem Abschnitt verwendeten Zustandsrückführung n verschwindende Pole? Welche dynamische Ordnung hat der Regler? $\square$

Aufgabe 14.7** PI-Regler mit endlicher Einstellzeit

Als Regler mit endlicher Einstellzeit wurde in den vorausgegangenen Erläuterungen eine Zustandsrückführung (14.16) verwendet, die die Sollwertfolge nur durch eine geeignete Wahl des Verstärkungsfaktors v garantiert, was die bekannten Nachteile mit sich bringt. Wie kann man das Prinzip der Regelung mit endlicher Einstellzeit auf Regler mit I-Anteil erweitern? Welchen Vorteil hat dieses Vorgehen gegenüber dem oben beschriebenen? $\square$

14.5 MATLAB-Funktionen für den Entwurf digitaler Regler

Die Darstellung der einzelnen Entwurfsverfahren hat gezeigt, dass dieselben Gleichungen zu lösen sind wie bei der kontinuierlichen Regelung. Es müssen deshalb keine neuen MATLAB-Funktionen eingeführt werden. Die Interpretation der Güteforderungen und Ergebnisse, die sich teilweise für die kontinuierliche und die zeitdiskrete Regelung unterscheidet, spielt für die MATLAB-Implementierung der Algorithmen keine Rolle, da sie dem Ingenieur überlassen bleibt.

Die einzige Ausnahme ist der Entwurf des Optimalreglers, denn hierfür entsteht bei der diskreten Regelung eine andere Matrix-Riccatigleichung als bei der kontinuierlichen Regelung. Für die Lösung dieser Gleichung steht die Funktion

```
» K = dlqr(A, B, Q, R);
```

zur Verfügung.

Literaturhinweise

Für eine ausführliche Darstellung der Approximationsverfahren, mit der kontinuierliche Regler durch zeitdiskrete Regler ersetzt werden können, wird auf das Lehrbuch [29] verwiesen.

Literaturverzeichnis

1. Abraham, R.; Lunze, J.: Modelling and decentralized control of a multizone crystal growth furnace, *Int. J. of Robust and Nonlinear Control* **2** (1992), 107–122.
2. Ackermann, J.: Der Entwurf linearer Regelungssysteme im Zustandsraum, *Regelungstechnik und Prozessdatenverarbeitung* **7** (1972), 297–300.
3. Ackermann, J.: *Abtastregelungen*, Springer-Verlag, Berlin 1983.
4. Ackermann, J.: *Robuste Regelung*, Springer-Verlag, Berlin 1993.
5. Anderson, B. D. O.; Moore, J. B.: *Linear Optimal Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1971.
6. Athans, M.; Falb, F. L.: *Optimal Control*, McGraw-Hill, New York 1966.
7. Bakule, L.; Lunze, J.: Rechnergestützter Entwurf von Regelungssystemen unter Verwendung der LQ-Regelung, *Messen, Steuern, Regeln* **29** (1986), 292–298.
8. Bengtsson, G.; Lindahl, S.: A design scheme for incomplete state or output feedback with application to boiler and system control, *Automatica* **10** (1974), 15–30.
9. Berman, A.; Plemmons, R. J.: *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, Academic Press, New York 1979; neu aufgelegt in SIAM Series on Classics in Applied Mathematics, Philadelphia 1994.
10. Brasch, F. M.; Pearson, J. B.: Pole placement using dynamic compensators, *IEEE Trans. AC-15* (1970), 34–43.
11. Bristol, E. H.: On a new measure of interaction for multivariable process control, *IEEE Trans. AC-11* (1966), 133–134.
12. Chen, M. J.; Desoer, C. A.: Necessary and sufficient condition for robust stability of linear distributed feedback systems, *Int. J. Control* **35** (1982), 255–267.
13. Cumming, S. D. G.: Design of observers of reduced dynamics, *Electronics Letters* **5** (1969), 213–214.
14. Datta, B. N.: *Numerical Methods for Linear Control Systems*, Elsevier, Amsterdam 2003.
15. Davison, E. J.: The output control of linear time-invariant multivariable systems with unmeasurable arbitrary disturbances, *IEEE Trans. AC-17* (1972), 621–630.
16. Davison, E. J.: The robust control of a servomechanism problem for linear time-invariant multivariable systems, *IEEE Trans. AC-21* (1976), 25–34 and *AC-22* (1977), 283.
17. Davison, E. J.: Multivariable tuning regulators: the feedforward and robust control of a general servomechanism problem, *IEEE Trans. AC-21* (1976), 35–47 and 631.
18. Davison, E. J.: Decentralized robust control of unknown systems using tuning regulators, *IEEE Trans. AC-23* (1978), 276–288.
19. Davison, E. J.; Goldberg, A.: Robust control of a general servomechanism problem: the servo compensator, *Automatica* **11** (1975), 461–471.
20. Doetsch, G.: *Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplacetransformation und der Z-Transformation*, Oldenbourg-Verlag, München 1985.
21. Doyle, J.; Glover, K.; Khargonekar, P.; Francis, B.: State-space solution to standard H_∞ control problems, *IEEE Trans. AC-34* (1989), 831–847.

22. Fallside, F.: *Control System Design by Pole-Zero-Assignment*, Academic Press, London 1977.
23. Ferreira, P. G.: The servomechanism problem and the method of the state-space in the frequency domain, *Int. J. Control* **23** (1976), 245–255.
24. Fiedler, M.; Pták, V.: On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors, *Tszech. Math. Journal* **12** (1962), 382–400.
25. Föllinger, O.: *Laplace- und Fourier-Transformation*, Hüthig-Verlag, Heidelberg 1986.
26. Föllinger, O.: *Regelungstechnik*, Hüthig-Verlag, Heidelberg 1990.
27. Föllinger, O.: *Optimierung dynamischer Systeme*, Oldenbourg-Verlag, München 1985.
28. Franklin, G. F.; Powell, J. D.; Emami-Naeini, A.: *Feedback Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley Publ. Co, Reading 1994.
29. Franklin, G. F.; Powell, J. D.; Workman, M. L.: *Digital Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley, Reading 1990.
30. Gantmacher, F. R.: *Matrizentheorie*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1986.
31. Geromel, J. C.; Bernussou, J.: An algorithm for optimal decentralized regulation of linear quadratic interconnected systems, *Automatica* **15** (1979), 489–491.
32. Gershgorin, S.: Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix (russ.), *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat* **1** (1931), 749–754.
33. Gilbert, E. G.: Controllability and observability in multivariable control systems, *SIAM J. Control Ser. A* **1** (1963), 128–151.
34. Glover, K.; Doyle, J.: State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an H_∞ norm bound and relations to risk sensitivity, *System and Control Letters* **11** (1988), 167–172.
35. Graner, H.: Vorschläge für den Betrieb von Netzverbänden, *Elektrotechnische Zeitschrift (A)* **55** (1934), 44.
36. Grosdidier, P.; Morari, M.; Holt, B. R.: Closed loop properties from steady state gain information, *Ind. Eng. Chem. Fundam.* **24** (1985), 221–235.
37. Harvey, C. A.; Stein, G.: Quadratic weights for asymptotic regulator properties, *IEEE Trans. AC* **23** (1978), 378–387.
38. Hautus, M. L. J.: Controllability and observability conditions of linear autonomous systems, *Indagationes Mathematicae* **31** (1969), 443–448.
39. Hsu, C.-H.; Chen, C.-T.: A proof of the stability of multivariable feedback systems, *Proc IEEE* **56** (1968), 2061–2062.
40. Isermann, R.: *Digitale Regelsysteme*, Springer-Verlag, Berlin 1977.
41. Isidori, A.: *Nonlinear Control Systems*, Springer-Verlag, Berlin 1996.
42. Jamshidi, M.: An overview on the solution of the algebraic matrix Riccati equation and related problems, *Large Scale Systems* **1** (1980), 167–192.
43. Jury, E. I.; Mansour, M.: On the terminology relationship between continuous and discrete systems criteria, *Proc. IEEE* **73** (1985), p. 844.
44. Khalil, H. K.: *Nonlinear Systems*, Prentice-Hall, Upper Saddle River 1996.
45. Kailath, T.: *Linear Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1980.
46. Kalman, R. E.: Contributions to the theory of optimal control, *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana* **5** (1960), 102–119.
47. Kalman, R. E.: Mathematical description of linear systems, *SIAM J. Control* **1** (1963), 152–192.
48. Kalman, R. E.: When is a linear control system optimal? *Trans. ASME, Series D, Journal of Basic Engr.* **86** (1964), 51–60.
49. Kalman, R. E.; Bucy, R. S.: New results in linear filterin and prediction theory, *Trans. ASME, Series D, Journal of Basic Engr.* **83** (1961), 95–100.

50. Korn, U.; Jumar, U.: *PI-Mehrgrößenregler*, Oldenburg-Verlag, München 1991.
51. Kortüm, W.; Lugner, P.: *Systemdynamik und Regelung von Fahrzeugen*, Springer-Verlag, Berlin 1994.
52. Kreindler, E.; Hedrick, J. K.: On equivalence of quadratic loss functions, *Int. J. Control* **11** (1970), 213–222.
53. Kreindler, E.; Sarachik, P. E.: On the concept of controllability and observability of linear systems, *IEEE Trans.* **AC-19** (1964) 129–136.
54. Kučera, V.: *Analysis and Design of Discrete Linear Control Systems*, Prentice-Hall, London 1991.
55. Kwakernaak, H.: Asymptotic root loci of multivariable linear optimal regulators, *IEEE Trans.* **AC-21** (1976), 378–382.
56. Kwakernaak, H.; Sivan, R.: *Modern Signals and Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1991.
57. Kwatny, H. G.; Kalnitzky, K. C.: On alternative methodologies for the design of robust linear multivariable regulators, *IEEE Trans.* **AC-23** (1978), 930–933.
58. Lautenbach, K.: Duality of marked Place/transition nets. *Fachberichte Informatik der Universität Koblenz-Landau*, Heft 18 (2003).
59. Lehtomaki, N. A.; Sandell, N. R.; Athans, M.: Robustness results in LQG-based multivariable control design, *IEEE Trans.* **AC-26** (1981), 75–93.
60. Levine, W. S.; Athans, M.: On the determination of the optimal constant output feedback gains for linear multivariable systems, *IEEE Trans.* **AC-15** (1970), 44–48.
61. Ludyk, G.: *Theoretische Regelungstechnik* (2 Bände), Springer-Verlag, Berlin 1995.
62. Lückel, J.; Müller, P. C.: Analyse von Steuerbarkeits-, Beobachtbarkeits- und Störbarkeitsstrukturen linearer zeitinvarianter Systeme, *Regelungstechnik* **23** (1975), 163–171.
63. Luenberger, D. G.: Observing the state of a linear system, *IEEE Trans.* **MIL-8** (1964), 74–80.
64. Luenberger, D. G.: Canonical forms for linear multivariable systems, *IEEE Trans.* **AC-12** (1967), 290–293.
65. Lunze, J.: The design of robust feedback controllers for partly unknown systems by optimal control procedures, *Int. J. Control* **36** (1982), 611–630.
66. Lunze, J.: Notwendige Modellkenntnisse zum Entwurf robuster Mehrgrößenregler mit I-Charakter, *Messen Steuern Regeln* **25** (1982), 608–612.
67. Lunze, J.: Untersuchungen zur Autonomie der Teilregler einer dezentralen Regelung mit I-Charakter, *Messen Steuern Regeln* **26** (1983), 451–455.
68. Lunze, J.: Robustness tests for feedback control systems using multidimensional uncertainty bounds, *System and Control Letters* **4** (1984), 85–89.
69. Lunze, J.: Determination of robust multivariable I-controllers by means of experiments and simulation, *Syst. Anal. Model. Simul.* **2** (1985), 227–249.
70. Lunze, J.: Ein Kriterium zur Überprüfung der Integrität dezentraler Mehrgrößenregler, *Messen, Steuern, Regeln* **28** (1985), 257–260.
71. Lunze, J.: *Robust Multivariable Feedback Control*, Prentice-Hall, London 1988.
72. Lunze, J.: *Feedback Control of Large Scale Systems*, Prentice-Hall, London 1992.
73. Lunze, J.; v. Kurnatowski, B.: Experimentelle Erprobung einer Einstellregel für PI-Mehrgrößenregler bei der Herstellung von Ammoniumnitrat-Harnstoff-Lösung, *Messen, Steuern, Regeln* **30** (1987), 2–6.
74. Lunze, J.; Pahl, M.: pH-Wert-Regelung eines Biogas-Turmreaktors zur anaeroben Abwasserreinigung, *Automatisierungstechnik* **45** (1997), 226–235.
75. Lunze, J.; Wolff, A.: Robuste Regelung einer Wirbelschichtverbrennungsanlage für Klärschlamm, *Automatisierungstechnik* **44** (1996), 522–532.

76. MacFarlane, A. G. J.; Belletrutti, J. J.: The characteristic locus design method, *Automatica* **9** (1973), 575–588.
77. MacFarlane, A. G. J.; Postlethwaite, I.: The generalized Nyquist stability criterion and multivariable root loci, *Int. J. Control* **25** (1977), 81–127.
78. MacFarlane, A. G. J.; Karcianas, N.: Poles and zeros of linear multivariable systems: A survey of the algebraic, geometric and complex-variable theory, *Int. J. Control* **24** (1976), 33–74.
79. MacMillan, B.: Introduction to formal realization theory, *Bell Syst. Techn. Journal* **31** (1952), 217–279 and 541–600.
80. Maciejowski, J.: *Multivariable Feedback Design*, Addison-Wesley, Harlow 1989.
81. Mayne, D. Q.; Murdoch, P.: Modal control of linear time-invariant systems, *Int. J. Control* **11** (1970), 223–227; comments by Porter, B.; Murdoch, P., *IEEE Trans.* **AC-20** (1975), 582.
82. Mees, A. I.: Achieving diagonal dominance, *System and Control Letters* **2** (1981), 155–158.
83. Mesarovic, M. D.: *The Control of Multivariable Systems*, J. Wiley & Sons, London 1960.
84. Molinari, B. P.: Redundancy in linear optimum regulator theory, *IEEE Trans.* **AC-16** (1971), 83–85.
85. Morari, M.; Zafriou, E.: *Robust Process Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1989.
86. Moore, B. C.: On the flexibility offered by state feedback in multivariable systems beyond closed-loop eigenvalue assignment, *IEEE Trans.* **AC-21** (1976), 686–691.
87. Müller, P. C.: *Stabilität und Matrizen*, Springer-Verlag, Berlin 1977.
88. Nerode, A.: Linear automaton transformation, *Proc. Amer. Math. Soc.* **9** (1958), 541–544.
89. Nwokah, O. D. I.: A recurrent issue on the extended Nyquist Array, *Int. J. Control* **31** (1980), 609–614.
90. Nyquist, H.: Certain topics in telegraph transmission theory, *Trans. of the A. I. E. E.* (1928), pp. 617–644. Reprint in *Proc. of the IEEE* **80** (2002) No. 2, pp. 280–305.
91. Ogata, K.: *Discrete-Time Control Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1987.
92. Patel, R. V.; Munro, N.: *Multivariable System Theory and Design*, Pergamon Press, Oxford 1982.
93. Pearson, J. B.; Ding, C.: Compensator design for multivariable linear systems, *IEEE Trans.* **AC-14** (1969), 130–134.
94. Porter, B.: Necessary conditions for the optimality of a class of multiple-input closed-loop linear control systems, *Electronic Letters* **6** (1970), 324.
95. Preuss, H.-P.: Entwurf stationär genauer Zustandsrückführungen, *Regelungstechnik* **28** (1980), 51–56.
96. Preuss, H.-P.: Störungsunterdrückung durch Zustandsregelung, *Regelungstechnik* **28** (1980), 227–231, 266–71.
97. Preuss, H.-P.: Stationär perfekte Zustandsregelung, *Regelungstechnik* **28** (1980), 333–338.
98. Raske, F.: *Ein Beitrag zur Dekomposition von linearen zeitinvarianten Großsystemen*, Dissertation, Universität Hannover, 1981.
99. Reinisch, K.: *Kybernetische Grundlagen und Beschreibung kontinuierlicher Systeme*, Verlag Technik, Berlin 1974.
100. Reinisch, K.: *Analyse und Synthese kontinuierlicher Steuerungssysteme*, Verlag Technik, Berlin 1979.
101. Reinschke, K. J.: *Multivariable Control - A Graph-Theoretic Approach*, Springer-Verlag, Berlin 1988.

102. Roppenecker, G.; Preuß, H.-P.: Nullstellen und Pole linearer Mehrgrößensysteme, *Regelungstechnik* **30** (1982), S. 219–225 und 255–263.
103. Roppenecker, G.: *Zeitbereichsentwurf linearer Regelungen*, Oldenbourg-Verlag, München 1990.
104. Rosenbrock, H. H.: Distinctive problems of process control, *Chem. Engineering Progress* **58** (1962), 43–50.
105. Rosenbrock, H. H.; Storey, C.: *Mathematics of Dynamical Systems*, Nelson, London 1970.
106. Rosenbrock, H. H.; McMorran, P. D.: Good, bad, or optimal? *IEEE Trans.* **AC-16** (1971), 552–553.
107. Rosenbrock, H. H.: *Computer-Aided Control System Design*, Academic Press, London 1974.
108. Safonov, M. G.; Athans, M.: Gain and phase margin for multiloop LQG regulator, *IEEE Trans.* **AC-22** (1977), 173–179.
109. Safonov, M. G.; Laub, A. J.; Hartman, G. L.: Feedback properties of multivariable systems: The role and use of the return difference matrix, *IEEE Trans.* **AC-26** (1981), 47–65.
110. Shannon, C. E.: Communication in the presence of noise, *Proc. of the IRE* **37** (1949) No. 1, pp. 10–21. Reprint in *Proc. of the IEEE* **86** (1998) No. 2, pp. 447–457.
111. Skogestad, S.; Postlethwaite, I.: *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*, J. Wiley & Sons, Chichester 1996.
112. Tolle, H.: *Mehrgrößenregelkreissynthese*, Bände 1 und 2, Oldenbourg-Verlag, München 1983 und 1985.
113. Varga, R. S.: *Gersgorin and His Circles*, Springer-Verlag, Berlin 2004.
114. Weihrich, G.: *Optimale Regelung linearer deterministischer Prozesse*, Oldenbourg-Verlag, München 1973.
115. Weihrich, G.: Mehrgrößen-Zustandsregelung unter Einwirkung von Stör- und Führungssignalen, *Regelungstechnik* **25** (1977), 166–172 und 204–207.
116. Wend, H.-D.: *Strukturelle Analyse linearer Regelungssysteme*, Oldenbourg-Verlag, München 1993.
117. Wolovich, W. A.: *Linear Multivariable Systems*, Springer-Verlag, New York 1974.
118. Wonham, W. M.: *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*, Springer-Verlag, Berlin 1974.
119. Wonham, W. M.; Morse, A. S.: Feedback invariants of linear multivariable systems, *Automatica* **8** (1972), 93–100.
120. Yuz, J. I.; Salgado, M. E.: From classical to state-feedback-based controllers, *IEEE Control Systems Magazine* (2003), August, pp. 58–67.
121. Zames, G.: On input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems (Part 1), *IEEE Trans.* **AC-11** (1966), 228–238.
122. Zames, G.: Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses, *IEEE Trans.* **AC-26** (1981), 301–320.
123. Zames, G.; Francis, B.: Feedback, minimax sensitivity, and optimal robustness, *IEEE Trans.* **AC-28** (1983) (1983), 585–601.

Anhang 1

Lösung der Übungsaufgaben

Dieser Anhang enthält die Lösungen der mit einem Stern gekennzeichneten Übungsaufgaben.

Aufgabe 2.5 Pole und Nullstellen eines Eingrößensystems

1. Die Übertragungsfunktion wird mit Hilfe von Gl. (2.12) berechnet:

$$\begin{aligned} G(s) &= \mathbf{c}'(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} \\ &= (3 \ 1) \begin{pmatrix} s & 2 \\ -1 & s+3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{s(s+3)+2} (3 \ 1) \begin{pmatrix} * & -2 \\ * & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{s-6}{(s+1)(s+2)}. \end{aligned}$$

Dabei spielen die durch * gekennzeichneten Matrizenelemente für die weitere Rechnung keine Rolle.

2. Aus der Übertragungsfunktion kann abgelesen werden, dass das System zwei Pole bei -1 und -2 sowie eine Übertragungsnullstelle bei 6 besitzt. Die Übertragungsnullstelle ist – wie jede Übertragungsnullstelle – zugleich eine invariante Nullstelle. Weitere invariante Nullstellen kann man nur unter Verwendung der Rosenbrocksystemmatrix berechnen. Entsprechend Gl. (2.65) erhält man die invarianten Nullstellen aus der Bedingung

$$\det \begin{pmatrix} s_o & 2 & 0 \\ -1 & s_o+3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

die für $s_o = 6$ erfüllt ist. Diese Nullstelle stimmt nicht mit einem Eigenwert der Matrix $\mathbf{A}$ überein, denn sie wurde bereits als Übertragungsnullstelle erkannt. Es gibt also keine Entkopplungsnullstellen. Deshalb sind alle Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ Pole der Übertragungsfunktion.

3. Auf Grund der Übertragungsnullstelle bei $s_o = 6$ überträgt das System Eingangsgrößen der Form (2.56)

$$u(t) = \bar{u}e^{6t}$$

nicht. Damit der Ausgang vollkommen verschwindet, muss der Anfangszustand des Systems entsprechend Gl. (2.55) (mit s_o anstelle von μ) gewählt werden. Für das gegebene System ist diese Bedingung erfüllt, wenn

$$x_0 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bar{u} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{28} \\ \frac{3}{28} \end{pmatrix} \bar{u}$$

gilt.

Aufgabe 2.6 Pole und Nullstellen eines Mehrgrößensystems

1. Die Übertragungsfunktionsmatrix erhält man entsprechend Gl. (2.12) aus

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{pmatrix} 3(s+2) & s+2 \\ 2(s+1) & (s+1)(s+2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{s+1} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{2}{s+2} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Die Übertragungsfunktionsmatrix hat die Pole $s_1 = -1$ und $s_2 = -2$. Die Menge der Pole stimmt mit der Menge der Eigenwerte der Systemmatrix überein.

Betrachtet man die Elemente $G_{ij}(s)$ der Matrix $G(s)$, so stellt man fest, dass Pole von Nullstellen kompensiert werden und deshalb die Anzahl der Pole der einzelnen Elemente G_{ij} geringer ist als die Anzahl der Pole des Gesamtsystems. Wie man beispielsweise aus dem Element $G_{11} = \frac{3}{s+1}$ sieht, wird die Dynamik bei der Übertragung der ersten Eingangsgröße auf die erste Ausgangsgröße nur vom Pol $s_1 = -1$ bestimmt.

Die Übertragungsnullstellen des Systems erhält man entsprechend Gl. (2.60) aus

$$\begin{aligned} \det G(s) &= \det \begin{pmatrix} \frac{3}{s+1} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{2}{s+2} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{3}{s+1} - \frac{2}{(s+2)(s+1)} \\ &= \frac{3s+4}{(s+2)(s+1)} \stackrel{!}{=} 0, \end{aligned}$$

woraus folgt, dass

$$s_o = -\frac{4}{3}$$

eine Übertragungsnullstelle ist. Diese Nullstelle tritt auf, obwohl kein Element G_{ij} der Übertragungsfunktionsmatrix $G(s)$ eine Nullstelle besitzt! Man kann die Nullstellen von $G(s)$ also nicht aus den Elementen G_{ij} ablesen.

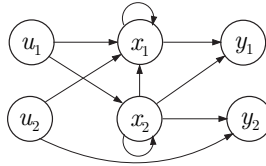


Abb. A.1: Signalflussgraph des gegebenen Mehrgrößensystems

Aus der Rosenbrocksystemmatrix erhält man dieselbe Nullstelle. Dass keine Entkoppelungsnullstellen auftreten, erkennt man bereits daran, dass die beiden Eigenwerte der Matrix A auch Pole der Übertragungsfunktionsmatrix sind.

3. Aus dem Signalflussgraph in Abb. A.1 kann man die Struktur der Elemente von $G(s)$ ablesen. So ist zu erkennen, dass $u_2(t)$ direkt mit $y_2(t)$ verbunden ist und es keinen Pfad von $u_2(t)$ nach $y_2(t)$ über Zustandsknoten gibt. Folglich kann $G_{22}(s)$ nur eine Konstante sein.

Desweiteren führt von $u_2(t)$ nur ein einziger Pfad nach $y_1(t)$. Dieser Pfad verläuft über den Zustand $x_1(t)$. Deshalb ist $G_{12}(s)$ eine Übertragungsfunktion erster Ordnung, beschreibt also entweder ein I-Glied oder ein PT₁-Glied. Wie die Rechnung ergab, ist $G_{12}(s) = \frac{1}{s+1}$ ein PT₁-Glied.

Ebenso ist $u_1(t)$ über $x_2(t)$ ohne Wirkung auf $x_1(t)$ mit $y_2(t)$ verbunden, so dass auch $G_{21}(s)$ nur von einem Eigenwert der Matrix A abhängen kann, nämlich dem zu $x_2(t)$ „gehörigen“ Eigenwert $\lambda_2 = -2$.

Aufgabe 3.6 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit zusammenschalteter Systeme

1. Die in Abb. A.2 (links) dargestellte Reihenschaltung zweier Integratoren kann durch die Zustandsgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \frac{1}{T_{11}} u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{T_{12}} x_1(t) \\ y_2(t) &= x_2(t)\end{aligned}$$

beschrieben werden, die in

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{T_{12}} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{T_{11}} \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= (0 \quad 1) \mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

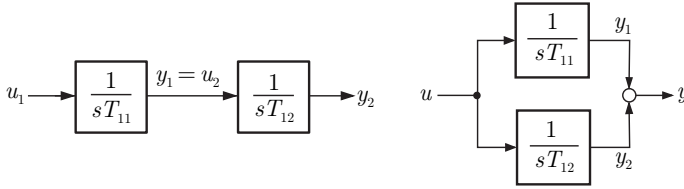


Abb. A.2: Reihenschaltung (links) und Parallelschaltung (rechts) zweier Integratoren

umgeformt werden können.

Die Steuerbarkeitsmatrix heißt

$$\mathbf{S}_S = \begin{pmatrix} \frac{1}{T_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_{11}T_{12}} \end{pmatrix}.$$

Aus $\det \mathbf{S}_S \neq 0$ folgt $\text{Rang } \mathbf{S}_S = 2$ und damit die vollständige Steuerbarkeit der Reihenschaltung.

Für die in Abb. A.2 (rechts) dargestellte Parallelschaltung zweier Integratoren erhält man die Zustandsgleichung

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{T_{11}} \\ \frac{1}{T_{12}} \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= (1 \ 1) \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

und daraus die Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathbf{S}_S = \begin{pmatrix} \frac{1}{T_{11}} & 0 \\ \frac{1}{T_{12}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist $\det \mathbf{S}_S = 0$. Die Steuerbarkeitsmatrix hat also den Rang eins, d. h., die Parallelschaltung zweier Integratoren ist nicht vollständig steuerbar. Das bedeutet, dass die Zustandsgrößen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ nicht einzeln, sondern nur ihre Summe $x_1(t) + x_2(t)$ durch die Eingangsgröße beeinflusst werden kann.

Die Reihenschaltung ist jedoch ausgangsteuerbar, denn es gilt

$$\text{Rang } \mathbf{S}_{AS} = \begin{pmatrix} \frac{1}{T_{11}} + \frac{1}{T_{12}} & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 = r.$$

Dieses Beispiel weist daraufhin, dass die vollständige Zustandssteuerbarkeit nicht notwendig für die vollständige Ausgangssteuerbarkeit ist.

2. Es werden nun zwei Systeme mit identischen dynamischen Eigenschaften, also gleicher Systemordnung und gleichen Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ untersucht. Die Parallelschaltung dieser Teilsysteme ist durch das Zustandsraummodell

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= (\mathbf{C} \ \mathbf{C}) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{pmatrix} + 2\mathbf{D}u(t) \end{aligned}$$

beschrieben. Für vollständige Steuerbarkeit muss die Matrix

$$\begin{aligned} S_S &= \left(\begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}^{2n-1} \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{2n-1}B \\ B & AB & \dots & A^{2n-1}B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

den Rang $2n$ haben, was aufgrund der linearen Abhängigkeit der Zeilen nicht erfüllt ist. Die Parallelschaltung zweier Teilsysteme mit identischer Dynamik ist also nicht vollständig steuerbar. Diese Aussage gilt unabhängig von der dynamischen Ordnung n der Teilsysteme und den Teilsystemparametern.

Für die Ausgangssteuerbarkeit muss die Matrix

$$\begin{aligned} S_{AB} &= \\ &\left((C \ C) \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix} \quad (C \ C) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix} \quad \cdots \quad (C \ C) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix} \quad 2D \right) \\ &= (2CB \quad 2CAB \quad \dots \quad 2CA^{2n-1}B \quad 2D) \end{aligned}$$

den Rang r haben. Da nach dem Cayley-Hamilton-Theorem (A2.45) nur die ersten n Potenzen von A linear unabhängig sind, wird durch die höheren Potenzen der Rang von S_{AS} nicht verändert und es gilt

$$\text{Rang } S_{AS} = \text{Rang } (CB \quad CAB \quad \dots \quad CA^{n-1}B \ D).$$

Wenn die Teilsysteme ausgangssteuerbar sind, so hat die rechte Matrix den Rang r . Wie die Rechnung zeigt, hat dann auch die Matrix S_{AS} den Rang r . Das heißt, die Parallelschaltung zweier identischer Teilsysteme ist genau dann ausgangssteuerbar, wenn die Teilsysteme ausgangssteuerbar sind.

Für die vollständige Beobachtbarkeit muss

$$S_B = \begin{pmatrix} (C \ C) \\ (C \ C) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \\ (C \ C) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}^2 \\ \vdots \\ (C \ C) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & C \\ CA & CA \\ CA^2 & CA^2 \\ \vdots & \vdots \\ CA^{n-1} & CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

den Rang $2n$ haben, was aufgrund der linearen Abhängigkeit der Spalten nicht erfüllt ist. Die Parallelschaltung ist also nicht vollständig beobachtbar.

Anwendungen. In der Technik findet man häufig mehrere Teilsystem, die im regelungstechnischen Sinne parallel geschaltet sind und die man nach Möglichkeit mit einer gemeinsamen Stellgröße steuern will. Beispiele sind die in einem Kraftwerk arbeitenden Blöcke, die in dasselbe Netz einspeisen und gemeinsam eine vorgegebene Leistung erzeugen sollen, Düsen, durch die parallel Flüssigkeiten in einen Behälter eingespritzt wird und

deren Einspritzmenge durch eine gemeinsame Stellgröße beeinflusst wird, oder Hebel, die ein Werkstück parallel verschieben sollen und deren Bewegung durch ein gemeinsames Stellsignal vorgegeben wird. In diesen Anordnungen baut man die Teilsysteme möglichst gleichartig auf, um eine möglichst große Gleichförmigkeit in der „Bewegung“ zu erreichen.

Vom regelungstechnischen Standpunkt sind derartige Systeme Parallelschaltungen von Teilsystemen mit ähnlichem oder, idealisiert betrachtet, identischen dynamischen Eigenschaften. Wie das Ergebnis dieser Aufgabe gezeigt hat, sind diese Systeme nicht vollständig steuerbar. Ob diese Tatsache für die Lösung der Regelungsaufgabe kritisch ist, hängt vom konkreten Anwendungsfall ab. Beim Beispiel der Kraftwerke heißt die Nichtsteuerbarkeit, dass sich die angeforderte Leistung nicht zwingend zu gleichen Teilen auf die einzelnen Blöcke verteilt, was man häufig verhindern will und entsprechend der hier durchgeführten Analyse nur verhindern kann, wenn man die Blöcke mit getrennten Eingangsgrößen ansteuert.

Aufgabe 3.7 Übertragungsfunktion nicht vollständig steuerbarer Systeme

1. Für die Steuerbarkeitsmatrix des Systems erhält man

$$S_S = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 10 & -20 \end{pmatrix}.$$

Da der Rang dieser Matrix gleich eins ist, ist das System nicht vollständig steuerbar.

Mit dem Hautuskriterium kann man bestimmen, welcher Eigenwert nicht steuerbar ist. Für den Eigenwert $\lambda_1 = 3$ muss die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

den Rang zwei haben. Da die beiden letzten Spalten linear abhängig sind, hat diese Matrix jedoch nur den Rang eins. Also ist der Eigenwert $\lambda_1 = 3$ nicht steuerbar.

Für den Eigenwert $\lambda_2 = -2$ lautet die Bedingung

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = 2.$$

Diese Bedingung ist erfüllt, der Eigenwert $\lambda_2 = -2$ also steuerbar.

Das System ist vollständig beobachtbar, denn die Bedingung des Kalmankriteriums ist erfüllt:

$$\text{Rang } S_B = \text{Rang} \begin{pmatrix} c' \\ c'A \end{pmatrix} = \text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = 2.$$

2. Aus den bisherigen Untersuchungen folgt, dass das System eine Eingangsentkopplungsnullstelle bei $s_0 = 3$ besitzt. Der Eigenwert $\lambda_1 = 3$ tritt deshalb nicht als Pol in der Übertragungsfunktion auf.

Es gibt keine weiteren invarianten Nullstellen, da die Determinante der Rosenbrocksystemmatrix für dieses System nur bei der bereits bekannten Eingangsentkopplungsnullstelle verschwindet:

$$\det \mathbf{P}(s_0) = \det \begin{pmatrix} s_0 - 3 & 1 & -2 \\ 0 & s_0 + 2 & -10 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2s_0 - 6.$$

Daraus kann man ablesen, dass bei der Übertragungsfunktion im Zähler eine Konstante und im Nenner der Linearfaktor $s + 2$, der zum Pol $s_1 = \lambda_2 = -2$ gehört, steht.

3. Die Übertragungsfunktion folgt aus der allgemeinen Beziehung

$$\begin{aligned} G(s) &= \mathbf{c}'(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} \\ &= \frac{1}{(s-3)(s+2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+2 & -1 \\ 0 & s-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{s+2}. \end{aligned}$$

Im Gegensatz zur Systemordnung $n = 2$ mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -2$ liegt eine Übertragungsfunktion erster Ordnung mit nur einem Pol $s_1 = -2$ vor. Der Pol entspricht dem steuerbaren Eigenwert λ_2 . Die Übertragungsfunktion hat keine Nullstelle, denn das System hat nur eine invariante Nullstelle, die mit einem Eigenwert der Matrix $\mathbf{A}$ zusammenfällt und folglich eine Entkopplungsnullstelle darstellt, die in der Übertragungsfunktion nicht zu sehen ist.

4. Da der Eigenwert $\lambda_1 = 3$ positiven Realteil hat, ist das System nicht zustandsstabil. Weil der instabile Eigenwert nicht als Pol in der Übertragungsfunktion $G(s)$ auftritt, ist das System jedoch E/A-stabil. Dieser scheinbare Widerspruch liegt darin, dass bei der Betrachtung der E/A-Stabilität vorausgesetzt wird, dass sich das System zur Zeit $t = 0$ in der Ruhelage befindet ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$). Da der zu λ_1 gehörige instabile Eigenvorgang nicht steuerbar ist, kann er durch die Eingangsgröße nicht angeregt werden. Obwohl das System vollständig beobachtbar und der instabile Eigenvorgang e^{3t} deshalb am Ausgang erkennbar ist, spielt dieser Eigenvorgang bei Betrachtung der E/A-Stabilität keine Rolle, weil er durch den Systemeingang nicht angeregt werden kann.

Aufgabe 3.8 Beobachtbarkeit der Satellitenbewegung

Es muss zunächst das Zustandsraummodell für die Satellitenbewegung aufgestellt werden. Wählt man den Zustandsvektor

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ \dot{v}(t) \\ h(t) \\ \dot{h}(t) \end{pmatrix},$$

so kann man aus den angegebenen Gleichungen das folgende Modell ablesen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v(t) \\ \dot{v}(t) \\ h(t) \\ \dot{h}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(t) \\ \dot{v}(t) \\ h(t) \\ \dot{h}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= (0 \ 0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} v(t) \\ \dot{v}(t) \\ h(t) \\ \dot{h}(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Beobachtbarkeitsmatrix für dieses System lautet

$$\mathbf{S}_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \\ -6\omega^3 & 0 & 0 & -4\omega^2 \end{pmatrix}.$$

Sie hat vollen Rang 4. Also ist der Zustand des Satelliten, der die Lage des Satelliten im v/h -Koordinatensystem beschreibt und außerdem die Geschwindigkeit in beide Richtungen angibt, aus der Messgröße $y(t) = h(t)$ beobachtbar.

Aufgabe 3.12 Beobachtbarkeit eines Gleichstrommotors

1. Der Sensor ist durch das Zustandsraummodell

$$\begin{aligned} \dot{x}_S(t) &= -\frac{1}{T_S} x_S(t) + \frac{1}{T_S} \dot{\phi}(t) \\ y(t) &= x_S(t) \end{aligned}$$

beschrieben. Motor und Drehzahlregler zusammen sind ein System dritter Ordnung mit dem Zustandsvektor

$$\mathbf{x}_M(t) = \begin{pmatrix} i_A(t) \\ \dot{\phi}(t) \\ x_S(t) \end{pmatrix}.$$

Durch Kombination der Zustandsraummodelle beider Komponenten erhält man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_M(t) &= \begin{pmatrix} -\frac{R_A}{L_A} & -\frac{k_M}{L_A} & 0 \\ \frac{k_T}{J} & -\frac{k_L}{J} & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_S} & -\frac{1}{T_S} \end{pmatrix} \mathbf{x}_M(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{L_A} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \quad \mathbf{x}_M(0) = \begin{pmatrix} i_A(0) \\ \dot{\phi}(0) \\ x_S(0) \end{pmatrix} \\ y(t) &= (0 \ 0 \ 1) \mathbf{x}_M(t). \end{aligned}$$

2. Die Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathbf{S}_S = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{L_A} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\frac{R_A}{L_A^2} \\ \frac{k_T}{J L_A} \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\frac{R_A^2}{L_A^3} - \frac{k_M k_T}{J L_A^2} \\ \frac{k_T R_A}{J L_A^2} - \frac{k_L k_T}{J^2 L_A} \\ \frac{k_T}{J L_A T_S} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

hat vollen Rang. Folglich ist der Motor vollständig steuerbar. Diese Aussage gilt für beliebige Parameterwerte, wenn man beachtet, dass sämtliche Parameter nur positiv sein können.

Die Beobachtbarkeitsmatrix heißt

$$\mathbf{S}_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{T_S} & -\frac{1}{T_S} \\ \frac{k_T}{J T_S} & -\frac{k_L}{J T_S} & \frac{1}{T_S^2} \end{pmatrix}.$$

Da diese Matrix für beliebige, nicht verschwindende Parameterwerte den Rang drei hat, ist der Motor vollständig beobachtbar.

3. Da die (numerischen) Eigenschaften der vollständigen Steuerbarkeit und der vollständigen Beobachtbarkeit erfüllt sind, gelten sie auch strukturell. Der Vollständigkeit halber wird der Strukturgraf in Abb. A.3 angegeben. Der Motor ist offenbar eingangsverbunden und ausgangsverbunden. Darüber hinaus erfüllen die Strukturmatrizen die beiden Rangbedingungen aus Satz 3.7.

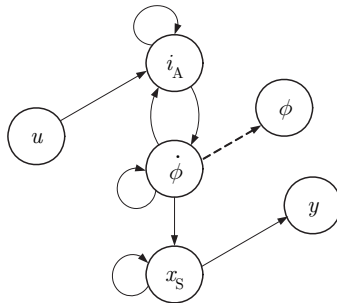


Abb. A.3: Strukturgraf des Gleichstrommotors mit Sensor für die Winkelgeschwindigkeit

4. Dass es nicht möglich ist, den Drehwinkel aus der Drehwinkelgeschwindigkeit zu berechnen, wird zunächst an den Berechnungsvorschriften erläutert, bevor eine Beobachtbarkeitsanalyse durchgeführt wird.

