

Modellierung und Simulation technischer Systeme

Reiner Nollau

Modellierung und Simulation technischer Systeme

Eine praxisnahe Einführung

 Springer

Prof. Dr.-Ing. habil. Reiner Nollau
HAWK Hochschule für angewandte
Wissenschaft und Kunst
FH Hildesheim/Holzminde/Göttingen
Fakultät Naturwissenschaften und Technik
Von-Ossietzky-Str. 99
37085 Göttingen
reiner.nollau@hawk-hhg.de

ISBN 978-3-540-89120-8 e-ISBN 978-3-540-89121-5
DOI 10.1007/978-3-540-89121-5
Springer Dordrecht Heidelberg London New York

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2009

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Einbandentwurf: eStudio Calamar S. L., Figueres/Berlin

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Vorwort

Ingenieure müssen technische Prozesse analysieren und ihre meist dynamischen Teilsysteme optimieren. Analoges gilt für Naturwissenschaftler hinsichtlich biologischer, chemischer und klimatischer oder für Ökonomen hinsichtlich wirtschaftlicher Prozesse. Für die Steuerung von Vorgängen in der menschlichen Gesellschaft ist das Verständnis ihrer Dynamik ebenfalls von großer Bedeutung.

Das vorliegende Buch wendet sich an Ingenieure und an Studierende von Ingenieurstudiengängen und befasst sich mit technischen Systemen. Es ist auf der Basis von Forschungs- und Entwicklungsaufgaben sowie meiner langjährigen Erfahrung als Hochschullehrer und Betreuer von Dissertationen und Diplomarbeiten entstanden, auf die an entsprechender Stelle verwiesen wird.

Der Schwerpunkt dieses Buches liegt auf der *Ermittlung mathematischer Modelle* technischer Systeme, um mit ihrer Hilfe das Verhalten des realen Systems vorausberechnen zu können. Die Modelle werden als Blockschaltbilder aus Blöcken, Pfeilen und Summationsgliedern dargestellt. Jeder Block beinhaltet die mathematische Funktion eines überschaubaren, oft einfachen, Zusammenhangs. Die Verbindungspfeile zwischen den Blöcken zeigen die Verkopplungen innerhalb des Systems. Die Blockschaltbilder liegen damit in einer Form vor, die eine einfache Übertragung des Modells in viele Simulations-Rechnerprogramme ermöglicht. Das Blockschaltbild ist eines der am meisten verwendeten Werkzeuge in diesem Buch, da es Übersichtlichkeit mit einfacher Kontrollmöglichkeit auf Vollständigkeit eines Modells verbindet.

Ein Grundprinzip des Buches ist, Beispiel-Systeme aus vielen Bereichen der Technik zu behandeln und ihre Modelle mit einer einheitlichen Methodik zu ermitteln. Das soll den Lesern helfen, in Anlehnung an ein Beispiel-System oder an einen Teil davon das eigene System zu modellieren und anschließend zu simulieren.

Zu allen komplexeren Modellen werden Simulationsrechnungen durchgeführt. Für jeden der verwendeten Parameter sind die Zahlenwerte gegeben, so dass die Leser das Verhalten des Modells mit geeigneter Software überprüfen können.

Die Studierenden vieler Ingenieur-Studiengänge sowohl an Fachhochschulen als auch an Technischen Universitäten werden immer öfter in ihren Projekt- oder Abschlussarbeiten mit Aufgabenstellungen konfrontiert, die die Beherrschung dieses Rüstzeuges verlangen. Analoges trifft natürlich auf die Absolventen in ihrer betrieblichen Praxis zu.

Ich danke allen, die mich zu diesem Buchvorhaben ermutigt haben. Für die Hinweise zum Buchkonzept, vor allem auch für die kritisch-hilfreichen Anmer-

kungen zum Manuskript oder Teilen davon danke ich sehr herzlich Frau Dipl.-Ing. Birgit Zwickert-Biniasch und den Herren Prof. Dr.-Ing. Klaus Bobey, Dipl.-Ing. Heiko Böhmer, Prof. Dr.-Ing. habil. Norbert Gebhardt, Dr.-Ing. Klaus Littmann, Prof. Dr.-Ing. habil. Dieter Will und Prof. Dr.-Ing. Lutz Zacharias.

Frau Eva Hestermann-Beyerle und Frau Kollmar-Thoni vom Springer-Verlag danke ich für die gute Zusammenarbeit beim Entstehen des Buches.

Besonders danke ich meiner Frau, Dipl.-Ing. Renate Nollau, für die vielen Gespräche und Vorschläge, für die vielen Stunden des Nachrechnens und Korrektur-Lesens, für die Ermunterungen und die große Geduld.

Liebe Leserin und lieber Leser, lassen Sie es mich bitte wissen, wenn Sie auf Fehler stoßen. Ich werde mich schnell mit Ihnen in Verbindung setzen.

Februar 2009

Reiner Nollau

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	1
2 Methodik der Modellermittlung und Modellbehandlung.....	3
2.1 Bausteine der Modelle	3
2.2 Werkzeuge	4
2.2.1 Die Übertragungsfunktion	5
2.2.2 Das Blockschaltbild.....	7
2.2.3 Die Simulation.....	13
2.3 Systematik der Modellermittlung	14
2.4 Die Modellbehandlung	17
2.5 Zusammenfassung	20
3 Lineare Modelle technischer Systeme mit Verzögerung 2. Ordnung	21
3.1 Elektrischer Reihenschwingkreis	22
3.1.1 Erarbeitung Blockschaltbild	22
3.1.2 Gesamtübertragungsfunktion	25
3.2 Einfaches Feder-Masse-System	27
3.2.1 Erarbeitung Blockschaltbild	27
3.2.2 Gesamtübertragungsfunktion	29
3.3 Permanentmagneterregter Gleichstrommotor	30
3.3.1 Erarbeitung des Blockschaltbildes.....	31
3.3.2 Die Gesamtfunktion	34
3.4 Einfacher Hydraulikantrieb.....	38
3.4.1 Erarbeitung Blockschaltbild	38
3.4.2 Die Gesamtfunktion im Bildbereich.....	41
3.5 Heizplatte	46
3.5.1 Erarbeitung Blockschaltbild	46
3.5.2 Gesamtübertragungsfunktion	49
3.6 Zwei verbundene offene Flüssigkeitsbehälter.....	50
3.6.1 Erarbeitung Blockschaltbild	50
3.6.2 Die Gesamtübertragungsfunktion.....	53
3.7 Zusammenfassung	56
4 Technische Systeme mit typischen Nichtlinearitäten	57
4.1 Feder-Masse-Systeme mit nichtlinearen Reibungs- und Federcharakteristika.....	58
4.1.1 Fallende Kugel	58

4.1.2 Feder-Masse-System mit unterschiedlichen Reibkraftmodellen	61
4.1.3 Feder-Masse-System mit zwei Massen und Anschlag zum Schutz einer Feder.....	67
4.1.4 Feder-Masse-System mit Reibungskopplung und Ritzel-Zahnstange- Kopplung.....	74
4.2 Elektromagneteregter Drehschwinger	82
4.2.1 Erarbeitung des Blockschaltbildes	82
4.2.2 Simulationsläufe.....	86
4.3 Hydraulikantrieb mit typischen Nichtlinearitäten	90
4.3.1 Erarbeitung der Blockschaltbilder	90
4.3.2 Simulationsläufe.....	96
4.4 Drehfeldmotoren	98
4.4.1 Asynchronmotor (ASM)	98
4.4.2 Elektronisch kommutierter Motor (ECM).....	104
4.5 Zusammenfassung	108
5 Schaltungen mit Operationsverstärkern	109
5.1 Allgemeines Modell von Schaltungen mit Operationsverstärkern	109
5.2 Nicht invertierender Verstärker	113
5.3 Tiefpass als Beispiel einer invertierenden Beschaltung.....	115
5.4 Differenzverstärker.....	117
5.5 Astabiler Multivibrator	119
5.6 Wien-Oszillator	121
5.7 Zusammenfassung	124
6 Thermodynamische Systeme	125
6.1 Allgemeines geschlossenes thermodynamisches System	125
6.2 Allgemeines offenes thermodynamisches System.....	127
6.3 Druckflüssigkeitsspeicher als geschlossenes thermodynamisches System	129
6.3.1 Erarbeitung des Blockschaltbildes	130
6.3.2 Simulationsläufe zur Verifizierung des Modells.....	132
6.4 Arbeitszylinder der Pneumatik als offenes thermodynamisches System	134
6.4.1 Erarbeitung des Blockschaltbildes	134
6.4.2 Simulationslauf	138
6.5 Stirlingmotor mit Verdränger	141
6.5.1 Wirkprinzip von Stirlingmotoren	141
6.5.2 Erarbeitung des Blockschaltbildes	143
6.5.3 Simulationslauf	149
6.6 Stirlingmotor mit Arbeitszylinder und Kompressionszylinder	159
6.6.1 Erarbeitung des Blockschaltbildes	159
6.6.2 Simulationslauf	165
6.7 Zusammenfassung	173

7 Wanderwellen in Leitungen.....	175
7.1 Wanderwellen in elektrischen Leitungen.....	175
7.1.1 Erarbeitung des Blockschaltbildes.....	175
7.1.2 Simulationslauf.....	177
7.2 Wanderwellen in Flüssigkeitsleitungen	179
7.2.1 Erarbeitung des Blockschaltbildes.....	179
7.2.2 Simulationsläufe.....	183
7.3 Zusammenfassung	186
8 Geregelte Systeme.....	187
8.1 Stehendes Pendel	187
8.1.1 Modell des Antriebs	188
8.1.2 Modell des Mehrmassensystems Laufkatze-Pendel	189
8.1.3 Das Modell des Wirkungskreises Antrieb-Laufkatze.....	196
8.1.4 Das Modell des Regelkreises.....	198
8.1.5 Die Simulation des Regelkreisverhaltens	199
8.2 Lage geregelter elektrohydraulischer Antrieb mit Vierkantensteuerung ..	202
8.2.1 Modell der Regelstrecke.....	203
8.2.2 Wegsensor, Regler, Verstärker	207
8.2.3 Das Verhalten des Regelkreises	209
8.3 Bahnsteuerung eines elektrohydraulisch angetriebenen Rundtisches	212
8.3.1 Modell des Mehrmassensystems	213
8.3.2 Modelle der Antriebe.....	217
8.3.3 Das Gesamt-Modell des Rundtisches.....	221
8.3.4 Das Verhalten des Gesamtsystems	224
8.4 Punkt-zu-Punkt-Steuerung eines Luftschiffes.....	231
8.4.1 Ermittlung des Blockschaltbildes eines ferngesteuerten Luftschiffes	231
8.4.2 Verhalten eines ferngesteuerten Luftschiffes	236
8.4.3 Die Regelung des Luftschiffes in der x-y-Ebene.....	239
8.5 Temperaturregelung eines Trockenschrankes.....	245
8.5.1 Ermittlung von Blockschaltbildern der Regelstrecke	245
8.5.2 Simulation des Streckenverhaltens.....	250
8.5.3 Das Modell und das Verhalten der Regelung.....	253
8.6 Mooringregelung	256
8.6.1 Ermittlung von Blockschaltbildern.....	257
8.6.2 Simulation des Regelverhaltens	264
8.7 Zusammenfassung	270

Anhang A: Bausteine der Modellierung	271
Anhang B: PT2-Glied und DT2-Glied	276
Literaturverzeichnis	279
Sachverzeichnis	283