Der Drehwinkel

$$\phi(t) = \phi(0) + \int_0^t \dot{\phi}(\tau) d\tau \quad (\text{A.1})$$

kann aus der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}(t)$ nur dann durch Integration berechnet werden, wenn man ihn zur Zeit $t = 0$ kennt. Wenn man nur $\dot{\phi}(t)$ und nicht $\phi(t)$ misst, ist $\phi(0)$ unbekannt und deshalb nicht aus $\dot{\phi}(t)$ berechenbar. Damit kann $\phi(t)$ auch nicht aus dem Sensorsignal $y(t)$ beobachtet werden, denn bei der Beobachtung tritt gegenüber der Berechnung entsprechend Gl. (A.1) die Schwierigkeit hinzu, dass $\dot{\phi}(t)$ und $y(t)$ über ein dynamisches Element verknüpft sind, das die Berechnung erschwert.

Dieselbe Aussage erhält man aus einer Beobachtbarkeitsanalyse. Dazu muss zunächst der Drehwinkel in das Zustandsraummodell eingeführt werden, was zu einer Verlängerung des Zustandsvektors auf

$$\mathbf{x}_M = \begin{pmatrix} i_A \\ \dot{\phi} \\ x_S \\ \phi \end{pmatrix}$$

führt. Damit heißt das Zustandsraummodell

$$\dot{\mathbf{x}}_M(t) = \begin{pmatrix} -\frac{R_A}{L_A} & -\frac{k_M}{L_A} & 0 & 0 \\ \frac{k_T}{J} & -\frac{k_f}{J} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_S} & -\frac{1}{T_S} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_M(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{L_A} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \quad \mathbf{x}_M(0) = \begin{pmatrix} i_A(0) \\ \dot{\phi}(0) \\ x_S(0) \\ \phi(0) \end{pmatrix}$$

$$y(t) = (0 \ 0 \ 1 \ 0) \mathbf{x}_M(t).$$

Der Strukturgraf erhält die in Abb. A.3 gestrichelt dargestellte neue Kante. Offenbar ist das System nicht Ausgangsverbunden und deshalb auch nicht strukturell beobachtbar. Das heißt, dass es nicht möglich ist, den Drehwinkel ϕ aus der gemessenen Drehgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ zu berechnen.

Der Strukturgraf zeigt anschaulich, dass der Drehwinkel $\phi(t)$ nicht auf dem Pfad von $u(t)$ nach $y(t)$ liegt. Er beeinflusst $y(t)$ nicht und kann deshalb nicht aus $y(t)$ berechnet werden.

Aufgabe 3.14 Strukturelle Steuerbarkeit eines elektrischen Rotationsantriebs

1. Setzt man anstelle der von null verschiedenen Parameter des Zustandsraummodells ein *, so erhält man die Strukturmatrix

$$Q_0 = \begin{array}{cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & u & y \\ \begin{pmatrix} 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ u \\ y \end{matrix} \end{array}$$

Der Graf $\mathcal{G}(Q_0)$ ist in Abb. A.4 dargestellt. Die dünne Linie trennt die Zustandsgrößen der Schwungmasse 1 von den Zustandsgrößen der Schwungmasse 2.

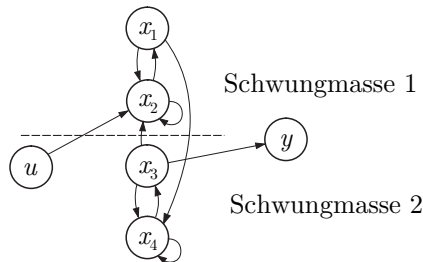


Abb. A.4: Strukturgraf des Rotationsantriebs

2. Man erkennt aus dem Strukturgraphen, dass das System eingangsverbunden und ausgangsverbunden ist, d. h., dass man von der Eingangsgröße u über Pfade alle Zustandsgrößen x_i erreichen kann und dass alle Zustandsgrößen über Pfade mit der Ausgangsgröße y verbunden sind. Damit ist die erste Bedingung für die strukturelle Steuer- und Beobachtbarkeit erfüllt.

Die zweite Bedingung

$$\text{s-Rang} \begin{pmatrix} S_A & S_b \end{pmatrix} = \text{s-Rang} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & \bullet & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \bullet & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & 0 \\ \bullet & 0 & * & * & 0 \end{array} \right) = 4 \quad (\text{A.2})$$

für die strukturelle Steuerbarkeit bzw.

$$\text{s-Rang} \begin{pmatrix} S_A \\ S_C \end{pmatrix} = \text{s-Rang} \left(\begin{array}{cccc} 0 & \bullet & 0 & 0 \\ * & * & \bullet & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \\ \bullet & 0 & * & * \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & * & 0 \end{array} \right) = 4 \quad (\text{A.3})$$

für die strukturelle Beobachtbarkeit ist ebenfalls erfüllt. Die in Gln. (A.2) und (A.3) eingetragenen Elemente $\bullet$ zeigen, dass es möglich ist, vier verschiedene $*$ -Elemente zu finden, die jeweils in unterschiedlichen Zeilen und Spalten liegen. Der Rotationsantrieb ist strukturell steuerbar und beobachtbar.

3. Wird anstelle der alten Messgröße $y(t)$ die neue Messgröße

$$\bar{y}(t) = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \quad x(t)$$

verwendet, so geht dadurch weder die strukturelle Steuerbarkeit noch die strukturelle Beobachtbarkeit verloren. Auf Grund der geänderten Messgröße muss die von x_3 nach y laufende Kante durch eine Kante von x_1 nach y ersetzt werden.

Man erkennt, dass auch in diesem Fall das System ausgangsv Verbunden bleibt. Die Bedingung (A.2) ist weiterhin erfüllt, da der Rang bereits durch S_A bestimmt ist und sich daher eine Änderung von S_C nicht auswirkt. Das bedeutet, dass die Wahl der gemessenen Zustandsgröße frei ist.

Aus dem Strukturgraf und Gl. (A.3) ist ebenfalls erkennbar, dass auch die Wahl der direkt angesteuerten Zustandsgröße frei ist, ohne dass die strukturelle Steuerbarkeit verloren geht.

Der Grund für die strukturelle Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit lässt sich technisch sehr leicht interpretieren. Im Rotationsantrieb sind alle Elemente untereinander streng verkoppelt, d. h., eine Veränderung der Eingangsspannung $U_A(t)$ beeinflusst die Drehgeschwindigkeit sämtlicher Scheiben, wie auch eine Vergrößerung der Last (z. B. Θ_ω) sich auf den Strom $I_A(t)$ durch den Motor bemerkbar macht. Deshalb ist es möglich, mit einer Messgröße sämtliche Zustandsvariablen zu beobachten.

Aufgabe 3.15 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit einer Verladebrücke

1. Aus der charakteristischen Gleichung

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & -a_{43} & \lambda \end{pmatrix} = 0$$

erhält man die Eigenwerte $\lambda_{1/2} = 0$ und $\lambda_{3/4} = \pm j\sqrt{|a_{43}|}$.

Für die Steuerbarkeit der Eigenwerte $\lambda_{1/2}$ muss entsprechend dem Hautuskriterium die Bedingung

$$\text{Rang} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 & b_4 \end{array} \right) = 4$$

erfüllt sein. Da die erste Spalte verschwindet, muss die mit der verbleibenden (4, 4)-Matrix gebildete Determinante von null verschieden sein, was für

$$a_{23}b_4 \neq a_{43}b_2$$

der Fall ist. Setzt man die Beziehungen (3.65) – (3.68) ein, so folgt mit

$$m_L \neq m_L + m_K$$

eine Bedingung, die aufgrund der von Null verschiedenen Masse m_K der Laufkatze stets erfüllt ist. Die Eigenwerte $\lambda_{1/2}$ sind also steuerbar.

Für die Eigenwerte $\lambda_{3/4}$ lautet die Steuerbarkeitsbedingung

$$\text{Rang} \left(\begin{array}{cccc|c} \pm j\sqrt{|a_{43}|} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm j\sqrt{|a_{43}|} & a_{23} & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & \pm j\sqrt{|a_{43}|} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & \pm j\sqrt{|a_{43}|} & b_4 \end{array} \right) = 4.$$

Wegen $a_{43} \neq 0$ ist diese Bedingung nur dann erfüllt, wenn

$$b_4 \neq 0$$

und aufgrund von Gl. (3.68) folglich

$$-\frac{1}{m_K l} \neq 0$$

ist. Es sind also alle Eigenwerte vollständig steuerbar.

Für die Beobachtbarkeit von $\lambda_{1/2}$ liefert das Hautuskriterium

$$\text{Rang} \left(\begin{array}{c} \mathbf{c}' \\ \mathbf{A} - \lambda_{1/2} \mathbf{I} \end{array} \right) = \text{Rang} \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{array} \right) = 3. \quad (\text{A.4})$$

Da die erste Spalte eine Nullspalte darstellt, ist der Rang der Matrix kleiner als $n = 4$, das Hautuskriterium also verletzt. Die Eigenwerte $\lambda_{1/2}$ sind nicht beobachtbar.

Die Beobachtbarkeitsbedingung für die Eigenwerte $\lambda_{3/4}$ lautet

$$\text{Rang} \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \pm j\sqrt{|a_{43}|} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm j\sqrt{|a_{43}|} & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \pm j\sqrt{|a_{43}|} & 1 \\ 0 & 0 & a_{43} & \pm j\sqrt{|a_{43}|} \end{array} \right) = 4.$$

Die Rangbedingung ist erfüllt, wenn

$$a_{43} = -\frac{m_L + m_K}{m_K} \frac{g}{l} \neq 0$$

ist. Da diese Bedingung stets erfüllt ist, folgt daraus die Beobachtbarkeit von $\lambda_{3/4}$.

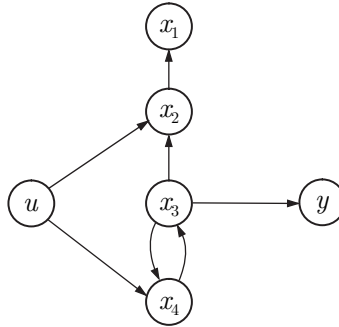


Abb. A.5: Strukturgraph der Verladebrücke

- Der in Abb. A.5 dargestellte Strukturgraph zeigt, dass die im Aufgabenteil 1 ermittelten Ergebnisse auch strukturell gelten. Das System ist eingangsverbunden, jedoch nicht Ausgangsverbunden. Die Tatsache, dass die Verladebrücke nicht beobachtbar ist, kann man also viel schneller erkennen, wenn man ohne großen Rechenaufwand aus dem Zustandsraummodell den Strukturgraph ableitet. Die Zustandsgrößen x_1 und x_2 sind *strukturell*, also unabhängig von den Systemparametern, nicht beobachtbar.
- Mit der neuen Ausgabegleichung

$$y(t) = (1 \ 0 \ 0 \ 0) x(t)$$

gibt es im Strukturgraph in Abb. A.5 anstelle der gerichteten Kante von x_3 zu y eine Kante von x_1 nach y . Damit ist das System Ausgangsverbunden. In der Matrix

$$\text{s-Rang } \mathbf{S}_B = \text{s-Rang} \begin{pmatrix} \bullet & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bullet & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bullet & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & * & 0 \end{pmatrix} = 4$$

lassen sich die vier durch $\bullet$ gekennzeichneten $*$ -Elemente finden, die in unterschiedlichen Zeilen und Spalten stehen. Mit dem neuen Messvektor ist das System daher strukturell beobachtbar geworden.

Ersetzt man in Gl. (A.4) die erste Zeile gegen den neuen Messvektor und bildet die Determinante der quadratischen Matrix der ersten vier Zeilen, so stellt man fest, dass für $a_{23} \neq 0$ die Rangbedingung erfüllt ist und damit die Eigenwerte $\lambda_{1/2}$ beobachtbar sind.

Aufgabe 3.16 Steuerbarkeit eines Systems in Regelungsnormalform

Die (n, n) -Steuerbarkeitsmatrix S_S für das System in Regelungsnormalform

$$S_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & * \\ 0 & 1 & -a_{n-1} & \cdots & * \\ 1 & -a_{n-1} & -a_{n-1} - a_{n-2} & \cdots & * \end{pmatrix}$$

hat die Gestalt einer Dreiecksmatrix und folglich den vollen Rang n . Daraus folgt die vollständige Steuerbarkeit des Systems in Regelungsnormalform.

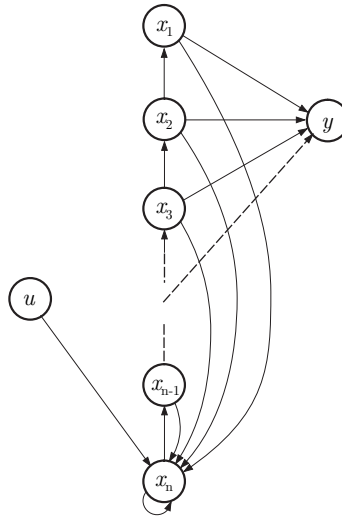


Abb. A.6: Strukturgraph eines Systems in Regelungsnormalform

Der Strukturgraph des Systems ist in Abb. A.6 dargestellt. Man erkennt die Eingangsverbundenheit. Damit ist die erste Bedingung für strukturelle Steuerbarkeit erfüllt. Die Rangbedingung der Strukturmatrix

$$\text{s-Rang}(S_A, S_B) = \text{s-Rang} \begin{pmatrix} 0 & \bullet & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bullet & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \bullet & 0 \\ * & * & * & \cdots & * & \bullet \end{pmatrix} = n$$

ist erfüllt, da sich die durch $\bullet$ gekennzeichneten n Elemente finden lassen, die in unterschiedlichen Zeilen und Spalten stehen. Das System ist strukturell steuerbar.

Diskussion. Die durch $\bullet$ gekennzeichneten Elemente entsprechen den von den Systemparametern a_i unabhängigen Elementen von A und b . Folglich gilt die strukturelle Steuerbarkeit auch für $a_i = 0$.

Aus der angegebenen Steuerbarkeitsmatrix ist zu erkennen, dass die Rangbedingung für beliebige Werte von a_i erfüllt ist. Die Steuerbarkeit ist also insofern eine strukturelle Eigenschaft, als dass sie für alle in Regelungsnormalform aufgeschriebenen Systeme gilt. Das bedeutet, dass von einem beliebigen Zustandsraummodell nur der steuerbare Teil in die Regelungsnormalform überführt werden kann.

Im Gegensatz zur Eigenschaft der strukturellen Steuerbarkeit, die für die numerische Steuerbarkeit nur notwendig, aber nicht hinreichend ist, gilt die Steuerbarkeit hier sogar für *beliebige* Parameter, also auch für $a_i = 0$.

Aufgabe 3.17 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit der GILBERT-Realisierung

Die Realisierung (3.75) – (3.77) ist genau dann minimal, wenn das angegebene Modell vollständig steuerbar und beobachtbar ist. Die Steuerbarkeitsmatrix hat aufgrund der Gestalt der angegebenen Matrizen A und B die Form

$$S_S = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{\bar{n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & s_1 I & \cdots & s_1^{n-1} I \\ I & s_2 I & \cdots & s_2^{n-1} I \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ I & s_{\bar{n}} I & \cdots & s_{\bar{n}}^{n-1} I \end{pmatrix},$$

wobei die zweite Matrix auf der rechten Seite eine vandermondesche Matrix ist. Diese Matrix hat vollen Zeilenrang, wenn entsprechend der bei der GILBERT-Repräsentation gemachten Voraussetzung alle Eigenwerte s_i voneinander verschieden sind. Folglich hat S_S denselben Rang wie $\text{diag } B_i$, und diese Matrix hat den Rang n , wie die auf Seite 134 angegebene Konstruktionsvorschrift für die Matrizen B_i zeigt. Damit ist die vollständige Steuerbarkeit nachgewiesen.

In derselben Weise kann die Beobachtbarkeit bewiesen werden.

Aufgabe 3.18 Minimale Realisierung eines Dampferzeugermodells

Die gegebene Übertragungsfunktion kann in die Partialbrüche

$$\begin{aligned} G(s) = & \frac{\begin{pmatrix} -0,1286 & 0 \\ 0,0163 & 0 \end{pmatrix}}{s + 0,1} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & -0,0055 \\ 0 & -0,0045 \end{pmatrix}}{s + 0,05} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,0045 \end{pmatrix}}{s + 0,025} + \\ & + \frac{\begin{pmatrix} 0,1286 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{s + 0,037} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0,0055 \\ -0,0163 & 0 \end{pmatrix}}{s + 0,0385} \end{aligned}$$

zerlegt werden, wobei die im Zähler stehenden Matrizen entsprechend Gl. (3.74) berechnet wurden. Bis auf die letzte haben alle diese Matrizen den Rang eins, so dass sie in ein dyadisches Produkt eines Spalten- und eines Zeilenvektors zerlegt werden können, das beispielhaft für die erste Matrix angegeben ist:

$$\begin{pmatrix} -0,1286 & 0 \\ 0,0163 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1286 \\ 0,0163 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die letzte Matrix hat die Zerlegung

$$\begin{pmatrix} 0 & 0,0055 \\ -0,0163 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0055 & 0 \\ 0 & 0,0163 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man folgende minimale Realisierung sechster Ordnung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -0,1 & & & & & \\ & -0,05 & & & & \\ & & -0,025 & & & \\ & & & -0,037 & & \\ & & & & -0,0385 & \\ & & & & & -0,0385 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} -0,1286 & -0,0055 & 0 & 0,1286 & 0,0055 & 0 \\ 0,0163 & -0,0045 & 0,0045 & 0 & 0 & -0,0163 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t).$$

Es ist offensichtlich, dass der Pol $-0,0385$ im Zustandsraummodell zweimal als Eigenwert auftritt.

Aufgabe 4.4 Mehrgrößenregler mit PI- und PID-Charakter

Für die Regelstrecke

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}d(t), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

stellt die in Abb. 4.21 gezeigte Rückführung einen Regler dar, der die Regelabweichung $e(t) = \mathbf{w}(t) - \mathbf{y}(t)$, die integrierte Regelabweichung

$$e_I(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau$$

sowie den Zustand $\mathbf{x}$ zurückführt, also durch

$$\mathbf{u}(t) = \tilde{\mathbf{K}}_P e(t) + \tilde{\mathbf{K}}_I e_I(t) - \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{x}(t) \quad (\text{A.5})$$

dargestellt werden kann.

Die Aufgabe kann man dadurch lösen, dass man zeigt, dass ein PID-Regler

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}_P e(t) + \mathbf{K}_I e_I(t) + \mathbf{K}_D (\dot{\mathbf{w}}(t) - \dot{\mathbf{y}}(t))$$

in diese Form überführt werden kann und ein explizit eingeführter D-Anteil deshalb gar nicht notwendig ist. Für die Ableitung des Ausgangsvektors erhält man aus dem Regelstreckenmodell

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(t).$$

Da sprunghafte Führungssignale betrachtet werden, gilt $\dot{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{0}$. Für die Rückführung erhält man damit

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}_P e(t) + \mathbf{K}_I e_I(t) - \mathbf{K}_D (\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(t))$$

und nach Umstellen

$$\mathbf{u}(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{K}_D \mathbf{C} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{K}_P \mathbf{e}(t) + (\mathbf{I} + \mathbf{K}_D \mathbf{C} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{K}_I \mathbf{e}_I(t) - (\mathbf{I} + \mathbf{K}_D \mathbf{C} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{K}_D \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{x}(t).$$

Diese Gleichung hat die Form (A.5) eines PI-Reglers mit Zustandsrückführung. D-Anteile sind in dieser Regelung also implizit enthalten. Diese Tatsache ist übrigens nicht verwunderlich, wenn man bedenkt, dass mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ dieser Regler über die vollständige Information über die Bewegung der Regelstrecke verfügt, während D-Regler bei einschleifigen Regelkreisen durch das Differenzieren der Ausgangsgröße etwas mehr von diesem Zustand „erfahren wollen“, also beispielsweise aus einem Weg die Geschwindigkeit bestimmen.

Aufgabe 5.1 Frequenzregelung in Elektroenergienetzen

1. Das Blockschaltbild des Netzes mit Primärregelung ist in Abb. A.7 dargestellt. Die Primärregelung führt, wie in der Aufgabenstellung angegeben ist, auf eine Änderung der Erzeuger- und Verbraucherleistungen, so dass für deren Differenz $p_{G_i}(t) - p_{V_i}(t)$ im statischen Zustand die Beziehung

$$p_{G_i} - p_{V_i} = -k_i f,$$

gilt. Diese Wirkung wird durch die Blöcke mit den Übertragungsfunktionen $k_1 G_{11}(s)$ und $k_2 G_{22}(s)$ ausgedrückt. Diese Blöcke zeigen die Abhängigkeit der Erzeugerleistungen und Verbraucherleistungen von der Frequenz f , wobei $G_{11}(0) = G_{22}(0) = 1$ gilt, so dass sich für eine konstante Frequenzabweichung f der o. a. statische Endwert einstellt. Die Blöcke mit den Übertragungsfunktionen $G_1(s)$ und $G_2(s)$ beschreiben das Verhalten der Kraftwerke 1 und 2 in Bezug zu den Eingangsgrößen u_1 und u_2 . Die frequenzunabhängigen Laständerungen p_{L_1} und p_{L_2} greifen wie in Abb. 5.1 an der Summationsstelle vor dem Integrator an.

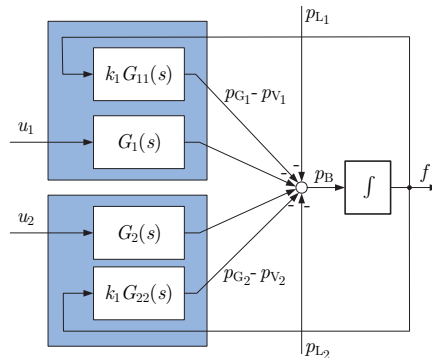


Abb. A.7: Blockschaltbild des Netzes mit Primärregelkreis

2. Auf Grund der Leistungsregler gilt, wie in der Aufgabenstellung angegeben, für das statische Verhalten der beiden Kraftwerke die Beziehung

$$G_1(0) = G_2(0) = 1.$$

Durch eine Laständerung p_{L1} oder p_{L2} wird im Netz ein Übergangsvorgang angeregt, der abgeklungen ist, wenn $p_B = 0$ gilt, so dass der im Blockschaltbild eingetragene Integrator eine konstante Frequenz f ausgibt. Um den Wert von f zu berechnen, wird aus dem Blockschaltbild folgende Beziehung abgelesen:

$$\begin{aligned} 0 &= p_B \\ &= u_1 - k_1 f - p_{L1} + u_2 - k_2 f - p_{L2} \\ &= (u_1 + u_2) - (k_1 + k_2) f - p_L. \end{aligned}$$

Da nur die Primärregelung wirksam ist, gilt $u_1 = u_2 = 0$. Für die bleibende Frequenzabweichung erhält man

$$f = -\frac{p_{L1} + p_{L2}}{k_1 + k_2} \quad (\text{A.6})$$

und für das angegebene Beispiel

$$f = -\frac{100 \text{ MW}}{(1163 + 1555) \frac{\text{MW}}{\text{Hz}}} = -0,0368 \text{ Hz.}$$

Die Beziehung (A.6) kann man übrigens auch dadurch ableiten, dass man die Störübertragungsfunktion für das in Abb. A.7 gezeigte System aufstellt und daraus die bleibende Regelabweichung für sprunghörmige Störungen berechnet.

3. Das Blockschaltbild des Sekundärregelkreises ist in Abb. A.8 dargestellt. Darin bezeichnet $G(s)$ die Übertragungsfunktionsmatrix des Netzes einschließlich der Primärregelung. Die Sekundärregelung besteht aus zwei dezentralen Teilreglern, die beide I-Anteile enthalten sollen.

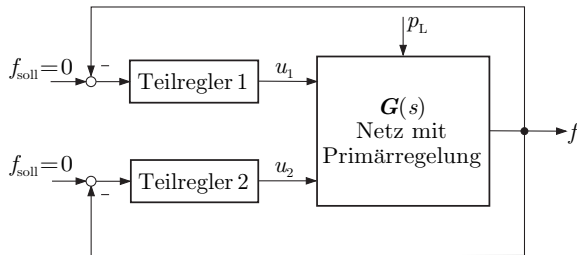


Abb. A.8: Blockschaltbild des Sekundärregelkreises

Da das primär geregelte Netz asymptotisch stabil ist, wird die Existenz der dezentralen I-Regelung mit Hilfe der Bedingung (5.10) geprüft. Das statische Verhalten der Regelstrecke ist durch

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ f \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} k_{s11} & k_{s12} \\ k_{s21} & k_{s22} \end{pmatrix}}_{K_s} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Die Statikmatrix $\mathbf{K}_s$ hat zwei gleiche Zeilen, weil beide Teilregler dieselbe Regelgröße f haben und $G_1(0) = G_2(0) = 1$ gilt. Deshalb erfüllt sie die Existenzbedingung für I-Regler nicht. Die Sekundärregelung kann also nicht in der beabsichtigten Weise durch zwei dezentrale I-Regler mit der gemeinsamen Regelgröße f vorgenommen werden.

4. Beim Netzkennlinienverfahren wird die Übergabeleistung p_t zwischen den beiden Netzen als neue Messgröße hinzugenommen und es wird mit den Regelgrößen

$$e_1(t) = k_1 f(t) + p_t(t)$$

$$e_2(t) = k_2 f(t) - p_t(t)$$

gearbeitet. Das sich dabei ergebende Blockschaltbild ist in Abb. A.9 dargestellt.

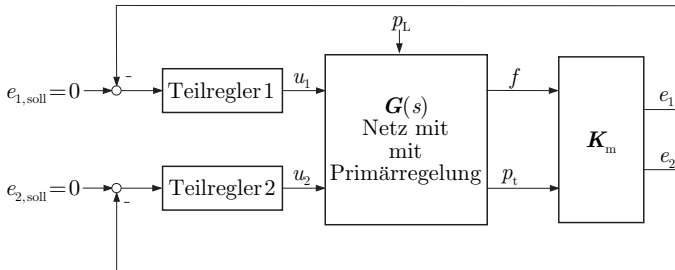


Abb. A.9: Sekundärregelung nach dem Netzkennlinienverfahren

Der neu in den Regelkreis eingefügte Block ist durch

$$\begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} k_1 & 1 \\ k_2 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{K}_m} \begin{pmatrix} f(t) \\ p_t(t) \end{pmatrix}$$

beschrieben. Das Netz einschließlich der Primärregelung erfüllt die statische Beziehung

$$\begin{pmatrix} f \\ p_t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} k_{s11} & k_{s12} \\ k_{s21} & k_{s22} \end{pmatrix}}_{\mathbf{K}_{fp}} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

wobei man k_{s21} und k_{s22} unter Verwendung von Gl. (5.21) (für $p_{Gi\text{Soll}} = u_i$ und $p_{Li} = 0$) berechnen kann. Für das statische Verhalten der Regelstrecke erhält man jetzt

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \mathbf{K}_m \mathbf{K}_{fp} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Die Statikmatrix

$$\mathbf{K}_s = \mathbf{K}_m \mathbf{K}_{fp}$$

hat vollen Zeilenrang. Folglich können zwei Teilregler mit integralem Verhalten für die Regelung eingesetzt werden.

5. Es ist nachzuweisen, dass bei sprungförmigen Laständerungen $p_{L_1}(t)$, $p_{L_2}(t)$ im stationären Zustand die Beziehungen $f = 0$, $p_{G_1} = p_{L_1}$ und $p_{G_2} = p_{L_2}$ gelten. Dieser Nachweis ist erforderlich, da durch die Regelung zunächst nur die „Ersatzgrößen“ $e_1(t)$ und $e_2(t)$ auf die vorgegebenen verschwindenden Sollwerte $e_{1\text{Soll}} = e_{2\text{Soll}} = 0$ geführt werden:

$$e_1 = k_1 f + p_t \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{A.7})$$

$$e_2 = k_2 f - p_t \stackrel{!}{=} 0. \quad (\text{A.8})$$

Addiert man beide Gleichungen, so erhält man

$$(k_1 + k_2)f = 0$$

und daraus $f = 0$. Setzt man diese Beziehung in Gl. (A.7) ein, so folgt $p_t = 0$. Mit e_1 und e_2 werden also auch die eigentlichen Regelgrößen f und p_t auf deren verschwindende Sollwerte gebracht.

$p_t = 0$ heißt, dass zwischen den Netzen keine Energie ausgetauscht wird (genauer gesagt: Der Energieaustausch hat sich gegenüber dem Arbeitspunkt nicht verändert, in dem die vertraglich vereinbarte Übergabeleistung fließt). Jedes Netz erzeugt die Leistung, die es verbraucht. Es gilt somit

$$p_{G_1} = p_{L_1}$$

$$p_{G_2} = p_{L_2}.$$

Diskussion. Betrachtet man das Regelungsziel, einer Frequenzabweichung durch Veränderung der Generatorleistungen entgegenzuwirken, als gemeinsame Aufgabe aller im Netz vorhandenen Kraftwerke, so ist es naheliegend, die im Aufgabenteil 3 betrachtete Regelungsstruktur zu verwenden, bei der jedes Kraftwerk für sich die Drehzahl des eigenen Generators und damit die Netzfrequenz regelt. Da die Regelstrecke proportionales Verhalten aufweist, müssen die Regler I-Verhalten besitzen. Auf den ersten Blick gibt es keinen Zweifel daran, dass die dezentralen Teilregler gemeinsam das Regelungsziel $f = 0$ erreichen können. Die hier durchgeführte Analyse hat jedoch gezeigt, dass dies nicht so ist, weil man eine Regelgröße nicht gleichzeitig in mehreren dezentralen Reglern mit I-Charakter verwenden kann, wenn die statischen Abhängigkeiten zwischen den Stellgrößen und der gemeinsamen Regelgröße gleich sind.

Diese Tatsache wurde für die Netzregelung schon sehr früh erkannt, allerdings nicht auf so elegantem Wege wie hier über eine Existenzbedingung für Mehrgrößen-I-Regler, sondern durch eine eingehende Analyse der sich bei der Regelung im Netz einstellenden Leistungsflüsse. Die Idee der Netzkennlinienregelung wurde in den dreißiger Jahren des 20. Jahrhunderts geboren, wobei eine Analyse des statischen Frequenz-Leistungsdigramms der einzelnen Teilnetze den Ausgangspunkt der Untersuchungen bildete [35].

Betrachtet man das statische Verhalten des Netzes ohne Sekundärregelung, so sieht man, dass die Größen e_i nach dem Abklingen des Übergangsverhaltens gerade die im i -ten Netz aufgetretene Störung p_{L_i} beschreiben. Für das Teilnetz 1 erhält man für $p_{L_2} = 0$ aus den Gln. (5.21), (A.6) und

$$p_{G_1\text{Soll}} = -k_1 f = \frac{k_1}{k_1 + k_2} p_{L_1}$$

die Beziehung

$$\begin{aligned}
e_1(\infty) &= k_1 f + \frac{k_2}{k_1 + k_2} \left(\frac{k_1}{k_1 + k_2} p_{L_1} - p_{L_1} \right) - \frac{k_1}{k_1 + k_2} \frac{k_2}{k_1 + k_2} p_{L_1} \\
&= -\frac{k_1}{k_1 + k_2} p_{L_1} - \frac{k_2}{k_1 + k_2} \frac{k_2}{k_1 + k_2} p_{L_1} - \frac{k_1}{k_1 + k_2} \frac{k_2}{k_1 + k_2} p_{L_1} \\
&= -p_{L_1}.
\end{aligned}$$

Die stationären Endwerte der Regelgröße e_1 wie auch der Regelgröße e_2 zeigen an, welche Leistung in dem betreffenden Teilnetz fehlt. Ein verschwindender Sollwert für diese Regelgrößen bedeutet deshalb, dass *kein* Leistungsdefizit im betreffenden Netz auftreten soll. Da man diese Beziehungen aus statischen Überlegungen gewonnen und dabei die Netzkennlinie verwendet hat, wird die Regelgröße e_i als Netzkennlinienfehler bezeichnet.

Aufgabe 6.1 Entwurf einer Zustandsrückführung

1. Die Eigenwerte können beliebig verschoben werden, wenn die Regelstrecke vollständig steuerbar ist, was man mit Hilfe der Steuerbarkeitsmatrix S_S überprüfen kann. Aus

$$\text{Rang}(\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 1 & -2 & 8 \\ 0 & 4 & -20 \end{pmatrix} = 3 = n$$

erkennt man, dass die Regelstrecke vollständig steuerbar ist. Die Eigenwerte können daher durch eine Zustandsrückführung *beliebig*, also auch an die Stelle $-1, -2 \pm j$ verschoben werden.

2. Da die Regelstrecke vollständig steuerbar ist, kann das Modell in Regelungsnormalform einfach dadurch gebildet werden, dass man die charakteristische Gleichung der Matrix $\mathbf{A}$ aufstellt

$$\begin{aligned}
\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \det \left(\lambda \mathbf{I} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \right) \\
&= \lambda^3 + 6\lambda^2 + 7\lambda + 2
\end{aligned}$$

und die dabei erhaltenen Koeffizienten in die Frobeniusmatrix $\mathbf{A}_R$ einträgt:

$$\dot{\mathbf{x}}_R(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -7 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{x}_R(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t).$$

Die Reglerparameter (bezüglich der Regelungsnormalform!) können entsprechend Gl. (6.17) aus den Koeffizienten des charakteristischen Polynoms der Regelstrecke und des geschlossenen Kreises berechnet werden, wobei man das charakteristische Polynom des Regelkreises aus den Vorgaben für die Eigenwerte erhält:

$$(\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 4) = \lambda^3 + 7\lambda^2 + 14\lambda + 8.$$

Für den Regler ergibt sich

$$\mathbf{k}'_R = (8 \ 14 \ 7) - (2 \ 7 \ 6) = (6 \ 7 \ 1).$$

Um diese Zustandsrückführung mit den tatsächlich messbaren Zustandsvariablen anwenden zu können, muss sie entsprechend Gl. (6.21) umgeformt werden, wofür die inverse Transformationsmatrix T_R^{-1} gebraucht wird. Entsprechend Gl. (6.19) gilt

$$T_R^{-1} = \begin{pmatrix} s'_R \\ s'_R A \\ s'_R A^2 \end{pmatrix}$$

mit

$$s'_R = (0 \ 0 \ 1) S_S^{-1}.$$

Mit der im ersten Teil der Aufgabe aufgestellten Steuerbarkeitsmatrix S_S erhält man

$$s'_R = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$T_R^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 8 & -8 \end{pmatrix}.$$

Die gesuchte Zustandsrückführung ist

$$\begin{aligned} u(t) &= -k'_R T_R^{-1} x(t) = -(6 \ 7 \ 1) \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 8 & -8 \end{pmatrix} x(t) \\ &= -(0 \ 1 \ 0,75) x(t). \end{aligned}$$

Da der erste Reglerparameter gleich null ist, muss die Zustandsvariable x_1 nicht gemessen werden.

Diskussion. Die Tatsache, dass der Reglerparameter k_1 verschwindet, ist dadurch zu erklären, dass für die Zustandsvariable x_1 die Beziehung

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + 2x_3(t) = \lambda_1 x_1(t) + 2x_3(t)$$

gilt, in der der Eigenwert $\lambda_1 = -1$ auftritt, und dass $x_1(t)$ nicht auf die Zustandsvariablen $x_2(t)$ und $x_3(t)$ zurückwirkt. $x_1(t)$ ist deshalb eine kanonische Zustandsvariable, d. h., sie würde bei einer Transformation in die kanonische Normalform erhalten bleiben (z. B. $\tilde{x}_1(t) = x_1(t)$). Da nun der zu dieser Zustandsvariablen gehörende Eigenwert nicht verschoben werden soll, muss diese Zustandsvariable nicht zurückgeführt werden. k_1 ist von null verschieden, sobald in den Güteforderungen ein anderer Wert als -1 für die Eigenwerte vorgegeben wird.

Da man bezüglich der Vorgabe der Regelkreiseigenwerte große Freiheiten hat, sollte man bei der Anwendung der Polverschiebung nach der in diesem Beispiel aufgetretenen Vereinfachung suchen, indem man nur diejenigen Eigenwerte der Regelstrecke wirklich verändert, die die Eigendynamik ungünstig beeinflussen, bzw. indem man Eigenwerte auswählt, für deren Realisierung nicht alle Zustandsvariablen zurückgeführt werden müssen (vgl. auch Aufgabe 6.2).

Aufgabe 6.2 Zustandsrückführung für eine Verladebrücke

1. Die Voraussetzung dafür, dass die Koeffizienten $\bar{a}_i$ des charakteristischen Polynoms des Regelkreises durch eine Zustandsrückführung beliebig festgelegt werden können, ist für die Verladebrücke erfüllt, denn die Verladebrücke ist vollständig steuerbar (vgl. Aufgabe 3.15). Aus

$$\mathbf{s}'_R = (s_1 \ s_2 \ s_3 \ s_4) = (0 \ 0 \ 0 \ 1) \mathbf{S}_S^{-1}$$

erhält man für die hier verwendete Regelstrecke (3.64) die Beziehung

$$(s_1 \ s_2 \ s_3 \ s_4) \begin{pmatrix} 0 & b_2 & 0 & a_{23}b_4 \\ b_2 & 0 & a_{23}b_4 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 & a_{43}b_4 \\ b_4 & 0 & a_{43}b_4 & 0 \end{pmatrix} = (0 \ 0 \ 0 \ 1),$$

also

$$s_2 b_2 + s_4 b_4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s_2 = -\frac{s_4 b_4}{b_2} \quad (\text{A.9})$$

$$s_1 b_2 + s_3 b_4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s_1 = -\frac{s_3 b_4}{b_2} \quad (\text{A.10})$$

$$s_2 a_{23} b_4 + s_4 a_{43} b_4 = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$s_1 a_{23} b_4 + s_3 a_{43} b_4 = 1. \quad (\text{A.12})$$

Aus den Gln. (A.9), (A.11) erhält man zunächst

$$-s_4 \left(\frac{b_4^2}{b_2} a_{23} - a_{43} b_4 \right) = 0$$

und damit

$$s_4 = 0. \quad (\text{A.13})$$

Die Gln. (A.10), (A.12) führen auf

$$-s_3 \left(\frac{b_4}{b_2} a_{23} b_4 - a_{43} b_4 \right) = 1$$

und

$$s_3 = \frac{-1}{\frac{b_4^2}{b_2} a_{23} - a_{43} b_4}. \quad (\text{A.14})$$

Der Vektor $\mathbf{s}_R$ hat also folgendes Aussehen:

$$\mathbf{s}'_R = \left(\frac{1}{a_{23}b_4 - a_{43}b_2} \quad 0 \quad \frac{b_2}{b_4(a_{43}b_2 - a_{23}b_4)} \quad 0 \right) = \left(\frac{lm_K}{g} \quad 0 \quad \frac{l^2 m_K}{g} \quad 0 \right).$$

Die rechte Seite entsteht durch Verwendung der Beziehungen (3.65), (3.66) Aus der Ackermann-Formel (6.22) erhält man schließlich die Zustandsrückführung

$$\mathbf{k}' = (\bar{a}_0 \quad \bar{a}_1 \quad \bar{a}_2 \quad \bar{a}_3 \quad 1) \begin{pmatrix} \frac{lm_K}{g} & 0 & \frac{l^2 m_K}{g} & 0 \\ 0 & \frac{lm_K}{g} & 0 & \frac{l^2 m_K}{g} \\ 0 & 0 & -lm_K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -lm_K \\ 0 & 0 & (m_K + m_G)g & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

$$= \frac{m_K l}{g} \left(\bar{a}_0 \quad \bar{a}_1 \quad \left(l\bar{a}_0 - g\bar{a}_2 + \frac{(m_G + m_K)}{m_K l} g^2 \right) \quad (\bar{a}_1 l - \bar{a}_3 g) \right). \quad (\text{A.16})$$

2. Aus der notwendigen Stabilitätsbedingung $\bar{a}_i > 0$ für den Regelkreis erhält man für den Regler die Bedingungen $k_1 \neq 0$ und $k_2 \neq 0$. Das heißt, der Regelkreis ist nur dann stabil, wenn sowohl die Position als auch die Geschwindigkeit der Laufkatze auf die Stellgröße zurückgeführt werden. Diese beiden Zustandsvariablen müssen also gemessen (oder, wie im Kap. 8 erläutert wird, aus anderen Messgrößen beobachtet) werden.