Kurzzeichenverzeichnis

a	Abstand
A	Ampere
A, A_i	Amplitude, Fläche
AP	Arbeitspunkt, Auftriebspunkt
SP	Schwerpunkt
b	Zeitkonstantenverhältnis
bar	Dimension des Druckes Bar
c, c_i	Federkonstante, spezifische Wärmekapazität
C, C_i	Kapazität, Speicherkapazität, Volumenstrom-Verstärkung
D, d_i	Durchmesser
D, D_i	Dämpfung, Lehrsches Dämpfungsmaß
DB	Druckluftbehälter
Dgl.	Differenzialgleichung
D-Glied	Differenzierendes Übertragungsglied
e	Regelabweichung, Regelfehler
E, E_i	Energie, Druckverstärkung
ECM	elektronisch kommutierter Motor
ET	Elektrotechnik
f	Frequenz
$f()$	Funktion von
F, F_i	Kraft
FT	Fluidtechnik
g	Erdbeschleunigung, Gramm
G	Gewichtskraft
$G(s), G_i(s)$	Übertragungsfunktion (ÜTF)
G, G_i	Leitwert für Strom, Wärme, Massestrom
h	Höhe
$h(t)$	Übergangsfunktion (ÜF)
Hz	Hertz
i, i_i	Strom, Übersetzungsverhältnis
I-Glied	Integrierendes Glied
j	Imaginärzeichen
J	Joule
J, J_i	Massenträgheitsmoment
k	Kilo-
K	Kelvin
k, k_i	Allg. Abtastzeitpunkt, Reibungsfaktor
K, K_i	Übertragungsfaktor, Verstärkungsfaktor
$konst.$	konstant
L	Lagrangeschen Funktion, (Gesamt-) Länge

$l, l/min$	Liter, Liter pro Minute
l, l_i	Länge
L, L_i	Induktivität
M	Mega-
m	Milli-
m, dm, cm	Meter, Dezimeter, Zentimeter
m, m_i	Masse
$\dot{m}, \dot{m}_i$	Gasmassestrom
M, M_i	Drehmoment
min	Minute
n	Ordnung, Drehzahl
N	Newton, Windungszahl
$N(s)$	Nennerfunktion
OPV	Operationsverstärker
p	Polpaarzahl
p, p_i	Druck
P, P_i	Leistung
P-Glied	Proportional wirkendes Glied
PT1-Glied	Proportional wirkendes Glied mit Verzögerung 1. Ordnung
PT2-Glied	Proportional wirkendes Glied mit Verzögerung 2. Ordnung
pV	Druck-Volumen-
q, q_i	verallgemeinerte Koordinate
Q, Q_i	Volumenstrom
r	Radius
R	spezielle Gaskonstante, Radius
$r(t)$	Einheits-Rampenfunktion
R, R_i	Widerstand (Ohmscher, magnetischer, gegen Wärmetransport), Strömungswiderstand
rad	Radian
s	Differenzialoperator, Laplace-Operator, komplexe Winkelgeschwindigkeit, Weg, Sekunde
$s(t)$	Einheits-Sprung, Einheits-Sprungfunktion
$s, ds/dt, d^2s/dt^2$	Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung
$s, \dot{s}, \ddot{s}$	Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung
$sign$	Vorzeichenfunktion
sl	Schlupf
t, τ	Zeit
T, T_i	absolute Temperatur
T, T_i	Zeitkonstante, Eigenzeitkonstante
T_0	Abtastzeit
TD	Thermodynamik
TM	technische Mechanik
U	innere Energie, Umdrehung
u, u_i	Spannung
ÜTF	Übertragungsfunktion

V	Volt
v, v_i	Geschwindigkeit
V, V_i	Volumen
$\dot{V}, \dot{V}_i$	Änderungsgeschwindigkeit eines Volumens
w	Sollwert, Führungsgröße allgemein
W	Watt
x	Regelgröße allgemein
x_i	Signal allgemein
y	Stellgröße
Z_i	Komplexer Widerstand, Störgröße
α	Durchflussbeiwert
α_i	Winkel, spezifischer Wärmeübergangswiderstand
β	Kompressibilitätsfaktor
δ	Luftspalthöhe
Δ	Differenz-
Φ	magnetischer Fluss
φ, φ_i	Winkel, Phasenwinkel
ϑ, ϑ_i	Temperatur allgemein
λ_i	spezifischer Wärmeleitwert
μ	Permeabilität, Mikro-
ν	kinematische Viskosität
π	= 3,14159 ...
ρ	Dichte
ω, ω_i	Winkelgeschwindigkeit, Kreisfrequenz

Indices

0	Null-, Bezugs-
a	Ausgangs-, abfließend
A	Anker, Arbeits-, Arbeitszylinder, Abschluss-, Antrieb
An	Anschlag, Antrieb
AP	Arbeitspunkt
B	Beschleunigung, Boden
Co	Coriolis
D	differenzierend, Differenz-, Drehantrieb, Druck-
DB	Druckluftbehälter
DQ	Druckquelle
Dr	Drossel-
e	Eigen-, Eingangs-
el	elektrisch
ers	Ersatz-
F	Feder
Fl	Flieh
G	Gas, Getriebe, Gewichts-

<i>g, gesp</i>	gespeichert
<i>ges</i>	gesamt
<i>h</i>	hydraulisch
<i>H</i>	Heizraum, Heizer, Hangabtriebs-
<i>i</i>	allgemeiner Index
<i>I</i>	Integrierend
<i>j</i>	allgemeiner Index
<i>k</i>	Kipp-
<i>K</i>	Kühler, Kompressionszylinder, Laufkatze, Kolben
<i>kin</i>	kinetisch
<i>Kreis</i>	Wirkungskreis
<i>L</i>	Lauf-, Luft-, Last-
<i>LW</i>	Luftwiderstand
<i>m</i>	Magnetisch, minus
<i>M</i>	Modell, Motor
<i>max</i>	maximal
<i>mech</i>	mechanisch
<i>min</i>	minimal
<i>mind</i>	Mindest-
<i>n</i>	allgemeiner Endindex
<i>N</i>	Nachlauf, Normal
<i>nenn</i>	Nenn-
<i>OPV</i>	Operationsverstärker
<i>p</i>	positiv
<i>P</i>	Proportional, Periode, Pumpe, Pendel, Propeller, Probe
<i>Per</i>	Periode
<i>pot</i>	potentiell
<i>pV</i>	Druck-Volumen-
<i>R</i>	Regler, Reibung, Regenerator, Radialantrieb
<i>Reg</i>	Regenerator
<i>S</i>	Strecke, Schwungscheibe, Schaumstoff, Schwerpunkt, Sensor, Seil, Stelleinrichtung
<i>St</i>	Steller
<i>U</i>	Ummantelung
<i>Umf</i>	Umfang
<i>V</i>	Verschiebung, Verdränger, Verschiebe-, Verstärker, Ventil
<i>W</i>	Wärme, Werkstück, Wege-
<i>y</i>	hydraulisch
<i>z</i>	zufließend
<i>Z</i>	Zahnriemenantrieb
<i>zu</i>	zugeführt

1 Einleitung

Die moderne Rechentechnik setzt den Entwickler neuer Technik und den Projekteur technischer Einrichtungen in die Lage, das statische und dynamische Verhalten eines technischen Systems oder ggf. auch seiner Komponenten vor seiner Realisierung zu „testen“. Er schafft ein mathematisches Modell, welches so auf einen Rechner gebracht wird, dass das Verhalten des Systems nachgeahmt, also simuliert, wird.

Das bedeutet, dass alle Zahlenwerte der enthaltenen Parameter vorliegen müssen, ob errechnet, gemessen oder auch abgeschätzt. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass der Schritt vom Modell zum Simulationssystem Fehlerquellen enthält, auf die an gegebener Stelle eingegangen wird.

Das Hauptproblem des Entwicklers oder des Projektors ist häufig: Wie wird *zielstrebig* das mathematische Modell vor allem des dynamischen Verhaltens eines relativ komplexen Systems ermittelt? Wie wird am besten an die Aufgabe herangegangen? Von Vorteil für den Leser dieses Buches ist, wenn er auf Grundlagenwissen vor allem in Technischer Mechanik und Elektrotechnik zurückgreifen kann. Aus der Höheren Mathematik sollten ihm die Differenzialgleichungen und die symbolische Methode bekannt sein. (In Abschn. 2.2.1 wird letztere anwendungsnahe beschrieben.)

Der Mathematiker stellt für die Beschreibung dynamischer Systeme das Werkzeug Differenzialgleichung zur Verfügung. Für lineare Systeme zusätzlich noch das Werkzeug Übertragungsfunktion. Aber es ist meist die Aufgabe eines Ingenieurs, aus vielen überschaubaren, oft einfachen, Zusammenhängen ein Gesamtmodell zu ermitteln. Nur in wenigen Fällen hat es jedoch die Form einer Gesamt-Differenzialgleichung oder einer Gesamt-Übertragungsfunktion, da dies nur für Systeme niedriger Ordnung sinnvoll ist. Das Endergebnis der Modellentwicklung wird in diesem Buch immer das Gesamt-Blockschaltbild sein. Die schon genannten Teil-Übertragungsfunktionen stehen in den Blöcken des Gesamt-Blockschaltbildes. In Abschnitt 2.1 wird dies ausführlich beschrieben.

Der Weg der Modellermittlung wird sich immer an einem Grundalgorithmus orientieren. Diese Systematik wird in Kap. 2 hergeleitet. An Hand dieser Systematik kann auch bei einem in der späteren Beispielsammlung nicht enthaltenen System zielstrebig ein mathematisches Modell entwickelt werden.

Ein Prinzip dieses Buches ist, dass mit relativ einfachen Beispielen begonnen (Kap. 3 bis 5) und später zu komplexeren Beispielsystemen übergegangen wird (ab Kap. 6). Dabei können oft bereits behandelte Systeme niedriger Ordnung zu Teilsystemen eines komplexen Beispielsystems werden.

In den letzten Jahren hat sich der Umfang jener Prozesse, die auf die beschriebene Weise zu analysieren sind, stark erhöht. Eine besondere Rolle spielen dabei die Regelungen, deren Anwendungshäufigkeit enorm zugenommen hat. Nur dann, wenn ein ausreichend genaues Modell des zu regelnden Prozesses, der so genann-

ten Regelstrecke, vorliegt, kann ein Regler ermittelt werden, der mit seiner Inbetriebnahme eine Regelung hoher Güte garantiert.

Auf den Begriff „ausreichend genaues Modell“ sei noch einmal eingegangen: Ein Modell soll immer so genau wie nötig sein und nicht so genau wie möglich. Sonst kann schnell die Übersichtlichkeit verloren gehen. An vielen Stellen dieses Buches wird auf diesen Grundsatz hingewiesen werden. Kriterium dafür, ob ein Modell ausreichend genau ist, muss immer das Verhalten des realen Systems sein. Auf Möglichkeiten des Verifizierens der Modelle wird an vielen Stellen des Buches eingegangen.

Es kann angemerkt werden, dass sehr viele Modelle technischer Systeme aus einer überschaubar großen Anzahl unterschiedlicher Bausteine bestehen.

Den größten Einfluss auf das *dynamische* Verhalten eines Systems hat die Gruppe der Energiespeicher.

Was bedeutet der Begriff „dynamisch“? Im Alltag bedeutet er, ausgehend vom griechischen Wort *dynamis* für Kraft, „eine innere Kraft besitzend“. Für die im Rahmen dieses Buches zu analysierenden Systeme kann definiert werden: „eine innere Energie besitzend“. Denn gerade infolge der Aufnahme, der Speicherung und der Abgabe von Energie entsteht dynamisches Verhalten, wie zwei Beispiele zeigen:

- Ein Topf mit Wasser benötigt Zeit zum Aufheizen und auch zum Abkühlen; er muss Wärmeenergie *peu a peu* aus der Umgebung aufnehmen oder an die Umgebung abgeben.
- Ein Automobil benötigt infolge der gespeicherten kinetischen Energie eine gewisse Zeit, um von einer bestimmten Geschwindigkeit zum Stillstand zu kommen.

Diese Beispiele ließen sich fortsetzen. Wer jetzt das Wort „unendlich“ erwartet hat, sollte aufmerken: In technischen Systemen existieren gar nicht so viele unterschiedliche Arten der Speicherung von Energie. Zu den genannten kommen vor allem die Speicherung von potentieller Energie (in Federn, in gehobenen Lasten, in zusammengedrückten Gasen und Flüssigkeiten) und die Speicherung von Energie in magnetischen und elektrischen Feldern hinzu.

In den Kapiteln mit den komplexeren Systemen werden immer wieder schon bekannte Modelle von Speichern und kleineren Teilsystemen aus früheren Kapiteln auftauchen, die lediglich untereinander vielfach und vielfältig (also komplex) verknüpft sind.