$x_2(t) = \dot{x}_1(t)$ kann aus $x_1(t)$ berechnet werden, wenn die Messgröße $x_1(t)$ nur sehr wenig verrauscht ist. Besser ist natürlich die direkte Messung der Geschwindigkeit. Die Rückführung von $x_2(t)$ ist ein Beispiel dafür, dass bei einer Zustandsrückführung D-Anteile nicht erforderlich sind, weil die differenzierten Größen als Zustandsvariable gemessen werden können. Im einschleifigen Regelkreis mit $y(t) = x_1(t)$ müsste man $x_2(t)$ (näherungsweise) durch einen D-Anteil im Regler „rekonstruieren“.

Die Forderung nach positiven Reglerparametern zeigt, dass der Reglereingriff Abweichungen der Position und der Bewegungsrichtung *entgegenwirken* muss, um die Verladebrücke zu stabilisieren.

3. Wie in der ersten Teilaufgabe erläutert, kann auf die Rückführung von $x_1(t)$ und $x_2(t)$ nicht verzichtet werden. Erfolgt keine Rückführung des Seilwinkels $x_3(t)$, d. h. gilt $k_3 = 0$, so erhält man aus Gl. (A.16) die Einschränkung

$$\frac{m_K l^2}{g} \bar{a}_0 - m_K l \bar{a}_2 + (m_G + m_K)g = 0$$

für die Polynomkoeffizienten $\bar{a}_0$ und $\bar{a}_2$ und somit für die Wahl der Pole des geschlossenen Kreises. Wird die Seilwinkelgeschwindigkeit nicht zurückgeführt ($k_4 = 0$), so ergibt sich aus Gl. (A.16) die Einschränkung

$$\bar{a}_1 = \frac{g}{l} \bar{a}_3.$$

Mit diesen Einschränkungen kann man zwar stabile Regelkreise erzeugen. Die Dynamik kann jedoch nicht mehr frei gewählt werden und ist bei der Verladebrücke sehr schlecht, wie man an einfachen Zahlenbeispielen ausprobieren kann.

4. Aus Gl. (A.16) ist ersichtlich, dass nur k_3 von der Last m_G abhängt. Stellt man den Reglerparameter k_3 in der Form

$$k_3 = k_{30} + m_G g$$

dar, so bezeichnet

$$k_{30} = \frac{m_K l^2}{g} \bar{a}_0 - m_K l \bar{a}_2 + m_K g$$

den Reglerparameter, der für $m_G = 0$ die geforderten Eigenwerte des Regelkreises erzeugt.

Um sicherzustellen, dass der Regelkreis auch bei Laständerungen die vorgegebenen Eigenwerte besitzt, muss der Reglerparameter entsprechend der Last verändert werden. Eine derartige Verstärkungsanpassung erfordert jedoch die Messung der Last.

Arbeitet man mit einem fest eingestellten, also von der Last unabhängigen Regler, so verändern sich die Regelkreiseigenwerte in Abhängigkeit von m_G . Um wenigstens die Stabilität bei allen möglichen Massenänderungen sichern zu können, kann man das Hurwitzkriterium anwenden. Dafür rechnet man zunächst mit Hilfe der Gl. (6.23) die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms des Regelkreises aus. Da mit $\bar{a}_i$ die gewünschten Werte bezeichnet werden, werden die sich bei veränderlicher Masse m_G einstellenden Koeffizienten hier mit $\bar{a}$ bezeichnet. Aus Gl. (6.23) erhält man

$$(\tilde{a}_0 \quad \tilde{a}_1 \quad \tilde{a}_2 \quad \tilde{a}_3) = \mathbf{k}' \begin{pmatrix} \mathbf{s}'_R \\ \mathbf{s}'_R \mathbf{A} \\ \mathbf{s}'_R \mathbf{A}^2 \\ \mathbf{s}'_R \mathbf{A}^3 \end{pmatrix}^{-1} + (a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3).$$

Die zu invertierende Matrix ist gerade der obere Teil der in Gl. (A.15) rechts stehenden Matrix, die nicht von m_G abhängt. Die Koeffizienten a_i des charakteristischen Polynoms der Regelstrecke erhält man für beliebige Werte von m_G aus der gegebenen Matrix $\mathbf{A}$

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^4 + \frac{m_K + m_G}{m_K} \frac{g}{l} \lambda^2.$$

Setzt man den für $m_G = 0$ aus Gl. (A.16) berechneten Regler ein ($k_3 = k_{30}$), so erhält man für den geschlossenen Kreis die Koeffizienten

$$\begin{aligned} (\tilde{a}_0 \quad \tilde{a}_1 \quad \tilde{a}_2 \quad \tilde{a}_3) &= \left(\bar{a}_0 \quad \bar{a}_1 \quad \bar{a}_2 - \frac{g}{l} \quad \bar{a}_3 \right) + \left(0 \quad 0 \quad \frac{m_K + m_G}{m_K} \frac{g}{l} \quad 0 \right) \\ &= \left(\bar{a}_0 \quad \bar{a}_1 \quad \bar{a}_2 + \frac{m_G g}{m_K l} \quad \bar{a}_3 \right) \end{aligned}$$

Offensichtlich hängt nur der Koeffizient $\tilde{a}_2$ von der Last ab

$$\tilde{a}_2(m_G) = \bar{a}_2 + \frac{m_G g}{m_K l},$$

während die anderen drei Koeffizienten unabhängig von der Last die vorgegebenen Werte $\bar{a}_i$ behalten. Wichtig für die folgende Rechnung ist, dass $\tilde{a}_2(m_G)$ für beliebige Last größer als $\bar{a}_2$ ist.

Nun wird das Hurwitzkriterium auf die Polynomkoeffizienten $\tilde{a}_i$ angewendet. Aus der Hurwitzmatrix

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_3 & 0 & 0 \\ \bar{a}_0 & \tilde{a}_2(m_G) & 1 & 0 \\ 0 & \bar{a}_1 & \bar{a}_3 & 0 \\ 0 & \bar{a}_0 & \tilde{a}_2(m_G) & 1 \end{pmatrix}$$

folgen die Bedingungen

$$D_1 = \bar{a}_1 > 0$$

$$D_2 = \bar{a}_1 \tilde{a}_2(m_G) - \bar{a}_0 \bar{a}_3 > 0 \quad (\text{A.17})$$

$$D_3 = \bar{a}_1 \tilde{a}_2(m_G) \bar{a}_3 - \bar{a}_1^2 - \bar{a}_0 \bar{a}_3^2 > 0 \quad (\text{A.18})$$

$$D_4 = D_3 > 0.$$

Sämtliche Bedingungen sind für $m_G = 0$ erfüllt, da für den Regelkreis stabile Eigenwerte vorgegeben werden. Die Bedingungen sind ferner auch für beliebige Werte $m_G > 0$ von m_G erfüllt, da $\tilde{a}_2(m_G) \geq \tilde{a}_2(0) = \bar{a}_2$ gilt. Folglich führt der Regler, der für beliebige Eigenwertvorgaben unter der Annahme $m_G = 0$ entworfen wurde, auch für die belastete Verladebrücke zu einem stabilen Regelkreis.

Dieses Ergebnis ist mit etwas Ingenieurgefühl einfach nachvollziehbar. Durch eine Vergrößerung von m_G wird das System träger. Behält man die Reglerparameter bei Lasterhöhung bei, so reagiert das System langsamer als bei $m_G = 0$. Deshalb ist eine langsamere Eigenbewegung, aber keinesfalls ein instabiles Verhalten zu erwarten.

Aufgabe 6.3 Ausgangsrückführung der Verladebrücke

Für die beiden Ausgangsgrößen „Position der Laufkatze“ und „Seilwinkel“ steht in der Ausgangsgleichung der Regelstrecke die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für den mit der Ausgangsrückführung geschlossenen Regelkreis erhält man das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} & \det(\lambda I - A + b(k_1 \ k_2) C) \\ &= \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ b_2 k_1 & \lambda & -a_{23} + b_2 k_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ b_4 k_1 & 0 & -a_{43} + b_4 k_2 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^4 + (-a_{43} + b_4 k_2 + b_2 k_1) \lambda^2 + b_2 k_1 (-a_{43} + b_4 k_2) + b_4 k_1 (a_{23} - b_2 k_2), \end{aligned}$$

das keine Glieder in λ^3 und λ enthält. Damit ist für beliebige Reglerparameter eine notwendige Stabilitätsbedingung verletzt. Die Verladebrücke lässt sich nicht durch eine proportionale Rückführung der Laufkatzenposition und des Seilwinkels auf die Kraft an der Laufkatze stabilisieren.

Da die Laufkatze mit den hier betrachteten Ausgangsgrößen vollständig beobachtbar und überdies vollständig steuerbar ist, heißt dieses Ergebnis, dass zwar alle Eigenwerte der Regelstrecke verändert, jedoch nicht zielgerichtet auf vorgegebene Werte gelegt werden können. Mindestens einer der Eigenwerte des Regelkreises ist instabil.

Aufgabe 6.5 Stabilisierung der Magnetschwebbahn

Die Aufgabe kann unter Verwendung des Programms 6.1 gelöst werden.

1. Die Magnetschwebbahn ist vollständig steuerbar und beobachtbar. Die Eigenwerte liegen bei

```
» eig(A)
ans=
-12.0319 + 27.7246i
-12.0319 - 27.7246i
15.9698
-1.2530 + 4.8442i
-1.2530 - 4.8442i
```

wobei der Eigenwert bei etwa +16 auf die Instabilität der Regelstrecke hinweist.

2. Die Eigenwerte für den Regelkreis werden entsprechend der Aufgabenstellung durch

```
» sigma = eig(A);
» sigma(3) = -sigma(3)
sigma=
```

$$\begin{aligned}
 &-12.0319 + 27.7246i \\
 &-12.0319 - 27.7246i \\
 &-15.9698 \\
 &-1.2530 + 4.8442i \\
 &-1.2530 - 4.8442i
 \end{aligned}$$

vorgegeben. Damit erhält man den Regler

$$\mathbf{k}' = (8418,5 \quad 478,8 \quad 188,9 \quad 76,3 \quad 0,02).$$

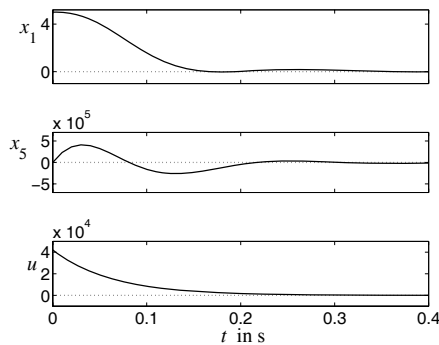


Abb. A.10: Eigenbewegung der geregelten Magnetschwebbahn

Die Eigenbewegung des Regelkreises ist in Abb. A.10 zu sehen, wobei für die Darstellung die Zustandsvariablen x_1 (Abstand Tragemagnet – Schiene) und x_5 (Magnetkraft) sowie die Stellgröße u (Spannung am Tragemagnet) ausgewählt wurden. Die Abweichung des Luftspaltes von $x_1(0) = 5$ mm wird innerhalb von etwa 0,15 s abgebaut, wobei kein wesentliches Überschwingen auftritt. Dafür ist zunächst eine beschleunigende (positive), dann eine bremsende (negative) Magnetkraft x_5 notwendig, die durch die angegebene Spannung u aufgebaut wird. Wie immer beschreiben alle Werte die Abweichungen von einem Arbeitspunkte.

- Verändert man die Eigenwertvorgaben, so wird offensichtlich, dass das Verhalten des Regelkreises qualitativ etwa gleich bleibt, solange man keine wesentlich größeren Stellamplituden zulässt. Das wird im Folgenden an zwei Beispielen demonstriert, wobei neben x_1 auch die Zustandsvariable x_2 (Abstand Kabine – Tragemagnet) betrachtet wird. Es werden zunächst die letzten beiden Eigenwerte verschoben

$$\begin{aligned}
 &\gg \text{sigma}(4) = -3 + 4.844i; \\
 &\gg \text{sigma}(5) = -3 - 4.844i;
 \end{aligned}$$

Das Verhalten des geregelten Systems ist nicht wesentlich verändert, wie Abb. A.11 zeigt.

Nun wird das erste konjugiert komplexe Polpaar nach links geschoben

$$\begin{aligned}
 &\gg \text{sigma} = [-20+20i \quad -20-20i \quad -16 \quad -1.253+4.8442i \\
 &\quad -1.253-4.8442i];
 \end{aligned}$$

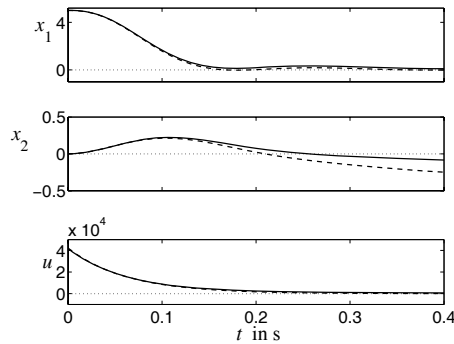


Abb. A.11: Eigenbewegung der geregelten Magnetschwebbahn mit der zweiten Zustandsrückführung im Vergleich zum Verhalten mit dem ersten Regler - - -

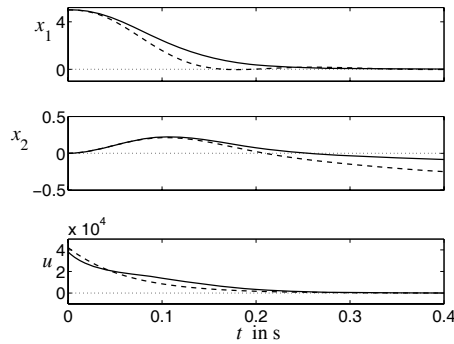


Abb. A.12: Eigenbewegung der geregelten Magnetschwebbahn mit der dritten Zustandsrückführung im Vergleich zum Verhalten mit dem ersten Regler - - -

Dadurch wird die Bewegung des Aufbaus besser gedämpft, wie Abb. A.12 anhand des Verlaufes von x_2 zeigt. Für das Verhalten des Luftspaltes tritt eine geringfügige Verbesserung ein.

Aufgabe 7.1 LQ-Regelung eines Systems erster Ordnung

Für die Regelstrecke erster Ordnung

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t), \quad x(0) = x_0$$

ist eine Zustandsrückführung

$$u(t) = -kx(t)$$

so auszuwählen, dass das Gütefunktional

$$J = \int_0^\infty (qx^2(t) + ru^2(t))dt$$

den kleinstmöglichen Wert annimmt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, dass b positiv ist. Es entsteht der geschlossene Regelkreis

$$\dot{x}(t) = \underbrace{(a - bk)}_{\bar{\lambda}} x(t), \quad x(0) = x_0,$$

mit der Abkürzung $\bar{\lambda} = a - bk$.

Für dieses System erster Ordnung kann der Wert des Gütefunktional explizit in Abhängigkeit vom Reglerparameter k berechnet werden. Die Lösung der Zustandsgleichung führt auf

$$x(t) = e^{\bar{\lambda}t} x_0$$

und auf

$$u(t) = -ke^{\bar{\lambda}t} x_0.$$

Setzt man diese Beziehungen in das Gütefunktional ein, so erhält man

$$J = \int_0^\infty (qe^{2\bar{\lambda}t} x_0^2 + rk^2 e^{2\bar{\lambda}t} x_0^2) dt = \frac{q + rk^2}{bk - a} \frac{x_0^2}{2},$$

sofern durch $\bar{\lambda} < 0$ gesichert ist, dass das Integral existiert. Damit ist der Regler auf das Intervall

$$k > \frac{a}{b} \tag{A.19}$$

beschränkt.

Den Optimalregler erhält man entweder aus der Bedingung $\frac{dJ}{dk} = 0$ oder entsprechend Satz 7.2 durch Lösung der Riccati-Gleichung. Beide Wege führen auf

$$k_{1/2} = \frac{a}{b} \pm \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{q}{r}},$$

wobei nur die Lösung

$$k^* = \frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{q}{r}}$$

die Ungleichung (A.19) erfüllt.

Diskussion. Der Regelkreis mit dem Optimalregler ist für beliebige Wichtungen $q > 0, r > 0$ im Gütefunktional stabil, denn es gilt

$$\bar{\lambda} = a - bk = -\sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{q}{r}} < 0.$$

Man sieht, dass der Reglerparameter k und der Eigenwert $\bar{\lambda}$ des geschlossenen Kreises nicht von q und r getrennt, sondern nur von dem Quotienten $\frac{q}{r}$ abhängt, was zu erwarten ist, weil nicht der absolute Wert J , sondern nur sein Minimum über den Wert von k entscheidet und man deshalb anstelle von J auch das Gütefunktional $J' = \frac{1}{r}J$ minimieren kann, indem die beiden Wichtungsfaktoren nur als Quotient vorkommen.

Je größer der Quotient $\frac{q}{r}$ ist, umso größer wird der Reglerparameter und umso weiter wird der Eigenwert des geschlossenen Kreises in der komplexen Ebene nach links verschoben. Dies

ist plausibel, weil eine Vergrößerung des Quotienten den Verlauf der Regelgröße stärker gewichtet und deshalb ein „schnellerer“ Regelkreis zu einem kleineren Wert des Gütefunktionalis führt.

Für $r \rightarrow 0$ gilt $k \rightarrow \infty$. Der Regelkreis wird unendlich schnell, so dass die Regelstrecke vom Anfangszustand x_0 durch eine impulsförmige Stellgröße in verschwindend kurzer Zeit in den Zustand $x = 0$ überführt wird.

Aufgabe 7.3 *Programmerweiterung für den Entwurf von PI-Reglern*

Um für die Regelstrecke

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

eine PI-Zustandsrückführung

$$\begin{aligned}\dot{x}_r(t) &= y(t) - w(t) \\ u(t) &= -K_P x(t) - K_I x_r(t)\end{aligned}$$

entwerfen zu können, wird die Regelstrecke um den I-Anteil des Reglers erweitert, wodurch

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_r(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_r(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -I \end{pmatrix} w(t) \\ y(t) &= (C \ 0) \begin{pmatrix} x(t) \\ x_r(t) \end{pmatrix} + Du(t)\end{aligned}$$

und, in abgekürzter Schreibweise,

$$\begin{aligned}\dot{x}_I(t) &= A_I x_I(t) + B_I u(t) + E_I w(t) \\ y(t) &= C_I x_I(t) + D_I u(t)\end{aligned}$$

entsteht. Im Gütefunktional

$$J = \int_0^\infty (x_I'(t) Q x_I(t) + u'(t) R u(t)) dt$$

wird neben der Eingangsgröße $u(t)$ der erweiterte Zustand $x_I(t)$ bewertet. Der Optimalregler ist eine Zustandsrückführung der Form

$$u(t) = -(K_P \ K_I) x_I(t) = -K x_I(t).$$

Für den geschlossenen Kreis erhält man das Modell

$$\begin{aligned}\dot{x}_I(t) &= (A_I - B_I K) x_I(t) + E_I w(t) \\ y(t) &= (C_I - D_I K) x_I(t).\end{aligned}$$

Mit diesen Bezeichnungen kann das Programm 7.1 zum Programm A1.1 erweitert werden.

Programm A1.1 *Entwurf eines optimalen PI-Reglers*

Voraussetzungen für die Anwendung des Programms: Den Matrizen A, B, C, D, Q und R sowie den Parametern n und m sind bereits Werte zugewiesen

Prüfung der Voraussetzungen des Optimalreglerentwurfes

```

» System=ss(A, B, C, D);
» rank(ctrb(System));           Prüfung der Steuerbarkeit der Regelstrecke
» eig(Q)                        Definitheitsprüfung durch Berechnung der Eigenwerte
» eig(R)
» Ks = dcgain(System);         Prüfung der Existenzbedingung für PI-Regler
» rank(Ks)

```

Entwurf eines optimalen PI-Reglers

```

» AI = [A zeros(n,m); C zeros(m,m)];      I-erweiterte Regelstrecke
» BI = [B; D];
» EI = [zeros(n,m); -eye(m,m)];
» CI = [C zeros(m,m)];
» DI = D;
» K = lqr(AI, BI, Q, R);               Berechnung des Optimalreglers

```

Analyse des Regelkreises

```

» Ag = AI - BI*K;                  Berechnung des geschlossenen Kreises
» Cg = CI - DI*K;
» Dg = zeros(m,m);
» Kreis=ss(Ag, EI, Cg, Dg);
» step(Kreis);                     Führungsübergangsfunktionsmatrix

```

Aufgabe 7.4 *Optimalreglerentwurf für einen Dampferzeuger*

1. Um zielgerichtet die beiden Ausgänge durch das Gütefunktional bewerten zu können, wird mit den Wichtungsmatrizen

$$Q = q C' C$$

und $R = I$ gearbeitet. Der Optimalregler kann mit dem Programm 7.1 entworfen werden. Da die Zustandsvariablen nicht physikalisch interpretierbar sind, kann der für die Berechnung der Eigenbewegung notwendige Anfangszustand nicht aus physikalischen Überlegungen abgeleitet werden. Es wird deshalb mit $x_0 = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)'$ gearbeitet, wodurch alle Eigenvorgänge angeregt werden. Die Berechnung der Eigenbewegungen erfolgt durch die Funktionsaufrufe

```

» Kreis=ss(A-B*K, B, C, zeros(2,2));
» initial(Kreis, x0);
» Stellgr=ss(A-B*K, B, K, zeros(2,2));
» initial(Stellgr, x0);

```

wobei der erste Aufruf auf die Ausgangsgrößen und der zweite auf die Stellgrößen führt. Das Ergebnis ist für $q = 0, 1, 10$ und 30 in Abb. A.13 dargestellt. Je größer die Wichtung der Ausgänge ist, umso schneller baut der Regler die Anfangsauslenkung ab, umso größer ist aber auch die Stellgröße. Wie die Abbildung zeigt, ist die Wichtung der Ausgänge bei $q = 0, 1$ so schwach, dass der Regler praktisch gar nicht eingreift ($u(t) \approx 0$).

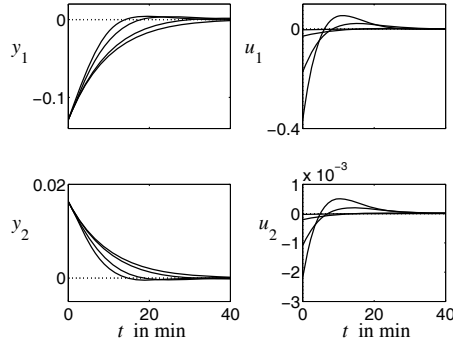


Abb. A.13: Eigenbewegung des geregelten Dampferzeugers bei Wichtung $Q = qC'C$ der Ausgangsgröße ($q=0, 1, 10, 30$)

2. Da der Optimalregler K^* ein P-Regler ist und die Regelstrecke proportionales Verhalten aufweist, ist zur Sicherung der Sollwertfolge ein Vorfilter V notwendig. Für die Stellgröße gilt dann

$$\begin{aligned} u(t) &= K^* x(t) + \tilde{w}(t) \\ \tilde{w}(t) &= V w(t). \end{aligned}$$

Um V zu bestimmen, wird zunächst die statische Verstärkung K_{yw} des mit dem Optimalregler K^* geschlossenen Regelkreises von $\tilde{w}(t)$ nach $y(t)$ bestimmt. Es gilt

$$K_{yw} = C(A - BK^*)^{-1}B.$$

Sollwertfolge tritt ein, wenn V entsprechend

$$V = K_{yw}^{-1}$$

gewählt wird. Diese Beziehungen lassen sich direkt in MATLAB-Befehle umsetzen:

```
>> Kyw = dcgain(A-B*K, B, C, zeros(2,2));
>> V = inv(Kyw);
```

Die Führungsübergangsfunktionsmatrix kann dann durch

```
>> Kreis=ss(A-B*K, B*V, C, D);
>> step(Kreis);
```

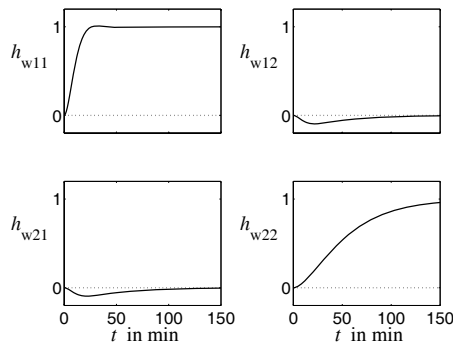


Abb. A.14: Führungsübergangsfunktionsmatrix des geregelten Dampferzeugers mit dem für $Q = 10I$ erhaltenen Regler

bestimmt werden. Das Ergebnis ist für den für $q = 1$ erhaltenen Optimalregler in Abb. A.14 zu sehen. Beide Regelgrößen folgen der Sollwertänderung in einer für den Dampferzeuger akzeptablen Zeit (vgl. mit den Eigenwerten bzw. der Übergangsfunktion der Regelstrecke). Die Querkopplungen sind sehr klein.

3. Durch Veränderung der Wichtungsmatrix soll jetzt versucht werden, das Folgeverhalten der zweiten Regelgröße (Dampftemperatur) schneller zu machen. Dafür wird mit der Wichtungsmatrix

$$Q = C' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} C$$

gearbeitet, durch die für $q > 1$ die zweite Regelgröße stärker bewertet wird als die erste und folglich ein schnelleres Führungsverhalten dieser Regelgröße erwartet werden kann. Abbildung A.15 zeigt das Ergebnis für $q = 20$. Die Dampftemperatur folgt der Sollwertänderung jetzt etwas schneller. Gleichzeitig ist jedoch die Querkopplung zum Dampfdruck größer geworden. Infolge dieser Querkopplung ändert sich der Dampfdruck zeitweilig sehr stark, wenn der Sollwert für die Temperatur erhöht wird. Diese Erscheinung verstärkt sich, wenn man q weiter vergrößert.

4. Die Determinante der Rückfuhrdifferenzmatrix mit MATLAB zu berechnen, bereitet etwas Mühe, da zunächst die Ortskurven der offenen Kette für beide Eingänge einzeln durch

```
» Kette=ss(A, B, K, eye(m,m));
» [Real, Imag]=nyquist(Kette, W);
```

berechnet werden müssen. W ist dabei ein Vektor mit den betrachteten Frequenzen. Anschließend muss die Matrix $F(j\omega)$ für eine feste Frequenz ω aus den Spalten von Real und Imag ausgelesen werden, die Determinante gebildet und das Ergebnis grafisch dargestellt werden:

```
» Wsize=size(W);
» for k=1:Wsize(2)
    F = [Real(1,1,k)+i*Imag(1,1,k) Real(1,2,k)+i*Imag(1,2,k);
        Real(1,2,k)+i*Imag(1,2,k) Real(2,2,k)+i*Imag(2,2,k)];
```

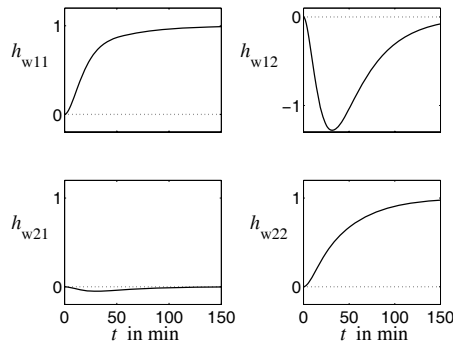



Abb. A.15: Führungsübergangsfunktion für den bei der Wichtung $Q = C \operatorname{diag}(1, 30) C$ erhaltenen Optimalregler

```

detF(k,1)=det(F);
end;
» plot(real(detF), imag(detF));

```

Als Ergebnis erhält man Abb. A.16. Die Determinante der Rückführdifferenzmatrix umschlingt den schwarz eingetragenen Einheitskreis nicht und erfüllt damit die Bedingung (7.30). Die Kurve ist für die offene Kette mit dem Optimalregler für $Q = 10 C' C$ gezeichnet.

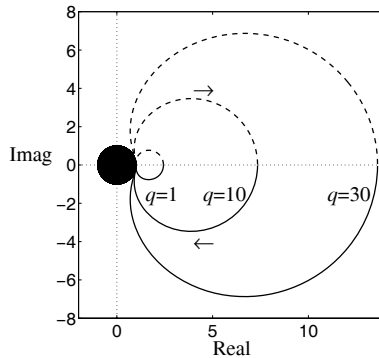


Abb. A.16: Ortskurve der Determinante der Rückführdifferenzmatrix für unterschiedliche Wichtung

Aufgabe 7.5 Frequenz-Übergabeleistungsregelung eines Elektroenergiesystems

Um das Gütefunktional auf die gewohnte Form zu bringen, wird für die Matrix Q die Beziehung

$$Q = C' \begin{pmatrix} k & & \\ & I & \\ & & O \\ & & & I \end{pmatrix} C$$

angesetzt, wobei die unbesetzten Stellen durch Nullen auszufüllen sind und die Einheitsmatrizen das Format (3,3) haben. Der Optimalregler wird für die Wichtungen $\rho = 1, 10, 100$ berechnet.

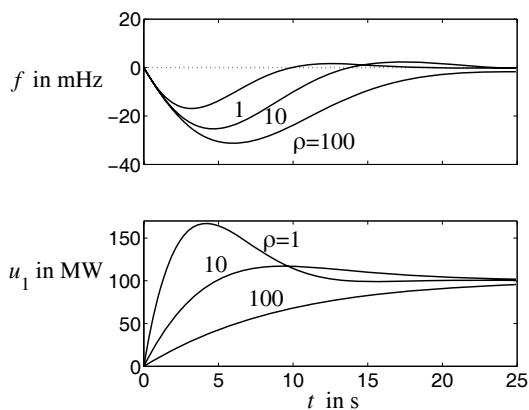


Abb. A.17: Störverhalten des Netzes mit PI-Zustandsrückführung für die Wichtungen mit $\rho = 1, 10, 100$

Abbildung A.17 zeigt das Störverhalten des Netzes mit diesen Reglern, wobei die Frequenzabweichung umso schneller abgebaut wird, je kleiner die Wichtung r ist. Damit verbunden ist ein schnelleres Einschwingen der Stellgrößen, die für die kleinste Wichtung $\rho = 1$ stark überschwingt. Ein guter Kompromiss wird für $\rho = 10$ erreicht, wofür die Zustandsrückführung des I-erweiterten Systems durch die Matrix

$$K = \begin{pmatrix} 1,299 & 1,206 & 0,586 & 0,075 & 0,536 & 1,481 & 2,086 & 7,18 & 0,056 & 0,063 \\ 1,567 & 0,064 & 0,021 & 0,007 & 0,005 & 0,064 & 0,053 & -0,167 & 1,129 & 0,075 \\ 1,567 & 0,068 & 0,024 & 0,006 & 0,050 & 0,069 & 0,058 & -0,189 & 0,067 & 1,226 \\ 0,3162 & 0,0004 & 0,007 \\ -0,0005 & 0,3162 & 0,0066 \\ -0,0067 & -0,0066 & 0,3161 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

Aufgabe 8.1 Berechnung des Zustandes aus den Eingangs- und Ausgangsgrößen

Der Zustandsvektor x_0 soll aus dem Verlauf der Eingangs- und Ausgangsgrößen unter Verwendung des Modells

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (\text{A.20})$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (\text{A.21})$$

berechnet werden. Kennt man den Verlauf der Ausgangsgröße $y(t)$, so kann man auch sämtliche Ableitungen bestimmen. Bildet man die ersten $n - 1$ Ableitungen und setzt diese in das Modell (A.20), (A.21) ein, so erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\ \dot{y}(t) &= C\dot{x}(t) + D\dot{u}(t) = CAx(t) + CBu(t) + D\dot{u}(t) \\ \ddot{y}(t) &= C\ddot{x}(t) = CA^2x(t) + CABu(t) + CB\dot{u}(t) + D\ddot{u}(t) \\ &\vdots \\ \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} &= CA^{n-1}x(t) + CA^{n-2}Bu(t) + \dots + D\frac{d^{n-1}u(t)}{dt^{n-1}}, \end{aligned}$$

das in

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} D & O & O & \dots & O \\ CB & D & O & \dots & O \\ CAB & CB & D & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{n-2}B & CA^{n-3}B & CA^{n-4}B & \dots & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \\ \ddot{u}(t) \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}u(t)}{dt^{n-1}} \end{pmatrix}$$

überführt und durch

$$\tilde{y} = S_B x(t) + H \tilde{u}$$

abgekürzt werden kann. Dabei können die beiden Vektoren $\tilde{y}$ und $\tilde{u}$ aus dem Verlauf der Ausgangs- bzw. Eingangsgröße gebildet werden. Die Matrix S_B ist die Beobachtbarkeitsmatrix. H bezeichnet eine Matrix, in die die Markovparameter des Systems eingehen.

Wenn das System vollständig beobachtbar ist, so hat die Beobachtbarkeitsmatrix S_B den vollen Spaltenrang n . Nach Multiplikation mit S'_B von links und anschließend mit $(S'_B S_B)^{-1}$ erhält man die Beziehung

$$x(t) = (S'_B S_B)^{-1} S'_B (\tilde{y} - H \tilde{u}), \quad (\text{A.22})$$

wobei die Inverse für vollständig beobachtbare Systeme existiert. Diese Gleichung zeigt, dass es möglich ist, aus dem Verlauf der Eingangs- und Ausgangsgrößen den Zustandsvektor exakt zu berechnen. Dabei werden keine Bedingungen an die Matrix H gestellt, was technisch

plausibel ist, denn je weniger die Steuergröße den Zustand beeinflusst, desto weniger verändert er auch den durch $\tilde{y}$ wiedergegebenen Verlauf der Ausgangsgröße. Es muss also nicht etwa die Steuerbarkeit vorausgesetzt werden.

Die Gl. (A.22) zeigt, dass man aus dem Verlauf der Eingangs- und Ausgangsgrößen den Zustand zum selben Zeitpunkt berechnen kann, wenn das System vollständig beobachtbar ist.

Diskussion. Technisch ist die hier beschriebene Vorgehensweise freilich nicht anwendbar, denn die mit der Bildung des Messvektors verbundene Berechnung von $n - 1$ Ableitungen der Ausgangsgröße $y(t)$ führt auf eine genauso häufige Ableitung des dem Nutzsignal $y(t)$ überlagerten Messrauschens. Spätestens ab der zweiten Ableitung ist das erhaltene Ergebnis stärker vom Messrauschen als von der Ausgangsgröße des Systems abhängig. Im Kap. 8 wird deshalb ein anderer Weg angegeben, bei dem die Rekonstruktion von $x(t)$ aus $y(t)$ mit einem Beobachter vorgenommen wird.

Bei der Behandlung zeitdiskreter Systeme im Kap. 14 wird sich zeigen, dass man mit Messwertfolgen, die den Verlauf abgetasteter Signale beschreiben, genauso vorgehen kann, wie es hier getan wurde. Dort werden jedoch die Differenzialquotienten durch Differenzenquotienten ersetzt, die auch bei Messrauschen gute Ergebnisse liefern.

Aufgabe 8.2 Entwurf eines Luenbergerbeobachters

1. Ein Beobachter kann immer dann eingesetzt werden, wenn das System vollständig beobachtbar ist. Für das gegebene System lautet die Beobachtbarkeitsmatrix (3.30)

$$S_B = \begin{pmatrix} c' \\ c'A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat den Rang 2. Also ist das System vollständig beobachtbar.

2. Der Beobachtungsfehler soll schneller als die Eigenbewegung des gegebenen Systems abklingen. Deshalb sollen die Beobachtereigenwerte λ_{B1} und λ_{B2} einen kleineren Realteil als die Eigenwerte

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -2$$

des Systems haben. Beispielsweise wählt man

$$\lambda_{B1} = -4 \quad \text{und} \quad \lambda_{B2} = -4.$$

3. Für die gewählten Beobachtereigenwerte erhält man für den Beobachter das folgende charakteristische Polynom:

$$(\lambda - \lambda_{B1})(\lambda - \lambda_{B2}) = (\lambda + 4)(\lambda + 4) = \lambda^2 + 8\lambda + 16.$$

Da das Systemmodell in Beobachtungsnormalform vorliegt, kann die Beobachterrückführung entsprechend Gl. (8.14) bestimmt werden:

$$l' = (a_{B0} \ a_{B1}) - (a_0 \ a_1) = (16 \ 8) - (2 \ 3) = (14 \ 5).$$

Dabei wurden die Koeffizienten a_0 und a_1 des zu beobachtenden Systems aus der letzten Spalte der Matrix A abgelesen (vgl. Gl. (8.13)). Als Beobachter erhält man damit das System

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -16 \\ 1 & -8 \end{pmatrix} \hat{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \end{pmatrix} y(t).$$

Aufgabe 8.6 Beobachterentwurf für die Magnetschwebbahn

Der Entwurf kann mit Hilfe der Programme 8.1 und 8.2 durchgeführt werden. Die Magnetschwebbahn ist vollständig steuerbar und beobachtbar, so dass die Beobachtereigenwerte beliebig platziert werden können. Maßgebend für die Auswahl der Beobchtereigenwerte sind die Eigenwerte des mit der Zustandsrückführung geschlossenen Kreises, die in Abb. A.18 zu sehen sind.

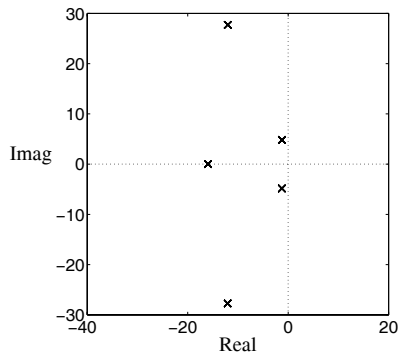


Abb. A.18: Eigenwerte des Regelkreises mit Zustandsrückführung

Da der Eigenwert bei -16 vermutlich wenig Einfluss auf das Verhalten des Regelkreises hat, ist es sinnvoll, die Beobchtereigenwerte links der beiden konjugiert komplexen Regelkreiseigenwerte zu legen. Es wird deshalb beispielsweise

```
» sigma = [-13 -15 -17 -18 -20];
```

festgelegt und der Beobachter berechnet.

Die Bewertung des geschlossenen Kreises erfolgt anhand der Eigenbewegung, die sich für die gegebene Anfangsauslenkung der Magnetschwebbahn sowie einen sich in der Ruhelage befindenden Beobachter einstellt:

```
» x0 = [5; 0; 0; 0; 0];
» xb0 = [0; 0; 0; 0; 0];
```

Mit dem Programm 8.2 erhält man das in Abb. A.19 gezeigte Verhalten.

In der Abbildung sind die für den Regelkreis mit Beobachter geltenden Kurven mit durchgezogenen Linien dargestellt und zum Vergleich die in Aufgabe 6.5 erhaltenen Eigenbewegungen des Regelkreises mit Zustandsrückführung als gestrichelte Linien eingetragen (vgl. Abb. A.10 auf S. 577). Wie man sieht, ändert sich für den Abstand x_1 des Tragsmagneten von

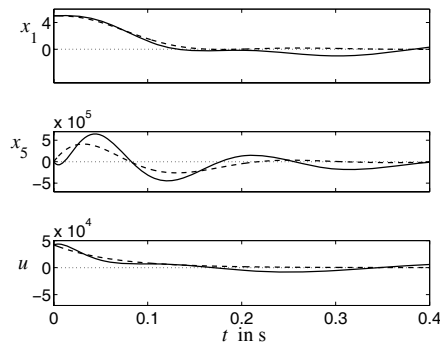


Abb. A.19: Eigenbewegung der geregelten Magnetschwebbahn mit Beobachter – und mit Zustandsrückführung - -

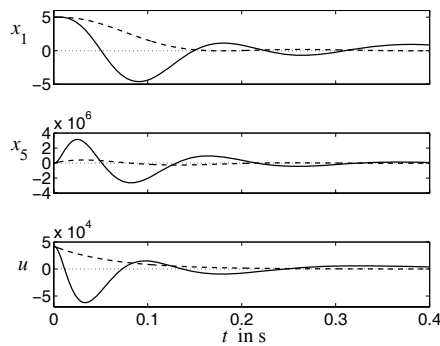


Abb. A.20: Eigenbewegung der geregelten Magnetschwebbahn mit dem schnelleren Beobachter – und mit Zustandsrückführung - -

der Schiene wenig. Die durch die Stellgröße aufgebaute Magnetkraft x_5 schwingt allerdings stärker als vorher.