2 Methodik der Modellermittlung und Modellbehandlung

Das Buch soll den Leser in die Lage versetzen, das statische und dynamische Verhalten eines technischen Systems zu berechnen. Es können unterschiedlichste Erkenntnisse über das zu untersuchende System vorhanden sein:

- Ein Elektroantrieb ist vorhanden, sein Verhalten ist bereits experimentell untersucht worden. Er soll aber in eine Maschine eingebaut werden und eine zur Maschine gehörende große Masse beschleunigen und abbremsen. Er muss ein optimal angepasstes Getriebe bekommen. In Verbindung mit dieser Maschine entsteht ein ganz anderes Verhalten, das in verschiedenen Varianten vorausberechnet werden muss.
- Eine Hydraulikanlage mit vielen Antrieben, aber nur einer Druckquelle, muss so ausgelegt werden, dass keine Beeinflussung des einen Antriebs durch einen anderen trotz entstehender Druckwellen entstehen kann. Auch hier sind Vorausberechnungen unabdingbar, noch ehe ein Teilsystem realisiert ist.
- Ein Trockner für hitzeempfindliche Materialien muss schon im Vorfeld seiner Realisierung so ausgelegt sein, dass er hohe Trocknungsleistung mit schonender Behandlung des zu trocknenden Gutes verbindet. Die Optimierungsberechnungen werden auch hier meist in vielen Varianten durchgeführt, um der optimalen Variante schon vor dem Bau des Trockners möglichst nahe zu kommen.

Das sind alles Fragestellungen, die nur mit Hilfe einer Analyse des dynamischen Verhaltens dieser Systeme beantwortet werden können. Es gilt, Schwingungen zu beherrschen oder Übergangsvorgänge zu optimieren, und das in Systemen, in denen Wirkungen und Rückwirkungen zwischen mechanischen, elektrischen, fluidischen oder thermischen Komponenten entstehen.

Da alle diese Fragen i. Allg. vor der Realisierung des Systems geklärt sein müssen, sind entsprechende Vorausberechnungen zu tätigen. Um dies zu können, werden die entsprechenden *Bausteine* und natürlich auch gute *Werkzeuge* benötigt.

2.1 Bausteine der Modelle

Die Zahl unterschiedlicher Bausteine ist sehr groß, aber viele haben eine einfache Struktur.

- Relevante Bausteine sind z. B.:
 - das ohmsche Gesetz „Spannungsabfall = Widerstand mal Strom“,
 - „Federkraft = Federkonstante mal Federweg“,

- „Moment = Hebellänge mal Kraft“ oder
- „Kraft = Druck mal Fläche“.

Diese Bausteine sind sehr einfach, sie beschreiben alle ein lineares Verhalten (hier ein proportionales) zwischen zwei physikalischen Größen.

- Eine zentrale Funktion als Baustein spielen, wie schon in der Einleitung genannt, die Energiespeicher, wie Induktivität, Wärmekapazität („Wärmeenergie-zufuhr = Wärmekapazität mal Temperaturerhöhung“) oder eine bewegte Masse („kinetische Energie = Masse mal Quadrat ihrer Geschwindigkeit, geteilt durch zwei“). Auch ihr mathematisches Modell ist meist relativ einfach. Um die Speicher herum werden die Modelle aufgebaut.
- Viele Bausteine beschreiben nichtlineares Verhalten, z. B. das eines Anschlages oder das mehrfach nichtlineare Verhalten eines Gasvolumens.

Die mathematische Beschreibung von nicht allgemein bekannten Bausteinen (wie z. B. Elektromagnet oder Coulombsche Reibung) erfordert die Nutzung von Fachbüchern oder Fachartikeln. Relevante Bausteintypen werden in den folgenden Kapiteln ausführlich besprochen.

2.2 Werkzeuge

Die Anzahl der im Buch verwendeten *Werkzeug*-Arten ist nicht so hoch wie die der Bausteine. Verwendet werden meist drei: die Differenzialgleichung oder alternativ die Übertragungsfunktion, das Blockschaltbild oder alternativ der Signalflussgraf und der Rechner mit entsprechender Simulations-Software.

- Die Differenzialgleichung und die Übertragungsfunktion sind gleichwertige Werkzeuge, benötigt wird nur eines von beiden. In diesem Buch ist das die *Übertragungsfunktion*.
- Mit Hilfe eines Blockschaltbildes oder eines Signalflussgraphen werden die meist einfach strukturierten Bausteine zum oft komplex strukturierten Gesamtmodell verbunden. Das *Blockschaltbild* hat den Vorteil, dass vor allem Nichtlinearitäten transparenter dargestellt werden können, so dass auf den Signalflussgraphen verzichtet wird. Das Aussehen eines Blockschaltbildes kann mit einer bestückten Leiterplatte verglichen werden: Die Gatter sind die Bausteine und die Leitungszüge zwischen den Bausteinen sind die Signalpfeile, die physikalische Größen von ihrem Entstehungsort zu ihrem Wirkungs-Ort leiten. (Die Wirkungsweise ist jedoch eine ganz andere, da Signalpfeile richtungsorientiert sind, Leitungen aber Ströme in beide Richtungen fließen lassen.)
- Der Rechner mit der Simulations-Software für die *Simulation* des Modellverhaltens wird erst benötigt, wenn das Modell mit Hilfe der anderen Werkzeuge ermittelt ist.

Die Werkzeuge Übertragungsfunktion, Blockschaltbild und Simulation werden in den folgenden Abschnitten ausführlich behandelt.

2.2.1 Die Übertragungsfunktion

In diesem Buch werden vor allem die folgenden Arten von mathematischen Modellen angewendet:

- Übertragungsfunktionen (ÜTF) oder Übertragungsfaktoren der linear beschreibbaren Teile des Systems und
- Kennlinien, Kennlinienfelder und mathematische Funktionen statischer Nichtlinearitäten (s. ab Kap. 4).

Die Übertragungsfunktionen sind in den Bildbereich der Laplace-Transformation überführte Differenzialgleichungen. Der Weg der Hin- und Rücktransformation wird im Folgenden in gebotener Kürze gezeigt, um ein System sowohl im Originalbereich (als Differenzialgleichung) als auch im Bildbereich durchdenken zu können. Die Darstellung im Bildbereich, also die Beschreibung als ÜTF, hat vielfach den Vorteil, Modelle von linearen Teilsystemen, die aus mehreren Blöcken bestehen, sehr einfach berechnen zu können.

Die ÜTF entstehen, indem in den zugrunde liegenden Differenzialgleichungen (Dgl.) die Differenziationen nach der Zeit durch den Operator s ersetzt werden und diese Funktionen dann nach dem Quotienten Ausgangsgröße/Eingangsgröße aufgelöst werden. Dies ist die so genannte Symbolische Methode.

Symbolische Methode. Alle praktisch interessierenden Signale lassen sich als Exponentialsignal beschreiben. **LAPLACE** hat für diese Signale den Operator s eingeführt, so dass sie die Form $x = \hat{X} \cdot e^{s \cdot t}$ erhalten [2.4, 2.7, 2.8, 2.11, 2.13, 2.14, 2.15, 2.16, 2.16]. Dann gilt für die Ableitungen:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = \hat{X} \cdot s \cdot e^{s \cdot t} = s \cdot x, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = \hat{X} \cdot s^2 \cdot e^{s \cdot t} = s^2 \cdot x \text{ usw.}$$

Aus den Signalen fällt die Variable Zeit t heraus, dafür enthalten sie jetzt die Variable s , eine *komplexe Kreisfrequenz*.

Als Demonstrationsbeispiel wird ein Übertragungsglied mit differenzierendem Verhalten und Verzögerung 1. Ordnung (kurz: DT1-Glied) gewählt, wie es z.B. in vielen Reglern vorkommt. Aus der Differenzialgleichung

$$T \cdot \frac{dx_a}{dt} + x_a = K_D \cdot \frac{dx_e}{dt} \text{ bzw. } T \cdot \dot{x}_a + x_a = K_D \cdot \dot{x}_e$$

ergibt sich über

$$T \cdot s \cdot x_a + x_a = K_D \cdot s \cdot x_e$$

die Übertragungsfunktion $\frac{x_a}{x_e} = G(s) = \frac{K_D \cdot s}{1 + T \cdot s}.$

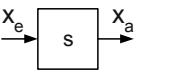
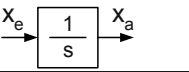
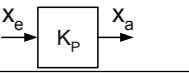
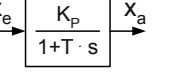
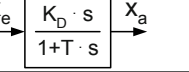
2.2.2 Das Blockschaltbild

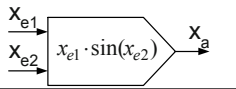
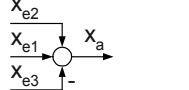
Wie wird aus den einzelnen Bausteinen das Gesamt-Modell des dynamischen Verhaltens eines größeren Systems ermittelt? Es muss eine Methode gefunden und angewendet werden, mit der

- die Erarbeitung des Modells sehr zielstrebig erfolgen kann,
- das Modell effizient auf seine Struktur und Vollständigkeit überprüft werden kann und
- das Modell einfach in ein geeignetes Simulationssystem überführt werden kann.

Diese Eigenschaften besitzt die sog. *Blockschaltbildmethode*: Das Gesamtmodell wird aus typischen Grundbeziehungen und Bilanzen zusammengesetzt und die Gesamtheit dieser Beziehungen in einem *Blockschaltbild*, bestehend aus *Übertragungsgliedern*, kurz *Blöcken*, und *Bilanzgleichungen* dargestellt. In die Tabelle 2.2 sind typische lineare Übertragungsglieder mit Kurznamen, Dgl., ÜTF und Blockdarstellung im Blockschaltbild sowie ein nichtlineares Übertragungsglied und eine Bilanz eingetragen.

Tabelle 2.2 Überführung einfacher mathematischer Funktionen in die Blockschaltbilddarstellung (Die Dgl. der Integralgl. $x_a = \int x_e \, dt$ entsteht durch Differenziation beider Seiten nach der Zeit.)

Name	Dgl.	ÜTF	Block mit Signalpfeilen
Differenziation (D-Glied)	$x_a = \dot{x}_e$	$\frac{x_a}{x_e} = s$	
Integration (I-Glied)	$\dot{x}_a = x_e$	$\frac{x_a}{x_e} = \frac{1}{s}$	
Übertragungsfaktor (P-Glied)	$x_a = K_P \cdot x_e$	$\frac{x_a}{x_e} = K_P$	
P-Glied m. Verz. 1. O. (PT1-Glied)	$T \cdot \dot{x}_a + x_a = K_P \cdot x_e$	$\frac{x_a}{x_e} = \frac{K_P}{1 + T \cdot s}$	
D-Glied m. Verz. 1. O. (DT1-Glied)	$T \cdot \dot{x}_a + x_a = K_D \cdot \dot{x}_e$	$\frac{x_a}{x_e} = \frac{K_D \cdot s}{1 + T \cdot s}$	

Name	Funktion	Block mit Signalpfeilen
Statische Nichtlinearität (Beispiel)	$x_a = x_{e1} \cdot \sin(x_{e2})$	
Bilanz (Addition, Subtraktion)	$x_a = x_{e1} + x_{e2} - x_{e3}$	

Anmerkungen:

- Die aus der Regelungstechnik bekannten Kürzel P, I und D stehen im gesamten Buch für proportionales, integrierendes und differenzierendes Verhalten, T1 und T2 für Verzögerungen 1. und 2. Ordnung.
- In komplexeren Systemen ist es übersichtlicher, wenn kleinere Blöcke zu einem Gesamtblock zusammengefasst werden. Das ist dann einfach, wenn in lineare Blöcke die Übertragungsfunktion eingetragen wird. Das gilt auch für die Übertragungsfunktion der Differenziation und der Integration.
- In vielen Systemen existieren Nichtlinearitäten. Diese nichtlinearen Blöcke werden als Fünfecke dargestellt und enthalten qualitative Kennlinien und Kennlinienfelder der tatsächlichen Funktion oder die mathematische Funktion selbst (s. ab Kap. 4). Sie haben immer nur eine Ausgangsgröße, können aber mehrere Eingangsgrößen besitzen, z. B. bei Kennlinienfeldern.