Verwendet man noch „schnellere“ Beobachtereigenwerte, so muss das Verhalten des Regelkreises nicht besser werden. Für

» $\text{sigma} = 2 * [-13 \ -15 \ -17 \ -18 \ -20];$

erhält man das in Abb. A.20 gezeigte Verhalten. Die Eigenbewegung klingt schneller ab, was aufgrund der verschobenen Eigenwerte zu erwarten ist. Jedoch ist das Überschwingen sowohl der Stellgröße u als auch des Abstandes des Tragemagneten x_1 deutlich größer geworden.

Aufgabe 9.1 Diagonaldominanz und Stabilität von Mehrgrößensystemen

1. Die Übertragungsfunktionsmatrix $G_0(s)$ ist diagonaldominant, wenn die Hauptdiagonalelemente betragsmäßig größer als die Nebendiagonalelemente sind, also wenn entweder die Ungleichungen

$$|G_{011}(j\omega)| = \left| \frac{1}{j\omega + 1} \right| > \left| \frac{k_{12}}{j\omega + 3} \right| = |G_{012}(j\omega)|$$

$$|G_{022}(j\omega)| = \left| \frac{1}{j\omega + 4} \right| > \left| \frac{1}{j\omega + 2} \right| = |G_{021}(j\omega)|$$

für Zeilendominanz oder wenn die Ungleichungen

$$|G_{011}(j\omega)| = \left| \frac{1}{j\omega + 1} \right| > \left| \frac{1}{j\omega + 2} \right| = |G_{021}(j\omega)|$$

$$|G_{022}(j\omega)| = \left| \frac{1}{j\omega + 4} \right| > \left| \frac{k_{12}}{j\omega + 3} \right| = |G_{012}(j\omega)|$$

für Spaltendominanz erfüllt sind.

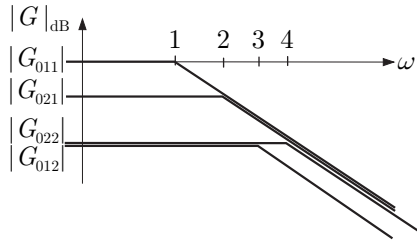


Abb. A.21: Geradenapproximation der zu vergleichenden Amplitudengänge

Diese Bedingungen, die direkt aus der Definition der Diagonaldominanz abgeleitet sind, kann man sich leicht anhand der Amplitudengänge der zu vergleichenden Ausdrücke veranschaulichen, wobei es ausreicht, die Geradenapproximationen zu verwenden. Abbildung A.21 zeigt die vier Geradenapproximationen, die für große Frequenzen zusammenfallen, sich aber im niederfrequenten Bereich unterscheiden. Offenbar ist $|G_{021}(j\omega)| > |G_{022}(j\omega)|$, so dass die Matrix $\mathbf{G}_0(j\omega)$ nicht zeilendominant ist. Andererseits hängt die Spaltendominanz vom Parameter k_{12} ab. Ist dieser Parameter so klein, dass der Amplitudengang von $|G_{012}(j\omega)|$ wie in der Abbildung gezeigt unter allen anderen Amplitudengängen liegt, so ist die Matrix $\mathbf{G}_0(j\omega)$ spaltendominant. Dafür muss gelten

$$|G_{022}(j\omega)| = \left| \frac{1}{j\omega + 4} \right| > |G_{012}(j\omega)| = \left| \frac{k_{12}}{j\omega + 3} \right|,$$

wobei es ausreicht, diese Ungleichung bei $\omega = 0$ zu überprüfen:

$$|G_{022}(0)| = \left| \frac{1}{4} \right| = 0,25 > |G_{012}(0)| = \left| \frac{k_{12}}{3} \right|.$$

Diese Ungleichung ist für

$$k_{12} < 0,75$$

erfüllt.

- Die (exakte) Stabilitätsanalyse kann man mit Hilfe der charakteristischen Gleichung (4.47) für den Regelkreis durchführen

$$\det(\mathbf{I} + \mathbf{G}_0(s)) = \det \left(\mathbf{I} + \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{k_{12}}{s+3} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+4} \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} \frac{s+2}{s+1} & \frac{k_{12}}{s+3} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{s+5}{s+4} \end{pmatrix} = 0,$$

woraus die Bedingung

$$(s+2)^2(s+3)(s+5) - k_{12}(s+1)(s+4) = 0$$

entsteht. Daraus erhält man die charakteristische Gleichung

$$s^4 + 12s^3 + (51 - k_{12})s^2 + (92 - 5k_{12})s + (60 - 4k_{12}) = 0.$$

Für die Stabilitätsanalyse kann nun das Hurwitzkriterium angewendet werden. Eine notwendige Stabilitätsbedingung ist, dass alle Koeffizienten positiv sein müssen. Daraus folgen drei Ungleichungen für k_{12} , die gleichzeitig erfüllt sein müssen und deren schärfste Forderung

$$k_{12} < 15$$

heißt. Anschließend muss man die Hurwitzdeterminanten ausrechnen, wobei sich herausstellt, dass alle diese Determinanten positiv sind, wenn die angegebene Ungleichung für k_{12} gilt. Für $k_{12} < 15$ ist der Regelkreis also E/A-stabil.

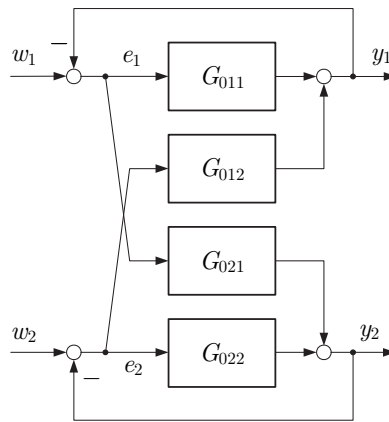


Abb. A.22: Prüfung der Integrität

Der Regelkreis besitzt die Integritätseigenschaft, wenn auch beim Ausfall von Stell- oder Messgliedern der verbleibende Regelkreis stabil ist. Wie man sich anhand von Abb. A.22 überlegen kann, erfüllt der hier betrachtete Regelkreis mit zwei Stellgrößen und zwei Regelgrößen diese Bedingungen, wenn er bei voller Funktionsfähigkeit aller Komponenten stabil ist, was soeben für $k_{12} < 15$ bewiesen wurde, und wenn darüber hinaus die aus G_{011} bzw. G_{022} entstehenden Regelkreise stabil sind. Da sowohl G_{011} als auch G_{022} ein PT₁-Glied mit positiver statischer Verstärkung ist, sind beide Regelkreise für sich stabil und das hier betrachtete System besitzt die Integritätseigenschaft.

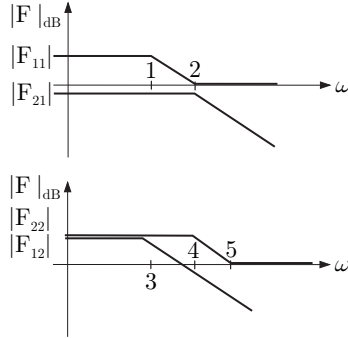


Abb. A.23: Prüfung der Spaltendominanz der Rückführdifferenzmatrix

3. Die Hauptregelkreise entstehen aus den offenen Ketten $G_{01}(s) = \frac{1}{s+1}$ und $G_{02}(s) = \frac{1}{s+4}$ und sind folglich stabil. Wendet man die hinreichende Stabilitätsbedingung aus Satz 9.2 an, so muss noch die Diagonaldominanz der Rückführdifferenzmatrix

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{I} + \mathbf{G}_0 = \begin{pmatrix} \frac{s+2}{s+1} & \frac{k_{12}}{s+3} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{s+5}{s+4} \end{pmatrix}$$

geprüft werden. Die Bedingungen für Spaltendominanz heißen

$$|F_{11}(j\omega)| = \left| \frac{j\omega + 2}{j\omega + 1} \right| > \left| \frac{1}{j\omega + 2} \right| = |F_{21}(j\omega)|$$

$$|F_{22}(j\omega)| = \left| \frac{j\omega + 5}{j\omega + 4} \right| > \left| \frac{k_{12}}{j\omega + 3} \right| = |F_{12}(j\omega)|.$$

Die Geradenapproximationen der angegebenen Frequenzgänge sind in Abbildung A.23 angegeben. Die obere Ungleichung ist erfüllt. Um die untere Ungleichung zu erfüllen, muss k_{12} so klein sein, dass der Amplitudengang der rechten Seite der Ungleichung unterhalb des Amplitudenganges der linken Seite liegt, der für kleine Frequenzen in der statischen Verstärkung $\frac{5}{4}$ beginnt. Die Spaltendominanz ist folglich bei

$$\frac{k_{12}}{3} < \frac{5}{4}$$

und

$$k_{12} < \frac{15}{4} = 3,75 \quad (\text{A.23})$$

erfüllt.

Diskussion. Die Analyse hat drei Bedingungen für k_{12} ergeben:

$$k_{12} < 0,885$$

$$k_{12} < 15$$

$$k_{12} < 3,75.$$

Die mittlere, schwächste Bedingung entsteht aus einer Stabilitätsanalyse, in die die Querkopplungen in ihrer exakten Form eingehen. Die verwendete Stabilitätsbedingung ist notwendig und hinreichend und liefert deshalb die größtmögliche Freiheit für die Wahl des Parameters k_{12} . Sie zeigt auch, dass für $k_{12} \geq 15$ der Regelkreis instabil ist.

Die dritte Bedingung muss erfüllt sein, damit man die Stabilität mit Hilfe des hinreichenden Kriteriums aus Satz 9.2 nachweisen kann. Da die verwendete Bedingung nur hinreichend, aber nicht notwendig für die Stabilität ist, kann man aus der Ungleichung *nicht* folgern, dass der Regelkreis für $k_{12} \geq 3,75$ instabil ist, was ja tatsächlich auch gar nicht richtig ist.

Die erste Bedingung sichert die Diagonaldominanz der offenen Kette. Diese Eigenschaft ist weder notwendig noch hinreichend für die Stabilität des Regelkreises. Dies zeigt auch ein Vergleich mit der dritten, schwächeren Bedingung. Die Diagonaldominanzforderung muss für die Rückfuhrdifferenzmatrix erfüllt sein, was hier unter der dritten Bedingung an k_{12} der Fall ist. Dass man häufig auch von der Regelstrecke bzw. von der offenen Kette die (näherungsweise) Erfüllung der Diagonaldominanzbedingungen fordert, hängt damit zusammen, dass die Stabilität nur dann mit Hilfe von Abschätzungen für die Kopplungen erfolgreich nachgewiesen werden kann, wenn die Querkopplungen schwach sind, wofür die Diagonaldominanz der Regelstrecke bzw. der offenen Kette einen Anhaltspunkt bietet.

Aufgabe 9.3 Reglerentwurf nach dem Direkten Nyquistverfahren

1. Zur Überprüfung der Spaltendiagonaldominanz der Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(s)$ müssen folgende Bedingungen geprüft werden:

$$\left| \frac{1}{j\omega + 1} \right| > \left| \frac{0,3}{j\omega + 2} \right|$$

$$\left| \frac{1}{j\omega + 4} \right| > \left| \frac{0,5}{j\omega + 3} \right|.$$

Zeichnet man sich die Geradenapproximationen der Amplitudengänge auf, so erkennt man, dass diese Bedingungen für alle ω erfüllt sind. Auf Grund der Diagonaldominanz von $\mathbf{G}(s)$ kann der Reglerentwurf nach dem Direkten Nyquistverfahren ohne Entkopplungsglied erfolgen.

2. Die Reglermatrix $\mathbf{K}(s)$ ist eine Diagonalmatrix

$$\mathbf{K}(s) = \begin{pmatrix} \frac{k_{11}}{s} & 0 \\ 0 & \frac{k_{12}}{s} \end{pmatrix},$$

wobei mit I-Reglern gearbeitet wird, um die geforderte Sollwertfolge bei sprungförmigen Führungsgrößen zu erreichen. Für die Auswahl der Reglerparameter k_{11} und k_{12} wird das Frequenzkennlinienverfahren für die beiden Hauptregelkreise einzeln angewendet. Die Parameter sind so auszuwählen, dass der Amplitudengang im Bereich der Durchtrittsfrequenz einen Abfall von -20dB aufweist. Damit ist die Stabilität der *Einzelregelkreise* gesichert. Weitergehende Forderungen an das dynamische Verhalten der Regelkreise wurden in der Aufgabenstellung nicht erhoben.

Die Amplitudengänge der Hauptregelstrecken sind in Abb. A.24 mit gestrichelten Linien eingetragen. Wird beispielsweise $k_{11} = 0,1$ und $k_{12} = 0,4$ gewählt, so ergeben sich für die offenen Ketten die in Abb. A.24 mit den durchgezogenen Linien dargestellten Amplitudengänge, die die genannten Forderungen erfüllen.

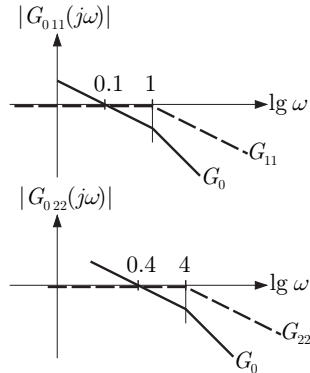


Abb. A.24: Entwurf der Einzelregelkreise

Um die Stabilität und Integrität des Regelkreises zu sichern, muss die Rückführdifferenzmatrix $\mathbf{F}(s)$ diagonaldominant sein. Die im ersten Aufgabenteil überprüfte Diagonaldominanz der Regelstrecke $\mathbf{G}(s)$ lässt *erwarten*, dass auch $\mathbf{F}(s)$ diagonaldominant ist. Sie *impliziert* diese Eigenschaft jedoch nicht, da außer der Multiplikation der Zeilen mit den Reglerübertragungsfunktionen zu den Hauptdiagonalelementen eine eins addiert wird, wodurch sich die Beträge der komplexen Größen nicht eindeutig vorhersehbar ändern. Für

$$\mathbf{F}(s) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{0,1}{s(s+1)} & \frac{0,05}{s(s+3)} \\ \frac{0,12}{s(s+2)} & 1 + \frac{0,4}{s(s+4)} \end{pmatrix}$$

erhält man die Bedingungen für Spaltendominanz

$$\left| 1 + \frac{0,1}{j\omega(j\omega + 1)} \right| \stackrel{!}{>} \left| \frac{0,12}{j\omega(j\omega + 2)} \right|$$

$$\left| 1 + \frac{0,4}{j\omega(j\omega + 4)} \right| \stackrel{!}{>} \left| \frac{0,05}{j\omega(j\omega + 3)} \right|.$$

Wie man sich wiederum anhand der Geradenapproximationen (oder mit der MATLAB-Funktion `bode`) überlegen kann, sind diese Ungleichungen für alle ω erfüllt. Das heißt, dass die Rückführdifferenzmatrix diagonaldominant ist. Die Hauptregelkreise sind so schwach miteinander verkoppelt, dass aus ihrer Stabilität die Stabilität und aufgrund der Stabilität der Regelstrecke auch die Integrität des Mehrgrößenregelkreises folgt.

Aufgabe 9.4 Regelung einer Züchtungsanlage für GaAs-Einkristalle

1. Die Aufgabe kann mit dem Programm 9.1 gelöst werden. Hier werden nur die MATLAB-Funktionsaufrufe angegeben, die über dieses Programm hinausgehen. Mit dem Aufruf

```
>> Ofen = ss(A, B, C, D);
>> step(Ofen);
```

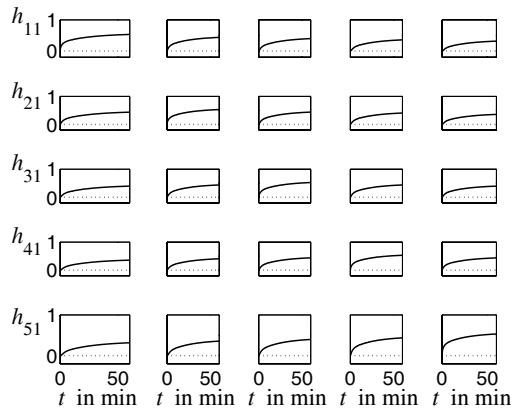


Abb. A.25: Übergangsfunktionsmatrix des Mehrzonenofens

werden alle Elemente der Übergangsfunktionsmatrix einzeln grafisch dargestellt. Die bei Erhöhung der Stellgröße der mittleren Heizzone entstehenden Verläufe sind in Abb. A.25 in einem gemeinsamen Diagramm dargestellt, wobei die obere Kurve $y_3(t)$ und die darunter liegenden Kurven den Verlauf von $y_2(t) = y_4(t)$ bzw. $y_1(t) = y_5(t)$ zeigen. Die angegebenen Gleichheiten entstehen aufgrund der Symmetrie des Systems.

- Die Kurven weisen auf zwei wichtige Eigenschaften der Regelstrecke hin. Erstens ist die Regelstrecke stark verkoppelt, was sich u. a. in den größenordnungsmäßig gleichartigen statischen Endwerten der Übergangsfunktionen bemerkbar macht. Berechnet man die Statikmatrix der Regelstrecke mit

» `Ks = dcgain(Ofen);`

so erhält man

$$\mathbf{K}_s = \begin{pmatrix} 0,56 & 0,47 & 0,43 & 0,39 & 0,35 \\ 0,47 & 0,56 & 0,47 & 0,43 & 0,39 \\ 0,43 & 0,47 & 0,56 & 0,47 & 0,43 \\ 0,39 & 0,43 & 0,47 & 0,56 & 0,47 \\ 0,35 & 0,39 & 0,43 & 0,47 & 0,56 \end{pmatrix}.$$

Die Ursache für die starke statische Kopplung liegt in der Tatsache, dass eine Heizzone statisch gesehen sämtliche andere Heizzonen auf dieselbe Temperatur bringt wie sich selbst und Unterschiede nur durch Wärmeabfluss nach außen auftreten. Wäre der Ofen ideal isoliert, hätte die Statikmatrix überall dieselben Elemente.

Eine Konsequenz dieser Tatsache ist, dass die Regelung nicht dezentral ausgeführt werden kann. Die Statikmatrix erfüllt die Bedingung (9.12) nicht und es muss ein Entkopplungsglied entworfen werden. Wählt man das statische Glied

$$\mathbf{L}(s) = \mathbf{K}_s^{-1} = \begin{pmatrix} 6,09 & -3,91 & -1,37 & 0 & 0 \\ -3,91 & 8,99 & -3,28 & -1,56 & 0 \\ -1,37 & -3,28 & 9,44 & -3,28 & -1,37 \\ 0 & -1,56 & -3,28 & 8,99 & -3,91 \\ 0 & 0 & -1,37 & -3,91 & 6,09 \end{pmatrix},$$

so ist die Regelstrecke sehr gut entkoppelt, wie eine erneute Berechnung der Übergangsfunktionsmatrix zeigt. Wie aus der inversen Statikmatrix hervorgeht, haben die äußeren Heizzonen praktisch keinen Einfluss untereinander, so dass die Matrix $\mathbf{L}$ nicht voll besetzt ist. Man könnte auch die Elemente in der Größenordnung von $-1,3$ bis $-1,6$ in $\mathbf{L}$ zu null setzen, um dadurch die Zahl der Informationskopplungen zu reduzieren. Im Folgenden wird jedoch mit der angegebenen Entkopplungsmatrix gearbeitet, wodurch anstelle der Regelstrecke $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ jetzt mit der Strecke $(\mathbf{A}, \mathbf{BL}, \mathbf{C})$ gearbeitet wird.

Die zweite Beobachtung, die man beim Betrachten der Übergangsfunktionen der Regelstrecke machen kann, betrifft den zeitlichen Verlauf der Kurven. Die Temperaturen steigen zunächst sehr schnell, nähern sich dann aber relativ langsam den statischen Endwerten. Der Grund dafür liegt in der Tatsache, dass sich die Luft in den Heizzonen relativ schnell erwärmt, ein großer Teil der Wärmemenge dann aber für das Aufheizen der Ampulle mit dem GaAs verbraucht wird und ein weitgehender Temperaturausgleich unter allen Heizzonen durch Wärmeleitung und -strahlung stattfindet.

Verglichen mit den Güteforderungen ist die Regelstrecke sehr langsam. Der statische Endwert wird nach etwa 2 Stunden erreicht, die Führungsübergangsfunktion soll aber schon nach etwa 10 Minuten den Sollwert erreicht haben. Die Regelung muss deshalb vor allem den schnell veränderlichen Teil der Regelstrecke ansprechen.

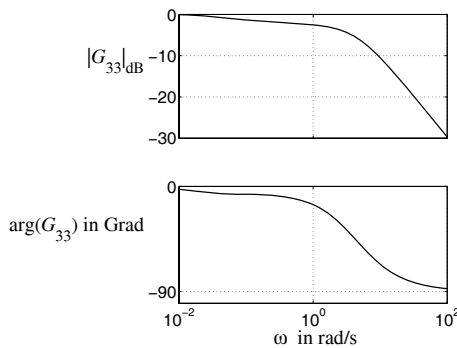


Abb. A.26: Frequenzkennlinien der dritten Heizzone

3. Für die um das Entkopplungsglied erweiterte Regelstrecke erhält man bezüglich der dritten Stellgröße und dritten Regelgröße die in Abb. A.26 gezeigten Frequenzkennlinien. Damit der Regelkreis in 10 Minuten einschwingt ($T_m \approx 5$), muss die Schnittfrequenz der offenen Kette bei

$$\omega_s \approx \frac{\pi}{T_m} \approx 0,6$$

liegen. Das erreicht man durch einen PI-Regler mit

$$k_{P3} = 1 \quad \text{und} \quad k_{I3} = 1,$$

wie die Führungsübergangsfunktion des dritten Hauptregelkreises in Abb. A.27 zeigt.

Um zu erkennen, wieso die relativ scharfen zeitlichen Forderungen bei der insgesamt trägen Regelstrecke erfüllbar sind, sollte man sich auch die durch den Regler erzeugte Stellgröße ansehen. Mit dem Aufruf

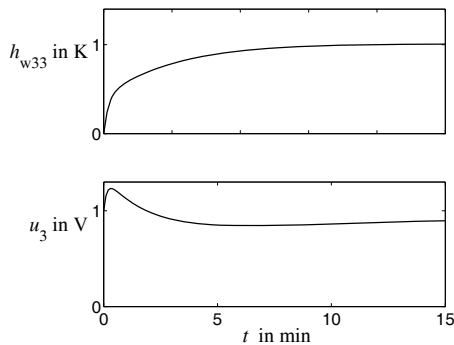


Abb. A.27: Führungsübergangsfunktion und Verlauf der Stellgröße des dritten Temperaturregelkreises

```
» RegelkreisI=ss(Ag, Bg, [KP(i,i)*C(i,:) KI(i,i)],
    KP(i,i));
» step(RegelkreisI);
```

erhält man Abb. A.27 (unten), in der zu sehen ist, dass die Spannung an der Heizzone zunächst relativ hoch ist, um den schnell reagierenden Teil des Ofens anzusprechen. Später ist die Heizspannung lange Zeit unterhalb ihres Endwertes, der durch die gestrichelte Linie im Diagramm gekennzeichnet ist.

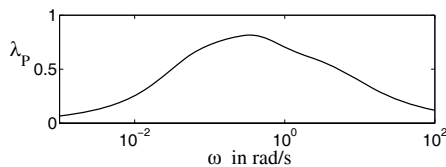


Abb. A.28: Prüfung der Diagonaldominanz

- Verwendet man den erhaltenen Regler für alle Heizzonen, so ist die Rückführdifferenzmatrix $\mathbf{F}(s)$ verallgemeinert diagonaldominant. Der Verlauf von $\lambda_P\{\cdot\}$ ist in Abb. A.28 zu sehen. Auf Grund der statischen Entkopplung der Regelstrecke hat $\lambda_P\{\cdot\}$ für sehr kleine Frequenzen einen Wert nahe null. Für sehr hohe Frequenzen beeinflussen sich die einzelnen Regelkreise aufgrund der Trägheit der Regelstrecke ebenfalls nicht. In einem mittleren Frequenzbereich hat $\lambda_P\{\cdot\}$ jedoch relativ große Werte.
- Das Führungsverhalten der Heizzonen bei Verwendung des vollständigen Mehrgrößenreglers ist in Abb. A.29 für die sprunghafte Erhöhung des Temperatursollwertes für die erste Heizzone zu sehen. Für die anderen Heizzonen erhält man ähnliche Ergebnisse. Die Abbildung zeigt, dass die Querkopplungen relativ klein sind und der Regelkreis die Güteforderungen näherungsweise erfüllt.

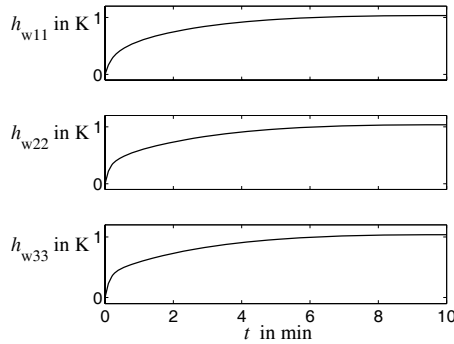


Abb. A.29: Führungsverhalten der ersten Heizzone bei Verwendung des Mehrgrößenreglers

Aufgabe 9.5 *Frequenz-Übergabeleistungsregelung eines Elektroenergienetzes*

Die Aufgabe kann in Anlehnung an das Programm 9.1 gelöst werden. Auf Grund der in der Aufgabenstellung bereits erwähnten Modifikationen muss jedoch mit anderen Funktionsaufrufen gearbeitet werden, so dass im Folgenden größere Teile des Programms angegeben und erläutert werden.

Die Regelstrecke ist durch das Modell (6.76), (6.77) sowie die Gln. (6.73) – (6.75) zur Beschreibung der Regelabweichung beschrieben:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{d}(t) \quad (\text{A.24})$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{F}\mathbf{d}(t) \quad (\text{A.25})$$

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{C}_e\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_e\mathbf{u}(t) + \mathbf{F}_e\mathbf{d}(t). \quad (\text{A.26})$$

Die Modellparameter aus Beispiel 6.4 auf S. 264 werden den Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{C}_e$, $\mathbf{D}_e$ und $\mathbf{F}_e$ sowie den Skalaren n und m zugewiesen.

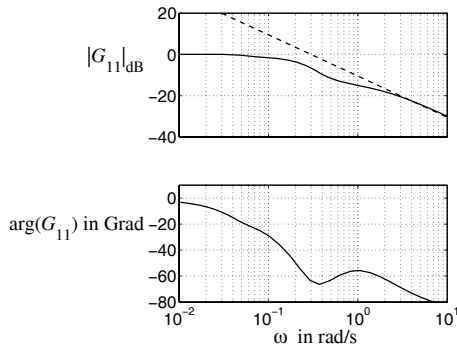


Abb. A.30: Bodediagramm der Regelstrecke von Teilregler 1

1. Die Statikmatrix der Regelstrecke bezüglich des Stellvektors u als Eingang und dem Vektor e als Ausgang ist eine Einheitsmatrix. Also ist die hinreichende Bedingung (9.30) für die Existenz eines PI-Reglers mit Integritätseigenschaft erfüllt.

Die erste Hauptregelstrecke beschreibt das Übertragungsverhalten von der Eingangsgröße u_1 zum Netzkennlinienfehler e_1 des Netzes 1. Ihr Zustandsraummodell entsteht durch „Ausblenden“ der entsprechenden Zeilen und Spalten aus dem Modell des vollständigen Netzes, wobei man

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + b_{s1}u_1(t) \\ e_1(t) &= c'_{s1}x(t)\end{aligned}$$

erhält. b_{s1} ist die erste Spalte der Matrix B und c'_{s1} die erste Zeile der Matrix C_e . Die Frequenzkennlinie der ersten Hauptregelstrecke ist in Abb. A.30 zu sehen. Sie entsteht durch den Funktionsaufruf

```
» ersteRegelstrecke=ss(A, B(:,1), CE(1,:), 0);
» bode(ersteRegelstrecke);
```

In der Abbildung ist eine Gerade mit einem Abfall von 20dB/Dekade eingetragen. Würde man den oberhalb der 0 dB-Achse liegenden Teil durch einen PI-Regler nachbilden, so wäre $k_{P1} = 1$ und $k_{I1} = \frac{1}{0,3} = 3,33$ zu wählen. Dieser Regler würde jedoch einen sehr kleinen Phasenrand erzeugen, so dass die Führungsübergangsfunktion stark überschwingt. Für ein näherungsweise überschwingfreies Verhalten muss aber $d > 0,7$ sein und folglich der Phasenrand die Bedingung $\Phi_R \approx 100^\circ d \approx 70^\circ$ erfüllen. Beide Parameter werden deshalb auf $\frac{1}{20}$ ihres Wertes verringert, so dass mit

$$k_{P1} = 0,05 \quad \text{und} \quad k_{I1} = 0,167$$

gearbeitet wird.

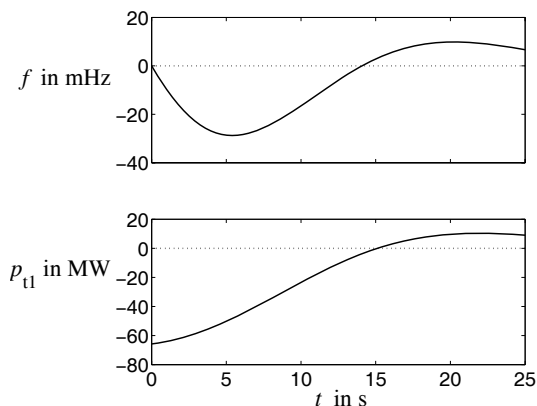


Abb. A.31: Störübergangsfunktionen von Netz 1 mit FÜ-Regelung

Das Störverhalten des ersten Regelkreises erhält man aus dem Modell

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_{r1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - b_{s1}k_{P1}c'_{s1} & -b_{s1}k_{I1} \\ c'_{s1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_{r1}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{s1} - b_{s1}k_{P1} \\ f_{s1} \end{pmatrix} d_1(t)$$

$$e_1(t) = (c'_{s1} \ 0) \begin{pmatrix} x(t) \\ x_{r1}(t) \end{pmatrix} + f_{s1}d_1(t),$$

das in Analogie zu den Gln. (9.44), (9.45) aufgestellt wurde und in denen e_{s1} die erste Spalte von E und $f_{s1} = f_{11}$ das angegebene Element von F darstellen. Die Störübergangsfunktion erhält man folglich durch folgende Aufrufe:

```

» KP(1,1) = 0.05;
» KI(1,1) = 0.167;
» Ag = [A-B(:,1)*KP(1,1)*C(1,1)
        -B(:,1)*KI(1,1); C(1,:) 0];
» Eg = [E(:,1) - B(:,1)*KP(1,1)*F(1,1)];
» Cg = [C(1,:) 0];
» Fg = F(1,1);
» Kreis=ss(Ag, Eg, Cg, Fg);
» step(Kreis);

```

Das Ergebnis ist in Abb. A.31 zu sehen, wobei die entstehende Kurve mit 100 multipliziert wurde, um die in der Aufgabenstellung genannte Laständerung von 100 MW zu untersuchen. Außerdem wurde im unteren Bildteil der Verlauf der Übergabeleistung ergänzt. Die Kurven zeigen, dass die Frequenzabweichung innerhalb von 30 Sekunden abgebaut wird. In derselben Zeit wird die Übergabeleistung vom Teilnetz 1 zu den anderen Teilnetzen auf den vereinbarten Wert zurückgeführt ($p_{t1} = 0$).

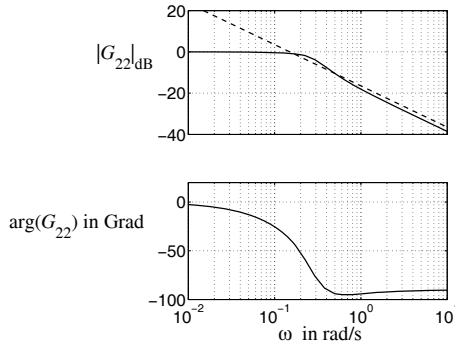


Abb. A.32: Bodediagramm der Regelstrecke von Teilregler 2

Für den zweiten und dritten Regelkreis verfährt man in derselben Weise, wobei $i=2$ bzw. $i=3$ gesetzt wird. Die Frequenzkennlinie der zweiten Hauptregelstrecke ist in Abb. A.32 zu sehen. Es wird ein PI-Regler mit den Parametern

$$k_{P2} = 0,111 \quad \text{und} \quad k_{I2} = 0,01667$$

gewählt, wodurch die in Abb. A.33 gezeigte Störübergangsfunktion entsteht.

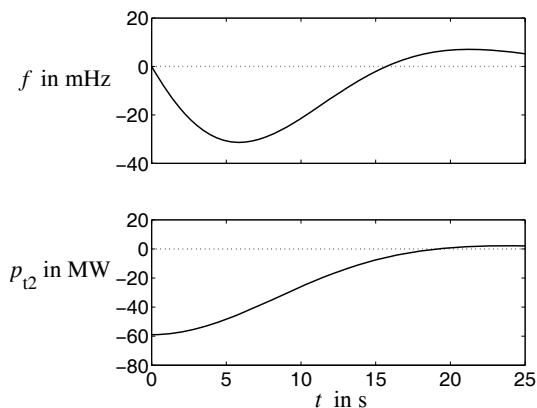


Abb. A.33: Störübergangsfunktionen mit FÜ-Regelung im Netz 2

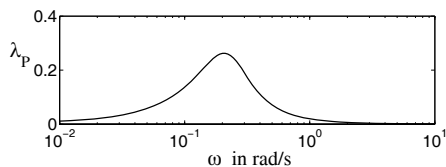


Abb. A.34: Verlauf von $\lambda_P\{\cdot\}$ zur Prüfung der verallgemeinerten Diagonaldominanz

Auf ähnlichem Wege wird der Regler für das dritte Teilnetz bestimmt, wobei dieselben Parameter wie beim zweiten Netz verwendet werden.

2. Die Prüfung der Diagonaldominanz der Rückführdifferenzmatrix kann genauso erfolgen, wie es im Programm 9.1 beschrieben ist. Dabei erhält man den in Abb. A.34 gezeigten Verlauf. Die Rückführdifferenzmatrix ist verallgemeinert diagonaldominant, so dass der Regelkreis die Integritätseigenschaft besitzt.
3. Die Störübergangsfunktion des Regelkreises mit sämtlichen angeschlossenen Teilreglern (Abb. A.35) erhält man unter Verwendung des Modells

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_r(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BK_P C & -BK_I \\ C & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_{ri}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E - BK_P F_e \\ F_e \end{pmatrix} d(t) \quad (\text{A.27})$$

$$y(t) = (C \ O) \begin{pmatrix} x(t) \\ x_r(t) \end{pmatrix} + F d(t), \quad (\text{A.28})$$

das in Analogie zu den Gln. (A.27), (A.28) aufgestellt wurde. Die Störübergangsfunktionsmatrix wird also durch folgende Aufrufe ermittelt, bei der die durch die Matrizen AI , BI , CI beschriebene I-erweiterte Regelstrecke sowie der in der Matrix KI stehende dezentrale PI-Regler verwendet werden:

$$\gg Ag = AI - BI * KI * CI;$$

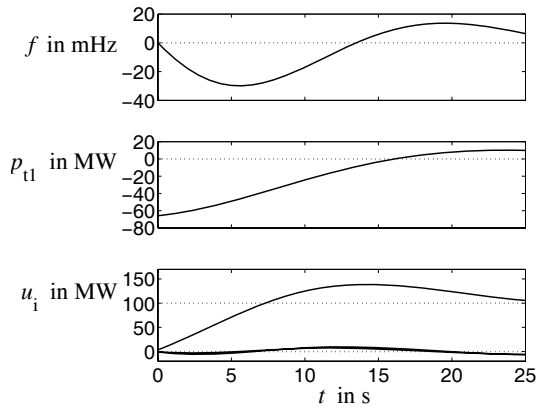


Abb. A.35: Störübergangsfunktion des Energienetzes mit dezentraler FÜ-Regelung

```

» Eg = [E-B*KP*FE; FE];
» Cg = [C zeros(m,m)];
» Fg = F;
» Kreis=ss(Ag, Eg, Cg, Fg);
» step(Kreis);

```

Dabei entstehen sehr viele Übergangsfunktionen, weil der im Modell verwendete Ausgangsvektor sehr lang ist. Man kann die Ausgabe aber auf die Frequenz und die Übergabeleistung reduzieren, indem man beispielsweise nur die zu diesen Größen gehörenden Zeilen von C und F in die Matrizen C bzw. F einträgt.

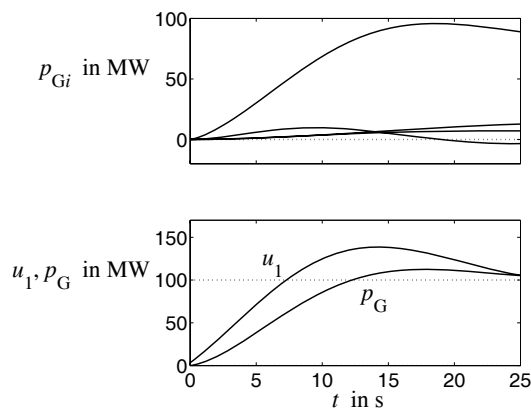


Abb. A.36: Generatorleistungen bei Laststörung von 100 MW

Abbildung A.35 zeigt den Verlauf der Netzfrequenz und das Übergabeleistungssaldo des ersten Teilnetzes bei Laständerung um 100 MW im ersten Teilnetz. Außerdem sind die Stellgrößen u_i im unteren Teil der Abbildung zu sehen, wobei die höhere Kurve zu u_1 und die beiden anderen zu u_2 und u_3 gehören. Die Güteforderungen werden erfüllt, denn im Netz wird die durch die Störung hervorgerufene Frequenzabweichung innerhalb von etwa 30 Sekunden beseitigt. Gleichzeitig geht die Übergabeleistung auf die vorgegebenen Werte zurück. Der Sollwert u_1 der Leistungsregler schwingt über. Dieses Überschwingen ist jedoch sehr klein. Wie Abb. A.36 zeigt, tritt auch im Verlauf der tatsächlichen Generatorleistungen nur ein sehr schwaches Überschwingen auf. Im oberen Teil der Abbildung sind die durch die vier Kraftwerksgruppen erzeugten Leistungen aufgetragen. Im unteren Teil ist zu sehen, wie die tatsächlich erzeugte Leistung $p_G(t)$ der Sollwertvorgabe $u_1(t)$ naheilt.

Aufgabe 11.1 Zeitdiskrete Zustandsraumbeschreibung einer Rinderzucht

Es werden die Zustandsgrößen

$$\mathbf{x}(k) = \begin{pmatrix} \text{Zahl der einjährigen Rinder im Jahr } k \\ \text{Zahl der zweijährigen Rinder im Jahr } k \\ \text{Zahl der dreijährigen und älteren Rinder im Jahr } k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix}$$

eingeführt. Aus der Aufgabenstellung erhält man für den Zustand im Jahr $k+1$ die Beziehungen

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= 0.8 x_2(k) \\ x_2(k+1) &= x_1(k) \\ x_3(k+1) &= x_2(k) + (1 - 0.3) x_3(k) - u(k). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich in Matrizenschreibweise das Zustandsraummodell

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.7 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y(k) &= (1 \quad 1 \quad 1) \mathbf{x}(k). \end{aligned}$$

Diskussion. Da die Eigenwerte von $\mathbf{A}$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0,7 \\ \lambda_{2/3} &= \pm\sqrt{0,8} \end{aligned}$$

betragsmäßig kleiner als eins sind, ist das diskrete System zustandsstabil, d. h., auch wenn keine Rinder geschlachtet werden ($u = 0$), strebt der Rinderbestand gegen null. Das Verhalten des Systems ändert sich, wenn auch ältere Rinder Nachkommen haben (z. B. durchschnittlich 0,4 Kälber pro zweijährigem oder älterem Rind). Untersuchen Sie die Eigenwerte in Abhängigkeit von der derart veränderten Geburtenrate. Reicht die angegebene Geburtenrate aus, damit sich der Rinderbestand reproduziert, bzw. wieviele Rinder dürfen geschlachtet werden, um den Bestand konstant zu halten?