Ein einfaches Blockschaltbild, das diese Art von Blöcken und Bilanzen enthält, zeigt Abb. 2.1 a. Die Linearisierung der nichtlinearen Kennlinie wird hier dadurch erreicht, dass die Kennlinie im Bereich eines Arbeitspunktes durch die Tangente ersetzt wird (K_3 in Abb. 2.1 b, s. auch Kap. 3).

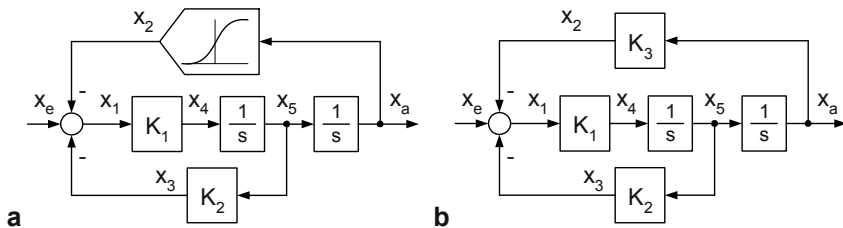


Abb. 2.1 Ein einfaches Blockschaltbild. **a** mit Nichtlinearität **b** Nichtlinearität an einem Arbeitspunkt linearisiert

Aus einem solchen Blockschaltbild können die Wirkungen und Rückwirkungen erkannt werden. Vor allem ist leicht zu kontrollieren, ob alle relevanten Zusammenhänge in dieses Modell eingeflossen sind. Denn außer x_e sind die Signale x_1 bis x_5 und x_a gleichzeitig Ausgangsgrößen aus Blöcken und Bilanzen und Eingangsgrößen in mindestens eine Bilanz oder einen Block. Aus Verzweigungspunkten ist zu erkennen, dass eine Ausgangsgröße Eingangsgröße in mehrere Blöcke ist (s. x_5).

In jedem linearen Block steckt der entsprechende Übertragungsfaktor (hier K_i) oder die *Übertragungsfunktion* (ÜTF) als Funktion von s . Enthält ein Blockschaltbild nur lineare Beziehungen, kann daraus die Übertragungsfunktion $G(s)$ manuell errechnet werden (darauf wird im Folgenden näher eingegangen):

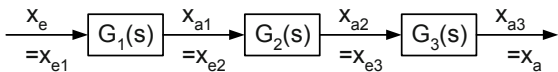
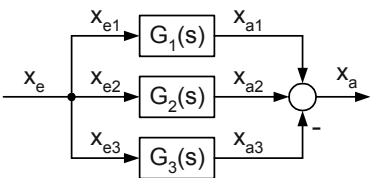
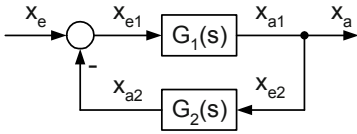
$$G(s) = \frac{x_a}{x_e} . \quad (2.1)$$

Die Zusammenschaltung von linearen Blöcken.

Die Verbindung von Blockschaltbild und Übertragungsfunktion als in einem Block stehendes Modell ist eine effiziente Basis für die Zusammenschaltung von mehreren linearen Blöcken zu einem größeren Block. Diese Zusammenschaltung kann so weit geführt werden, dass in wenigen Schritten die Gesamt-ÜTF eines linearen Systems ermittelt worden ist.

Die verschiedenartigsten Zusammenschaltungen der Übertragungsglieder können im Wesentlichen auf drei Grundarten zurückgeführt werden (s. Tabelle 2.3).

Tabelle 2.3 Grundarten von Zusammenschaltungen

Kettenschaltung von Blöcken: 	
Ansätze:	Allg. gilt:
$x_{ai}(s) = G_i(s) \cdot x_{ei}(s) \quad i = 1, 2, 3$	$\frac{x_a}{x_e} = \prod_{i=1}^n G_i(s)$
Endform: $x_a(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot G_3(s) \cdot x_e(s)$	
Parallel liegende Blöcke: 	
Ansätze:	Allg. gilt:
$x_{ai} = G_i(s) \cdot x_{ei} \quad i = 1, 2, 3$	$\frac{x_a}{x_e} = \sum_{i=1}^n G_i(s)$
$x_{e1} = x_{e2} = x_{e3} = x_e, \quad x_a = x_{a1} + x_{a2} - x_{a3}$	
Endform: $x_a = (G_1(s) + G_2(s) - G_3(s)) \cdot x_e$	
Blöcke im geschlossenen Wirkungskreis: 	
Ansätze:	Allg. gilt („Kreisformel“):
$x_{ai} = G_i(s) \cdot x_{ei} \quad i = 1, 2$	$\frac{x_a}{x_e} = \frac{G_{\text{vorwärts}}(s)}{1 + G_{\text{Kreis}}(s)}$
$x_{e1} = x_e - x_{a2}, \quad x_a = x_{e2} = x_{a1}$	Beachte: Rückwirkungen in naturwissenschaftlichen und technischen Systemen sind i. Allg. negativ.
Zwischenstufe: $x_a = G_1(s) \cdot (x_e - G_2(s) \cdot x_a)$	Deshalb ergibt sich im Nenner:
Endform: $x_a = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s)} \cdot x_e$	$1 + G_{\text{Kreis}}(s).$

Die allgemeine *Kreisformel*

$$\frac{x_a}{x_e} = \frac{G_{\text{vorwärts}}(s)}{1 + G_{\text{Kreis}}(s)}, \quad (2.2)$$

hat den großen Vorteil, dass für einen einfachen Wirkungskreis sofort der Ansatz für die Gesamt-ÜTF hingeschrieben werden kann.

In dem Beispiel in Abb. 2.1 b existieren zwei Rückwirkungen und damit auch zwei Wirkungskreise. Der Wirkungskreis aus zwei proportional wirkenden Übertragungsgliedern (P-Gliedern) mit den Übertragungsfaktoren K_1 und K_2 und dem integrierend wirkenden Übertragungsglied (I-Glied) mit der ÜTF $1/s$ kann sofort zu einem Block zusammengefasst werden.

Die Schritte der Ermittlung der Übertragungsfunktion $\frac{x_5}{x_e - x_2}$ sind:

- Ansatz (Kreisformel):

$$G^*(s) = \frac{x_5}{x_e - x_2} = \frac{G_{\text{vorwärts}}(s)}{1 + G_{\text{Kreis}}(s)} = \frac{K_1 \cdot \frac{1}{s}}{1 + K_1 \cdot K_2 \cdot \frac{1}{s}}.$$

- Beseitigung des Doppelbruches:

$$G^*(s) = \frac{x_5}{x_e - x_2} = \frac{K_1}{s + K_1 \cdot K_2}.$$

- Herstellen der Normalform:

$$G^*(s) = \frac{x_5}{x_e - x_2} = \frac{K_1}{K_1 \cdot K_2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{K_1 \cdot K_2} \cdot s} = \frac{1}{K_2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{K_1 \cdot K_2} \cdot s} = \frac{K^*}{1 + T^* \cdot s}.$$

Der Vergleich mit den Übertragungsgliedern in Tabelle 2.2 zeigt: Es entsteht ein proportional wirkendes Übertragungsglied mit Verzögerung 1. Ordnung (PT1-Glied). Das nun einfachere Blockschaltbild hat das Aussehen in Abb. 2.2.

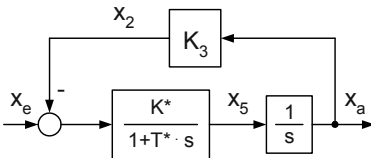


Abb. 2.2 Vereinfachtes Blockschaltbild des Beispielsystems in Abb. 2.1 b

Die Schritte der Ermittlung der Gesamt-Übertragungsfunktion $\frac{x_a}{x_e}$ sind:

- Ansatz (Kreisformel):

$$G(s) = \frac{x_a}{x_e} = \frac{G_{\text{vorwärts}}(s)}{1 + G_{\text{Kreis}}(s)} = \frac{\frac{K^*}{1 + T^* \cdot s} \cdot \frac{1}{s}}{1 + \frac{K^*}{1 + T^* \cdot s} \cdot K_3 \cdot \frac{1}{s}}.$$

- Beseitigung des Doppelbruches, Einsetzen der ursprünglichen Parameter in $G^*(s)$, Ausmultiplizieren und Sortieren:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{x_a}{x_e} = \frac{K^*}{s \cdot (1 + T^* \cdot s) + K^* \cdot K_3} \\ &= \frac{\frac{1}{K_2}}{s \cdot \left(1 + \frac{1}{K_1 \cdot K_2} \cdot s\right) + \frac{1}{K_2} \cdot K_3} = \frac{\frac{1}{K_2}}{\frac{1}{K_2} K_3 + 1 + \frac{K_2}{K_3} \cdot s + \frac{K_2}{K_3} \cdot \frac{1}{K_1 \cdot K_2} \cdot s^2}. \end{aligned}$$

- Herstellen der Normalform:

$$G(s) = \frac{x_a}{x_e} = \frac{1}{K_3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K_2}{K_3} \cdot s + \frac{1}{K_1 \cdot K_3} \cdot s^2}.$$

Es ist zu erkennen, dass der Rechenaufwand relativ groß ist, bis die Normalform ermittelt ist (Kennzeichen: das absolute Glied im Nenner der Gesamt-ÜTF ist gleich eins). Aber das Ergebnis ist einfach zu interpretieren. Als Gesamt-Modell dieses linearisierten Beispielsystems ergibt sich ein proportional wirkendes Übertragungsglied mit Verzögerung 2. Ordnung, ein PT2-Glied.

$$G(s) = \frac{x_a}{x_e} = K_P \cdot \frac{1}{1 + 2DT \cdot s + T^2 \cdot s^2}. \quad (2.3)$$

Die Parameter sind der proportionale Übertragungsfaktor K_P , die Eigenzeitkonstante T (sie ist umgekehrt proportional der Eigenkreisfrequenz ω_e) und der Dämpfung D . Dieses PT2-Verhalten mit der allgemeinen ÜTF nach Gl. (2.3) wird in vielen Beispielen eine Rolle spielen.

Die bisher vorgestellte Variante des Nacheinander-Auflösens von Wirkungskreisen ist meist nicht sehr effizient. Schneller wird das Ziel erreicht, wenn das Blockschaltbild so umgeformt wird, dass die Rückwirkungen parallel zu einander

liegen. Dann können ihre ÜTF addiert werden (s. Parallelschaltung in Tabelle 2.3). Eine Variante dieser Umformung des Blockschaltbildes zeigt Abb. 2.3.

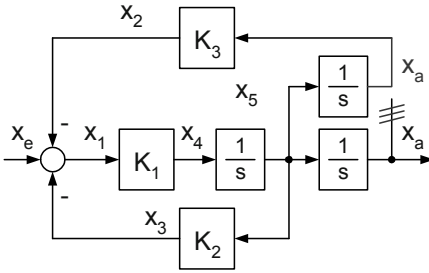


Abb. 2.3 Modifiziertes Blockschaltbild aus Abb. 2.1 b

Die allgemeinen Schritte der Ermittlung der Gesamt-Übertragungsfunktion sind jetzt:

- Ansatz (Kreisformel):

$$G(s) = \frac{x_a}{x_e} = \frac{G_{\text{vorwärts}}(s)}{1 + G_{\text{Kreis}}(s)} = \frac{K_1 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s}}{1 + K_1 \cdot \frac{1}{s} \cdot \left(K_2 + K_3 \cdot \frac{1}{s} \right)}$$

- Beseitigung des Doppelbruches, Ausmultiplizieren und Sortieren:

$$G(s) = \frac{K_1}{s^2 + K_1 \cdot (K_2 \cdot s + K_3)} = \frac{K_1}{K_1 \cdot K_3 + K_1 \cdot K_2 \cdot s + s^2}$$

- Herstellen der Normalform:

$$G(s) = \frac{x_a}{x_e} = \frac{\frac{1}{K_3}}{1 + \frac{K_2}{K_3} \cdot s + \frac{1}{K_1 \cdot K_3} \cdot s^2}$$

Die Berechnung der Gesamt-ÜTF führt auf diese Weise schneller zum Ziel.

Ab Kap. 3 werden oft Systeme mit mehreren Eingangsgrößen modelliert. Sind diese Systeme linear, kann die Kreisformel ebenfalls angewendet werden, da in diesem Fall das Gesetz der ungestörten Überlagerung gilt.

Es sei hier angemerkt, dass auch Übertragungsfunktionen höherer Ordnung bei Bedarf als Block dargestellt werden können und dass die bekannten Simulationssysteme auch für diese Übertragungsfunktionen entsprechende Komponenten zur Verfügung stellen.

2.2.3 Die Simulation

Die meisten Modelle relevanter Systeme sind so groß und komplex, dass sie nur mit Mühe und meist auch ungenau manuell analysiert werden können, oder sie enthalten Nichtlinearitäten, die diesen Weg von vornherein ausschließen. Seit vielen Jahren besteht die Möglichkeit, diese Systeme mit Hilfe der rechenstechnischen Simulation zu untersuchen, früher auf so genannten Analogrechnern, später auf digitalen Großrechnern, jetzt vor allem auf PC.

Es existiert heute vielfältige Simulationssoftware. Die Werkzeuge sind teilweise für einzelne Fachgebiete spezialisiert oder so aufbereitet, dass der Nutzer einen Schaltplan einer elektrischen Schaltung oder den Funktionsschaltplan einer Hydraulikanlage eingeben kann und die Software daraus im Hintergrund das mathematische Modell erstellt. Beispiele sind ITI-SIM, MODELICA oder SIMPLORER [2.1, 2.2, 2.5, 2.6, 2.10, 2.11, 2.12, 2.19].

Das vorliegende Buch soll dem Ingenieur helfen, das Modell des interessierenden Systems selbst zu erarbeiten. Dann kann er Simulationssoftware wie MATLAB/SIMULINK oder WinFACT/BORIS anwenden, die es gestatten, die ermittelten Blockschaltbilder fast unverändert zu übernehmen [2.3, 2.9, 2.15, 2.19]. Es liegt im Ermessen des Ingenieurs, welchem der Simulationssysteme er den Vorzug gibt. Die ermittelten Verhaltensweisen der Beispielsysteme können mit jedem der geeigneten Simulationssysteme nachgerechnet werden.

In diesem Buch wurde vor allem das blockorientierte Simulationssystem **BORIS** angewendet, die Hauptkomponente des Systems WinFACT. Das dem Blockschaltbild in Abb. 2.1 a entsprechende Simulationsmodell (Benutzeroberfläche) hat das Aussehen in Abb. 2.4.

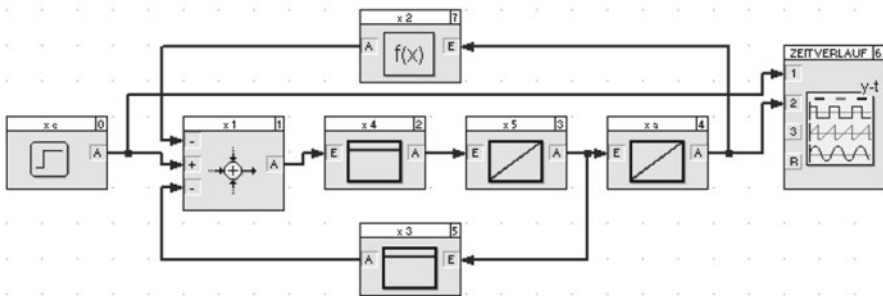


Abb. 2.4 Das mit BORIS aus dem Blockschaltbild in Abb. 2.1 a erstellte Simulations-Blockschaltbild

Der Name eines Blockes wurde seinem Ausgangssignal entsprechend gewählt, die Kurven in den linearen Blöcken stellen die qualitativen Sprungantworten dar; der Block mit dem Ausgangssignal x_2 ist frei programmierbar.

Die Blöcke können mit Hilfe eines Doppelklicks der Maus parametrisiert werden, es werden die Werte der im entsprechenden Block stehenden Parameter eingegeben. Hinzugekommen sind ein Funktionsgenerator zur Generierung der Eingangsgröße x_e und ein Zeitverlaufsglied, um den Zeitverlauf von interessierenden Signalen wie x_e oder x_a zu dokumentieren.

Auf diese Kurven wird erst bei der Berechnung konkreter Beispiele eingegangen.

2.3 Systematik der Modellermittlung

Um für ein größeres System ein adäquates mathematisches Modell zu ermitteln, ist ein systematisches Herangehen erforderlich. Grundsätzliche Schritte sollten sein:

- Zerlegung des Gesamtsystems in überschaubare Teilsysteme,
- Modellermittlung zunächst für die Teilsysteme und (zum Schluss)
- Zusammenfassung dieser Modelle zum Gesamtmodell.

Eine Werkzeugmaschine z. B. besitzt mehrere Antriebsstränge. Jeder Antriebsstrang besitzt mehrere Komponenten, z. B. Motor (elektrisch, elektro-hydraulisch), Getriebe, bewegtes Werkstück oder Werkzeug, Regler usw. Jede Komponente besitzt Verzögerungseinflüsse in Form von Energiespeichern, die bei Übergangsvorgängen aufgeladen bzw. entladen werden.

Noch komplexer ist ein Kraftfahrzeug, da es ein Mehrmassensystem mit sehr vielen Freiheitsgraden und vielen Energiespeichern ist. Moderne Kraftfahrzeuge besitzen viele Regelungen, z. B. Motormanagement, ABS, ESP (auf die hier nicht im Detail eingegangen wird). Ihre Stellbewegungen werden ebenfalls mit elektromotorischen oder elektro-hydraulischen Stellantrieben realisiert.

Es sei angemerkt, dass es relativ wenige Arten von Energiespeichern in technischen Systemen gibt. Die wichtigsten dieser Energiespeicher treten auf in den vier Bereichen Elektrotechnik, Technische Mechanik, Fluidtechnik und Thermodynamik:

- die Magnetfelder (z. B. von Spulen) und die elektrischen Felder (z. B. von Kondensatoren) in der *Elektrotechnik* (ET),
- die Federn und die Massen in der *Technischen Mechanik* (TM),
- die unter Druck stehenden Fluide in der *Fluidtechnik* (FT),
- die Wärmespeicher in der *Thermodynamik* (TD).

Es sei darauf hingewiesen, dass komplexere Systeme meist aus Komponenten mehrerer dieser Bereiche bestehen, weshalb die in diesem Buch beschriebenen

Beispielsysteme oft mehreren Bereichen zugeordnet werden müssen. Darauf wird in Abschn. 2.4 ausführlicher eingegangen.

In den Modellen des dynamischen Verhaltens von technischen Systemen haben die Speicher eine zentrale Bedeutung: Die sie kennzeichnenden Signale können sich nicht sprunghaft ändern, sie sind so genannte *Zustandsgrößen*.

In Tabelle 2.4 sind typische Speicher in technischen Systemen und ihre Zustandsgrößen zusammengefasst.

Auf unter Druck stehende Gasvolumina wird erst in Kap. 6 eingegangen. In ihnen gelten komplizierte nichtlineare mathematische Zusammenhänge der Thermodynamik.

Auf die mathematischen Funktionen der letzten Spalte in Tabelle 2.4 wird ab Kap. 3 noch ausführlich eingegangen: Die Zustandsgröße ist immer proportional dem Integral über eine typische Eingangsgröße. Diese allgemeinen Integralgleichungen können durch adäquate Differenzialgleichungen ersetzt werden, z. B.

$$i_L = \frac{1}{L} \cdot \int u_L dt \quad \text{durch} \quad \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} \cdot u_L .$$

Die in diesem Buch fast ausschließlich verwendete Form ist jedoch die gemäß den Tabellen 2.1 und 2.2 (s. Abschn. 2.2):

$$i_L = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{s} \cdot u_L = \frac{1}{L \cdot s} \cdot u_L .$$

Dass es sich hier um Signale im Bildbereich handelt, wird i. Allg. nicht speziell dargestellt. Das geht aus der Form der Funktion, hier der Übertragungsfunktion, hervor.

Bei der Modellierung des dynamischen Verhaltens technischer Systeme sollten zuerst die relevanten Energiespeicher ermittelt werden. Um diese herum wird dann das Gesamtmodell entwickelt.

Tabelle 2.4 In der Technik relevante Energiespeicher und ihre Zustandsgrößen

Prozess	Energieart	Typischer Speicher	Zustandsgröße	Energie-Wert	Funktionen der Zustandsgrößen
Elektrisch	Magnet. Feldenergie	Induktivität L einer Spule	Strom i	$\frac{L}{2} \cdot i^2$	$i_L = \frac{1}{L} \cdot \int u_L dt$ $u_L \dots$ Spanng.-Abfall über L
	Elektr. Feldenergie	Kapazität C eines Kondensators	Spannung u	$\frac{C}{2} \cdot u^2$	$u_C = \frac{1}{C} \cdot \int i_C dt$ $i_C \dots$ Strom zur Kapazität
Mechanisch (translatorisch)	Potentielle Energie	Federkonstante c einer Zylinderfeder	Weg s *)	$\frac{c}{2} \cdot s^2$	$s = \int v dt$ $v \dots$ Geschwindigkeit
	Kinetische Energie	Masse m	Geschw. v	$\frac{m}{2} \cdot v^2$	$v = \frac{1}{m} \cdot \int F_B dt$ $F_B \dots$ Beschleunigungskraft
Mechanisch (rotatorisch)	Potentielle Energie	Federkonstante c_T einer Torsionsfeder	Winkel φ	$\frac{c_T}{2} \cdot \varphi^2$	$\varphi = \int \omega dt$ $\omega \dots$ Winkelgeschwind.
	Kinetische Energie	Massenträgheitsmoment J eines Rotors	Winkelgeschw. ω	$\frac{J}{2} \cdot \omega^2$	$\omega = \frac{1}{J} \cdot \int M_B dt$ $M_B \dots$ Beschl.-Moment
Fluidisch	Druck-Volumen-Energie	Kapazität C_y eines abgeschloss. Flüssigkeitsvolumens	Druck p	$\frac{C_y}{2} \cdot p^2$	$p = \frac{1}{C_y} \cdot \int Q_{gesp} dt$ $Q_{gesp} \dots$ gesp. Volumenstrom
		Volumen $V = h \cdot A$ eines offenen Flüssigkeitsbehälters		$\frac{A}{2\rho g} \cdot p^2$	$p = \frac{\rho \cdot g}{A} \cdot \int Q_{gesp} dt$ $\rho \dots$ Dichte $g \dots$ Erdbeschleunigung $A \dots$ Behälterfläche $h \dots$ Füllstandshöhe
Thermodynamisch	Wärmeenergie	Wärmekapazität C_W eines Körpers	Temperatur ϑ	$\frac{C_W}{2} \cdot \vartheta^2$	$\vartheta = \frac{1}{C_W} \cdot \int P_{Wgesp} dt$ $P_{Wgesp} \dots$ gesp. Wärmeleistung

*) Verwechslungen des Kürzels s für Weg oder Sekunde mit dem Operator s bzw. der komplexen Kreisfrequenz s können nicht entstehen, da der Weg immer eine Ein- oder Ausgangsgröße, also ein Signal ist, die Sekunde nur in der Dimension einer physikalischen Größe auftauchen kann und der Operator s ausschließlich in Übertragungsfunktionen vorkommt.

Der *Algorithmus* der Modellermittlung sollte sein:

- 1. Schritt:** Zeichnen eines aussagekräftigen *Schemas*, das alle wesentlichen Signale und Koeffizienten des zu modellierenden Systems enthält,
- 2. Schritt:** Ermittlung der *Energiespeicher mit ihren Zustandsgrößen* und deren Funktion (die immer eine Integration ist!),
- 3. Schritt:** Ermittlung der geltenden *Bilanzgleichungen*,
- 4. Schritt:** Ermittlung der noch fehlenden Zusammenhänge aus *statischen Grundbeziehungen*,
- 5. Schritt:** Darstellung aller Beziehungen als **Blockschaltbild**.
(In den meisten Fällen kann dieses Blockschaltbild durch Zusammenfassen kleiner Blöcke zu einem etwas größeren Block vereinfacht werden.)