Aufgabe 11.4 *Ableitung des zeitdiskreten Modells*

1. Die Matrixexponentialfunktion kann beispielsweise über die Laplacetransformation in

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{\mathbf{A}T}\} &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)^2} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

umgeformt und dann durch Rücktransformation erhalten werden:

$$e^{\mathbf{A}T} = \begin{pmatrix} e^{-T} & Te^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{pmatrix}.$$

Für $T = 0,1$ erhält man daraus

$$\mathbf{A}_d = \begin{pmatrix} 0,905 & 0,091 \\ 0 & 0,905 \end{pmatrix}.$$

Für den Vektor $\mathbf{b}_d$ ergibt sich

$$\mathbf{b}_d = \int_0^{0,1} e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \mathbf{b} = \int_0^{0,1} \begin{pmatrix} e^{-\tau} & \tau e^{-\tau} \\ 0 & e^{-\tau} \end{pmatrix} d\tau \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0047 \\ 0,0952 \end{pmatrix}.$$

Damit heißt das Zustandsraummodell

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \begin{pmatrix} 0,905 & 0,091 \\ 0 & 0,905 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{pmatrix} 0,0047 \\ 0,0952 \end{pmatrix} u(k) \\ y(k) &= (2 \quad 1) \mathbf{x}(k).\end{aligned}$$

2. Das kontinuierliche System hat wegen $n = 1$ das Zustandsraummodell

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= -x(t).\end{aligned}$$

Da $a_d = e^{aT} = 1$ gilt, muss $a = 0$ sein. Dann erhält man aus

$$b_d = \int_0^T d\tau b = Tb = 1$$

die Beziehung $b = \frac{1}{T}$.

Aufgabe 11.7 *Verhalten von Systemen zweiter Ordnung*

Die Lösung ist in folgender Tabelle enthalten, in der die Pole in derselben Position wie die zugehörigen Übergangsfunktionen in Abb. 11.11 auf S. 455 eingetragen sind:

	$0,25 \pm 0,3j$	$0,03 \pm 0,4j$
$0,50, 0,55$	$0,16, 0,22$	$1,4, 1,6$

Die verwendeten Systeme entstehen übrigens aus den in Aufgabe I-6.22 betrachteten Systemen durch Abtastung mit der Abtastzeit $T = 0,4$, nachdem die Eigenwerte des instabilen Systems auf 1,2 und 1,5 verändert wurden. Vergleichen Sie beide Aufgaben und ihre Lösungen!

Aufgabe 11.9 Verhalten eines Systems erster Ordnung

1. Die gegebene Zustandsgleichung beschreibt ein Verzögerungsglied 1. Ordnung. Die Gewichtungs- und die Übergangsfunktion lauten

$$g(t) = e^{at}$$

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{a}(e^{at} - 1) & \text{für } a \neq 0 \\ t & \text{für } a = 0. \end{cases}$$

2. Für die Übergangsfolge erhält man aus Gl. (11.45) die Beziehung

$$h(k) = \sum_{j=0}^{k-1} a_d^j b_d,$$

was für $a \neq 1$ in

$$h(k) = \frac{1 - a_d^k}{1 - a_d} b_d$$

umgeformt werden kann. Für die angegebene Abtastzeit erhält man

$$a_d = \begin{cases} 1,6487 & \text{für } a = 1 \\ 1 & \text{für } a = 0 \\ 0,6065 & \text{für } a = -1 \end{cases}$$

und

$$b_d = \begin{cases} 0,6487 & \text{für } a = 1 \\ 0,5 & \text{für } a = 0 \\ 0,3935 & \text{für } a = -1. \end{cases}$$

Die Gewichtsfolge heißt

$$g(k) = \begin{cases} 0 & \text{für } k = 0 \\ a_d^{k-1} b_d & \text{für } k \geq 1. \end{cases}$$

3. Die Übergangsfolge ist zusammen mit der Übergangsfunktion in Abb. A.37 dargestellt. Die Übergangsfolge stimmt an den Abtastzeitpunkten mit den Funktionswerten der Übergangsfunktion überein.

Die Gewichtsfolge für $a < 0$ ist zusammen mit der Gewichtsfunktion in Abb. A.38 dargestellt. Die Funktionswerte an den Abtastzeitpunkten stimmen nicht mit den entsprechenden Werten der Gewichtsfolge überein. Der beim zeitdiskreten System am Eingang angelegte diskrete Einheitsimpuls $\delta_d(k)$ kann durch zwei Sprungfunktionen dargestellt werden:

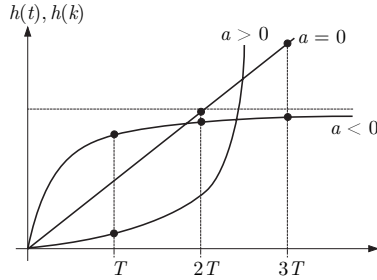


Abb. A.37: Übergangsfunktionen für $a < 0$, $a = 0$, $a > 0$

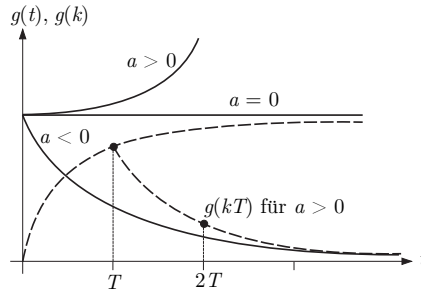


Abb. A.38: Gewichtsfunktionen und Gewichtsfolge

$$\delta_d(t) = \sigma(t) - \sigma(t - T).$$

Dementsprechend ist am Systemausgang $y(t)$ für $0 \leq t < T$ die Übergangsfunktion des Systems zu erkennen. Diese Übergangsfunktion wird bei $t = T$ abgetastet. In der Folgezeit wird diese Übergangsfunktion mit der bei $t = T$ beginnenden negativen Übergangsfunktion überlagert. Daraus ergeben sich die anderen Abtastwerte, wie dies in der Abbildung durch die gepunktete Linie verdeutlicht wird.

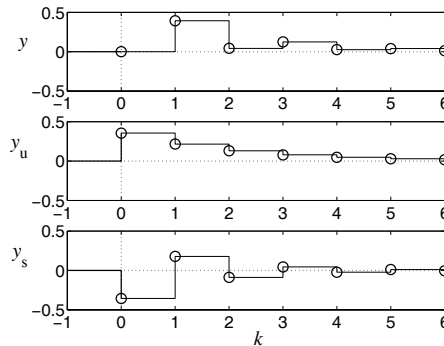


Abb. A.39: Verhalten eines Systems erster Ordnung

4. Aus den Gln. (11.63), (11.64) erhält man mit den angegebenen Systemparametern die Beziehungen

$$y_{\ddot{u}}(k) = b_d \frac{1}{a_d + 0,5} a_d^k = 0,3935 \frac{1}{0,6065 + 0,5} 0,6065^k$$

und

$$y_s(k) = \frac{a_d}{-0,5 - 0,6065} 0,5^k.$$

Abb. A.39 zeigt oben die erzwungene Bewegung

$$y_{\text{erzw}}(k) = y_{\ddot{u}}(k) + y_s(k),$$

in der Mitte das Übergangsverhalten $y_{\ddot{u}}(k)$ und unten das stationäre Verhalten $y_s(k)$.

Aufgabe 11.11 Beobachtbarkeit eines Oszillators

Da der kontinuierliche Oszillator vollständig beobachtbar ist, denn die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{S}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hat den Rang zwei, ist eine notwendige Bedingung für die Beobachtbarkeit des abgetasteten Oszillators erfüllt. Die Beobachtbarkeit kann also nur dadurch verloren gehen, dass das sinusförmige Ausgangssignal „ungünstig“, d. h. mit der Periodendauer des Signals, abgetastet wird.

Die Beobachtbarkeit des zeitdiskreten Systems ist gesichert, wenn die Bedingung (11.85) erfüllt ist. Man kann die Beobachtbarkeit aber auch dadurch analysieren, dass man zunächst das zeitdiskrete Zustandsraummodell bildet, für das

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}T} = \begin{pmatrix} \cos T & \sin T \\ -\sin T & \cos T \end{pmatrix}$$

gilt. Für

$$T = k\pi$$

ist

$$\mathbf{A}_d = \pm \mathbf{I},$$

womit als Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{S}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

entsteht, das System also nicht beobachtbar ist.

Zur Interpretation dieses Ergebnisses ist in Abb. A.40 die Ausgangsgröße des Oszillators bei

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

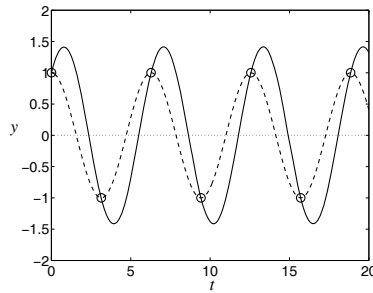


Abb. A.40: Ausgangsgröße des Oszillators mit Angabe der Abtastzeitpunkte

angegeben. Verwendet man die Abtastzeit $T = \pi$, so kann aus den Abtastzeitpunkten nicht auf den Anfangszustand geschlossen werden. Sowohl die durchgezogene Ausgangsgröße als auch die gestrichelte Ausgangsgröße, die man bei

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erhält, führen auf dieselben Abtastwerte.

Für alle anderen Abtastzeiten ist A_d keine Einheitsmatrix, so dass sich die zweite Zeile der Beobachtbarkeitsmatrix von der ersten unterscheidet. Folglich ist der Oszillator für diese Abtastzeiten beobachtbar.

Aufgabe 11.12 Zeitdiskrete Realisierung einer kontinuierlichen Regelung

1. Für das kontinuierliche System lautet die Zustandsgleichung des geschlossenen Kreises

$$\dot{x}(t) = -x(t).$$

Der Eigenwert $\lambda = -1$ zeigt, dass die instabile Strecke durch den P-Regler stabilisiert wird.

2. Aus dem kontinuierlichen System entsteht durch Abtastung das zeitdiskrete System

$$\begin{aligned} x(k+1) &= e^T x(k) + \int_0^T e^\tau d\tau u(k) \\ &= e^T x(k) + (e^T - 1) u(k), \quad x(0) = 0 \\ y(k) &= x(k). \end{aligned}$$

Mit dem P-Regler

$$u(k) = -2y(k)$$

erhält man das diskrete Modell des geschlossenen Kreises

$$x(k+1) = (2 - e^T) x(k).$$

Offensichtlich ist der Regelkreis nur dann stabil, wenn

$$|2 - e^T| < 1$$

gilt. Dies ist für die Abtastzeit

$$0 < T < 1,1$$

der Fall.

Wird die Abtastzeit größer als 1,1 gewählt, so ist der Regelkreis instabil. Eine zu große Abtastzeit bedeutet im vorliegenden Fall, dass der Wert der Zustandsgröße x der instabilen Strecke zwischen zwei Abtastzeitpunkten zu stark ansteigt und der Regler die Regelstrecke deshalb nicht in ausreichendem Maße in Richtung der Gleichgewichtslage steuern kann.

3. Es muss eine von der Abtastzeit T abhängige Reglerverstärkung verwendet werden, z. B.

$$u(k) = -(1 + e^{-T}) y(k),$$

für die der geschlossene Kreis

$$x(k+1) = e^{-T} x(k)$$

entsteht, der für jede Abtastzeit $T > 0$ stabil ist. Dieses Reglergesetz stimmt für die kontinuierliche Regelung ($T \rightarrow 0$) mit dem gegebenen Reglergesetz überein. Je größer die Abtastzeit ist, umso kleiner ist die Proportionalverstärkung des Reglers, weil gleichzeitig der Parameter $b_d = e^T - 1$ aus dem zeitdiskreten Zustandsraummodell ansteigt.

Aufgabe 11.14 Preisdynamik in der Landwirtschaft

1. Abbildung A.41 zeigt das Blockschaltbild, aus dem zu erkennen ist, dass der mit Wachstum gezeichnete Block die einzigen Zeitverzögerungen enthält.

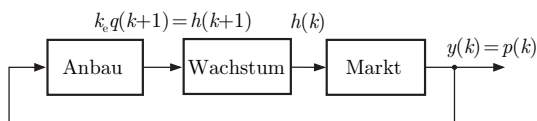


Abb. A.41: Blockschaltbild für die Untersuchung der Preisdynamik

Da die Ernte proportional zur Aussaat desselben Jahres angesetzt wird, ist dieser Block durch

$$h(k+1) = k_e q(k+1)$$

beschrieben, wobei k_e einen Proportionalitätsfaktor darstellt. Der Block „Anbau“ ist durch Gl. (11.91)

$$q(k+1) = l_1 p(k) - l_1 p_0$$

für einen gegebenen Parameter p_0 und der Block „Markt“ durch Gl. (11.92)

$$p(k) = -l_2 h(k) + p_e$$

mit dem Parameter p_e dargestellt. Wählt man $h(k)$ als Zustandsvariable, so erhält man durch Zusammenfassung dieser Gleichungen die Beziehung

$$h(k+1) = -k_e l_1 l_2 h(k) + k_e l_1 (p_e - p_0),$$

die aufgrund des rechten Terms noch keine lineare (sondern eine affine) Differenzengleichung ist. Die Linearität erzeugt man durch die Transformation

$$\tilde{h}(k) = h(k) + c,$$

die die Variable $h(k)$ um die Konstante c „verschiebt“. Durch Einsetzen erhält man

$$\begin{aligned}\tilde{h}(k+1) &= h(k+1) - c \\ &= -k_e l_1 l_2 h(k) + k_e l_1 (p_e - p_0) - c \\ &= -k_e l_1 l_2 \tilde{h}(k) - k_e l_1 l_2 c + k_e l_1 (p_e - p_0) + c,\end{aligned}$$

was zur linearen Differenzengleichung

$$\tilde{h}(k+1) = -k_e l_1 l_2 \tilde{h}(k) \tag{A.29}$$

schrumpft, wenn

$$-k_e l_1 l_2 c + k_e l_1 (p_e - p_0) - c = 0$$

gilt. Dafür muss die Konstante c entsprechend

$$c = \frac{k_e l_1 (p_e - p_0)}{1 + k_e l_1 l_2}$$

gewählt werden.

2. Die Stabilität des Systems (A.29) hängt nur vom Produkt $k_e l_1 l_2$ ab. Man erhält für

$$\begin{array}{ll} |k_e l_1 l_2| < 1 & \text{stabiles Verhalten} \\ |k_e l_1 l_2| = 1 & \text{zyklisches Verhalten} \\ |k_e l_1 l_2| > 1 & \text{instabiles Verhalten.} \end{array}$$

Für die Stabilitätsgrenze $|k_e l_1 l_2| = 1$ entsteht hier zyklisches Verhalten, weil $k_e l_1 l_2$ positiv ist und mit dem negativen Vorzeichen in die Differenzengleichung (A.29) eingeht.

3. Die Preisdynamik ist für die drei genannten Parameterbereiche in Abbildung A.42 dargestellt. Das Einschwingen des Preises auf den Wert null im oberen Fall entspricht der Stabilisierung des Preises bei einem Wert, der der oben eingeführten Konstanten c entspricht. Im zweiten Fall schwankt der Preis um diesen Wert. Im dritten Fall stellt sich kein stationärer Wert ein. Die Preisschwankungen um den Wert c werden von Jahr zu Jahr größer.
4. Um Preistendenzen bei der Bestimmung der Aussaatmenge berücksichtigen zu können, muss der Block „Aussaat“ eine eigene Dynamik erhalten, durch die die Preise der vorhergehenden Jahre gespeichert werden. Dann kann anstelle von Gl. (11.91) eine Beziehung der Form

$$q(k+1) = f(p(k), p(k-1), p(k-2), p_0)$$

eingeführt werden.

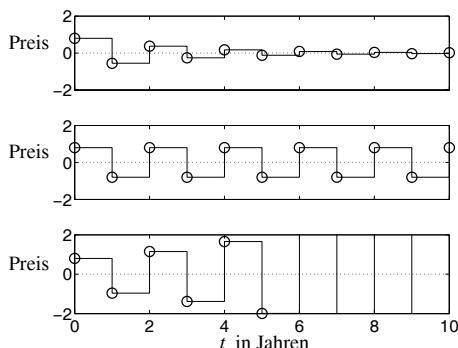


Abb. A.42: Preisdynamik in der Landwirtschaft

5. Durch Vervielfachung des Blockes „Aussaat“ kann man mehrere landwirtschaftliche Betriebe darstellen, von denen jeder eine eigene Entscheidung über die Aussaatmengen trifft. Die Blöcke sind dann allerdings nicht durch die einfache Beziehung (11.91) darstellbar, weil nicht allein der Preis, sondern der auch von der eigenen Anbaumenge abhängige Gewinn des letzten Jahres in die Betrachtungen einbezogen werden muss.

Diskussion. Die Differenz $p_e - p_0$ ist positiv, wenn der Importpreis pro Einheit größer ist als der Produktionspreis im Inland. In diesem Falle kann die Inlandsproduktion mit dem Import konkurrieren. Für $p_e - p_0 < 0$ ist der Importpreis niedriger als der Preis des Inlandsproduktes und die Produktion im Inland lohnt sich nicht (wenn, wie in dieser vereinfachten Betrachtung, die Qualität der Erzeugnisse dieselbe ist und deshalb kein Kaufsargument darstellt).

Aufgabe 12.1 Berechnung der Übergangsmatrix

Aus

$$\Phi(z) = (zI - A)^{-1}z$$

erhält man für die erste Matrix

$$\Phi(z) = \begin{pmatrix} z & -1 \\ 0 & z+1 \end{pmatrix}^{-1} z = \frac{z}{z(z+1)} \begin{pmatrix} z+1 & 1 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{z+1} \\ 0 & \frac{z}{z+1} \end{pmatrix}.$$

Nach Rücktransformation in den Zeitbereich ergibt sich

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= I \\ \Phi(k) &= \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{k+1} \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für die anderen Matrizen erhält man auf demselben Wege

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \Phi(k) = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \Phi(k) = \begin{pmatrix} \lambda^k & \lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix} \quad \text{für } k \geq 1$$

$$A = \begin{pmatrix} \delta & \omega \\ -\omega & \delta \end{pmatrix} \quad \Phi(k) = (\delta^2 + \omega^2)^{\frac{k}{2}} \begin{pmatrix} \cos k\omega & \sin k\omega \\ -\sin k\omega & \cos k\omega \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 13.1 Zustandsraummodell eines PI-Regelkreises

1. Es wird zunächst die Zustandsgleichung des PI-Reglers ermittelt. Aus der allgemeinen Beziehung

$$\begin{aligned} G_{\text{PI}}(z) &= \frac{U(z)}{E(z)} = c_r(z - a_r)^{-1}b_r + d_r \\ &= \frac{b_r c_r}{z - a_r} + d_r \end{aligned}$$

für die Übertragungsfunktion des Systems

$$\begin{aligned} x_r(k+1) &= a_r x_r(k) + b_r e(k) \\ u(k) &= c_r x_r(k) + d_r e(k) \end{aligned}$$

kann man für den PI-Regler

$$\begin{aligned} \frac{U(z)}{E(z)} &= k_P + k_P \frac{T}{2T_1} \left(1 + \frac{2}{z-1} \right) \\ &= k_P \frac{T}{T_1} \frac{1}{z-1} + k_P \left(1 + \frac{T}{2T_1} \right) \end{aligned}$$

das Zustandsraummodell

$$\begin{aligned} x_r(k+1) &= x_r(k) + k_P \frac{T}{T_1} e(k) \\ u(k) &= x_r(k) + k_P \left(1 + \frac{T}{2T_1} \right) e(k) \end{aligned}$$

ablesen. Dabei wurde willkürlich $c_r = 1$ gesetzt, woraus sich $b_r = k_P \frac{T}{T_1}$ ergibt.

2. Das Blockschaltbild des geregelten Systems kann unmittelbar aus den Zustandsraummodellen des Reglers und der Regelstrecke abgeleitet werden (Abb. A.43).
3. Wird zu den Zustandsgrößen der Regelstrecke die Zustandsgröße des PI-Reglers hinzugefügt, so folgt daraus

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ x_r(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k) \\ x_r(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{pmatrix} u(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ b_r \end{pmatrix} e(k). \quad (\text{A.30})$$

Der Kreis wird durch die Beziehungen

$$u(k) = c_r x_r(k) + d_r e(k) \quad (\text{A.31})$$

$$e(k) = w(k) - \mathbf{c}' \mathbf{x}(k) \quad (\text{A.32})$$

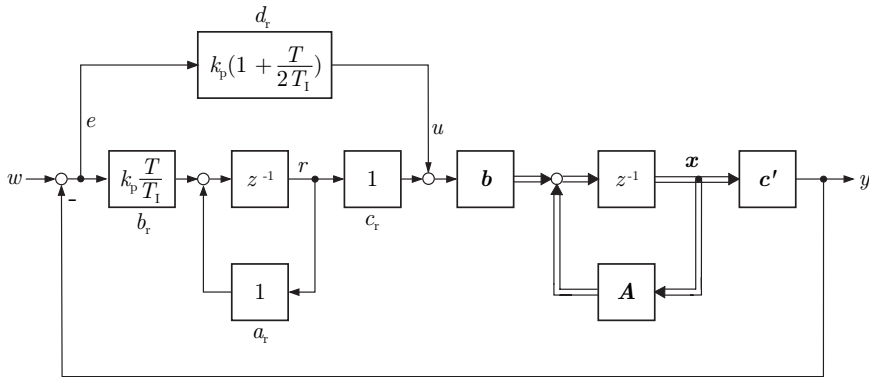


Abb. A.43: Strukturbild des zeitdiskreten PI-Regelkreises

geschlossen, wodurch man das Zustandsraummodell des geschlossenen Kreises

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ x_r(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} - d_r \mathbf{b} \mathbf{c}' & \mathbf{b} \mathbf{c}_r \\ -\mathbf{b}_r \mathbf{c}' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k) \\ x_r(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{b} d_r \\ \mathbf{b}_r \end{pmatrix} w(k), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$y(k) = \mathbf{c}' \mathbf{x}(k)$$

erhält. Einsetzen der Reglerparameter liefert

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ x_r(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} - k_P \left(1 + \frac{T}{2T_I}\right) \mathbf{b} \mathbf{c}' & \mathbf{b} \\ -k_P \frac{T}{T_I} \mathbf{c}' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k) \\ x_r(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_P \left(1 + \frac{T}{2T_I}\right) \mathbf{b} \\ \frac{k_P T}{T_I} \end{pmatrix} w(k).$$

4. Die Regelabweichung $E(z)$ erhält man aus

$$E(z) = \frac{1}{1 + K(z)G(z)} W(z),$$

wofür man für sprungförmige Führungsgröße $W(z) = \frac{z}{z-1}$ die Beziehung

$$E(z) = \frac{1}{1 + K(z)G(z)} \frac{z}{z-1}$$

erhält. Es tritt keine bleibende Regelabweichung auf, wenn die Bedingung

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1}{1 + K(z)G(z)} \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1 + K(1)G(1)} \stackrel{!}{=} 0$$

erfüllt ist, in der der Faktor $(z-1)$ aus dem Grenzwertsatz der $\mathcal{Z}$ -Transformation stammt. Die Reihenschaltung von Regler und Strecke muss also einen Pol bei $z = 1$ besitzen, damit keine bleibende Regelabweichung auftritt.

Die Pole der offenen Kette sind die steuerbaren und beobachtbaren Eigenwerte des zugehörigen Zustandsraummodells. Aus den Gln. (A.30) – (A.32) erhält man für die offene Kette ein Modell der Form

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ x_r(k+1) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{A} & bc_r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_0} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k) \\ x_r(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} bd_r \\ b_r \end{pmatrix} e(k).$$

$$u(k) = (\mathbf{0} \quad c_r) \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k) \\ x_r(k) \end{pmatrix} + d_r w(k)$$

Da $\mathbf{A}_0$ Dreiecksform hat, ist ein Eigenwert gleich 1. Ferner ist aufgrund der Dreiecksform zu sehen, dass dieser Eigenwert für $b_r \neq 0$ steuerbar ist. Er ist beobachtbar, wenn $c_r \neq 0$ ist. Folglich ist der Eigenwert $z = 1$ ein Pol der offenen Kette, wodurch die Sollwertfolge bei sprungförmigen Führungssignalen gesichert ist.

Aufgabe A5.6 *Regelung gekoppelter Elektroenergienetze*

Aufstellung des Modells. Das Modell wird im Zustandsraum aufgestellt; alternativ dazu könnte auch das Modell im Frequenzbereich gebildet und für den Reglerentwurf eingesetzt werden.

Aus Gl. (A5.1) erhält man für die Frequenzabweichung f die Beziehung

$$\begin{aligned} \dot{f}(t) &= \frac{1}{T} p_B(t) \\ &= \frac{1}{T} (p_{B_1}(t) + p_{B_2}(t)) \\ &= \frac{1}{T} (p_{G_1}(t) - p_{V_1}(t) - p_{L_1}(t) + p_{G_2}(t) - p_{V_2}(t) - p_{L_2}(t)). \end{aligned}$$

Die frequenzabhängigen Verbraucher (A5.2) sind durch

$$\begin{aligned} \dot{x}_{V_1}(t) &= -\frac{1}{T_{V_1}} x_{V_1}(t) + \frac{k_{V_1}}{T_{V_1}} f(t) \\ p_{V_1}(t) &= x_{V_1}(t) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \dot{x}_{V_2}(t) &= -\frac{1}{T_{V_2}} x_{V_2}(t) + \frac{k_{V_2}}{T_{V_2}} f(t) \\ p_{V_2}(t) &= x_{V_2}(t) \end{aligned}$$

beschrieben. Für die Modelle (A5.3) und (A5.4) werden zur Vereinfachung hier die Abkürzungen

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{G_1}(t) &= \mathbf{A}_{G_1} \mathbf{x}_{G_1}(t) + \mathbf{b}_{G_1} u_1(t) + \mathbf{e}_{G_1} f(t) \\ p_{G_1}(t) &= \mathbf{c}'_{G_1} \mathbf{x}_{G_1}(t) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{G_2}(t) &= \mathbf{A}_{G_2} \mathbf{x}_{G_2}(t) + \mathbf{b}_{G_2} u_2(t) + \mathbf{e}_{G_2} f(t) \\ p_{G_2}(t) &= \mathbf{c}'_{G_2} \mathbf{x}_{G_2}(t) \end{aligned}$$

eingeführt.

Um die Leistungszahlen zu bestimmen, müssen zunächst die Parameter k_{s_1} und k_{s_2} ermittelt werden, die die Reaktion der Kraftwerke auf eine Frequenzabweichung beschreiben. Aus den Zustandsraummodellen (A5.3) und (A5.4) erhält man für die im statischen Fall eintretenden Leistungsänderungen mit den in der Aufgabenstellung angegebenen Parameterwerten

$$\begin{aligned} k_{s_1} &= -\mathbf{c}'_{G_1} \mathbf{A}_{G_1}^{-1} \mathbf{b}_{G_1} = 318 \frac{\text{MW}}{\text{Hz}} \\ k_{s_2} &= -\mathbf{c}'_{G_2} \mathbf{A}_{G_2}^{-1} \mathbf{b}_{G_2} = 401 \frac{\text{MW}}{\text{Hz}}. \end{aligned}$$

Die Übergabeleistung p_t wird entsprechend Gl. (A5.5) aus

$$\begin{aligned} p_t(t) &= \frac{T_2}{T} p_{B_1}(t) - \frac{T_1}{T} p_{B_2}(t) \\ &= \frac{T_2}{T} (p_{G_1}(t) - p_{V_1}(t) - p_{L_1}(t)) - \frac{T_1}{T} (p_{G_2}(t) - p_{V_2}(t) - p_{L_2}(t)) \\ &= \frac{T_2}{T} (\mathbf{c}_{G_1}' \mathbf{x}_{G_1}(t) - k_{V_1} x_{V_1}(t) - p_{L_1}(t)) \\ &\quad - \frac{T_1}{T} (\mathbf{c}_{G_2}' \mathbf{x}_{G_2}(t) - k_{V_2} x_{V_2}(t) - p_{L_2}(t)) \end{aligned}$$

berechnet. Damit können die Netzkennlinienfehler

$$\begin{aligned} e_1(t) &= k_1 f(t) + p_t(t) \\ e_2(t) &= k_2 f(t) - p_t(t) \end{aligned}$$

gebildet werden, die als Regelabweichung für die Sekundärregelung maßgebend sind.

Aus diesen Beziehungen erhält man das Zustandsraummodell

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \mathbf{E} \mathbf{d}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) &= \mathbf{C}_e \mathbf{x}(t) + \mathbf{F} \mathbf{d}(t) \end{aligned}$$

des Gesamtnetzes, wobei sich der Zustandsvektor

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ \mathbf{x}_{G_1}(t) \\ x_{V_1}(t) \\ \mathbf{x}_{G_2}(t) \\ x_{V_2}(t) \end{pmatrix}$$

aus der Frequenzabweichung sowie den Zuständen bzw. Zustandsvektoren der Kraftwerke und Verbraucher zusammensetzt, der Eingangsvektor

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

die beiden Stellgrößen enthält und die Störung

$$\mathbf{d}(t) = \begin{pmatrix} p_{L_1}(t) \\ p_{L_2}(t) \end{pmatrix}$$

die frequenzunabhängigen Laständerungen in beiden Netzen zusammenfasst. Der Ausgangsvektor $\mathbf{y}$ ist so gewählt, dass er die Frequenzabweichung, die beiden Generatorleistungen, die Verbraucherleistungen sowie die Übergabeleistung beschreibt:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ p_{G_1}(t) \\ p_{G_2}(t) \\ x_{V_1}(t) \\ x_{V_2}(t) \\ p_t(t) \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $\mathbf{e}$ besteht aus den beiden Netzkennlinienfehlern:

$$\mathbf{e}(t) = \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{pmatrix}.$$

Für die im Modell vorkommenden Matrizen erhält man aus der Zusammenfassung der Teilmodelle folgende Beziehungen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{T}c'_{G_1} & -\frac{1}{T} & \frac{1}{T}c'_{G_2} & -\frac{1}{T} \\ e_{G_1} & \mathbf{A}_{G_1} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \frac{k_{V_1}}{T_{V_1}} & \mathbf{O} & -\frac{1}{T_{V_1}} & \mathbf{O} & 0 \\ e_{G_2} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{A}_{G_2} & \mathbf{O} \\ \frac{k_{V_2}}{T_{V_2}} & \mathbf{O} & 0 & \mathbf{O} & -\frac{1}{T_{V_2}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_{G_1} & \mathbf{O} \\ 0 & 0 \\ \mathbf{O} & b_{G_2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T} & -\frac{1}{T} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ 0 & 0 \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{O} & 0 & \mathbf{O} & 0 \\ 0 & c'_{G_1} & 0 & \mathbf{O} & 0 \\ 0 & \mathbf{O} & 0 & c'_{G_2} & 0 \\ 0 & \mathbf{O} & 1 & \mathbf{O} & 0 \\ 0 & \mathbf{O} & 0 & \mathbf{O} & 1 \\ 0 & \frac{T_2}{T}c'_{G_1} & -\frac{T_2}{T} & -\frac{T_1}{T}c'_{G_2} & \frac{T_1}{T} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_e = \begin{pmatrix} k_1 & \frac{T_2}{T}c'_{G_1} & -\frac{T_2}{T} & -\frac{T_1}{T}c'_{G_2} & \frac{T_1}{T} \\ k_2 & -\frac{T_2}{T}c'_{G_1} & \frac{T_2}{T} & \frac{T_1}{T}c'_{G_2} & -\frac{T_1}{T} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -\frac{T_2}{T} & \frac{T_1}{T} \\ \frac{T_2}{T} & -\frac{T_1}{T} \end{pmatrix}$$

Verhalten des Elektroenergienetzes. Analyse und Reglerentwurf des Elektroenergienetzes können mit allen in diesem Buch behandelten Methoden durchgeführt werden. Lösungsschritte bzw. Anhaltspunkte dafür geben u. a. das Beispiel 6.4 bzw. die Lösungen zu den Übungsaufgaben 5.1, 7.5 und 9.5. Im Folgenden werden einige Aspekte der Systemanalyse und des Reglerentwurfes beschrieben, die jedoch nur einen Ausschnitt aus dem Spektrum der möglichen Bearbeitungsschritte des Projektes darstellen.

Abbildung A.44 zeigt die Netzkennlinienfehler e_1 und e_2 bei einer sprunghörmigen Lasterhöhung im Netz 1 um 50 MW. Im statischen Zustand beschreiben die beiden Fehler gerade das Leistungsdefizit p_{B1} bzw. p_{B2} in den beiden Netzen:

$$e_1(\infty) = 50 \text{ MW}, \quad e_2(\infty) = 0 \text{ MW}.$$

Da sich zur Zeit $t = 0$ die Übergabeleistung p_t sprunghörmig verändert, was man z. B. bei Betrachtung der Übergangsfunktionsmatrix des Netzes bezüglich der Last als Eingangsgröße sehen kann, verändern sich auch die Netzkennlinienfehler zur Zeit $t = 0$ sprunghörmig.

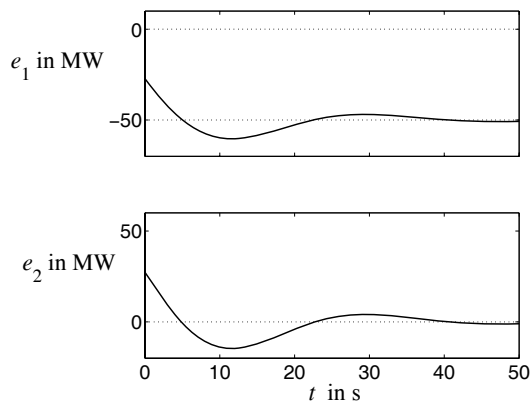


Abb. A.44: Netzkennlinienfehler bei sprungförmiger Erhöhung der Last im Netz 1 um 50 MW

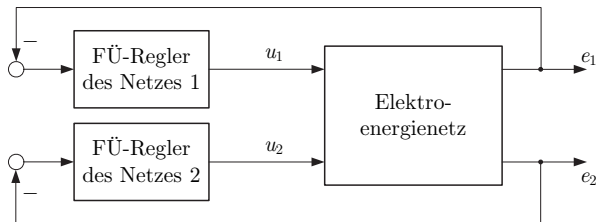


Abb. A.45: Blockschaltbild der dezentralen FÜ-Regelung

Dezentrale FÜ-Regelung. Das Blockschaltbild des dezentral geregelten Energienetzes zeigt Abb. A.45. Im Folgenden wird der Entwurf des dezentralen Reglers skizziert.

Abbildung A.46 zeigt das Bodediagramm des Teilnetzes 1 mit der Eingangsgröße u_1 und der Ausgangsgröße e_1 . Es wird der PI-Regler

$$K_1(s) = 0,09 + \frac{0,09}{s}$$

verwendet, dessen Amplitudengang in der Abbildung durch die gestrichelte Linie eingetragen ist. Die Reglerparameter wurden entsprechend dem im Kap. I-11 beschriebenen Entwurfsverfahren so ausgewählt, dass die Schnittfrequenz der offenen Kette bei $\omega_s = 0,1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ liegt und ein Knickpunktabstand von $a = 2$ auftritt. Diese Größen resultieren aus einer Betrachtung des Störverhaltens, wobei hier zu beachten ist, dass die Regelstrecke bezüglich der Störung sprungfähig ist, so dass sich die im Abschn. I-11.1.4 beschriebenen Untersuchungen nicht genau übernehmen lassen, da dort nur unverzögerte oder verzögerte Störungen am Streckenausgang betrachtet wurden. Abbildung A.47 zeigt, dass der Netzkennlinienfehler e_1 , die Übergabeleistung p_t und die Frequenz f im gesamten Netz bei Anwendung des Reglers im Teilnetz 1 nach etwa 20 Sekunden verschwinden. Die maximale Frequenzabweichung liegt bei etwa 40 mHz.

Auf ähnlichem Wege wurde der PI-Regler

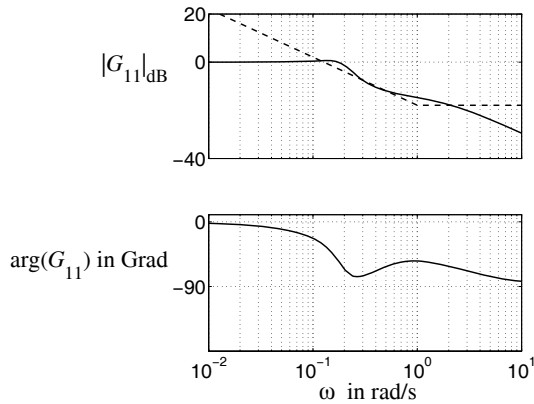


Abb. A.46: Bodediagramm des Teilnetzes 1

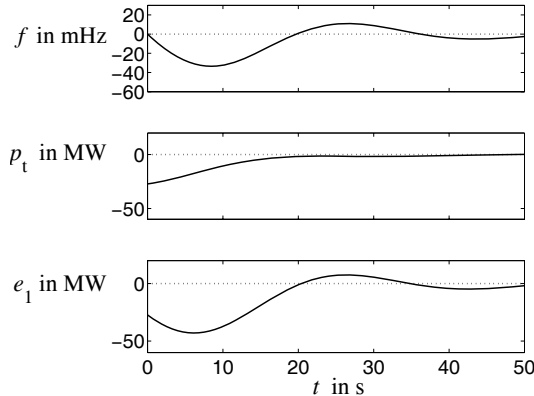


Abb. A.47: Verhalten des geregelten Netzes 1 bei Lasterhöhung

$$K_2(s) = 0,05 + \frac{0,05}{s}$$

für das Netz 2 entworfen, wobei beim Entwurf das Netz mit dem Eingang u_2 und dem Ausgang e_2 ohne Regler im Netz 1 als Regelstrecke betrachtet wurde. Das Verhalten des Netzes mit diesem Regler allein bei einer Laständerung im Netz 2 ist ähnlich wie das in Abb. A.47 gezeigte.

Die beiden getrennt entworfenen Regler können gleichzeitig am Gesamtnetz als dezentrale Regelung verwendet werden, wenn die Rückführdifferenzmatrix diagonal dominant ist. Dies ist der Fall, wie Abb. A.48 zeigt. Die durchgezogenen Linien beschreiben $|F_{11}(j\omega)|$ bzw. $|F_{22}(j\omega)|$, die gestrichelten Linien $|F_{12}(j\omega)|$ bzw. $|F_{21}(j\omega)|$. Offensichtlich sind die Hauptdiagonalelemente über den gesamten Frequenzbereich betragsmäßig größer als die Nebendiagonalelemente. Das dezentral geregelte System ist folglich E/A-stabil und besitzt außerdem die Integritätseigenschaft.

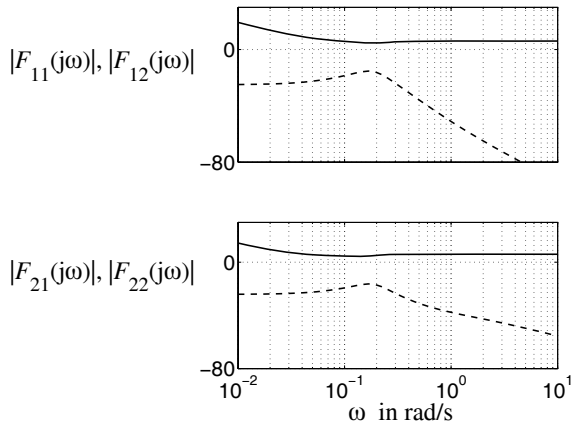


Abb. A.48: Überprüfung der Diagonaldominanz der Rückführdifferenzmatrix

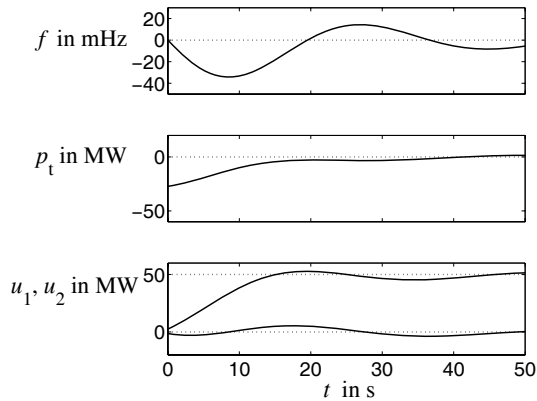


Abb. A.49: Störverhalten des dezentral geregelten Netzes

Abbildung A.49 zeigt das Verhalten des dezentral geregelten Netzes bei einer Lasterhöhung im Netz 1 um 50 MW. Im Vergleich zur Abb. A.47, die sich auf das Netz mit nur einem Regler bezieht, wird die Frequenzabweichung schneller und mit kleinerem Maximalwert abgebaut, da in beiden Teilnetzen der Störung entgegen gewirkt wird. Die in der Aufgabenstellung angegebenen Güteforderungen werden eingehalten. Wichtig ist auch, dass die geforderte Leistung u_1 des Kraftwerks im Netz 1 nicht überschwingt (unterer Teil der Abbildung).