Die Beispiel-Systeme ab Kap. 3 werden in diesen Schritten analysiert, wobei der 2. und 3. Schritt oft sehr eng verknüpft sind. Das wird in diesen Kapiteln näher beschrieben. Außerdem sind die in Tabelle 2.4 aufgeführten und in der Technik relevanten Energiespeicher in Verbindung mit ihren Bilanzgleichungen so aufbereitet und in den **Anhang A** übernommen worden, dass der entsprechende Blockschaltbild-Teil in ein gesuchtes Blockschaltbild fast unverändert übernommen werden kann.

Auch in Modellen häufig vorkommende statische Grundbeziehungen (lineare und nichtlineare) werden in **Anhang A** aufgelistet, nachdem sie in den entsprechenden Kapiteln näher beschrieben worden sind.

2.4 Die Modellbehandlung

Das Prinzip dieses Buches ist: Beginn mit der Behandlung einfacher Systeme und später Übergang zu komplexeren Beispielsystemen. Dabei können oft bereits behandelte Systeme niedriger Ordnung zu Teilsystemen eines komplexen Beispielsystems werden.

In Tabelle 2.5 sind die in den folgenden Kapiteln behandelten Beispiel-Systeme zusammengestellt. Aus dieser Zusammenstellung ist zu erkennen:

- Welchen Bereichen (*Elektrotechnik* (ET), *Technische Mechanik* (TM), *Fluidtechnik* (FT), *Thermodynamik* (TM)) sind die Energiespeicher der Beispiel-Systeme zuzuordnen? Je unterschiedlicher die Energiespeicher sind, desto komplexer ist meist das System.
- Auf welche Weise wird das Modell behandelt? Ausgehend von der Komplexität des gefundenen Modells werden unterschiedliche Wege der Ermittlung seines Verhaltens gegangen.

Tabelle 2.5 Die Beispielsysteme des Buches

Kap.	Abschn.	ET	TM	FT	TD	Modell	
						Art	Behandlung
3	3.1 Elektrischer Reihenschwingkreis	X				linear	ÜTF 2. O.
	3.2 Feder-Masse-System		X			linear	ÜTF 2. O.
	3.3 Permanentmagnetregter Gleichstrommotor	X	X			linear	ÜTF 2. O.
	3.4 Einfacher Hydraulikantrieb		X	X		linear	ÜTF 2. O.
	3.5 Heizplatte				X	linear	ÜTF 2. O.
	3.6 Zwei verbundene offene Flüssigkeitsbehälter			X		linear	ÜTF 2. O.
4	4.1 Feder-Masse-Systeme mit Nichtlinearitäten		X			nichtlin.	Simulation
	4.2 Elektromagnetregter Drehschwinger	X	X			nichtlin.	Simulation
	4.3 Hydraulikantrieb mit typischen nichtlinearen ... Charakteristika		X	X		nichtlin.	Simulation
	4.4 Drehfeldmotoren	X	X				
5	5.2 Nicht invertierender Verstärker	X				linear	Stat. Fkt.
	5.3 Differenzverstärker	X				linear	Simulation
	5.4 Tiefpass	X				linear	ÜTF 1. O.
	5.5 Astabiler Multivibrator	X				nichtlin.	Simulation
	5.6 Wien-Oszillator	X				nichtlin.	ÜTF 2. O.
6	6.3 Druckflüssigkeitsspeicher			X	X	nichtlin.	Simulation
	6.4 Arbeitszylinder der Pneumatik		X	X	X	nichtlin.	Simulation
	6.5 Stirlingmotor mit Verdränger		X	X	X	nichtlin.	Simulation
	6.6 Stirlingmotor mit Arbeitszylinder und Kompressionszylinder		X	X	X	nichtlin.	Simulation
	6.7 Zweitakt-Ottomotor		X		X	nichtlin.	Simulation
7	7.1 Wanderwellen in elektrischen Leitungen	X				linear	Simulation
	7.2 Wanderwellen in Flüssigkeitsleitungen		(X)	X		linear	Simulation
8	8.1 Stehendes Pendel	X	X			nichtlin.	Simulation
	8.2 Lageeregelter elektrohydraulischer Antrieb mit Vierkantensteuerung	X	X	X		nichtlin.	Simulation
	8.3 Bahnregelung eines ... Rundtisches	X	X	X		nichtlin.	Simulation
	8.4 Steuerung eines Luftschiffes	X	X			nichtlin.	Simulation
	8.5 Temperaturregelung eines Trockenschrankes	X	X		X	nichtlin.	Simulation
	8.6 Mooringregelung	X	X	X		nichtlin.	Simulation

Einfache lineare Modelle 1. oder 2. Ordnung werden meist geschlossen gelöst. Auf der Basis der Gesamt-ÜTF (ggf. auch der Gesamt-Differenzialgleichung) können interessierende Zeitverläufe der Signale mit Hilfe der in **Anhang B** zusammengestellten oder der in der einschlägigen Literatur ausführlich beschriebenen Lösungsansätze berechnet werden [2.4, 2.7, 2.8, 2.11, 2.13, 2.14, 2.15, 2.16, 2.17, 2.18]. Auf eine Simulation kann deshalb i. Allg. verzichtet werden.

Diese Herangehensweise wird in Kap. 3 ausschließlich gewählt, da dort alle Modelle linear und 2. Ordnung sind. Damit kann im Kap. 3 die Nennerfunktion $N(s)$ der Gesamt-ÜTF immer in die Form

$$N(s) = 1 + 2DT \cdot s + T^2 \cdot s^2. \quad (2.4)$$

gebracht werden. Darauf wird in Kap. 3 näher eingegangen.

Sind die Modelle nichtlinear oder linear, aber höherer als 2. Ordnung, ist die Modellbehandlung mit Hilfe der Simulation angezeigt. Dies trifft für fast alle Systeme ab Kap. 4 zu. Dabei können vielfältige Fehler sowohl bei der Überführung des Blockschaltbildes in das Simulations-Blockschaltbild als auch bei der Eintragung der Simulationsparameter auftreten:

- Strukturfehler, wobei die Unterscheidung der Symbole der linearen Übertragungsglieder und Summationen beider Blockschaltbilder keine Schwierigkeiten bereiten sollte,
- falsche Dezimaltrenner (Komma, Punkt) oder falsch gewählte Dimensionen der Parameter, was zu Fehlern der eingegebenen Werte führt,
- vergessene Parametrierung der Blöcke,
- zu groß gewählte Simulationsschrittweite usw.

Das zwingt dazu, eine Verifikation des aufgestellten Simulationsmodells durchzuführen. Grobe Eingabefehler sind meist schon bei einem einfachen Plausibilitätstest erkennbar. Existiert das System bereits und es werden mit Hilfe der Simulation geplante Veränderungen untersucht, können gemessene Verhaltensweisen zum Vergleich herangezogen werden. Oft müssen die ermittelten Verläufe auf der Basis von Abschätzungen überprüft werden, damit vor allem Eingabefehler der Parameter erkannt und korrigiert werden können.

Bei komplexeren linearisierbaren technischen Systemen wird bei der Verifikation oft einer der beiden folgenden Wege gegangen (z. B. Abschn. 4.1.3):

1. Durch Nullsetzen geeigneter Parameter entsteht ein Modell niedrigerer Ordnung. Dessen Verhalten kann mit dem zu untersuchenden Modell verglichen werden, in welchem diese Parameter ausreichend klein gewählt worden sind.
2. Ist dieses vereinfachte Modell linear, kann die Gesamt-ÜTF analog Abschn. 2.1.3 ermittelt werden. Sie wird dann ebenfalls simuliert und das Verhalten mit dem des modifizierten Ausgangsmodells verglichen.

Das Kap. 8 ist der Behandlung verschiedener Regelungen gewidmet. Die Realisierung und Optimierung von Regelkreisen verlangt eine exakte Analyse des zu re-

gelnden Prozesses, der sog. Regelstrecke. Nur dann, wenn ein ausreichend genaues Modell des dynamischen Verhaltens einer Regelstrecke vorliegt, kann zielstrebig ein Regler passender Struktur gefunden und optimal dimensioniert werden, sei es auf der Basis einer Strecken-ÜTF oder eines Simulationsmodells der Strecke. Dem Charakter des Buches entsprechend wird dieser Modellbildung der Strecke ein größerer Raum eingeräumt als der Ermittlung des geeigneten Reglers.

Ergänzende Anmerkung:

Im Rahmen dieses Buches werden ausschließlich *konzentrierte Parameter* zur Beschreibung von Widerständen und Kapazitäten oder Massen und Federn benutzt. Wenn dies zu Fehlern führt, da z. B. in einer Übertragungsleitung die kontinuierliche Verteilung von Kapazitäten und Induktivitäten berücksichtigt werden muss, wird diese Leitung in so viele Abschnitte zerlegt, dass das Verhalten des Gesamtmodells dem des Kontinuums ausreichend nahe kommt. Die Modelle der einzelnen Abschnitte werden wiederum mit konzentrierten Parametern beschrieben (s. Kap. 7).

Sind die Kontinua über Flächen oder Volumina verteilt, führt dieser Ansatz zu sehr großen Modellen und langen Rechenzeiten. Die Alternative ist die Beschreibung eines solchen Systems mit partiellen Differenzialgleichungen, deren Ermittlung über den Rahmen dieses Buches hinausgeht. Gelöst werden diese Dgl. meist der auf der Basis der Finite-Elemente-Methode m. H. spezieller Software.

2.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel werden die Bausteine der zu erarbeitenden Modelle beschrieben, z. B. die mathematische Funktion von Energiespeichern oder Nichtlinearitäten. Die im Buch verwendeten Werkzeuge werden vorgestellt. Es sind vor allem das Blockschaltbild, das alle Übertragungsfunktionen, Übertragungsfaktoren, nichtlinearen Funktionen und Bilanzen des Gesamtmodells enthält, und die Simulation.

Die Bereiche, aus denen die in Tabelle 2.5 zusammengefassten Beispiel-Systeme des Buches stammen, sind die Elektrotechnik, die Technische Mechanik, die Fluidtechnik und die Thermodynamik.

3 Lineare Modelle technischer Systeme mit Verzögerung 2. Ordnung

In diesem Kapitel werden Systeme analysiert, die zwei relevante Energiespeicher besitzen und die mit Hilfe von linearen Grundbeziehungen zwischen ihren Signalen beschrieben werden können. Bei der Modellbildung werden immer die in Abschn. 2.3 hergeleiteten fünf Schritte bis zum Blockschaltbild gegangen.

Zur Linearität:

Die lineare Beschreibung der Beziehungen innerhalb eines Systems ist in den meisten Fällen eine Näherung:

- Ohmsche Widerstände sind temperaturabhängig.
- Reibkräfte sind nur näherungsweise geschwindigkeitsproportional.
- Federkräfte sind in der Nähe ihrer Grenzbelastungen nicht mehr wegproportional.
- Der Wärmedurchgang durch Trennwände hängt von vielen komplex wirkenden Größen ab.

Können die Linearisierungsfehler klein gehalten werden, und das ist in typischen Arbeitsbereichen oft möglich, entstehen die in diesem Kapitel behandelten linearen Modelle. Sie lassen sich mathematisch besonders bequem handhaben.

In Abschn. 3.4.1 wird als Beispiel die Abhängigkeit eines Zylindervolumens vom Weg eines Arbeitskolbens beschrieben: Die Annahme eines konstanten Zylindervolumens ist dann erlaubt, wenn sich die Position des Arbeitskolbens nur wenig von einem Arbeitspunkt wegbewegt.

Die Linearisierung eines mehrfach nichtlinearen elektrohydraulischen Antriebs wird in Abschn. 8.3.2 ausführlich beschrieben.

Die häufigste Form der Linearisierung einer „krummen“ Kennlinie oder einer nichtlinearen Funktion $x_a = f(x_e)$ ist das Ersetzen der Kennlinie bzw. der Funktion durch die Tangente in einem typischen Arbeitspunkt AP des Systems. Die allgemeine Funktion für diese Tangente, $x_{aTang} = f(x_e)$, lautet [3.1]

$$x_{aTang} = f(x_{eAP}) + \left. \frac{dx_a}{dx_e} \right|_{x_{eAP}} \cdot (x_e - x_{eAP}). \quad (3.1 a)$$

In Abschn. 3.5.1 wird eine elektrische Leistung in ein thermodynamisches System eingebracht und wird dort zu einer Eingangs-Wärmeleistung P_e . Sie entsteht durch das Anlegen einer elektrischen Spannung u_e an eine Heizspirale mit dem ohmschen Widerstand R . Zwischen u_e und P_e besteht ein nichtlinearer Zusammenhang,

die Funktion lautet $P_e = u_e^2 / R$. Die Linearisierung wird in Abschn. 3.5.1 durchgeführt.

Die Ordnung der Modelle:

Die ermittelten Modelle sind in diesem Kapitel immer 2. Ordnung und (wie ihre Grundbeziehungen) linear und können geschlossen gelöst werden. Auf Simulationen kann also zunächst verzichtet werden.

Um eine geschlossene Lösung einfach zu ermöglichen, werden immer die Gesamt-Übertragungsfunktionen dieser Modelle ermittelt. Die Nennerfunktion $N(s)$ wird in den Modellen dieses Kapitels, die alle eine Verzögerung 2. Ordnung besitzen, jeweils in die Form gebracht:

$$N(s) = 1 + 2DT \cdot s + T^2 \cdot s^2. \quad (3.1 \text{ b})$$

Damit kann das dynamische Verhalten jedes dieser Modelle mit Hilfe der Kenngrößen Eigenzeitkonstante T sowie Dämpfung D beschrieben werden. (In Abschn. 2.2.2 ist dies an Hand eines Beispiels demonstriert worden.)

Aus dem Wert der Dämpfung D ist zu erkennen, ob ein System schwingungsfähig ist. Dann sind spezielle Lösungsansätze für Sprungantworten erforderlich. In **Anhang B** sind Lösungsansätze für Sprungantworten für den praktisch relevanten Wertebereich von D zu finden (genutzt z. B. in Abschn. 3.1.2).

Es sei angemerkt, dass viele der in Kap. 3 ermittelten Modelle in den später behandelten komplexeren Systemen Teilmodelle sein werden und dort oft fast un geändert verwendet werden können.

3.1 Elektrischer Reihenschwingkreis

Werden die Energiespeicher Kondensator und Spule zusammengeschaltet, kann es zum periodischen Austausch dieser Energien kommen und damit zu Schwingungen von Spannungen und Strömen. In einem Reihenschwingkreis sind die beiden Speicher in Reihe geschaltet.

3.1.1 Erarbeitung Blockschaltbild

Der 1. Schritt:

Es ist das Schema des Reihenschwingkreises mit allen relevanten Parametern und Signalen zu zeichnen (Abb. 3.1).

Dabei ist berücksichtigt, dass eine Spule neben der Induktivität L auch einen ohmschen Widerstand (R_1) besitzt und dass in einem Kondensator mit der Kapazität C zwischen den Elektroden ein Strom i_{R2} entstehen kann.

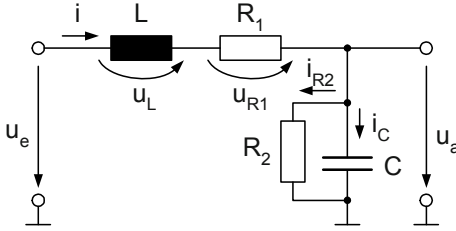


Abb. 3.1 Schema eines elektrischen Reihenschwingkreises

Der 2. Schritt:

Die Speicher sind die Induktivität L und die Kapazität C (s. Tabelle 2.4).

Die Funktionen

$$i = \frac{1}{L} \cdot \int u_L dt \quad \text{und} \quad u_a = \frac{1}{C} \cdot \int i_C dt$$

lauten, nachdem sie in den Bildbereich transformiert worden sind (s. Abschn. 2.1.2)

$$i = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{s} \cdot u_L = \frac{1}{L \cdot s} \cdot u_L, \quad (3.2 a)$$

$$u_a = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{s} \cdot i_C = \frac{1}{C \cdot s} \cdot i_C. \quad (3.2 b)$$

Der 3. Schritt:

Die beiden Eingangsgrößen der Funktionen können aus Bilanzgleichungen ermittelt werden. Für u_L ist der Maschensatz („Summe aller angelegten Spannungen = Summe aller Spannungsabfälle“) anzuwenden und nach u_L aufzulösen:

$$u_L = u_e - u_{R1} - u_a. \quad (3.2 c)$$

Für i_C gilt der Knotenpunktsatz („Summe aller zufließenden Ströme = Summe aller abfließenden Ströme“), aufgelöst nach i_C ergibt sich:

$$i_C = i - i_{R2}. \quad (3.2 c)$$

Die Beziehungen des 2. und 3. Schrittes sind in Abb.3.2 in die Blockschaltbild-Form gebracht worden. Sie sind ein wesentlicher Teil des Gesamt-Blockschaltbildes.

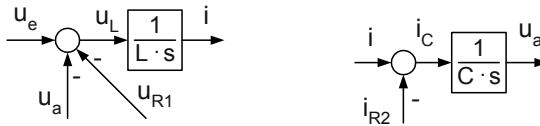


Abb. 3.2 Elektrischer Reihenschwingkreis, Blockschaltbilder des 2. und 3. Schrittes

Da die Bilanzgleichungen *Maschensatz* und *Knotenpunktsatz* bei der Modellierung vieler der folgenden technischen Systeme Verwendung finden, sind sie für einen allgemeinen Ansatz in den **Anhang A, Tabelle A.1**, übernommen worden. Die im 2. und 3. Schritt entstandenen Blockschaltbilder können, nachdem die Anzahl der Eingangsgrößen und die Namen der Signale angepasst worden sind, direkt in später behandelte Systeme übernommen werden. Erstmals geschieht das in Abschnitt 3.3.

Der 4. Schritt:

Es sind die noch fehlenden Grundbeziehungen zu ermitteln, die das ohmsche Gesetz

$$u = i \cdot R$$

nutzen. Dabei werden Ein- und Ausgangsgröße in Abhängigkeit davon festgelegt, in welche Bilanz die Ausgangsgröße eingeht. Dies sind die benötigten Beziehungen

$$u_{R1} = i \cdot R_1 \quad \text{und} \quad (3.3 \text{ a})$$

$$i_{R2} = \frac{1}{R_2} u_a. \quad (3.3 \text{ b})$$

Diese Beziehungen sind (mit Blockschaltbild-Darstellung) ebenfalls in allgemeiner Form in **Anhang A, Tabelle A.2**, übernommen worden.

Der 5. Schritt:

Aus den Schritten 2 bis 4 entsteht das Gesamt-Blockschaltbild in Abb. 3.3.

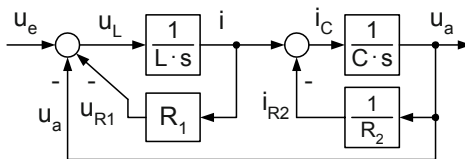


Abb. 3.3 Das Blockschaltbild des elektrischen Reihenschwingkreises

3.1.2 Gesamtübertragungsfunktion

Die Gesamt-Übertragungsfunktion ist schnell zu ermitteln, wenn zuerst die zwei inneren Wirkungskreise mit Hilfe der Kreisformel (s. Abschn. 2.1.3) zu je einem Block vereinigt werden. Es ergeben sich

$$\frac{i}{u_e - u_a} = \frac{\frac{1}{L \cdot s}}{1 + \frac{1}{L \cdot s} \cdot R_1} = \frac{1}{L \cdot s + R_1}, \quad (3.4 \text{ a})$$

$$\frac{u_a}{i} = \frac{\frac{1}{C \cdot s}}{1 + \frac{1}{C \cdot s} \cdot \frac{1}{R_2}} = \frac{R_2}{1 + C \cdot R_2 \cdot s}. \quad (3.4 \text{ b})$$

(Die Beseitigung der Doppelbrüche ist hier ausreichend, die Normalform wird bei diesem Zwischenergebnis nicht benötigt.) Das führt zu dem Zwischen-Blockschaltbild in Abb. 3.4.

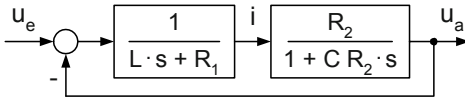


Abb. 3.4 Ein Zwischen-Blockschaltbild des elektrischen Reihenschwingkreises

Mit nochmaliger Anwendung der Kreisformel kann die Gesamt-ÜTF zielstrebig berechnet werden (Ansatz, Beseitigung Doppelbrüche, Ausmultiplizieren und Sortieren in einem Schritt sowie Herstellung der Normalform:

$$\begin{aligned} \frac{u_a}{u_e} &= \frac{\frac{1}{L \cdot s + R_1} \cdot \frac{R_2}{1 + C \cdot R_2 \cdot s}}{1 + \frac{1}{L \cdot s + R_1} \cdot \frac{R_2}{1 + C \cdot R_2 \cdot s}} = \frac{R_2}{(L \cdot s + R_1) \cdot (1 + C \cdot R_2 \cdot s) + R_2} \\ &= \frac{R_2}{R_1 + R_2 + s \cdot (L + C \cdot R_2 \cdot R_1) + s^2 \cdot L \cdot C \cdot R_2} \\ &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \frac{(L + C \cdot R_2 \cdot R_1)}{R_1 + R_2} + s^2 \cdot \frac{L \cdot C \cdot R_2}{R_1 + R_2}} \left(= K_P \cdot \frac{1}{1 + 2DT \cdot s + T^2 \cdot s^2} \right). \quad (3.5) \end{aligned}$$

Ein solches System 2. Ordnung wird meist ohne Simulation optimiert, da aus seinen Parametern mit Hilfe von Koeffizientenvergleichen die Eigenzeitkonstante T und die Dämpfung D ermittelt werden können und in der Literatur geschlossene

Lösungen für interessierende Zeitverläufe existieren [3.1, 3.2, 3.3, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8 3.9, 3.10]. Wenn aber mehrere solcher Schwingkreise in Reihe geschaltet sind, kann auf die Rechnersimulation nicht verzichtet werden (vgl. Kap. 7: Leitungsmodelle).

Es sei auch erwähnt, dass für einen Elektrotechniker für die Schaltung in Abb. 3.1 kein Blockschaltbild notwendig ist; er kommt mit der Spannungsteilerregel ebenfalls zum Ziel. Ähnlich ist das nächste System zu sehen (Abschn. 3.2): Ein Mechaniker benötigt kein Blockschaltbild, um für ein einfaches Feder-Masse-System die Differenzialgleichung hinzuschreiben. Die Leistungsfähigkeit der Blockschaltbildmethode kommt vor allem dann zum Tragen, wenn mechanische, elektrische und andere Systeme komplex zusammenwirken (s. ab Abschn. 3.3).

Ein Zahlenbeispiel. Ein Reihenschwingkreis wie in Abb. 3.1 werde aus folgenden Komponenten aufgebaut:

- Spule mit $L = 10^{-3} \frac{V \cdot s}{A} = 1 \text{ mH}$, $R_1 = 10 \frac{V}{A} = 10 \Omega$,
- Kondensator mit $C = 10^{-9} \frac{A \cdot s}{V} = 1 \text{ nF}$, $R_2 = 10^6 \frac{V}{A} = 1 \text{ M}\Omega$.