Anhang 2

Matrizenrechnung

A2.1 Bezeichnungen und einfache Rechenregeln

Die Wahl der Formelzeichen hält sich an folgende Konventionen: Skalare sind durch kleine kursive Buchstaben, Vektoren durch kleine halbfette Buchstaben und Matrizen durch halbfette Großbuchstaben gekennzeichnet. Vektoren sind als Spaltenvektoren definiert, z. B.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

so dass Zeilenvektoren als transponierte Spaltenvektoren

$$\boldsymbol{x}' = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$$

geschrieben werden. $\mathbf{0}$ ist der Nullvektor.

Die Elemente einer Matrix werden mit demselben Buchstaben wie die Matrix und zusätzlich mit den Indizes bezeichnet. So ist a_{ij} das Element der Matrix $\boldsymbol{A}$, das in der i -ten Zeile und der j -ten Spalte steht. $\boldsymbol{I}$ bzw. $\boldsymbol{O}$ bezeichnen die Einheitsmatrix bzw. eine quadratische oder rechteckige Nullmatrix.

Bei komplexwertigen Matrizen oder Vektoren bedeutet der hochgestellte Stern $*$, dass die Matrix bzw. der Vektor transponiert wird und alle komplexen Elemente durch ihren konjugiert komplexen Wert ersetzt werden. Die Operationen $\boldsymbol{A}^*$ und $\boldsymbol{x}^*$ bedeuten für reelle Matrizen bzw. Vektoren also gerade die Transposition $\boldsymbol{A}'$ bzw. $\boldsymbol{x}'$.

Haben $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ die Dimensionen (n, m) bzw. (m, n) , so gilt

$$(\boldsymbol{AB})' = \boldsymbol{B}' \boldsymbol{A}' \quad \text{und} \quad (\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{B}^* \boldsymbol{A}^*.$$

Symmetrische Matrizen sind durch

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}$$

und hermitesche Matrizen durch

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}$$

definiert.

Der Nullraum einer Matrix ist die Menge aller Vektoren, die durch die Matrix in den Nullvektor abgebildet werden:

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}. \quad (\text{A2.33})$$

Spezielle Matrizen. Eine Permutationsmatrix $\mathbf{P}$ ist eine Matrix, bei der in jeder Zeile und jeder Spalte genau eine Eins und sonst Nullen stehen. Für die inverse Permutationsmatrix gilt

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}'. \quad (\text{A2.34})$$

Die quadratische Matrix $\mathbf{A}$ ist eine obere Dreiecksmatrix, wenn $a_{ij} = 0$ für $i > j$ gilt. Sie hat die Form

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Für eine untere Dreiecksmatrix gilt $a_{ij} = 0$ für $i < j$.

Eine Diagonalmatrix ist eine quadratische Matrix, die nur in der Hauptdiagonalen von null verschiedene Elemente besitzt. Die Matrix

$$\text{diag } a_{ii} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

wird abgekürzt auch als $\text{diag } a_{ii}$ geschrieben, wenn aus dem Zusammenhang erkennbar ist, welche Dimension die Matrix hat. Diese Schreibweise wird auch bei Blockdiagonalmatrizen verwendet

$$\text{diag } \mathbf{A}_{ii} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{A}_{33} & \cdots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{A}_{NN} \end{pmatrix},$$

und zwar selbst dann, wenn die in der Hauptdiagonale stehenden Matrizen $\mathbf{A}_{ii}$ nicht quadratisch sind. Die gesamte Matrix ist dann ebenfalls nicht quadratisch, aber anhand der Schreibweise ist offensichtlich, inwiefern sie als Blockdiagonalmatrix betrachtet werden kann.

Inverse Matrizen. Für reguläre Matrizen gilt die Beziehung $\det \mathbf{A} \neq 0$. Die inverse Matrix erfüllt die Bedingungen

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}. \quad (\text{A2.35})$$

Sie kann mit Hilfe der Formel

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj } \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}} \quad (\text{A2.36})$$

berechnet werden, wobei die Matrix der Adjunkten

$$\text{adj } \mathbf{A} = \mathbf{B}'$$

die Elemente

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}^{ij}$$

besitzt. $\mathbf{A}^{ij}$ bezeichnet die Matrix, die durch Streichen der i -ten Zeile und j -ten Spalte aus $\mathbf{A}$ hervorgeht.

Für zwei reguläre quadratische Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ gilt

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}. \quad (\text{A2.37})$$

Wenn die Matrix $\mathbf{I} + \mathbf{AB}$ invertierbar ist, so ist es auch die Matrix $\mathbf{I} + \mathbf{BA}$ und es gilt die Beziehung

$$(\mathbf{I} + \mathbf{AB})^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{I} + \mathbf{BA})^{-1}, \quad (\text{A2.38})$$

was man durch Ausmultiplizieren leicht nachprüfen kann. Für die Inverse einer Blockdreiecksmatrix mit quadratischen Hauptdiagonalblöcken $\mathbf{A}_{11}$ und $\mathbf{A}_{22}$ gilt

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_{22}^{-1} \end{pmatrix}, \quad (\text{A2.39})$$

wobei die Inversen $\mathbf{A}_{11}^{-1}$ und $\mathbf{A}_{22}^{-1}$ genau dann existieren, wenn es die Inverse der auf der linken Seite stehenden Dreiecksmatrix gibt.

A2.2 Eigenwerte und Eigenvektoren

Ein Skalar $\lambda_i \{\mathbf{A}\}$ heißt Eigenwert einer quadratischen reellen oder komplexen Matrix $\mathbf{A}$, wenn es einen Vektor $\mathbf{v}_i$ gibt, so dass die Gleichung

$$\mathbf{A} \mathbf{v}_i = \lambda_i \{\mathbf{A}\} \mathbf{v}_i \quad (\text{A2.40})$$

erfüllt ist. Gleichung (A2.40) wird auch als *Eigenwertgleichung* bezeichnet. $\mathbf{v}_i$ heißt der zum Eigenwert λ_i gehörige Eigenvektor bzw. Rechtseigenvektor. Alternativ dazu kann man den Eigenwert als einen Skalar definieren, für den es einen Zeilenvektor $\mathbf{w}'_i$ gibt, mit dem die Gleichung

$$\mathbf{w}'_i \mathbf{A} = \lambda_i \{\mathbf{A}\} \mathbf{w}'_i \quad (\text{A2.41})$$

erfüllt ist. $\mathbf{w}'_i$ heißt dann Linkseigenvektor zu $\lambda_i \{\mathbf{A}\}$.

Zu jeder Matrix gehört ein *charakteristisches Polynom*

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \\ &= \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte werden durch Lösung der charakteristischen Gleichung

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (\text{A2.42})$$

bestimmt. Zu jeder (n, n) -Matrix gibt es genau n Eigenwerte. Diese Eigenwerte erfüllen mit geeignet gewählten Rechts- bzw. Linkseigenvektoren $\mathbf{v}_i$ bzw. $\mathbf{w}'_i$ die Gln. (A2.40) bzw. (A2.41). Die Menge der Eigenwerte wird Spektrum

$$\sigma\{\mathbf{A}\} = \{\lambda_1\{\mathbf{A}\}, \lambda_2\{\mathbf{A}\}, \dots, \lambda_n\{\mathbf{A}\}\}$$

genannt. Unter dem Spektralradius versteht man den Betrag des betragsgrößten Eigenwertes:

$$\rho\{\mathbf{A}\} = \max_{i=1,2,\dots,n} |\lambda_i\{\mathbf{A}\}|. \quad (\text{A2.43})$$

Die quadratischen Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}'$ haben dieselben Eigenwerte

$$\sigma\{\mathbf{A}\} = \sigma\{\mathbf{A}'\},$$

aber i. Allg. verschiedene Eigenvektoren. Die Eigenwerte reeller Matrizen sind entweder reell oder treten als konjugiert komplexe Paare auf. Ist $\mathbf{A}$ symmetrisch, so sind alle Eigenwerte reell. Die Eigenwerte von Dreiecksmatrizen sind gleich den Hauptdiagonalelementen. Die Eigenwerte der inversen Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ sind die Reziproken der Eigenwerte von $\mathbf{A}$

$$\lambda_i\{\mathbf{A}^{-1}\} = \frac{1}{\lambda_i\{\mathbf{A}\}}. \quad (\text{A2.44})$$

Die Produkte $\mathbf{AB}$ und $\mathbf{BA}$ der (n, m) -Matrix $\mathbf{A}$ und der (m, n) -Matrix $\mathbf{B}$ haben dieselben von null verschiedenen Eigenwerte. Die Spektren unterscheiden sich nur in den verschwindenden Eigenwerten. Ist $n > m$, so hat das Produkt $\mathbf{AB}$ $n - m$ verschwindende Eigenwerte mehr als das Produkt $\mathbf{BA}$.

Matrizenpolynome. Es wird das Polynom

$$P(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \dots + a_1\mathbf{A} + a_0\mathbf{A}^0$$

betrachtet, in dem die Koeffizienten a_i des charakteristischen Polynoms (A2.42) stehen. Für dieses Polynom gilt der folgende wichtige Satz.

Satz A2.1 (CAYLEY-HAMILTON-Theorem)

Für das mit der Matrix $\mathbf{A}$ anstelle von λ aufgeschriebene charakteristische Polynom (A2.42) gilt

$$P(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \dots + a_1\mathbf{A} + a_0\mathbf{A}^0 = \mathbf{O}. \quad (\text{A2.45})$$

Man sagt auch, dass die Matrix $\mathbf{A}$ ihr eigenes charakteristisches Polynom erfüllt. Demzufolge lassen sich die n -te Potenz $\mathbf{A}^n$ und alle höheren Potenzen von $\mathbf{A}$ als Linearkombinationen der Potenzen $\mathbf{A}^0, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{A}^{n-1}$ darstellen. Dasselbe gilt auch für die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$, sofern diese existiert.

Es wird nun ein beliebiges Polynom

$$\bar{P}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + \bar{a}_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \dots + \bar{a}_1\mathbf{A} + \bar{a}_0\mathbf{A}^0$$

der Matrix $\mathbf{A}$ betrachtet. Entsprechend der Zerlegung des Polynoms $\bar{P}(\lambda)$ in Linearfaktoren

$$\bar{P}(\lambda) = (\lambda - \bar{\lambda}_1)(\lambda - \bar{\lambda}_2) \dots (\lambda - \bar{\lambda}_n)$$

kann auch das mit der Matrix $\mathbf{A}$ geschriebene Polynom $\bar{P}(\mathbf{A})$ in Faktoren zerlegt werden

$$\bar{P}(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} - \bar{\lambda}_1\mathbf{I})(\mathbf{A} - \bar{\lambda}_2\mathbf{I}) \dots (\mathbf{A} - \bar{\lambda}_n\mathbf{I}),$$

wobei die Werte $\bar{\lambda}_i, (i = 1, 2, \dots, n)$ die Nullstellen des Polynoms

$$\bar{P}(\lambda) = \lambda^n + \bar{a}_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \bar{a}_1\lambda + \bar{a}_0$$

sind. Daraus sieht man, dass die Determinante eines Matrizenpolynoms verschwindet, wenn wenigstens eine Nullstelle $\bar{\lambda}_i$ dieses Polynoms zugleich Eigenwert von $\mathbf{A}$ ist und folglich gilt:

$$\det \bar{P}(\mathbf{A}) = \det (\mathbf{A}^n + \bar{a}_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \dots + \bar{a}_1\mathbf{A} + \bar{a}_0\mathbf{A}^0) = 0. \quad (\text{A2.46})$$

Abschätzung der Eigenwerte. Für eine Diagonalmatrix stimmen die Eigenwerte mit den Hauptdiagonalelementen überein. Der folgende Satz gibt eine Abschätzung dafür, wie weit die Eigenwerte einer beliebigen quadratischen Matrix von den Hauptdiagonalelementen entfernt sein können.

Satz A2.2 (GERSHGORIN-Theorem)

Für jeden Eigenwert λ einer (n, n) -Matrix $\mathbf{A}$ gilt die Beziehung

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \quad (\text{A2.47})$$

für mindestens einen Index $i = 1, 2, \dots, n$.

Da die transponierte Matrix $\mathbf{A}'$ dieselben Eigenwerte besitzt, kann man das Gershgorintheorem auch für diese Matrix anwenden und erhält damit die Aussage, dass der Abstand zwischen λ und einem Hauptdiagonalelement a_{ii} nicht größer ist als die Summe der Beträge der in derselben Spalte stehenden Elemente a_{ji} :

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ji}|. \quad (\text{A2.48})$$

Eine Matrix wird als *diagonaldominant* bezeichnet, wenn mit Hilfe des Gershgorintheorems nachgewiesen werden kann, dass die Realteile der Eigenwerte dasselbe Vorzeichen wie die Hauptdiagonalelemente haben, d. h., wenn entweder

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \quad \text{oder} \quad |a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ji}| \quad (\text{A2.49})$$

für alle $i = 1, 2, \dots, n$ gilt. Sie heißt streng diagonaldominant, wenn die Ungleichung mit dem $>$ -Zeichen gelten.

Empfindlichkeit von Eigenwerten. Wenn die Matrix $\mathbf{A}$ von einem Skalar a abhängt, so kann man die Empfindlichkeit $\frac{d\lambda_i}{da}$ der Eigenwerte $\lambda_i \in \{\lambda\}$ von dem Parameter a bestimmen. Es gilt

$$\frac{d\lambda_i}{da} = \frac{\mathbf{w}_i' \frac{d\mathbf{A}(a)}{da} \mathbf{v}_i}{\mathbf{w}_i' \mathbf{v}_i} \quad (\text{A2.50})$$

Dabei werden der zu untersuchende Eigenwert λ_i , die Ableitung $\frac{d\mathbf{A}(a)}{da}$ sowie der zugehörige Rechts- und Linkseigenvektor $\mathbf{v}_i$ bzw. $\mathbf{w}_i$ für den betrachteten Parameterwert $a = \hat{a}$ berechnet, für den die Empfindlichkeit bestimmt werden soll.

Ähnlichkeitstransformation. Durch eine Ähnlichkeitstransformation der Matrix $\mathbf{A}$ mit der regulären Matrix $\mathbf{T}$ entsteht die Matrix

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}.$$

Die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\tilde{\mathbf{A}}$ haben dieselben Eigenwerte. Sind die Eigenvektoren $\mathbf{v}_i$ von $\mathbf{A}$ linear unabhängig, so kann man mit ihnen die Matrix

$$\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n)$$

bilden. Aus der Ähnlichkeitstransformation mit $\mathbf{T} = \mathbf{V}$ erhält man dann die Diagonalmatrix

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \text{diag } \lambda_i\{\mathbf{A}\} = \begin{pmatrix} \lambda_1\{\mathbf{A}\} & & & \\ & \lambda_2\{\mathbf{A}\} & & \\ & & \lambda_3\{\mathbf{A}\} & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_n\{\mathbf{A}\} \end{pmatrix}, \quad (\text{A2.51})$$

deren Hauptdiagonalelemente gerade die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ sind. Die geforderte Bedingung, dass sämtliche Eigenvektoren linear unabhängig sind, ist stets erfüllt, wenn alle Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ einfach auftreten. Sie ist manchmal (z. B. bei der Einheitsmatrix $\mathbf{I}$) aber nicht immer erfüllt, wenn $\mathbf{A}$ mehrfache Eigenwerte besitzt. Wenn es eine Transformationsmatrix gibt, so dass Gl. (A2.51) erfüllt ist, so heißt die Matrix $\mathbf{A}$ *diagonalähnlich*.

Verallgemeinertes Eigenwertproblem. Das Eigenwertproblem (A2.40) wird auch in der verallgemeinerten Form

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}\mathbf{B}\mathbf{v}_i \quad (\text{A2.52})$$

gestellt, für das die Lösung von zwei quadratischen Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ abhängt. Die Eigenwerte $\lambda_i\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ erhält man als Lösung der verallgemeinerten charakteristischen Gleichung

$$\det(\lambda\mathbf{B} - \mathbf{A}) = 0. \quad (\text{A2.53})$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist genau dann ein Polynom n -ten Grades in λ , wenn die Matrix $\mathbf{B}$ nichtsingulär ist. In diesem Falle lässt sich das allgemeine Eigenwertproblem in das spezielle Eigenwertproblem überführen, indem man Gl. (A2.52) von links mit $\mathbf{B}^{-1}$ multipliziert, wodurch Gl. (A2.40) mit $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ anstelle von $\mathbf{A}$ entsteht.

Ist $\mathbf{B}$ singulär, so fehlen in der linken Seite von Gl. (A2.52) die höchsten Potenzen von λ und das allgemeine Eigenwertproblem hat weniger als n Lösungen. Ist $\mathbf{A}$ nichtsingulär, so kann man durch $\mu = \frac{1}{\lambda}$ zu

$$\det(\mathbf{B} - \mu\mathbf{A}) = 0$$

übergehen, wobei die linke Seite jetzt ein Polynom n -ten Grades in μ ist. Dabei treten i. Allg. Lösungen $\mu_i = 0$ auf, die Lösungen $\lambda_i = \infty$ des Originalproblems entsprechend.

A2.3 Singulärwertzerlegung

Für eine rechteckige reelle oder komplexe (m, n) -Matrix $\mathbf{A}$ sind die Singulärwerte durch

$$\sigma_i(\mathbf{A}) = \sqrt{\lambda_i\{\mathbf{A}^*\mathbf{A}\}} \quad (\text{A2.54})$$

definiert. Wendet man diese Definition auf $\mathbf{A}$ und anschließend auf $\mathbf{A}'$ an, so wird offensichtlich, dass beide Matrizen dieselben von null verschiedenen Singulärwerte besitzen. Die Menge der jeweils berechneten Singulärwerte unterscheidet sich lediglich um solche, die den Wert null haben.

Sortiert man die Singulärwerte

$$\sigma_1\{\mathbf{A}\} \geq \sigma_2\{\mathbf{A}\} \geq \dots \geq \sigma_k\{\mathbf{A}\} > 0 \\ \sigma_{k+1}\{\mathbf{A}\} = \sigma_{k+2}\{\mathbf{A}\} = \dots = \sigma_n\{\mathbf{A}\} = 0,$$

so sind die ersten k Singulärwerte positiv und die restlichen $n - k$ verschwinden, wobei k den Rang von $\mathbf{A}$ angibt:

$$\text{Rang } \mathbf{A} = k.$$

Der größte Singulärwert

$$\sigma_{\max}\{\mathbf{A}\} = \sigma_1\{\mathbf{A}\}$$

stimmt mit der Spektralnorm der Matrix $\mathbf{A}$ überein:

$$\sigma_{\max}\{\mathbf{A}\} = \|\mathbf{A}\|_{\text{Sp}} = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} \quad (\text{A2.55})$$

(vgl. Gl. (A2.76)). Für den kleinsten Singulärwert

$$\sigma_{\min}\{\mathbf{A}\} = \sigma_k\{\mathbf{A}\}$$

gilt

$$\sigma_{\min}\{\mathbf{A}\} = \min_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \begin{cases} \frac{1}{\|\mathbf{A}^{-1}\|_{\text{Sp}}} & \text{für } n = m \text{ und } \det \mathbf{A} \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{A2.56})$$

Wenn die Matrix $\mathbf{A}$ quadratisch ist, so gilt für ihre Eigenwerte der Beziehung

$$\sigma_{\min}\{\mathbf{A}\} \leq |\lambda_i\{\mathbf{A}\}| \leq \sigma_{\max}\{\mathbf{A}\}. \quad (\text{A2.57})$$

Für jede Matrix existiert die Singulärwertzerlegung

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^* = \sum_{i=1}^k \sigma_i\{\mathbf{A}\} \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^*, \quad (\text{A2.58})$$

wobei die (m, m) -Matrix $\mathbf{U}$ aus den Eigenvektoren von $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ und die (n, n) -Matrix $\mathbf{V}$ aus den Eigenvektoren von $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ besteht. Die (m, n) -Matrix $\mathbf{\Sigma}$ enthält die Singulärwerte

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_k \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \text{für } m \geq n, \quad (\text{A2.59})$$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \mathbf{0}' \\ & \sigma_2 & & \mathbf{0}' \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \sigma_k & \mathbf{0}' \end{pmatrix} \quad \text{für } m \leq n, \quad (\text{A2.60})$$

wobei $\mathbf{0}$ Nullvektoren entsprechender Dimension sind.

A2.4 Determinantensätze

Für die Determinante einer (n, n) -Matrix $\mathbf{A}$ gilt

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^n \lambda_i \{\mathbf{A}\}. \quad (\text{A2.61})$$

Da bei reellwertigen Matrizen $\mathbf{A}$ die Eigenwerte entweder reell oder konjugiert komplex sind, erhält man aus dem auf der rechten Seite stehenden Produkt stets einen reellen Wert für die Determinante. Sind $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ zwei quadratische Matrizen derselben Dimension, so ist

$$\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B} = \det(\mathbf{BA}). \quad (\text{A2.62})$$

Mit einem Skalar c erhält man für die (n, n) -Matrix $\mathbf{A}$ die Beziehung

$$\det(c\mathbf{A}) = c^n \det \mathbf{A}. \quad (\text{A2.63})$$

Ist $\mathbf{A}$ regulär, so gilt

$$\det \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}. \quad (\text{A2.64})$$

Die Beziehung

$$\det(\mathbf{I} + \mathbf{AB}) = \det(\mathbf{I} + \mathbf{BA}) \quad (\text{A2.65})$$

gilt für beliebige Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ mit den Dimensionen (n, m) bzw. (m, n) , wobei allerdings die beiden Einheitsmatrizen verschiedene Dimensionen haben.

Zerlegt man eine Matrix in mehrere Untermatrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{S} \\ \mathbf{T} & \mathbf{U} \end{pmatrix},$$

wobei $\mathbf{R}$ und $\mathbf{U}$ quadratisch sind, so gilt die SCHUR-Formel

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{S} \\ \mathbf{T} & \mathbf{U} \end{pmatrix} = \det \mathbf{R} \det(\mathbf{U} - \mathbf{T}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}) \quad \text{wenn } \det \mathbf{R} \neq 0. \quad (\text{A2.66})$$

Speziell für Blockdreiecksmatrizen mit quadratischen Hauptdiagonalblöcken erhält man daraus die Beziehungen

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{S} \\ \mathbf{O} & \mathbf{U} \end{pmatrix} = \det \mathbf{R} \det \mathbf{U} \quad (\text{A2.67})$$

und

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{O} \\ \mathbf{T} & \mathbf{U} \end{pmatrix} = \det \mathbf{R} \det \mathbf{U}. \quad (\text{A2.68})$$

Die Determinante einer vandermondeschen Matrix, die aus den Eigenwerten λ_i einer gegebenen Matrix gebildet wird, berechnet sich nach der Beziehung

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i). \quad (\text{A2.69})$$

Sie ist von null verschieden, wenn die Eigenwerte λ_i paarweise verschieden sind.

A2.5 Normen von Vektoren und Matrizen

Vektornormen. Eine Funktion $\|\mathbf{x}\|$ heißt Vektornorm, wenn sie die folgenden Normaxiome erfüllt:

- $\|\mathbf{x}\| > 0$ für alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,
 $\|\mathbf{x}\| = 0$ für $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ für beliebige n -dimensionale Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y}$,
- $\|a\mathbf{x}\| = |a| \|\mathbf{x}\|$ für einen beliebigen Skalar a .

Häufig wird die Norm

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{A2.70})$$

verwendet, aus der für $p = 1$ die Summennorm

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad (\text{A2.71})$$

für $p = 2$ die euklidische Vektornorm

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \mathbf{x}' \mathbf{x}$$

und für $p = \infty$ die Maximalbetragsnorm

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1,2,\dots,n} |x_i| \quad (\text{A2.72})$$

entsteht.

Matrixnormen. Die durch eine Vektornorm $\|\cdot\|$ induzierte Matrixnorm wird folgendermaßen definiert:

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}. \quad (\text{A2.73})$$

$\|\mathbf{A}\|$ kann als größter „Verstärkungsfaktor“ der Abbildung $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ interpretiert werden. In Abhängigkeit von den gewählten Vektornormen entstehen unterschiedliche Matrixnormen. Gebräuchliche Normen einer (n, m) -Matrix $\mathbf{A}$ sind die Spaltensummennorm

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_1}{\|\mathbf{x}\|_1} = \max_{j=1,2,\dots,m} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad (\text{A2.74})$$

die Zeilensummennorm

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} = \max_{i=1,2,\dots,n} \sum_{j=1}^m |a_{ij}| \quad (\text{A2.75})$$

sowie die durch die euklidische Vektornorm induzierte Spektralnorm

$$\|\mathbf{A}\|_{\text{Sp}} = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \sigma_{\max}\{\mathbf{A}\}. \quad (\text{A2.76})$$

Die euklidische Matrixnorm heißt

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^2} = \sqrt{\text{Spur}(A^*A)}. \quad (\text{A2.77})$$

Für Matrizen A und B mit den Dimensionen (n, m) bzw. (m, r) gilt

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|. \quad (\text{A2.78})$$

Ist insbesondere $B = b$ ein Vektor, so erhält man

$$\|Ax\|_p \leq \|A\|_p \|x\|_p. \quad (\text{A2.79})$$

Stehen anstelle der Matrizen Vektoren $A = x'$ und $B = y$ und ist $p = 2$, so erhält man die CAUCHY-SCHWARZ-Ungleichung

$$|x'y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2. \quad (\text{A2.80})$$

Jede Matrixnorm ist eine obere Schranke für die Beträge der Eigenwerte dieser Matrix

$$|\lambda_i\{A\}| \leq \rho\{A\} \leq \|A\|. \quad (\text{A2.81})$$

Normen von Signalen und Übertragungsfunktionsmatrizen. In der Regelungstechnik werden die angegebenen Normen häufig für Signale, die von der Zeit t oder der Frequenz s bzw. z abhängig sind, oder für Übertragungsfunktionsmatrizen angewendet. Dabei ist zu beachten, dass die Normbildung für feste Zeit bzw. für feste Frequenz erfolgt, so dass die Norm der Vektoren bzw. Matrizen zeit- bzw. frequenzabhängig ist. Beispielsweise stellt $\|x(t)\|$ einen zeitabhängigen Skalar und $\|G(s)\|$ einen frequenzabhängigen Skalar dar.

A2.6 Definitheit

Eine symmetrische Matrix $A = A'$ heißt positiv definit, wenn gilt

$$x'Ax > 0 \quad \text{für alle } x \neq 0.$$

Für beliebige symmetrische Matrizen gilt die Relation

$$\lambda_{\min}\{A\} \|x\|_2^2 \leq x'Ax \leq \lambda_{\max}\{A\} \|x\|_2^2,$$

wobei $\lambda_{\min}$ und $\lambda_{\max}$ den kleinsten bzw. größten reellen Eigenwert der Matrix A bezeichnen. Folglich ist eine symmetrische Matrix genau dann positiv definit, wenn sämtliche Eigenwerte positiv sind. Es sei daran erinnert, dass symmetrische Matrizen nur reelle Eigenwerte besitzen.

A2.7 Lösung linearer Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem mit den n Unbekannten x_i kann in der Form

$$Ax = b \quad (\text{A2.82})$$

geschrieben werden, in der x den unbekannten Vektor, A eine (m, n) -Matrix und b einen m -dimensionalen Vektor darstellt. Stimmt die Zahl m der Gleichungen mit der Anzahl n der Unbekannten überein und ist A eine reguläre (n, n) -Matrix, so ergibt sich die Lösung dieser Gleichung aus

$$x = A^{-1}b. \quad (\text{A2.83})$$

Wenn A jedoch eine rechteckige (m, n) -Matrix ist, so muss man für die Lösung der Gleichung (A2.82) die pseudoinverse Matrix A^+ einführen. Die Pseudoinverse ist definiert durch

$$A^+ = A' (AA')^{-1} \quad \text{für } \text{Rang } A = m \quad (\text{A2.84})$$

$$A^+ = (A'A)^{-1} A' \quad \text{für } \text{Rang } A = n. \quad (\text{A2.85})$$

Für die Pseudoinverse gilt anstelle von Gl. (A2.35) die Beziehung

$$AA^+A = A. \quad (\text{A2.86})$$

Die Gl. (A2.82) hat genau dann Lösungen, wenn die Bedingung

$$(AA^+ - I)b = 0 \quad (\text{A2.87})$$

erfüllt ist. Die Lösungen heißen

$$x = A^+b + (A^+A - I)k, \quad (\text{A2.88})$$

wobei k ein beliebiger n -dimensionaler Vektor ist. Ist A invertierbar, erhält man die eindeutige Lösung (A2.83).

Gilt

$$\text{Rang } A = n \leq m$$

und ist die Lösbarkeitsbedingung (A2.87) verletzt, so widersprechen sich die m in Gl. (A2.82) enthaltenen Gleichungen. Es gibt keine Lösung x . In diesem Fall ist es sinnvoll, denjenigen Vektor x zu bestimmen, für den der „Lösungsfehler“ $\|Ax - b\|$ minimal wird. Diesen Vektor erhält man aus

$$x = A^+b = (AA')^{-1}A'b. \quad (\text{A2.89})$$

A2.8 Nichtnegative Matrizen und M-Matrizen

Nichtnegative Matrizen. Eine reelle Matrix A mit den Elementen a_{ij} ist eine nichtnegative Matrix, wenn alle Elemente nichtnegativ sind. Da die Relationszeichen bei Matrizen vereinbarungsgemäß für alle Elemente gelten, erfüllen nichtnegative Matrizen die Bedingung

$$A \geq O.$$

Eine (n, n) -Matrix A heißt **reduzibel** (zerlegbar), wenn es eine Permutationsmatrix P gibt, für die die Beziehung

$$PAP' = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$$

gilt, wobei A_{11} und A_{22} quadratisch sind. Andernfalls heißt A **irreduzibel** (unzerlegbar).

Satz A2.3 (FROBENIUS-PERRON-Satz)

Jede nichtnegative unzerlegbare Matrix $\mathbf{A}$ hat einen einfachen positiven reellen Eigenwert $\lambda_P\{\mathbf{A}\}$, für den die Beziehung

$$\lambda_P\{\mathbf{A}\} \geq |\lambda_i\{\mathbf{A}\}| \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{A2.90})$$

gilt, wobei λ_i die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ sind.

Dieser Eigenwert wird *Perronwurzel* genannt.

Die Perronwurzel unzerlegbarer Matrizen kann mit Hilfe eines einfachen Iterationsverfahrens bestimmt werden. Wählt man einen beliebigen Vektor $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ und bildet den Vektor $\mathbf{y}$ entsprechend

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

so gilt für die Quotienten der Elemente die Beziehung

$$\min_i \frac{y_i}{x_i} \leq \lambda_P\{\mathbf{A}\} \leq \max_i \frac{y_i}{x_i}.$$

Setzt man im nächsten Iterationsschritt $\mathbf{x} := \mathbf{y}$ und wiederholt die Rechnung, so erhält man eine verbesserte Einschließung für λ_P .

Für zwei (n, n) -Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ mit

$$\mathbf{A} \geq |\mathbf{B}| \geq \mathbf{0}$$

gilt

$$\rho\{\mathbf{B}\} \leq \lambda_P\{\mathbf{A}\}, \quad (\text{A2.91})$$

wobei ρ den Spektralradius (betragsgrößten Eigenwert) bezeichnet. Mit

$$\mathbf{A} = |\mathbf{B}|$$

erhält man daraus die für beliebige quadratische Matrizen geltende Beziehung

$$\lambda_P\{|\mathbf{B}|\} \geq |\lambda_i\{\mathbf{B}\}|. \quad (\text{A2.92})$$

Sind $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ nichtnegativ, so gilt

$$\lambda_P\{\mathbf{A}\} \leq \lambda_P\{\mathbf{B}\} \quad \text{wenn } \mathbf{0} \leq \mathbf{A} \leq \mathbf{B}. \quad (\text{A2.93})$$

Diese Beziehung zeigt die Monotonieeigenschaft der Perronwurzel.

M-Matrizen. Im Folgenden werden (n, n) -Matrizen $\mathbf{P}$ betrachtet, für deren Elemente die Beziehung

$$p_{ij} \leq 0 \quad i \neq j$$

gilt.

Definition A2.1 Eine quadratische Matrix $\mathbf{P}$, für die $p_{ij} \leq 0$ für alle $i \neq j$ gilt und deren Eigenwerte positiven Realteil haben, heißt **M-Matrix**.

Erfüllt $\mathbf{P}$ die angegebene Vorzeichenbedingung für die nicht in der Hauptdiagonale stehenden Elemente, so sind die folgenden äquivalenten Bedingungen notwendig und hinreichend dafür, dass $\mathbf{P}$ eine M-Matrix ist:

- Alle Eigenwerte von $\mathbf{P}$ haben positiven Realteil.

- P ist nichtsingulär und es gilt $P^{-1} \geq O$.
- Alle führenden Hauptabschnittsdeterminanten sind positiv:

$$\det \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix} > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

- Alle Hauptabschnittsdeterminanten von P sind positiv.
- Es existiert ein Vektor $x > 0$, so dass $Px > 0$ gilt.
- Es existiert ein Vektor $y' > 0$, so dass $y'P > 0$ gilt.

Da alle Hauptabschnittsdeterminanten einer M-Matrix positiv sind, erhält man als Folgerung, dass die Hauptdiagonalelemente einer M-Matrix positiv sind:

$$p_{ii} > 0. \quad (\text{A2.94})$$

Wenn P eine M-Matrix ist, dann führen folgende Operationen ebenfalls zu M-Matrizen:

- Wenn $Q \geq P$ ist und Q die Vorzeichenbedingung $q_{ij} \leq 0$ für $i \neq j$ erfüllt, dann ist auch Q eine M-Matrix.
- $(\text{diag } d_i)P$ und $P(\text{diag } d_i)$ sind M-Matrizen, wenn $d_i > 0$ für alle i gilt.

M-Matrizen der Form $I - A$. Wenn A eine nichtnegative Matrix ist, dann erfüllt die Matrix

$$P = \mu I - A$$

die Vorzeichenbedingung $p_{ij} \leq 0$ für $i \neq j$. P ist genau dann eine M-Matrix, wenn die Perronwurzel von A kleiner als μ ist:

$$\lambda_P\{A\} < \mu. \quad (\text{A2.95})$$

Als Folgerung erhält man einen weiteren Weg zur Prüfung, ob eine Matrix B eine M-Matrix ist. B erfülle die Vorzeichenbedingung $b_{ij} \leq 0$ für $i \neq j$. Damit B eine M-Matrix ist, muss außerdem die notwendige Bedingung (A2.94) erfüllt sein: $b_{ii} > 0$. Da mit B auch $(\text{diag } d_i)B$ eine M-Matrix ist, sofern $d_i > 0$ ist, ist B genau dann eine M-Matrix, wenn

$$\tilde{B} = \left(\text{diag } \frac{1}{b_{ii}} \right) B = I - A$$

eine M-Matrix ist, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b_{12}}{b_{11}} & \cdots & \frac{b_{1n}}{b_{11}} \\ \frac{b_{21}}{b_{22}} & 0 & \cdots & \frac{b_{2n}}{b_{22}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{b_{n1}}{b_{nn}} & \frac{b_{n2}}{b_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

eine nichtnegative Matrix darstellt. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\lambda_P\{A\} < 1$$

gilt. Folglich ist die Bedingung

$$\lambda_P \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \frac{b_{12}}{b_{11}} & \cdots & \frac{b_{1n}}{b_{11}} \\ \frac{b_{21}}{b_{22}} & 0 & \cdots & \frac{b_{2n}}{b_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{b_{n1}}{b_{nn}} & \frac{b_{n2}}{b_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\} < 1 \quad (\text{A2.96})$$

eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Matrix $\mathbf{B}$, die die Vorzeichenbedingung erfüllt, eine M-Matrix ist.

Verallgemeinerte Diagonaldominanz. Wendet man die Ähnlichkeitstransformation

$$\bar{\mathbf{A}} = (\text{diag } d_i) \mathbf{A} \left(\text{diag } \frac{1}{d_i} \right)$$

mit $d_i > 0$ auf die Matrix $\mathbf{A}$ an, so ändert sich nichts an den Eigenwerten, d. h., es gilt

$$\lambda_i\{\mathbf{A}\} = \lambda_i\{\bar{\mathbf{A}}\}.$$

Die Diagonaldominanzbedingungen (A2.49) heißen für $\bar{\mathbf{A}}$

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{d_i}{d_j} |a_{ij}| \quad \text{und} \quad |a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{d_j}{d_i} |a_{ji}|. \quad (\text{A2.97})$$

Man bezeichnet eine Matrix $\mathbf{A}$ als *verallgemeinert diagonal dominant*, wenn es positive Skalare d_i ($i = 1, 2, \dots, n$) gibt, so dass eine der Beziehungen (A2.97) für alle i erfüllt sind.

Die Gl. (A2.97) gilt genau dann, wenn es einen positiven n -dimensionalen Vektor $\mathbf{d}$ gibt, mit dem die Beziehung

$$\begin{pmatrix} |a_{11}| & -|a_{12}| & \cdots & -|a_{1n}| \\ -|a_{21}| & |a_{22}| & \cdots & -|a_{2n}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -|a_{n1}| & -|a_{n2}| & \cdots & |a_{nn}| \end{pmatrix} \mathbf{d} > \mathbf{0} \quad (\text{A2.98})$$

erfüllt ist. Die dabei auftretende Matrix

$$\mathbf{C}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} |a_{11}| & -|a_{12}| & \cdots & -|a_{1n}| \\ -|a_{21}| & |a_{22}| & \cdots & -|a_{2n}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -|a_{n1}| & -|a_{n2}| & \cdots & |a_{nn}| \end{pmatrix} \quad (\text{A2.99})$$

heißt *Vergleichsmatrix* (*comparison matrix*) [9]. Entsprechend der Eigenschaften von M-Matrizen gibt es genau dann einen positiven Vektor $\mathbf{d}$, für den die Gl. (A2.98) erfüllt ist, wenn die Vergleichsmatrix $\mathbf{C}(\mathbf{A})$ eine M-Matrix ist. Dies kann man entsprechend Gl. (A2.96) dadurch prüfen, dass man die Matrix $\mathbf{A}$ in eine Diagonalmatrix

$$\mathbf{A}_D = \text{diag } a_{ii}$$

mit den Hauptdiagonalelementen a_{ii} und den „Rest“

$$\mathbf{A}_K = \mathbf{A} - \mathbf{A}_D$$

zerlegt und die Bedingung

$$\lambda_P \{ |\mathbf{A}_D^{-1}| |\mathbf{A}_K| \} < 1 \quad (\text{A2.100})$$

überprüft.

Dieses Ergebnis hat folgende Konsequenzen:

- Eine Matrix $\mathbf{A}$ ist genau dann verallgemeinert diagonaldominant, wenn die Vergleichsmatrix $\mathbf{C}(\mathbf{A})$ eine M-Matrix ist, d. h., die Bedingung (A2.100) erfüllt ist.
- Wenn $\mathbf{A}$ verallgemeinert diagonaldominant ist, so haben die Realteile der Eigenwerte von $\mathbf{A}$ dieselben Vorzeichen wie die Hauptdiagonalelemente a_{ii} von $\mathbf{A}$.

Einen positiven Vektor $\mathbf{d}$, für den die Gl. (A2.98) gilt, erhält man aus

$$\mathbf{d} = \mathbf{C}(\mathbf{A})^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

wenn $\mathbf{C}(\mathbf{A})$ eine M-Matrix und folglich $\mathbf{C}(\mathbf{A})^{-1}$ eine positive Matrix ist.

Eigenwertabschätzung mit Hilfe von Vergleichsmatrizen.

Satz A2.4 Gegeben sei eine (n, n) -Matrix $\mathbf{A}$, deren Vergleichsmatrix $\mathbf{C}(\mathbf{A})$ eine M-Matrix ist. Betrachtet wird ferner eine (n, n) -Matrix $\mathbf{Z}$, für die

$$|z_{ij}| = |a_{ij}| \quad \text{für alle } i \neq j \quad (\text{A2.101})$$

gilt. Die Eigenwerte von $\mathbf{Z}$ erfüllen die Ungleichungen

$$|\lambda_i\{\mathbf{Z}\} - z_{ii}| < |a_{ii}| \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{A2.102})$$

Beweis. Da $\mathbf{C}(\mathbf{A})$ eine M-Matrix ist, gibt es positive Skalare d_i , so dass die Beziehung (A2.97) erfüllt ist. Für die Matrix $(\text{diag } d_i) \mathbf{Z} (\text{diag } \frac{1}{d_i})$, die dieselben Eigenwerte wie $\mathbf{Z}$ hat, gilt entsprechend dem Gershgorintheorem (Satz A2.2)

$$|\lambda_i\{\mathbf{Z}\} - z_{ii}| < \sum_{j=1, j \neq i}^n |z_{ij}| \frac{d_i}{d_j},$$

woraus aufgrund der verallgemeinerten Diagonaldominanz von $\mathbf{C}(\mathbf{A})$ und der Forderung (A2.101) die Behauptung folgt:

$$|\lambda_i\{\mathbf{Z}\} - z_{ii}| < \sum_{j=1, j \neq i}^n |z_{ij}| \frac{d_i}{d_j} = \sum_{j=1, j \neq i}^n |z_{ij}| \frac{d_i}{d_j} \leq |a_{ii}|. \quad \square$$

Satz A2.5 (Verallgemeinerte Gershgorinabschätzung)

Für jeden Eigenwert λ einer (n, n) -Matrix $\mathbf{A}$ gilt die Beziehung

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \lambda_P \{ |\mathbf{A}_D^{-1}| |\mathbf{A}_K| \} |a_{ii}| \quad (\text{A2.103})$$

für mindestens einen Index $i = 1, 2, \dots, n$, wobei die Matrix $\mathbf{A}$ in

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_D &= \text{diag } a_{ii} \\ \mathbf{A}_K &= \mathbf{A} - \mathbf{A}_D \end{aligned}$$

zerlegt wurde.

Beweis. Die im Satz verwendete Perronwurzel wird mit μ abgekürzt:

$$\mu = \lambda_P \{ |\mathbf{A}_D^{-1}| |\mathbf{A}_K| \}.$$

Entsprechend Gl. (A2.95) ist

$$\mathbf{P} = \mu \mathbf{I} - |\mathbf{A}_D^{-1}| |\mathbf{A}_K|$$

und folglich auch

$$|\mathbf{A}_D| \mathbf{P} = \mu |\mathbf{A}_D| - |\mathbf{A}_K|$$

eine M-Matrix. Wendet man nun Satz A2.4 mit

$$\mathbf{Z} = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mu a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \mu a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \mu a_{nn} \end{pmatrix}$$

an, so folgt aus Gl. (A2.102) die Behauptung. $\square$

Satz A2.5 kann als Verallgemeinerung des Gershgorintheorems betrachtet werden, denn er zeigt, dass die Eigenwerte einer Matrix, die verallgemeinert diagonaldominant ist, dasselbe Vorzeichen wie die Hauptdiagonalelemente haben. Überdies gibt er eine Einschließung der Lage der Eigenwerte in der komplexen Ebene an.

Literaturhinweise

Eine der ersten zusammenfassenden Arbeiten zu M-Matrizen, die auch heute noch häufig zitiert wird, wurde 1962 veröffentlicht [24]. Eine umfassende Übersicht über die Theorie von nichtnegativen und M-Matrizen gibt die Monografie [9]. Einige Ergebnisse sind auch in [30] beschrieben. Der Satz A2.5 wurde in anderer Form erstmals in [89] angegeben.

Anhang 3

MATLAB-Programme

Eine Einführung in die Benutzung von MATLAB und der Control System Toolbox wurde im Anhang I-2 gegeben. Hier sind die in diesem Band neu eingeführten Befehle sowie die im Text erläuterten Programme zusammengestellt.

A3.1 Funktionen für den Umgang mit Matrizen und Vektoren

Zusätzlich zu den im Anhang I-2 erläuterten Funktionen werden in den MATLAB-Programmen dieses Bandes die nachfolgend angegebenen Funktionen benötigt. Mit der Funktion

```
» abs(A)
```

wird der absolute Betrag $|A|$ einer Matrix berechnet. Die Funktionen

```
» diag([a11 a22 a33])  
» diag(A)
```

bilden die Diagonalmatrix

$$\text{diag } a_{ii} = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{pmatrix}$$

bzw. umgekehrt einen Vektor $(a_{11} \ a_{22} \ a_{33})'$ mit den Hauptdiagonalelementen der Matrix A . Die Funktion

```
» max(A)
```

bildet einen Zeilenvektor, der die größten Elemente der Zeilen von A enthält. Durch den Funktionsaufruf

```
» max(max(A))
```

wird also das größte Element der Matrix bestimmt, durch

```
» max(abs(x))
```

die Maximalbetragsnorm (A2.72) des Spaltenvektors $\mathbf{x}$. In Analogie dazu berechnet man mit

```
» min(A)
```

einen Zeilenvektor, der die kleinsten Elemente der Spalten von $\mathbf{A}$ enthält, und mit

```
» min(min(A))
```

das kleinste Element von $\mathbf{A}$.

Die Funktion

```
» chol(Q)
```

liefert die Cholesky-Faktorisierung einer symmetrischen, positiv definiten Matrix $\mathbf{Q}$. Das Ergebnis ist die Matrix $\mathbf{L}$, für die $\mathbf{L}'\mathbf{L} = \mathbf{Q}$ gilt.

Einen Vektor mit logarithmisch verteilten Elementen kann man mit der Funktion

```
» logspace(a, b, n)
```

bilden, wobei der entstehende Zeilenvektor n Elemente enthält, die zwischen 10^a und 10^b logarithmisch verteilt sind. Alle genannten Funktionen können in Gleichungen verwendet werden, wobei das Ergebnis des Funktionsaufrufes einer Variablen zugewiesen wird. Diese Möglichkeit wird in den angegebenen Programmen ausgenutzt.

Wiederholte Anweisungsfolgen können in `for`-Schleifen zusammengefasst werden, deren allgemeiner Aufbau durch das Beispiel

```
» for i = 1:10
    x(i,1) = 2*i;
end;
```

veranschaulicht wird.

Die Funktion

```
» plot(T, Y)
```

dient der grafischen Darstellung der Elemente des Vektors $\mathbf{Y}$ über die Elemente des gleich langen Vektors $\mathbf{T}$.

A3.2 MATLAB-Funktionen für die Systemanalyse

Analyse von Mehrgrößensystemen im Zeitbereich. Zustandsraummodelle von Mehrgrößensystemen werden, wie es im Band 1 für Eingrößensysteme beschrieben wurde, durch die Funktion

```
» System = ss(A, B, C, D);
```

definiert, wobei $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ die Matrizen aus dem Zustandsraummodell mit entsprechenden Dimensionen sind. Mit dem Aufruf

```
» [A, B, C, D] = ssdata(System);
```

können die Matrizen des Zustandsraummodells wieder ausgelesen werden. Dabei ist es übrigens gleichgültig, ob `System` durch die Funktion `ss` oder durch die im Folgenden behandelte Funktion `tf` definiert wurde. Es erfolgt gegebenenfalls eine Transformation der Übertragungsfunktionsmatrix in ein Zustandsraummodell.

Analyse von Mehrgrößensystemen im Frequenzbereich. Kontinuierliche Systeme

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s) \mathbf{U}(s)$$

und zeitdiskrete Systeme

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{G}_d(z) \mathbf{U}(z)$$

werden durch gebrochen rationale Matrizen $\mathbf{G}(s)$ bzw. $\mathbf{G}_d(z)$ beschrieben. Für Eingrößensysteme enthalten die Modelle die skalaren Übertragungsfunktionen

$$G(s) = \frac{z(s)}{n(s)} \quad \text{bzw.} \quad G_d(z) = \frac{z_d(z)}{n_d(z)}$$

mit den Zählerpolynomen $z(s)$ bzw. $z_d(z)$ und den Nennerpolynomen $n(s)$ bzw. $n_d(z)$.

Polynome werden in MATLAB durch Vektoren dargestellt, die die Polynomkoeffizienten in Richtung fallendem Exponenten enthalten. Dementsprechend wird $G(s)$ durch das Paar z, n bzw. $G_d(z)$ durch das Paar z_d, n_d von Zeilenvektoren beschrieben. Mit der Anweisung

```
» System = tf(z, n);
```

wird ein Objekt mit dem Namen `System` erzeugt, dessen Übertragungsfunktion durch das Zählerpolynom z und das Nennerpolynom n gegeben ist. Für zeitdiskrete Systeme erzeugt der Aufruf

```
» dSystem = tf(zd, nd, T);
```

ein Objekt mit der $\mathcal{Z}$ -Übertragungsfunktion mit dem Zählerpolynom z und dem Nennerpolynom n . T ist die Abtastzeit. Wenn die Abtastzeit unbekannt ist, wird T auf den Wert -1 gesetzt.

Bei Mehrgrößensystemen wird die (r, m) -Übertragungsfunktionsmatrix

$$\mathbf{G}(s) = \begin{pmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1m}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{r1}(s) & G_{r2}(s) & \cdots & G_{rm}(s) \end{pmatrix}$$

durch zwei (r, m) -Felder Z und N von Zeilenvektoren dargestellt, wobei das ij -te Element $Z\{i, j\}$ bzw. $N\{i, j\}$ das Zähler- bzw. Nennerpolynom der Übertragungsfunktion $G_{ij}(s)$ beschreibt. Beispielsweise hat das System

```
» System = tf( [-5; [1 -5 6]], {[1 -1]; [1 1 0]})
```

die Übertragungsfunktionsmatrix

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{-5}{s-1} \\ \frac{s^2-5s+6}{s^2+s} \end{pmatrix}.$$

Mit dem Aufruf

```
» [Z, N] = tfdata(System);
```

wird die Übertragungsfunktionsmatrix wieder ausgelesen.

Funktionen für die Systemanalyse. Die folgenden Funktionen sind für Ein- und Mehrgrößensysteme gleichermaßen anwendbar, wobei die Aufrufe für Zeitbereichs- und Frequenzbereichsmodelle sowie kontinuierliche Systeme (A, B, C, D) bzw. (z, n) und zeitdiskrete Systeme (Ad, Bd, Cd, Dd) bzw. (zd, nd) sehr ähnlich sind. Bei den kontinuierlichen Systemen wird i. Allg. mit dem Systemobjekt (also den oben definierten Objekten System) gearbeitet, während man in der gegenwärtigen Implementierung der Funktionen für zeitdiskrete Systeme die Beschreibungselemente noch einzeln angeben muss.

dcgain(System)	Berechnung der statischen Verstärkung
ddcgain(Ad, Bd, Cd, Dd)	
ddcgain(zd, nd)	
tzero(System)	Berechnung der Übertragungsnullstellen kontinuierlicher oder zeitdiskreter Systeme
tzero(A, B, C, D)	
ctrb(A, B)	Berechnung der Steuerbarkeits- bzw. Beobachtbarkeitsmatrizen kontinuierlicher oder zeitdiskreter Systeme
ctrb(System)	
obsv(A, C)	
obsv(System)	
gram(System, 'c')	Berechnung der gramschen Matrizen (3.8), (3.38), (11.78) bzw. (11.84).
gram(System, 'o')	
gram(dSystem, 'c')	
gram(dSystem, 'o')	
step(System);	Berechnung der Übergangsfunktion bzw. Übergangsfunktionsmatrix und grafische Ausgabe auf dem Bildschirm
dstep(Ad, Bd, Cd, Dd);	
dstep(zd, nd);	
impulse(System);	Berechnung der Gewichtsfunktion und grafische Ausgabe auf dem Bildschirm
dimpulse(Ad, Bd, Cd, Dd);	
dimpulse(zd, nd);	
initial(System, x0);	Berechnung der Eigenbewegung des Systems mit Anfangszustand x_0
dinitial(Ad, Bd, Cd, Dd, x0);	
lsim(System, U, t, x0);	Berechnung der Ausgangsgrößen für beliebig vorgegebene Eingangsgrößen; in U und t stehen zeilenweise die Werte aller Eingangsgrößen und der zugehörige Zeitpunkt
dlsim(Ad, Bd, Cd, Dd, U, x0);	
dlsim(zd, nd, U);	

<code>bode(System);</code>	Berechnung der Frequenzkennlinie und der
<code>nyquist(System);</code>	Ortskurve kontinuierlicher bzw. zeitdiskreter
<code>dbode(Ad, Bd, Cd, Dd, T);</code>	Systeme
<code>dnyquist(Ad, Bd, Cd, Dd, T)</code>	
<code>dnyquist(zd, nd, T);</code>	

Transformationen zwischen unterschiedlichen Modellformen.

<code>SystemMin = minreal(System);</code>	Berechnung einer minimalen Realisierung des Systems (A, B, C, D)
<code>dSystem = c2d(System, T);</code>	Berechnung des zeitdiskreten Zustandsraummodells aus dem kontinuierlichen Modell für vorgegebene Abtastzeit T entsprechend Gl. (11.22)
<code>System = d2c(dSystem);</code>	Berechnung des kontinuierlichen Zustandsraummodells eines zeitdiskreten Systems

A3.3 Funktionen für den Reglerentwurf

<code>K = lqr(A, B, Q, R);</code>	Berechnung der optimalen Zustandsrückführung nach Gln. (7.19), (7.20) bzw. für das zeitdiskrete System
<code>Kd = dlqr(Ad, Bd, Qd, Rd);</code>	
<code>K = place(A, B, sigma);</code>	Berechnung einer Zustandsrückführung zur Verschiebung der Pole auf die durch <code>sigma</code> vorgegebenen Werte; Bei der Funktion <code>acker</code> wird die Ackermann-Formel (6.22) für Systeme mit einem Eingang verwendet
<code>K = acker(A, b, sigma);</code>	
<code>P = lyap(A', Q);</code>	Lösung der Ljapunowgleichung (7.16) für kontinuierliche bzw. zeitdiskrete Systeme
<code>P = dlyap(A', Q);</code>	

A3.4 Zusammenstellung der Programme

Programm 5.1	Einstellung von PI-Mehrgrößenreglern	232
Programm 6.1	Entwurf einer Zustandsrückführung zur Polverschiebung	274

Programm 6.2	Ersetzen einer Zustandsrückführung durch eine Ausgangsrückführung	275
Programm 7.1	Optimalreglerentwurf	326
Programm 8.1	Beobachterentwurf	363
Programm 8.2	Analyse des Regelkreises mit Beobachter	364
Programm 9.1	Entwurf von PI-Reglern mit dem Direkten Nyquistverfahren	407
Programm A1.1	Entwurf eines optimalen PI-Reglers	581

Anhang 4

Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung

Dieser Anhang enthält Aufgaben, für deren Lösung der gesamte Stoff dieses Buches verwendet werden muss und die sich deshalb sehr gut für die Prüfungsvorbereitung eignen.

Aufgabe A4.1 Modelle dynamischer Systeme

1. Welche Modelle dynamischer Systeme haben Sie kennengelernt?
2. Welche Eigenschaften treten sowohl bei Eingrößen- als auch bei Mehrgrößensystemen auf? Welche zusätzlichen Eigenschaften haben Mehrgrößensysteme?
3. Welche Systemeigenschaften sind struktureller Art, so dass sie weitgehend unabhängig von den Systemparametern sind und mit grafentheoretischen Mitteln bestimmt werden können?

Aufgabe A4.2 Eigenschaften kontinuierlicher und zeitdiskreter Systeme

1. Stellen Sie die Beschreibungsformen für kontinuierliche und zeitdiskrete Systeme in Form einer Tabelle gegenüber und kennzeichnen Sie durch Pfeile, welche Modelle Sie direkt ineinander umrechnen können, wenn das zeitdiskrete System aus dem kontinuierlichen durch Abtastung hervorgeht.
2. Wie können die Pole und Nullstellen beider Systemklassen berechnet werden?
3. Wie können Sie die Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit und Stabilität überprüfen? Welche Beziehungen gibt es zwischen diesen Eigenschaften des kontinuierlichen Systems und des zeitdiskreten Systems, das aus dem kontinuierlichen System durch Abtastung entsteht?
4. Welche Reglerentwurfsverfahren sind für beide Betrachtungsweisen anwendbar, welche nur für kontinuierliche bzw. nur für zeitdiskrete Systeme?

Aufgabe A4.3 *Stabilität von Regelkreisen*

1. Erläutern Sie die Definitionen der Zustandsstabilität, der E/A-Stabilität und der inneren Stabilität von Regelkreisen.
2. Wie hängen diese Stabilitätseigenschaften zusammen?
(Hinweis: Stellen Sie Bedingungen zusammen, unter denen mit einer der angegebenen Stabilitätseigenschaften gleichzeitig eine andere dieser Eigenschaften nachgewiesen ist.)
3. Wie kann die Stabilität von Regelkreisen geprüft werden?
(Hinweis: Stellen Sie die für die einzelnen Modellformen anwendbaren Bedingungen zusammen. Kennzeichnen Sie, welche der Bedingungen notwendig, welche hinreichend bzw. welche notwendig und hinreichend für die Stabilität sind.)
4. Was versteht man unter Integrität? Wie kann man diese Eigenschaft nachweisen?

Aufgabe A4.4 *Stabilisierung instabiler Regelstrecken*

Gegeben ist eine instabile Regelstrecke. Beantworten Sie die folgenden Fragen zur Existenz und zum Entwurf einer linearen Regelung, mit der der geschlossene Kreis stabil ist.

1. Welche Eigenschaften muss die Regelstrecke besitzen, damit ein Regler gefunden werden kann, für den der geschlossene Regelkreis stabil ist? Sind diese Forderungen für kontinuierliche Regler bzw. Abtastregler unterschiedlich?
2. Unter welchen Bedingungen kann das Stabilisierungsproblem durch eine proportionale Rückführung gelöst werden?
3. Unter welchen Bedingungen sind dynamische Regler notwendig? Welche Struktur haben diese dynamischen Regler und wie findet man geeignete dynamische Elemente dieser Regler?
4. Wie geht man vor, um stabilisierende Regler zu entwerfen?
5. Unter welcher Bedingung ist die Stabilität des entstehenden Regelkreises robust gegenüber Modellunsicherheiten?

Aufgabe A4.5 *Entwurf und Realisierung von Zustandsrückführungen*

1. Warum haben Zustandsrückführungen eine so große Bedeutung in der Regelungstechnik, obwohl sie i. Allg. technisch nicht realisierbar sind?
2. Wie können Zustandsrückführungen entworfen werden?
3. Wie können Zustandsrückführungen realisiert werden?
4. Welche Probleme entstehen, wenn man von einer Zustandsrückführung auf eine Ausgangsrückführung übergeht?
5. Unter welchen Bedingungen besitzt der Regelkreis mit Zustandsrückführung die Eigenschaft der Sollwertfolge?

Aufgabe A4.6 *Entwurfsprinzipien für Ein- und Mehrgrößenregler*

1. Stellen Sie die Entwurfsprinzipien für Ein- und Mehrgrößenregler in Form einer Übersicht zusammen. Kennzeichnen Sie, unter welchen Bedingungen die einzelnen Prinzipien anwendbar sind und für welche Entwurfsaufgaben sie besonders gut geeignet sind. Wie müssen die Entwurfsforderungen formuliert werden? Welche Art von Reglergesetzen entsteht?
2. Bewerten Sie anhand Ihrer Tabelle den Aufwand für den Entwurf der Regler und für deren Realisierung. Welche Verfahren sind praktikabel, wenn die Entwurfsforderung relativ „schwach“ sind, welche, wenn es auf die Einhaltung exakter und bezüglich der Regelkreisdynamik sehr strenger Forderungen ankommt?
3. Welche Vor- und welche Nachteile haben die Entwurfsverfahren untereinander, wenn man die Art und Weise betrachtet, in der die Güteforderungen formuliert werden müssen, um mit den einzelnen Entwurfsverfahren berücksichtigt zu werden?
4. Unter welchen Bedingungen kann der Entwurf eines Mehrgrößenreglers auf den Entwurf mehrerer Eingrößenregler zurückgeführt werden?
5. Was ist eine dezentrale Regelung? Unter welchen Bedingungen muss sie verwendet werden? Wie kann man sie entwerfen?

Aufgabe A4.7 *Abtastregelungen*

1. Welche prinzipiellen Unterschiede bestehen zwischen einer kontinuierlichen und einer zeitdiskreten Regelung?
2. Bringt die Abtastung Vereinfachungen oder zusätzliche Schwierigkeiten für den Entwurf und die Realisierung einer Regelung?
3. Welche Gesichtspunkte sind für die Wahl der Abtastzeit maßgebend?
4. Wann kann eine kontinuierliche Regelung ohne Probleme als zeitdiskrete Regelung eingesetzt werden?

Anhang 5

Projektaufgaben

Die in diesem Anhang zusammengestellten Projektaufgaben betreffen den gesamten Lösungsweg von Regelungsaufgaben beginnend bei der Modellbildung über die Analyse der Regelstrecke bis zum Reglerentwurf. Sie eignen sich für vorlesungsbegleitende Übungen, bei denen die einzelnen Lösungsschritte unter Verwendung von MATLAB an praxisnahen Beispielen erprobt werden. Die Studenten erfahren dabei, wie sich die einzelnen Verfahren unter den für die unterschiedlichen Anwendungsbeispiele charakteristischen Randbedingungen, Regelstreckeneigenschaften und Güteforderungen anwenden lassen, und es wird auch erkennbar, welche von mehreren möglichen Vorgehensweisen die für das betrachtete Beispiel günstigste ist.

Die Projektaufgaben haben steigenden Schwierigkeitsgrad. Für die ersten Aufgaben sind die wichtigsten Lösungsschritte in Beispielen bzw. Übungsaufgaben in diesem Buch erläutert und müssen lediglich nachvollzogen werden. Für die späteren Aufgaben muss der Lösungsweg durch die Leser selbst aufgestellt werden. Die Leser sollen dabei selbst entscheiden, welche Lösungsschritte sie im Einzelnen gehen wollen. Die folgenden Hinweise dienen lediglich als Anregung:

- Beginnen Sie mit einem Blockschaltbild für die zu entwerfende Regelung.
- Planen Sie den Lösungsweg und lösen Sie die Teilaufgaben anschließend in den zuvor festgelegten Schritten. Modifizieren Sie Ihren Lösungsweg, wenn dies die Analyseergebnisse erforderlich machen.
- Analysieren Sie die Regelstrecke und bewerten Sie die Regelungsaufgabe und die zu erwartende Regelgüte anhand der Stabilitätseigenschaften, der statischen Verstärkung, der Pole und Nullstellen sowie der Ortskurve und des Frequenzkennliniendiagramms der Regelstrecke.
- Entscheiden Sie, ob die Güte der Regelung im Wesentlichen durch das Führungsverhalten oder das Störverhalten bestimmt wird und wählen Sie die Analyse- und Entwurfsverfahren dementsprechend aus.
- Vergleichen Sie die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises mit denen der Regelstrecke. Kann der Regelkreis wesentlich schneller gemacht werden als die Regelstrecke?
- Sehen Sie sich bei der Bewertung der Regelgüte nicht nur den Verlauf der Regelgröße, sondern auch den Verlauf der Stellgröße an. Beachten Sie Stellgrößenbeschränkungen.
- Untersuchen Sie den erhaltenen Regelkreis auch unter der Wirkung von Messstörungen.
- Bewerten Sie die Robustheit durch den Nachweis der robusten Stabilität und durch Simulationsuntersuchungen mit veränderten Streckenparametern.

Die in den Aufgabenstellungen angegebenen linearen Modelle beschreiben die Regelstrecken in der Umgebung eines Arbeitspunktes. Berücksichtigen Sie bei der Analyse des Regelkreises Nichtlinearitäten wie z. B. Stellgrößenbeschränkungen.

Aufgabe A5.1 *Positionsregelung einer Verladebrücke*

Für die in Abb. 3.30 auf S. 131 dargestellt Verladebrücke soll eine Regelung entworfen werden, mit der die Last in möglichst kurzer Zeit auf eine gegebene Sollposition $s_G = w$ geführt wird. Gemessen wird die Greiferposition $s_G(t)$; Stellgröße ist die von einem Elektromotor auf die Laufkatze ausgeübte Kraft $F(t)$, die maximal 12000 N betragen kann. Während des „Umsetzens“ einer Last darf der Betrag des Winkels $\phi(t)$ nicht größer als 10 Grad sein.

Die Verladebrücke hat folgende Parameter:

Parameter	Bedeutung	Wert
l	Seillänge	5 m
m_K	Gewicht der Laufkatze	1000 kg
m_G	Gewicht von Greifer und Last	200...5000 kg
g	Erdbeschleunigung	$9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Erweitern Sie das linearisierte Modell (3.64) um eine geschwindigkeitsproportionale Reibung für die Laufkatze und eine winkelgeschwindigkeitsproportionale Reibung für die Greiferbewegung, wobei sie die Proportionalitätsfaktoren anhand von Simulationsuntersuchungen so wählen, dass die Eigenbewegung mit einer Zeitkonstante von etwa 20 Sekunden abklingt.

Kann man die Regelungsaufgabe auch dann lösen, wenn man anstelle der Greiferposition den Seilwinkel $\varphi(t)$ misst, was messtechnisch einfacher ist?

Untersuchen Sie auch die Robustheit Ihrer Regelung bezüglich veränderlicher Last und veränderlicher Seillänge. □

Aufgabe A5.2 *Regelung eines Dampferzeugers*

Betrachten Sie den im Beispiel 2.2 auf S. 41 beschriebenen Dampferzeuger, dessen Zustandsraummodell durch die Gln. (2.46) und (2.47) gegeben ist. Dieses Modell entstand aus der getrennten Identifikation der Übertragungsfunktionen für die vier E/A-Paare in der Umgebung des Arbeitspunktes des Dampferzeugers. Dieser Modellbildungsweg hat zur Folge, dass die Zustandsvariablen nicht physikalisch interpretierbar sind und dass das Zustandsraummodell keine minimale Realisierung des Dampferzeugers darstellt. Beachten Sie diese Tatsachen bei der Analyse und dem Reglerentwurf.

Die Regelung soll den Dampfdruck und die Dampftemperatur auf vorgegebenen Sollwerten halten, wobei sich bei sprungförmigen Änderungen der Sollwerte die Führungsübergangsfunktionen weitgehend überschwingfrei den neuen Endwerten nähern sollen. Dabei dürfen sich die Stellgrößen nicht um mehr als 10% von den Arbeitspunktwerten von $100 \frac{\text{t}}{\text{h}}$ bzw. $2000 \frac{1}{\text{min}}$ entfernen. □

Aufgabe A5.3 Analyse und Regelung einer AHL-Anlage

Die im Beispiel 5.1 auf S. 221 beschriebene Anlage dient zur Herstellung von Ammonium-nitrat-Harnstofflösung, wobei die Konzentrationen y_1 und y_2 von Harnstoff und Stickstoff als Regelgrößen und die Sollwerte u_1 und u_2 von zwei bereits an der Anlage installierten Reglern für die Zuflussmenge und die Temperatur von Harnstoff als Stellgrößen dienen.

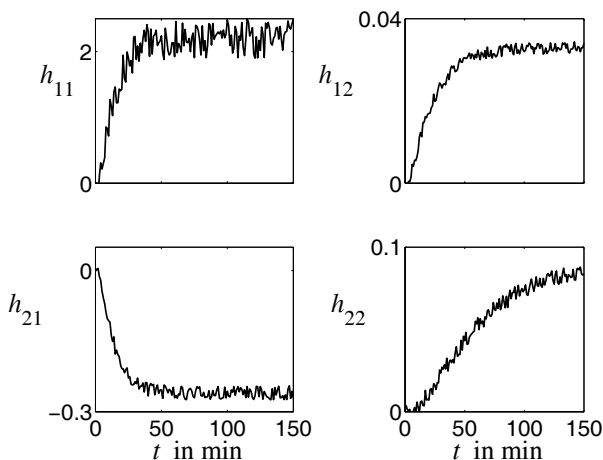


Abb. A5.1: Übergangsfunktionsmatrix der AHL-Anlage

Da die Modellbildung schwierig ist, wurden Experimente mit der Anlage gemacht, um die Übergangsfunktionsmatrix $\mathbf{H}(t)$ der AHL-Anlage zu bestimmen. Abbildung A5.1 zeigt das Verhalten um den Arbeitspunkt

$$\begin{aligned}\bar{u}_1 &= 2 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}, & \bar{y}_1 &= 14 \% \\ \bar{u}_2 &= 83^\circ\text{C}, & \bar{y}_2 &= 28 \%\end{aligned}$$

Die Regelung soll die Regelgrößen mit mäßigem Überschwingen ($\Delta h < 10\%$) an die Sollgrößen anpassen.

Untersuchen Sie auch, ob man für diese Anlage mit systematischen Entwurfsverfahren zu einem besseren Regelkreisverhalten kommen kann als bei Verwendung der Einstellregeln im Beispiel 5.1. Der Regler soll digital mit einer Abtastzeit von 2 min realisiert werden. Wie verändert sich die Regelgüte dabei im Vergleich zum kontinuierlichen Regler? $\square$

Aufgabe A5.4 Analyse und Regelung einer Klärschlammverbrennungsanlage

Abbildung 4.25 auf S. 195 zeigt den Aufbau einer Klärschlammverbrennungsanlage. Diese Anlage soll mit folgenden Stell- und Regelgrößen betrachtet werden:

Signal	Bedeutung	Maßeinheit
$u_1(t) = \dot{m}_P(t)$	Propangasmassenstrom	$\frac{\text{kg}}{\text{min}}$
$u_2(t) = \dot{m}_L(t)$	Luftmassenstrom	$\frac{\text{kg}}{\text{min}}$
$y_1(t) = T_B(t)$	Betttemperatur	K
$y_2(t) = c_{O_2}(t)$	Sauerstoffkonzentration im Abgas	%

Mit Hilfe von Experimenten an einer Versuchsanlage mit kleinem Rohrquerschnitt wurde das folgende Modell aufgestellt

$$\begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{454,8}{(1125s+1)(120s+1)} & \frac{8,8}{(903s+1)(120s+1)} \\ \frac{-44,88}{(162s+1)(40s+1)} & \frac{2,12}{(180s+1)(40s+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix},$$

in das die Zeit in Sekunden eingeht. Die Regelung muss die Regelgrößen auf konstanten Sollwerten halten und Störungen, die aus einer unterschiedlichen Zusammensetzung des Klärschlammes entstehen und als eine mit der Zeitkonstanten $T = 20$ s verzögerte sprungförmige Störung an einem bzw. beiden Ausgängen der Anlage dargestellt werden können, ohne Überspringen in möglichst kurzer Zeit ausgleichen. $\square$

Aufgabe A5.5 Knotenspannungsregelung eines Elektroenergienetzes

Das zu untersuchende Elektroenergienetz besitzt zwei für die Spannungsregelung verwendete Kraftwerke, die entsprechend Abb. 2.8 auf S. 36 über das Netz verkoppelt sind. Es wird das Spannungs-Blindleistungsverhalten des Netzes betrachtet, für das die in Kilovolt gemessenen Spannungen y_1 und y_2 an den Einspeiseknoten der beiden Kraftwerke die Regelgrößen und die Sollwerte u_1 und u_2 der an den Synchronmaschinen bereits installierten Klemmenspannungsreglern die Stellgrößen sind (gemessen in Kilovolt). Eine Regelung soll die Knotenspannungen auf vorgegebenen Sollwerten halten, wobei bei Veränderung der Sollwerte die Spannungen den Sollvorgaben mit kleinem Überspringen in möglichst kurzer Zeit folgen und die Sollwerte u_1 und u_2 der Klemmenspannungsregler wenig überspringen sollen.

Verwenden Sie das Modell aus Aufgabe 2.4.

Die technischen Randbedingungen schreiben vor, dass eine dezentrale Regelung verwendet werden muss. Zur Erprobung der unterschiedlichen Entwurfsverfahren soll in diesem Projekt jedoch zunächst mit Mehrgrößenreglern gearbeitet werden, die dieser Strukturbeschränkung nicht unterliegen, bevor zu dezentralen Regelungen übergegangen wird. Vergleichen Sie dabei die mit beiden Regelungsstrukturen erreichbaren Regelgüten. $\square$

Aufgabe A5.6* Regelung gekoppelter Elektroenergienetze

Betrachten Sie das in Abb. 5.1 auf S. 210 gezeigte Elektroenergienetz, das aus zwei Teilnetzen besteht. In jedem Teilnetz sind sämtliche für die Frequenz-Übergabeleistung (FÜ-Regelung) maßgebenden Kraftwerke zu je einem Kraftwerk zusammengefasst und die Verbraucher durch je einen Block dargestellt.

Wie bei Aufgabe 5.1 und Beispiel 6.4 genauer beschrieben ist, führen Änderungen der erzeugten und verbrauchten Leistungen zu einer Frequenzänderung f , die durch eine Regelung abzubauen ist. Ursache dafür sind frequenzunabhängige Laständerungen $p_{L1}(t)$ bzw. $p_{L2}(t)$ in den beiden Netzen. Diese rufen Änderungen der durch die Kraftwerke erzeugten Leistungen $p_{G1}(t)$ bzw. $p_{G2}(t)$ und der Verbraucherleistungen $p_{V1}(t)$ bzw. $p_{V2}(t)$ hervor. Die Summe dieser Änderungen ergibt die Leistung $p_B(t)$, die alle synchron rotierenden Massen beschleunigt. Für die Abweichung $f(t)$ der Netzfrequenz vom Nominalwert (50 Hz) gilt deshalb

$$f(t) = \frac{1}{T} \int_0^t p_B(\tau) d\tau, \quad (\text{A5.1})$$

wobei die Zeitkonstante $T = T_1 + T_2$ aus den Anstiegszeiten $T_1 = 3270 \frac{\text{MWs}}{\text{Hz}}$ und $T_2 = 3920 \frac{\text{MWs}}{\text{Hz}}$ der beiden Netze bestimmt wird.

Die Frequenzabhängigkeit der Verbraucher kann näherungsweise durch ein PT₁-Glied dargestellt werden, dessen Übertragungsfunktion

$$G_{V_i}(s) = \frac{k_{V_i}}{T_{V_i}s + 1} \quad (\text{A5.2})$$

durch die Parameter $k_{V_1} = 506 \frac{\text{MW}}{\text{Hz}}$ und $T_{V_1} = 6 \text{ s}$ für das Netz 1 und $k_{V_2} = 430 \frac{\text{MW}}{\text{Hz}}$ und $T_{V_2} = 5,5 \text{ s}$ für das Netz 2 bestimmt ist. In diesen wie in den weiteren hier angegebenen Modellen werden die Leistungen in MW und die Zeit in Sekunden eingesetzt. Die folgenden Modelle beziehen sich auf die in mHz gemessene Frequenzabweichung f .

Die Kraftwerke sind durch die Zustandsraummodelle

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{G_1} &= \begin{pmatrix} 0 & -0,125 & -0,25 \\ 1,25 & -1,875 & -1,25 \\ 0 & 0,0625 & -0,125 \end{pmatrix} \mathbf{x}_{G_1} + \begin{pmatrix} -0,0794 \\ -0,397 \\ 0 \end{pmatrix} f + \begin{pmatrix} 0,25 \\ 1,248 \\ 0 \end{pmatrix} u_1 \quad (\text{A5.3}) \\ p_{G_1}(t) &= (0 \quad 0,5 \quad 1) \mathbf{x}_{G_1}(t) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{G_2}(t) &= \begin{pmatrix} -0,2 & 0 \\ 1 & -0,25 \end{pmatrix} \mathbf{x}_{G_2}(t) + \begin{pmatrix} -0,02 \\ 0 \end{pmatrix} f(t) + \begin{pmatrix} 0,05 \\ 0 \end{pmatrix} u_2(t) \quad (\text{A5.4}) \\ p_{G_2}(t) &= (0 \quad 1) \mathbf{x}_{G_2}(t) \end{aligned}$$

beschrieben. Ihre Sollwerte werden entsprechend

$$\begin{aligned} p_{GSoll1}(t) &= -k_{s1}f(t) + u_1(t) \\ p_{GSoll2}(t) &= -k_{s2}f(t) + u_2(t) \end{aligned}$$

aus der Frequenzabweichung f und den Stellgrößen $u_1(t)$ bzw. $u_2(t)$ der Sekundärregelung bestimmt. Dabei ändern sich die von den Kraftwerken erzeugten Leistungen mit der Frequenz, wobei eine Frequenzerhöhung zu einer Verkleinerung der Leistungserzeugung führt, die ihrerseits der Frequenzerhöhung entgegen wirkt. Die Parameter $k_1 = k_{V_1} + k_{s1}$ und $k_2 = k_{V_2} + k_{s2}$ heißen Leistungszahlen der beiden Netze.

Die vom Netz 1 ins Netz 2 fließende Leistung $p_t(t)$, die Übergabeleistung genannt wird, kann entsprechend

$$p_t(t) = \frac{T_2}{T} p_{B1}(t) - \frac{T_1}{T} p_{B2}(t) \quad (\text{A5.5})$$

aus den in den beiden Netzen entstehenden Leistungssaldi

$$p_{B_1}(t) = p_{G_1}(t) - p_{V_1}(t) - p_{L_1}(t)$$

$$p_{B_2}(t) = p_{G_2}(t) - p_{V_2}(t) - p_{L_2}(t)$$

berechnet werden.

Bei der Analyse der Regelstrecke bezüglich der Stelleingänge $u_1(t)$ und $u_2(t)$ bzw. der Störungen $p_{L_1}(t)$ und $p_{L_2}(t)$ sollen u. a. folgende Fragen beantwortet werden:

- Berechnen Sie die Übergangsfunktionsmatrizen bezüglich der Stellgrößen u_1 und u_2 sowie der als Störungen wirkenden Laständerungen $d_1 = p_{V_1}$ und $d_2 = p_{V_2}$, wobei die Frequenzabweichung f , die Generatorleistungen p_{G_1} , p_{G_2} , die Verbraucherleistungen p_{V_1} , p_{V_2} und die Übergabeleistung p_t die Ausgangsgrößen der Regelstrecke sind. Anstelle des für die Berechnung der Übergangsfunktionsmatrix üblichen Einheitssprunges sollten Sie mit einer sprungförmigen Leistungsänderung von 50 MW rechnen.
- Machen Sie sich die Funktionsweise des Elektroenergienetzes anhand der Übergangsfunktionsmatrizen klar. Bei welchen Übergangsfunktionen treten k_1 und k_2 als statische Verstärkungen auf?
- Untersuchen Sie die Übergangsfunktionsmatrix des Netzes mit den Eingängen $u_1(t)$ und $u_2(t)$ und den Netzkennlinienfehlern

$$e_1(t) = k_1 f(t) + p_t(t)$$

$$e_2(t) = k_2 f(t) - p_t(t)$$

als Ausgänge und begründen Sie, warum die Matrix der statischen Verstärkungen eine negative Einheitsmatrix ist.

- Die Sekundärregelung nach dem Netzkennlinienprinzip verwendet die Netzkennlinienfehler $e_1(t)$ und $e_2(t)$ als Regelabweichungen. Zeichnen Sie das Blockschaltbild dieser Regelung.
- Entwerfen Sie einen Sekundärregler

$$\begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix} = -\mathbf{K}(s) \begin{pmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{pmatrix},$$

für den der Regelkreis neben Stabilität und Sollwertfolge die folgenden Güteforderungen an die Störübergangsfunktion erfüllt:

- Die maximale Frequenzabweichung soll nicht größer als 30 mHz sein.
- Die Frequenzabweichung wird innerhalb von etwa 20 s abgebaut.
- Die Kraftwerksleistungen schwingen nicht wesentlich über.

Für eine praktische Realisierung muss eine dezentrale Regelung verwendet werden. □

Aufgabe A5.7 Analyse und Regelung einer Zuchtungsanlage für GaAs-Einkristalle

Der in Abb. 9.20 auf S. 404 gezeigte Mehrzonenofen dient der Züchtung von GaAs-Einkristallen nach dem Gradient-Freeze-Verfahren, bei dem die Kristallisationsfront mit einer durch die Temperaturabsenkung vorgegebenen Geschwindigkeit von links nach rechts wandert, so dass aus dem zunächst flüssigen Material ein Kristall entsteht. Dabei muss die Regelung dafür sorgen, dass die Temperaturen $y_1(t)$, $y_2(t)$ und $y_3(t)$ der hier betrachteten drei Heizzonen zunächst auf 1245°C gebracht und dann Heizzone für Heizzone auf 1100°C abgesenkt werden. Die Temperaturänderung soll dabei der Sollvorgabe mit einer

Abweichung von weniger als 2 K folgen. Die Sollwerte sollen für die einzelnen Heizzonen in einer solchen Weise nacheinander abgesenkt werden, dass die Temperaturänderung über den gesamten Ofen stetig erfolgt. Hierbei kann zur Vereinfachung der Betrachtung mit stückweise konstanten Sollwerten gearbeitet werden. Die Erzeugung geeigneter Führungsgrößen gehört zur Lösung der Regelungsaufgabe.

Es werden drei benachbarte Heizzonen aus der Mitte des Ofens betrachtet, die durch Gln. (2.21) – (2.23) mit

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i &= \begin{pmatrix} -0,333 & 0 \\ 0 & -0,025 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} 1,34 \\ 0,10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_i = \begin{pmatrix} 1,34 \\ 0,10 \end{pmatrix} \\ \mathbf{C}_i &= (0,2 \ 0,8), \quad \mathbf{C}_{zi} = (0,2 \ 0,8) \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

beschrieben sind. Die Kopplung der Heizzonen lässt sich durch Gl. (2.25) mit

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -6,01 & 3,96 & 1,15 \\ 3,96 & -8,34 & 3,96 \\ 1,15 & 3,96 & -6,01 \end{pmatrix}$$

dargestellen. Bei diesem Modell wird die Zeit in Minuten gemessen, die Temperatur in Kelvin und die als Stellgrößen wirkenden Spannungen $u_1(t)$, $u_2(t)$ und $u_3(t)$ der Heizungen in Volt.

Untersuchen Sie u. a., ob sich diese Regelungsaufgabe besser durch einen Mehrgrößenregler ohne Strukturbeschränkung oder durch einen dezentralen Regler lösen lässt. □

Aufgabe A5.8 Regelung eines Mischprozesses

Mit dem in Abb. 2.1 auf S. 17 gezeigten Rührkessel sollen zwei Stoffe so gemischt werden, dass ihre Konzentrationen y_1 und y_2 im Auslauf auf vorgegebenen Sollwerten $\bar{w}_1$ und $\bar{w}_2$ liegen. Im Zulauf sind die Stoffe mit den Konzentrationen $c_1(t)$ und $c_2(t)$ gelöst. Die Regelung soll die Wirkung kurzzeitiger Änderungen der Zulaufkonzentrationen $c_1(t)$ und $c_2(t)$ auf den Reaktorinhalt möglichst schnell beseitigen.

Der zylindrische Reaktor hat folgende Parameter:

Signal	Bedeutung	Wert
$\bar{V}_0$	Flüssigkeitsvolumen im Arbeitspunkt	1500 l
h	Reaktorhöhe	2,5 m
A	Reaktorquerschnitt	80 dm ²
$q_{1\max}$	maximaler Volumenstrom	100 $\frac{1}{\min}$
$q_{2\max}$	maximaler Volumenstrom	200 $\frac{1}{\min}$
$\bar{c}_1$	Konzentration des Stoffes 1	10 $\frac{\text{mol}}{\text{l}}$
$\bar{c}_2$	Konzentration des Stoffes 2	15 $\frac{\text{mol}}{\text{l}}$

Untersuchen Sie, welche Konzentrationen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ sich durch eine geeignete Wahl der Ventilstellungen im stationären Zustand einstellen lassen und wählen Sie die Sollwerte für die Regelung dementsprechend aus. Kann die Regelung bleibende Konzentrationsänderungen im Zulauf ohne eine bleibende Regelabweichung ausgleichen? □

Anhang 6

Verzeichnis der wichtigsten Formelzeichen

Dieses Verzeichnis enthält die wichtigsten Formelzeichen und Symbole. Die Wahl der Formelzeichen hält sich an folgende Konventionen: Kleine kursive Buchstaben bezeichnen Skalare, z. B. x, a, t . Vektoren sind durch kleine halbfette Buchstaben, z. B. $\mathbf{x}, \mathbf{a}$, und Matrizen durch halbfette Großbuchstaben, z. B. $\mathbf{A}, \mathbf{X}$, dargestellt. Entsprechend dieser Festlegung werden die Elemente der Matrizen und Vektoren durch kursive Kleinbuchstaben, die gegebenenfalls mit Indizes versehen sind, symbolisiert, beispielsweise x_1, x_2, x_i für Elemente des Vektors $\mathbf{x}$ und a_{12}, a_{ij} für Elemente der Matrix $\mathbf{A}$.

Mengen sind durch kalligrafische Buchstaben dargestellt, z. B. $\mathcal{Q}, \mathcal{P}$.

$\mathbf{A}$	Systemmatrix	Gl. (2.2)
a_i	Koeffizienten der Differenzialgleichung, der Differenzengleichung, des charakteristischen Polynoms, des Nennerpolynoms der Übertragungsfunktion	Gl. (I-4.3) Gl. (11.1)
$\mathbf{B}, \mathbf{b}$	Eingangsmatrix, Eingangsvektor	Gl. (2.2)
b_i	Koeffizienten der Differenzialgleichung, des Zählerpolynoms der Übertragungsfunktion	Gl. (I-4.3) Gl. (11.1)
$\mathbf{C}, \mathbf{c}'$	Ausgabematrix, Ausgabevektor	Gl. (2.3)
$\mathbf{D}, d$	Durchgangsmatrix, „Durchgriff“ (skalar)	Gl. (2.3)
$d(t), \mathbf{d}(t)$	Störgröße (skalar, vektoriell)	
$e(t), \mathbf{e}(t)$	Regelabweichung (skalar, vektoriell)	
$e_I(t), \mathbf{e}_I(t)$	integrierte Regelabweichung (skalar, vektoriell)	
$F(s), \mathbf{F}(s), F(z)$	Rückführdifferenzfunktion, Rückführdifferenzmatrix	Gl. (I-8.30) Gl. (4.49)
$g(t), \mathbf{G}(t)$	Gewichtsfunktion, Gewichtsfunktionsmatrix	Gl. (I-5.97) Gl. (2.10)

$g(k), \mathbf{G}(k)$	Gewichtsfolge, Gewichtsfolgematrix	Gl. (11.49)
$G(s), \mathbf{G}(s), G(z)$	Übertragungsfunktion, Übertragungsfunktionsmatrix	Abschn. I-6.5 Abschn. 2.2
$\hat{G}(s), \bar{G}(s)$	Näherungsmodell, Fehlerschranke	Abschn. I-8.6 Abschn. 4.3.5
$h(t), \mathbf{H}(t)$	Übergangsfunktion, Übergangsfunktionsmatrix	Gl. (I-5.90) Gl. (2.9)
$h(k), \mathbf{H}(k)$	Übergangsfolge, Übergangsfolgematrix	Gl. (11.45)
$\mathbf{I}$	Einheitsmatrix	
J	Gütefunktional	Kap. 7
j	imaginäre Einheit $j = \sqrt{-1}$	
k	Verstärkungsfaktor	
k	Zeitvariable bei zeitdiskreten Systemen	Kap. 10
$k_s, \mathbf{K}_s$	statischer Verstärkungsfaktor, Matrix der Verstärkungsfaktoren	Gl. (I-5.93)
$\mathbf{K}, \mathbf{K}_y$	Reglermatrix einer Zustandsrückführung bzw. Ausgangsrückführung	
$\mathbf{K}_P, \mathbf{K}_I$	Reglermatrizen eines PI-Mehrgrößenreglers	
$K(s), \mathbf{K}(s), K(z)$	Übertragungsfunktion eines Reglers	
$\mathbf{L}$	Rückführmatrix eines Beobachters	Gl. (8.6)
m	Zahl der Eingangsgrößen (bei Mehrgrößensystemen)	Gl. (2.2)
n	dynamische Ordnung eines Systems; Grad des Nennerpolynoms von $G(s)$ und $G(z)$	
$N(s), N(z)$	Nennerpolynom einer Übertragungsfunktion	
$\mathbf{0}$	Nullmatrix, Nullvektor	
P	Lösung der Riccati- oder Ljapunowgleichung	Kap. 7
$P(s), P(z)$	Rosenbrocksystemmatrix	Gl. (2.18)
Q	Wichtungsmatrix	Gl. (7.15)
q	Zahl der höchsten Ableitung der Eingangsgröße in der Differenzialgleichung; Grad des Zählerpolynoms von $G(s)$ bzw. $G(z)$	
$\mathbf{R}$	Wichtungsmatrix	Gl. (7.15)
r	Zahl der Ausgangsgrößen (bei Mehrgrößensystemen)	Gl. (2.3)
$\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$	Menge der reellen Zahlen, n -dimensionaler Vektorraum	
$\mathbf{S}_S, \mathbf{S}_B$	Steuerbarkeitsmatrix, Beobachtbarkeitsmatrix	Gl. (3.3) Gl. (3.30)

S_A	Strukturmatrix von A	Abschn. 3.4
s	komplexe Frequenz	Kap. I-6
s_i, s_{oi}	Pole, Nullstellen dynamischer Systeme	Abschn. 2.5
S	Klasse von Systemen mit vorgegebener Struktur	Gl. (3.58)
t	Zeitvariable bei kontinuierlichen Systemen	
T	Abtastzeit	Abschn. 10
T	Transformationsmatrix	Abschn. I-5.3
T, T_Σ	Zeitkonstante, Summenzeitkonstante	
$u(t), \mathbf{u}(t)$	Eingangsgröße, Stellgröße (skalar, vektoriell)	
V	Modalmatrix (Matrix der Eigenvektoren)	
$\mathbf{v}_i$	Eigenvektor (Rechtseigenvektor) zum i -ten Eigenwert einer Matrix	
W_S, W_B	gramsche Steuerbarkeitsmatrix, gramsche Beobachtbarkeitsmatrix	Gl. (3.7), (3.36)
$w(t), \mathbf{w}(t)$	Führungsgröße	
$\mathbf{w}'_i$	Linkseigenvektor zum i -ten Eigenwert einer Matrix	
$\mathbf{x}(t), x_i(t)$	Zustand, Zustandsgröße	
$y(t), \mathbf{y}(t)$	Ausgangsgröße, Regelgröße (skalar, vektoriell)	
$\mathbf{y}_s(t), \mathbf{y}_u(t)$	stationäres Verhalten, Übergangsverhalten	Abschn. 2.4.3
$Z(s), Z(z)$	Zählerpolynom einer Übertragungsfunktion	
z	komplexe Frequenz zeitdiskreter Systeme	Kap. 12
$\delta(t)$	Dirac-Impuls	Gl. (I-5.95)
$\delta G(s), \delta A$	Modellunsicherheiten	Abschn. I-8.6
ν	Steuerbarkeitsindex	
$\lambda, \lambda\{A\}$	Eigenwert (der Matrix A)	
$\sigma(t)$	Sprungfunktion	Gl. (I-5.87)
σ_i	singulärer Wert einer Matrix	Anhang 2
$\Phi(t), \Phi(k)$	Übergangsmatrix	Gl. (2.34) Gl. (11.31)

ϕ	Argument der Übertragungsfunktion, des Frequenzganges	
Φ_R	Phasenrand	Abschn. I-8.5.5
ω	Frequenz	
ω_T	Abtastfrequenz	Abschn. 10
ω_s, ω_{gr}	Schnittfrequenz (im Bodediagramm), Grenzfrequenz	

Anhang 7

Korrespondenztabelle der Laplace- und Z-Transformation

Die folgende Tabelle enthält eine Gegenüberstellung der Laplace- und der $\mathcal{Z}$ -Transformierten der wichtigsten Signale, wobei die Zeilennummerierung aus Anhang I-6 beibehalten wurde.

Nr.	Funktion $f(t)$ mit $f(t) = 0$ für $t < 0$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$F(z) = \mathcal{F}\{f(k)\}$ für die Folge $f(k) = f(kT)$
1	$\delta(t)$	1	1
2	$\sigma(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
4	t^2	$\frac{2}{s^3}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$
6	$e^{-\delta t}$	$\frac{1}{s+\delta}$	$\frac{z}{z-e^{-\delta T}}$
7	$\frac{1}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}}$	$\frac{1}{1+sT_1}$	$\frac{1}{T_1} \frac{z}{z-a}$ $a = e^{-\frac{T}{T_1}}$

Nr.	Funktion $f(t)$ mit $f(t) = 0$ für $t < 0$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$F(z) = \mathcal{F}\{f(k)\}$ für die Folge $f(k) = f(kT)$
8	$t e^{-\delta t}$	$\frac{1}{(s + \delta)^2}$	$\frac{aTz}{(z - a)^2}$ $a = e^{-\delta T}$
9	$1 - e^{-\frac{t}{T_1}}$	$\frac{1}{s(1 + sT_1)}$	$\frac{(1 - a)z}{(z - 1)(z - a)}$ $a = e^{-\frac{T}{T_1}}$
11	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{bz}{z^2 - 2cz + 1}$ $b = \sin \omega T$ $c = \cos \omega T$
12	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z^2 - cz}{z^2 - 2cz + 1}$ $c = \cos \omega T$
13	$e^{-\delta t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s + \delta)^2 + \omega^2}$	$\frac{abz}{z^2 - 2acz + a^2}$ $a = e^{-\delta T}$ $b = \sin \omega T$ $c = \cos \omega T$
14	$e^{-\delta t} \cos \omega t$	$\frac{s + \delta}{(s + \delta)^2 + \omega^2}$	$\frac{z^2 - acz}{z^2 - 2acz + a^2}$ $a = e^{-\delta T}$ $b = \sin \omega T$ $c = \cos \omega T$

Anhang 8

Fachwörter deutsch – englisch

In diesem Anhang sind die wichtigsten englischen und deutschen regelungstechnischen Begriffe einander gegenübergestellt, wobei gleichzeitig auf die Seite verwiesen wird, auf der der deutsche Begriff erklärt ist. Verweise auf den ersten Band (fünfte Auflage) sind durch eine vorangestellte Eins („I-“) gekennzeichnet. Durch diese Zusammenstellung soll dem Leser der Zugriff auf die sehr umfangreiche englischsprachige Literatur erleichtert werden.

Abtaster, 411	<i>sampler</i>	Beobachter, 332	<i>observer</i>
Abtastsystem, 411	<i>sampled-data system</i>	Beruhigungszeit, I-319	<i>settling time</i>
Abtasttheorem, 412	<i>sampling theorem</i>	Blockschaltbild, I-42	<i>block diagram</i>
Abtastzeit, 411	<i>sampling time, sample period</i>	bleibende Regelabweichung, I-333	<i>steady-state error</i>
Allpass, I-300	<i>all-pass</i>	Bodediagramm, I-226	<i>Bode plot</i>
Amplitude, I-208	<i>magnitude</i>	charakteristische Gleichung, I-133	<i>characteristic equation</i>
Amplitudengang, I-226	<i>magnitude plot, Bode amplitude plot</i>	charakteristisches Polynom, I-133	<i>characteristic polynomial</i>
Amplitudenrand, I-415	<i>gain margin</i>	Dämpfung, I-277	<i>damping</i>
Anstiegszeit, I-195	<i>rise time</i>	Deskriptorsystem, I-88	<i>descriptor system</i>
Ausgabegleichung, I-72	<i>output equation</i>	dezentrale Regelung, I-25, 151	<i>decentralised control</i>
Ausgangsrückführung, 432	<i>output feedback</i>	direkter Entwurf digitaler Regler, 518	<i>direct digital control</i>
Ausgangsvektor, I-78	<i>output vector</i>	Differenzialgleichung, I-57	<i>differential equation</i>
Bandbreite, I-275	<i>bandwidth</i>	Dynamikforderung, I-319	<i>speed-of-response specification</i>
Begleitmatrix, I-82	<i>companion matrix</i>	dynamisches System, I-2	<i>dynamical system</i>
Beobachtbarkeit, 92	<i>observability</i>		
Beobachtungsnormalform, I-339	<i>controllable standard form</i>		

E/A-Beschreibung, I-128, 20	<i>input-output description, external description</i>	Führungsverhalten, I-323	<i>command response</i>
E/A-Stabilität, I-381	<i>input-output-stability</i>	Fundamentalmatrix, I-124	<i>fundamental matrix, state-transition matrix</i>
E/A-Verhalten, I-126	<i>input-output performance</i>	Fuzzyregelung, I-15	<i>fuzzy control</i>
Eigenbewegung, I-120	<i>zero-input response, natural response</i>	Gegenkopplung, I-394	<i>negative feedback</i>
Eigenvorgang, I-145	<i>mode</i>	gekoppeltes System, 30	<i>composite system</i>
Eingangsvektor, I-78	<i>input vector</i>	Gewichtsfolge, 450	<i>impulse response</i>
eingeschwungener Zustand, I-168	<i>steady state</i>	endliche Gewichtsfolge, 451	<i>finite impulse response</i>
Einheitsimpuls, 450	<i>unit discrete pulse</i>	Gewichtsfunktion, I-158	<i>impulse response</i>
Einheitsrückführung, 149	<i>unity feedback</i>	Gewichtsfunktionsmatrix, 19	<i>transfer function matrix</i>
Einstellfaktor, I-481, 213	<i>tuning factor</i>	Gleichgewichtstheorem, I-357	<i>Bode's sensitivity integral</i>
Empfindlichkeit, I-362	<i>sensitivity</i>	Gleichgewichtszustand, I-376	<i>equilibrium state</i>
Empfindlichkeitsfunktion, I-325	<i>sensitivity function</i>	Güteforderung, I-317	<i>performance specification</i>
Entwurf, I-429	<i>design</i>	Gütefunktional, I-432	<i>performance index</i>
Ermittelbarkeit, 114	<i>detectability</i>	gramsche Beobachtbarkeitsmatrix, 97	<i>observability Gramian</i>
erzwungene Bewegung, I-120	<i>zero-state response, forced response</i>	gramsche Steuerbarkeitsmatrix, 68	<i>controllability Gramian</i>
Faltungsintegral, I-162	<i>convolution integral</i>	Halteglied (nullter Ordnung), 418	<i>zero order hold</i>
Faltungssumme, 456	<i>discrete convolution sum</i>	Hurwitzkriterium, I-387	<i>Hurwitz criterion</i>
Fouriertransformation, I-217	<i>Fourier transform</i>	Hurwitzmatrix, I-387	<i>Hurwitz matrix</i>
Folgeregelung, I-322, 184	<i>servocontrol, servo-mechanism system</i>	Inneres-Modell-Prinzip, 339	<i>Internal Model Principle</i>
freie Bewegung, I-120	<i>free motion</i>	Integrator, I-372	<i>integrator</i>
Frequenzbereich, I-229	<i>frequency domain</i>	Integrierglied, I-179	<i>Type I system</i>
Frequenzgang, I-220	<i>frequency response</i>	kanonische Normalform, I-132, 17	<i>canonical form</i>
Führungsgröße, I-4	<i>command signal, reference signal</i>	Kaskadenregelung, I-540	<i>cascaded controller</i>
Führungsübergangsfunktion, I-323	<i>command step response</i>	Kausalität, I-164	<i>causality</i>

Knickfrequenz, I-274	<i>break point</i>	Phasengang, I-222	<i>phase plot</i>
komplementäre Empfindlichkeitsfunktion, I-325	<i>complementary sensitivity function</i>	Phasengang, I-222	<i>phase margin, Bode phase plot</i>
Korrekturglied (phasenanhebend), I-370	<i>lead compensator</i>	PID-Regler, I-368	<i>proportional-plus-integral-plus-derivative (PID) controller, three term controller</i>
Korrekturglied (phasenabsenkend), I-370	<i>lag compensator</i>	PN-Bild, I-250	<i>pole-zero map</i>
Kreisverstärkung, I-324	<i>loop gain</i>	Pol, I-249, 48	<i>pole</i>
Laplacetransformation, I-228	<i>Laplace transform</i>	Polüberschuss, I-250	<i>pole-zero excess</i>
Linearisierung, I-104	<i>linearisation</i>	Pol/Nullstellen-Kürzen, 83	<i>pole-zero cancelation</i>
Markovparameter, 450	<i>Markov parameters</i>	Polzuweisung, 235	<i>pole assignment</i>
Matrixexponentialfunktion, I-123	<i>matrix exponential</i>	prädiktive Regelung, I-525	<i>predictive control</i>
Mehrgrößenregelung, I-24	<i>multivariable control</i>	Proportionalglied, I-173	<i>Type 0 system</i>
Messglied, I-6	<i>sensor</i>	Prozessregelung, I-21	<i>process control</i>
Messrauschen, I-5	<i>measurement noise</i>	rechnergestützter Entwurf, I-433	<i>computer-aided design</i>
minimalphasiges System, I-304	<i>minimumphase system</i>	Regelabweichung, I-6	<i>control error</i>
Modellunsicherheiten, I-417	<i>model uncertainties</i>	Regelgröße, I-4	<i>variable to be controlled, plant output</i>
Modellvereinfachung, I-187	<i>model aggregation, model simplification</i>	Regelkreis, I-5	<i>closed-loop system</i>
Modellunsicherheit, 417	<i>model uncertainty</i>	Regelstrecke, I-4	<i>plant</i>
Nicholsdiagramm, I-438	<i>Nichols plot</i>	Regelungsnormalform, I-84	<i>controllable standard form</i>
Nullstelle, I-249, 48	<i>zero</i>	Regler, I-4	<i>controller</i>
Nyquistkriterium, I-402, 164	<i>Nyquist criterion</i>	Reglereinstellung, 204	<i>tuning</i>
Nyquistkurve, I-398, 165	<i>Nyquist contour</i>	Reglerentwurf, I-16	<i>controller design</i>
offene Kette, I-324	<i>open-loop system</i>	Reglergesetz, I-6	<i>control law</i>
Ortskurve, I-225	<i>Nyquist plot</i>	Reglerverstärkung, I-343	<i>feedback gain</i>
Parallelschaltung, I-267	<i>parallel connection</i>	Regelungsnormalform, I-84	<i>controllable standard form</i>
Partialbruchzerlegung, I-261	<i>partial fraction expansion</i>	Reihenschaltung, I-267	<i>series connection</i>
		Resonanzfrequenz, I-320	<i>resonance frequency</i>

Resonanzüberhöhung, I-285	<i>resonant peak</i>	Steuerung in der offenen Wirkungskette, I-10	<i>feedforward control</i>
robuster Regler, I-544	<i>robust controller</i>	Störgröße, I-4	<i>disturbance</i>
Robustheit, I-9	<i>robustness</i>	Störunterdrückung, I-322	<i>disturbance rejection, disturbance attenuation</i>
Rückführdifferenzfunktion, I-393	<i>return difference</i>	Systemmatrix, I-73	<i>system matrix</i>
Rückführdifferenzmatrix, 162	<i>return difference matrix</i>	Totzeit, I-112	<i>time delay</i>
Rückkopplung, I-10	<i>feedback</i>	Trajektorie, I-75	<i>trajectory</i>
Rückkopplungsschaltung, I-268	<i>feedback connection</i>	Übergangsfunktion, I-156	<i>step response</i>
Ruhelage, I-376	<i>equilibrium state</i>	Übergangsmatrix, I-124	<i>transition matrix</i>
Schnittfrequenz, I-479	<i>crossover frequency</i>	Übergangsverhalten, I-168	<i>transient response</i>
Signalflussgraf, I-52	<i>signal flow graf</i>	Übertragungsfunktion, I-237	<i>transfer function</i>
Sollwertfolge, I-318	<i>asymptotic regulation, asymptotic tracking, setpoint following, steady-state specification</i>	Überschwingweite, I-319	<i>peak overshoot</i>
Sprungantwort, I-157	<i>step response</i>	Überschwingzeit, I-482	<i>peak time</i>
Sprungfunktion, I-156	<i>step function</i>	Vergleichsmatrix, 634	<i>comparison matrix</i>
Stabilisierbarkeit, 114	<i>stabilisability</i>	Verhalten, I-166	<i>performance</i>
Stabilisierung, I-358	<i>stabilisation</i>	versteckte Schwingung, 414	<i>hidden oscillation</i>
Stabilität, I-375, 160	<i>stability</i>	Vorfilter, I-366	<i>prefilter</i>
stationäres Verhalten, 458	<i>steady-state response</i>	Wurzelort, I-450	<i>root locus</i>
Steuerbarkeit, 63	<i>observability</i>	Zeitbereich, I-229	<i>time domain</i>
statische Verstärkung, I-157	<i>DC gain, static reinforcement</i>	Zeitkonstante, I-256	<i>time constant</i>
Stellglied, I-5	<i>actuator</i>	Zeitkonstantenform der Übertragungsfunktion, I-257	<i>Bode form of the transfer function</i>
Stellgröße, I-4	<i>control signal, actuating signal, plant input</i>	Zustand, I-74	<i>state, state vector</i>
Steuermatrix, I-78	<i>input matrix</i>	Zustandsgleichung, I-72	<i>state equation</i>
Steuerung, I-2	<i>control</i>	Zustandsraum, I-75	<i>state space</i>
Steuerung im geschlossenen Wirkungskreis, I-10	<i>feedback control</i>	Zustandsrückführung, 142	<i>state feedback</i>
v		Zustandsstabilität, I-377	<i>internal stability, Lyapunov stability</i>
		Zustandsvariable, I-74	<i>state variable</i>

Sachwortverzeichnis

A/D-Wandler, 410
Abtaster, 411
Abtastfrequenz, 411
Abtastsystem, 411
Abtasttheorem, 412
Abtastzeit, 411
ACKERMANN, J., 239, 277
Ähnlichkeitstransformation, 625
Alias-Effekt, 413
Aliasing, 413
Allpassverhalten, 52
Antialiasing-Filter, 415
ARMA-Modell, 429
Ausgabegleichung, 430
Ausgangsentkopplungsnullstelle, 53, 102, 475
Ausgangsrückführung, 144, 508
ausgangsverbunden, 120

Beispiele, XVII

Beispiel
 AHL-Anlage, 221, 525, 649
 Autopilot, 6
 Autorennen, 422
 Bankkonto, 480
 Behältersystem, 108
 Biogasreaktor, 6, 199, 230, 422
 Dampferzeuger, 41, 44, 115, 138, 327, 648
 Destillationskolonne, 5
 FÜ-Regelung, 115, 210, 264, 328, 406, 650
 Filter, 452
 Flugüberwachung, 422
 Flugregelung, 304, 539
 Fußball-Bundesliga, 435
 Gleichstrommotor, 125, 416, 523, 536

invertiertes Pendel, 110, 273, 284, 305, 346, 355
Klärschlammverbrennungsanlage, 194, 226, 443, 649
Knotenspannungsregelung, 35, 377, 389, 650
Kristallzüchtungs-ofen, 403, 652
Lagerhaltung, 434
Magnetschwebbahn, 167, 274, 364
Mischprozess, 18, 653
Oszillator, 472
Preisbildung in der Landwirtschaft, 481
Rührkesselreaktor, 29, 68, 73, 98, 166, 242, 260, 356, 462
Raumtemperaturregelung, 539
Rinderzucht, 434
Rotationsantrieb, 129
Satellit, 107
Verladebrücke, 130, 244, 255, 468, 648
Wärmetauscher, 4
Beobachtbarkeit, 92, 459
Beobachtbarkeitsindex, 100
Beobachtbarkeitskriterium
 B. von GILBERT, 102
 B. von HAUTUS, 102, 460
 B. von KALMAN, 95, 460
Beobachtbarkeitsmatrix, 95, 459
Beobachter, 332, 530
Beobachtungsnormalform, 339
Bewegung
 erzwungene B., 445
 freie B., 45, 445
Bewegungsgleichung, 37, 445
Bodediagramm, 61, 499
BRASCH, F. M., 277

charakteristische Gleichung, 161, 510, 527, 623

- charakteristisches Polynom, 163, 623
cheap control, 328
 CHEN, M. J., 202

 D/A-Wandler, 410
 DAVISON, E. J., 202, 231
 Definitheit, 630
 DESOER, C. A., 202
 dezentrale Regelung, 10, 151, 263, 394
 dezentraler Regler, 209
 Diagonaldominanz, 625
 verallgemeinerte D., 634
 Diagonalmatrix, 622
 digitale Regelung, 409
 DING, C., 277
 direkter Entwurf digitaler Regler, 518
 Direktes Nyquistverfahren, 367
 Direktkopplung, 27
 DOYLE, J., 329
 dyadische Regelung, 247

 E/A-Beschreibung, 20
 E/A-Stabilität, 58
 E/A-Verhalten, 23, 38, 111, 446, 455
 Eigenbewegung, 47, 445
 Eigenvektor, 623
 Eigenvorgang, 53, 446
 Eigenwert, 623
 E. kontinuierlicher Systeme, 40
 E. zeitdiskreter Systeme, 448
 fester E., 126
 Eigenwertgleichung, 623
 Eingangs-Ausgangs-Stabilität, *siehe*
 E/A-Stabilität
 Eingangsentkopplungsnullstelle, 53, 82, 475
 eingangsverbunden, 120
 Einheitsimpuls, 450
 Einheitsrückführung, 149
 Einstellregel, 203
 endliche Gewichtsfolge, 451, 456, 536
 Entkopplung, 10, 394
 dynamische E., 397
 statische E., 396
 vollständige E., 395
 Entkopplungsglied, 11, 394
 Entkopplungsnullstelle, 53, 475
 Entwurf
 direkter E. digitaler Regler, 518
 duales Entwurfsproblem, 338
 Entwurfsverfahren, 187, 216, 239, 260, 301,
 316, 345, 376, 525
 Ermittelbarkeit, 114
 euklidische Matrixnorm, 630
 euklidische Vektornorm, 629

 FÖLLINGER, O., 328
 Faltungintegral, 20
 Faltungssumme, 456, 492
 Fehlermodell, 172
 fester Eigenwert, 126
 Folgeregung, 184
 Frequenz-Übergabeleistungsregelung, 650
 Frequenzbereich, 487
 Frequenzgang, 493
 Frequenzkennliniendiagramm, *siehe*
 Bodediagramm
 Führungsgrößenbeobachter, 358
 Führungsgrößenmodell, 178

 Gegenkopplungsbedingung, 205
 gekoppeltes System, 30
general servomechanism problem, 184
 Gershgorinband, 371
 verallgemeinertes G., 385
 Gershgorintheorem, 370, 625
 verallgemeinertes G., 386, 636
 Geschwindigkeitsalgorithmus, 523
 Gewichtsfolge, 450
 endliche G., 451, 456, 536
 G. in kanonischer Darstellung, 451
 Gewichtungsfunktionsmatrix, 19, 39
 G. in kanonischer Darstellung, 39
 GILBERT, E. G., 102, 133, 139
 GLOVER, K., 329
 gramsche Beobachtbarkeitsmatrix, 97, 470
 gramsche Matrix, 68, 97, 462, 470
 gramsche Steuerbarkeitsmatrix, 68, 462
 Gütefunktional, 279
 Wahl der Wichtungsmatrizen, 301
 Gütevektroptimierung, 318

 H^∞ -Regler, 317
 Halteglied, 418
 Hamiltonmatrix, 292
 Hauptkopplung, 27
 Hauptregelkreis, 202
 Hauptregelstrecke, 376
 HAUTUS, M. L. J., 102, 139, 460

- Hsu-Chen-Theorem, 164
 Hurwitzkriterium, 478

 I-erweiterte Regelstrecke, 150, 206, 508
 Inneres-Modell-Prinzip, 186, 514
integral controllability, 231
 Integrität, 9, 374
 invariante Nullstelle, 52
 Inverses Nyquistverfahren, 376

 JURY, E. I., 476

 KALMAN, R. E., 62, 139, 328
 Kalmanfilter, 359
 Kalmanzerlegung, 108
 kanonische Normalform, 17, 443
 Kausalität, 429, 503
 kompositionale Modellbildung, 30
 Kopplungsmaß, 189
 Kopplungsmatrix, 193
 Korrespondenztabelle, 489, 659
 Kreisverstärkung, 169
 KRONECKER-Index, 76

 Laufzeitglied, 430
 Leistungszahl (von Elektroenergienetzen), 211
 Linkseigenvektor, 623
 LJAPUNOW, A., 57
 Ljapunowgleichung, 288, 530
 Ljapunowstabilität, *siehe* Zustandsstabilität
 LQ-Regelung, 283
 LQG-Regelung, 362
 LUENBERGER, D. G., 139, 365

 M-Matrix, 632
 MACFARLANE, A. G. J., 202
 Markovparameter, 137, 450
 Matrix
 diagonalähnliche M., 626
 Diagonalmatrix, 622
 Dreiecksmatrix, 622
 hermitesche M., 621
 inverse M., 622
 komplexe M., 621
 M-Matrix, 632
 nichtnegative M., 631
 Permutationsmatrix, 622
 reduzible M., 631
 symmetrische M., 621
 zerlegbare M., 631
 Matrixnorm, 629
 Maximalbetragsnorm, 629
 Maximumprinzip, 280
 Mehrgrößenregelkreis, 8
 Mehrgrößenregler, 141
 Mehrgrößensystem, 2
 MESAROVIC, M. D., 62
 Messrauschen, 234
 MIMO-System, 4
 Mindestdämpfung, 234
 Mindeststabilitätsgrad, 234
 Mischprozess, 653
 modale Regelung, 277
 Modell, 15, 425
 Modellunsicherheit, 170
 Modi, 446
 MORARI, M., 231

 NERODE, A., 62
 Netzkennlinienfehler, 266, 571
 Netzkennlinienregelung, 570
 Netzkennlinienverfahren, 211
 nichtnegative Matrix, 631
 Normaxiome, 629
 Nullstelle, 48, 458, 473, 500
 Entkopplungs., 53
 invariante N., 52
 NWOKAH, O. D. I., 406
 NYQUIST, H., 413
 Nyquistfrequenz, 414
 Nyquistkriterium, 164, 510
 Nyquistkurve, 165, 510

 optimale Regelung, *siehe* Optimalregler
 optimale Steuerung, 280
 Optimalregler, 279, 283, 530
 Eigenschaften, 293
 Empfindlichkeit, 297
 Stabilitätsrand, 296
 Optimierungsproblem
 dynamisches O., 281
 inverses O., 302
 statisches O., 283
 Ortskurve, 61, 505

 P-kanonische Struktur, 27
 P-Regler, 144

- Parametervektor, 251
- Partialbruchzerlegung, 489
- PEARSON, J. B., 277
- Permutationsmatrix, 622
- Perronwurzel, 229, 632
- PI-Regler, 203, 380, 508
- PID-Regler, 508, 521
- Pol, 48, 473, 500
- Pol/Nullstellen-Kürzen, 83
- Polverschiebung, 235, 529
- Polvorgabe, 235
- Polzuweisung, 235, 529
- PONTRJAGIN, L. S., 280
- Positionsalgorithmus, 522
- POSTLETHWAITE, I., 202
- PREUSS, H.-P., 277
- Primärregelung, 211
- proper, 44
 - streng proper, 44
- Pseudoinverse, 631

- Querkopplung, 28, 368, 370

- Realisierung, 132
 - GILBERT-R., 133
 - minimale R., 133, 136
- Rechtseigenvektor, 623
- Regelkreis
 - digitaler R., 409
 - Freiheitsgrade, 144
 - Mehrgrößenr., 8
- Regelstrecke
 - I-erweiterte R., 150, 508
- Regelung
 - modale R., 277
 - robuste R., 382
 - Tuningr., 204
- Regelungsnormalform, 132, 235, 433
- Regler
 - dezentraler R., 151
 - Mehrgrößenregler, 141
 - optimaler R., 283
 - PI-R., 203
 - R. mit endlicher Einstellzeit, 532
 - robuster R., 170
 - strukturbeschränkter R., 153
- Reglereinstellung, 204
- Relative Gain Array, *siehe* relative Verstärkungsmatrix
- relative Verstärkungsmatrix, 193
- RGA, *siehe* relative Verstärkungsmatrix
- Riccatigleichung, 290, 530
- robuste Regelung, 382
- Robustheit, 321
 - R. bezüglich Sollwertfolge, 180, 184
 - R. bezüglich Stabilität, 382
- ROSENBROCK, H. H., 62, 277, 376, 382, 406
- Rosenbrocksystemmatrix, 23, 474
- Rückfuhrdifferenzmatrix, 162, 510

- s-Rang, 121
- Satz der kleinen Verstärkungen, 169
- Schleifenfamilie, 127
- SCHUR-Formel, 628
- Sekundärregelung, 211
- Sensorkoordinaten, 352
- Separationstheorem, 343, 354
- Servokompensator, 185
- SHANNON, C. E., 413
- Singulärwertzerlegung, 627
- SISO-System, 4
- Small Gain Theorem*, 169, 170
- Spaltensummennorm, 629
- Spannungs-Blindleistungsregelung, 35
- Spektralnrm, 629
- Spektralradius, 623
- Spektrum, 623
- Störentkopplung, 115
- Stabilisierbarkeit, 114
- stabilisierender Kompensator, 186
- Stabilität, 57, 160, 369, 509
- Stabilitätsgrad, 310
- stationäres Verhalten, 458
- statische Verstärkung, 39, 449
- Stellungsalgorithmus, 522
- steuerbarer Unterraum, 85
- Steuerbarkeit, 63, 459
 - Ausgangssteuerbarkeit, 90
 - integrale S., 231
 - Zustandssteuerbarkeit, 90
- Steuerbarkeitsindex, 76
- Steuerbarkeitskriterium
 - S. von GILBERT, 80
 - S. von HAUTUS, 82, 460
 - S. von KALMAN, 66, 460
- Steuerbarkeitsmatrix, 65, 459
- Störgrößenaufschaltung, 181, 357

- Störgrößenbeobachter, 357
- Störgrößenmodell, 178
- Struktur dynamischer Systeme, 116
- strukturbeschränkter Regler, 128
- strukturell fester Eigenwert, 126
- strukturelle Analyse, 116
- strukturelle Beobachtbarkeit, 119
- strukturelle Steuerbarkeit, 119
- struktureller Rang, 121
- Strukturgraf, 117
- Strukturmatrix, 116
- Summennorm, 629
- System
 - Abtastsystem, 411
 - Mehrgrößensystem, 2
 - minimalphasiges S., 52
 - nichtminimalphasiges S., 52
 - sprungfähiges S., 39
- Totzeitsystem, 435, 438
 - Approximation durch T., 436
- Tuningfaktor, 213
- Tuningregelung, 204
- Übergangsfolge, 449
- Übertragungsfunktionsmatrix, 38
- Übergangsfunktionsmatrix, 18
- Übergangsmatrix, 37, 445
- Übergangsverhalten, 458
- Übertragungsfunktionsmatrix, 20
 - Ü. in kanonischer Darstellung, 44
- Übertragungsnullstelle, 48, 475
- UQ-Regelung, 35
- V-kanonische Struktur, 28
- Variationsrechnung, 280
- Vektor, 621
- Vektornorm, 629
- verallgemeinerte Diagonaldominanz, 634
- Vergleichsmatrix, 634
- Verhalten
 - Übergangsverhalten, 45, 456
 - stationäres V., 45, 456
- Verschiebeoperator, 491
- versteckte Schwingung, 414
- Vollständige Modale Synthese, 251, 277
- Vorfilter, 179
- Vorwärtssteuerung, 180
- WOLOVICH, W. A., 62
- WONHAM, W. M., 62
- Wurzelortskurve, 213
- $\mathcal{Z}$ -Transformation, 485
 - Eigenschaften, 490
 - Rücktransformation, 489
- $\mathcal{Z}$ -Übertragungsfunktion, 493
 - Eigenschaften, 497
- ZAMES, G., 202, 329
- Zeilensummenorm, 629
- Zeitbereich, 487
- Zustandsdifferenzengleichung, 430
- Zustandsraummodell, 16
 - Z. in Beobachtungsnormalform, 339
 - Z. in kanonischer Normalform, 17, 443
 - Z. in Regelungsnormalform, 235
 - Z. zeitdiskreter Systeme, 430
- Zustandsrückführung, 142, 508
- Zustandsstabilität, 57