Werden die erforderlichen Parameter in Gl. (3.5) eingesetzt, ergeben sich folgende Werte für K_P , T , D :

$$K_P = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10^6}{10 + 10^6} \approx 1,$$

$$T^2 = \frac{L \cdot C \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10^{-3} \frac{V \cdot s}{A} \cdot 10^{-9} \frac{A \cdot s}{V} \cdot 10^6 \frac{V}{A}}{(10 + 10^6) \frac{V}{A}} \approx 10^{-12} \text{ s}^2 \rightarrow T \approx 10^{-6} \text{ s} = 1 \mu\text{s},$$

$$2DT = \frac{L + C \cdot R_2 \cdot R_1}{R_1 + R_2} = \frac{10^{-3} \frac{V \cdot s}{A} + 10^{-9} \frac{A \cdot s}{V} \cdot 10^6 \frac{V}{A} \cdot 10 \frac{V}{A}}{(10 + 10^6) \frac{V}{A}} \approx 1,1 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

$$\rightarrow D = \frac{2DT}{2T} = \frac{1,1 \cdot 10^{-8} \text{ s}}{2 \cdot 10^{-6}} = 0,0055.$$

Derartige Übertragungsglieder mit proportionalem Verhalten und Verzögerung 2. Ordnung (PT2-Glieder) sind in der Technik weit verbreitet und werden z. B. in der Literatur zur Regelungstechnik beschrieben [3.2, 3.3, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8 3.9, 3.10].

Der Lösungsansatz für die Ermittlung des Zeitverlaufs von u_a bei sprungförmigem Verlauf der Eingangsgröße u_e ist kann auch aus **Anhang B, Tabelle B.1**, für die o. g. Koeffizienten entnommen werden (u_{e0} ist die Sprunghöhe):

$$u(t) = K_P \cdot u_{e0} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-D^2}} \cdot e^{-Dt/T} \cdot \sin \left(\sqrt{1-D^2} \cdot \frac{t}{T} + \arccos D \right) \right).$$

Eine Umrechnung in die Resonanzfrequenz f des Schwingkreises ist hier wegen der geringen Dämpfung einfach:

$$f \approx \frac{\omega_e}{2\pi} = \frac{1}{2\pi \cdot T} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^{-6} \text{ s}} \approx 159 \text{ kHz}.$$

Anmerkung: In diesem Buch wird im Wesentlichen die Form der Zeitkonstanten (T) zur Darstellung von Koeffizienten anstelle von Eigenkreisfrequenzen (ω_e) verwendet. Die Umrechnung ist jedoch einfach, da das eine der Reziprokwert des anderen ist:

$$\omega_e = 1/T. \quad (3.6)$$

3.2 Einfaches Feder-Masse-System

Ein einfaches Feder-Masse-System besitzt zwei Energiespeicher, eine Feder (mit dem Parameter Federkonstante c) und eine Masse m . Diese Speicher können ebenfalls Energien austauschen, so wie die beiden Speicher Kapazität und Induktivität im elektrischen Schwingkreis. Die Kopplungsgrößen zwischen den beiden Speichern sind die Beschleunigungskraft F_B , die Reibkraft F_R und die Federkraft F_F sowie die Bewegungsgrößen Geschwindigkeit v und Weg s .

3.2.1 Erarbeitung Blockschaltbild

Der 1. Schritt:

Das Schema des zu modellierenden mechanischen Systems zeigt Abb. 3.5.

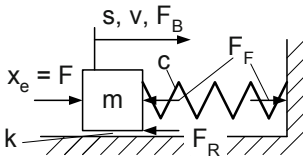


Abb. 3.5 Schema eines einfachen Feder-Masse-Systems

Das Schema des interessierenden Systems enthält alle relevanten Parameter und Signale. Die Signale Weg s und Geschwindigkeit v werden günstig an einem Pfeil

angetragen, da sie über Differenziation bzw. Integration miteinander verknüpft sind. Es sind bekanntlich

$$v = \frac{ds}{dt} \text{ und } s = \int v \, dt .$$

Der 2. Schritt:

Für die Speicher Feder (Federkonstante c) und Masse m können aus der Tabelle 2.4 die erforderlichen Funktionen der Zustandsgrößen übernommen werden.

Die Funktionen $v = \frac{1}{m} \cdot \int F_B \, dt$ und $s = \int v \, dt$ lauten nach der Transformation in den Bildbereich (s. Abschn. 2.2.1)

$$v = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s} \cdot F_B = \frac{1}{m \cdot s} \cdot F_B \text{ und } s = \frac{1}{s} \cdot v . \quad (3.7 \text{ a})$$

Die drei Signale F_B , v , und s haben also das gleiche Vorzeichen.

Der 3. Schritt:

An der Masse m greifen vier Kräfte an: die Eingangskraft F , die Federkraft F_F , die Reibkraft F_R und die Beschleunigungskraft F_B . Aufgelöst werden muss diese *Kräftebilanz* nach der Beschleunigungskraft F_B , da diese in Gl. (3.6) als Eingangsgröße erforderlich ist. Ausgehend von den Pfeilen in Abb. 3.5 ergibt sich:

$$F_B = F - F_F - F_R . \quad (3.7 \text{ b})$$

Oft herrscht Unsicherheit, welche Vorzeichen den Kräften auf der rechten Seite der Bilanzgleichung zu geben sind. Es kann von einer verallgemeinerten *Lenz-schen Regel*, die eigentlich für den Elektromagnetismus aufgestellt wurde, ausgegangen werden: Rückwirkungen sind ihrer Ursache entgegengerichtet.

Im vorliegenden Fall bedeutet das, dass die Rückwirkungskräfte Federkraft F_F und Reibkraft F_R der die Bewegung verursachenden Eingangskraft F entgegengerichtet sind und ein negatives Vorzeichen haben. Aus den im 2. und 3. Schritt entstandenen Beziehungen entsteht das Teil-Blockschaltbild in Abb. 3.6.

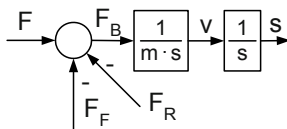


Abb. 3.6 Einfaches Feder-Masse-System, Blockschaltbild des 2. und 3. Schrittes

Da die Kräftebilanz zur Modellierung vieler technischer Systeme Verwendung findet, ist auch sie mit allgemeinem Ansatz in den **Anhang A, Tabelle A.1**, übernommen worden. Das dort abgebildete Blockschaltbild kann ebenfalls direkt in

später behandelte Systeme übernommen werden, nachdem die Anzahl der Eingangsgrößen und die Namen der Signale angepasst worden sind.

Der 4. Schritt:

Es sind die Grundbeziehungen für die Federkraft F_F (abhängig von Weg s und Federkonstante c) und die Reibkraft F_R (abhängig von Geschwindigkeit v und Faktor der geschwindigkeitsproportionalen Reibung k) zu ermitteln. In vielen Fällen können lineare Ansätze gemacht werden (nichtlineare Ansätze s. Kap. 4):

$$F_F = c \cdot s, \quad (3.8 \text{ a})$$

$$F_R = k \cdot v. \quad (3.8 \text{ b})$$

Diese Beziehungen werden ebenfalls noch oft benötigt und sind in **Anhang A, Tabelle A.2**, übernommen worden.

Der 5. Schritt: Es entsteht das Blockschaltbild in Abb. 3.7.

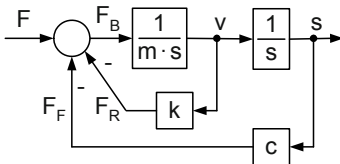


Abb. 3.7 Das Blockschaltbild des einfachen Feder-Masse-Systems

Eine Ergänzung zur oben genannten „verallgemeinerten *Lenzschen Regel*“: Das Blockschaltbild bietet eine wichtige Möglichkeit der Kontrolle über die richtige Festlegung von Vorzeichen: In allen denkbaren Wirkungskreisen, in Abb. 3.7 sind es zwei, findet *eine Wirkungsumkehr* statt, gekennzeichnet durch die Minuszeichen. (Wenn Federkraft oder Reibkraft größer werden, nimmt die Beschleunigungskraft ab.)

Da sich in einem linearen System zwei Wirkungsumkehrungen innerhalb eines Wirkungskreises aufheben, kann auch allgemeiner formuliert werden: In der Technik und Naturwissenschaft ist die Anzahl von Wirkungsumkehrungen in Wirkungskreisen meist ungeradzahlig.

3.2.2 Gesamtübertragungsfunktion

Das Blockschaltbild in Abb. 3.7 kann so umgezeichnet werden, dass in wenigen Schritten die Gesamt-ÜTF ermittelt werden kann (s. Abb. 3.8). Auf die Simulation wird dann i. Allg. verzichtet.

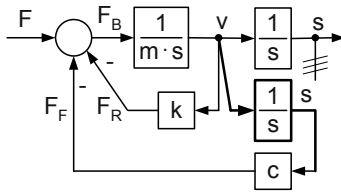


Abb. 3.8 Das umgezeichnete Blockschaltbild des einfachen Feder-Masse-Systems

Der Ansatz lautet mit Hilfe der Kreisformel (s. Abschn. 2.1.3):

$$\frac{s}{F} = G(s) = \frac{1}{\frac{m \cdot s^2}{1 + \frac{1}{m \cdot s} \cdot \left(k + \frac{c}{s}\right)}}.$$

Nächste Schritte sind:

- Beseitigung des Doppelbruches

$$\frac{s}{F} = \frac{1}{m \cdot s^2 + k \cdot s + c},$$

- Herstellen der Normalform

$$\frac{s}{F} = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k}{c} \cdot s + \frac{m}{c} \cdot s^2} \left(= \frac{K_P}{1 + 2DT \cdot s + T^2 \cdot s^2} \right). \quad (3.9)$$

Dies ist wie schon in Abschn. 3.1 die ÜTF eines Übertragungsgliedes mit proportionalem Verhalten und Verzögerung 2. Ordnung (PT2-Glied), für das in der Literatur alle Informationen z. B. zu Sprungantworten oder Frequenzgängen zu finden sind [3.2, 3.3, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8 3.9, 3.10]. Es ergeben sich hier:

$$T = \sqrt{m/c} \quad \text{und} \quad 2DT = k/c.$$

Zahlenbeispiele zu Feder-Masse-Systemen folgen in Abschn. 4.1.

3.3 Permanentmagnetenerregter Gleichstrommotor

In diesem Beispiel wird sich erstmals die Leistungsfähigkeit der Blockschaltbildmethode zeigen, da hier elektrotechnische und mechanische Komponenten zusammenwirken und eine Gesamt-Differenzialgleichung nicht so einfach wie bisher aufgestellt werden kann.

3.3.1 Erarbeitung des Blockschaltbildes

Der 1. Schritt:

Das Schema des zu beschreibenden permanentmagnetenerregten Gleichstrommotors zeigt Abb. 3.9. Dieser Motor soll nach dem Zuschalten der Spannung u_e gegen ein äußeres Lastmoment M_L arbeiten. Die anliegende Spannung u_e erzeugt im Rotor (anderer Name: Anker) den Ankerstrom i_A durch die Induktivität L_A und den ohmschen Widerstand R_A des Ankers.

Der Motor besteht aus einem elektrischen und einem mechanischen Teil. Zwischen beiden bestehen die folgenden Wirkungen:

- Durch den Ankerstrom i_A wird ein inneres Moment, das Motormoment M_M , auf den Rotor mit seinem Massenträgheitsmoment J erzeugt (Basis ist das elektromagnetische Kraftwirkungsgesetz).
- Durch die Rotorbewegung wird eine Spannung e induziert, die der Eingangsspannung u_e immer entgegengerichtet ist.

Auf den Rotor wirken neben den genannten Momenten M_M und M_L das Beschleunigungsmoment M_B und das Reibmoment M_R ein. Die Bewegungsgrößen sind der Rotorwinkel φ und die Winkelgeschwindigkeit ω .

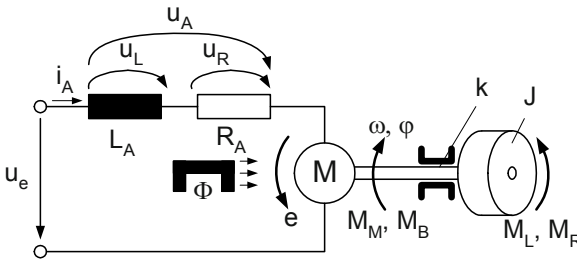


Abb. 3.9 Schema eines permanentmagnetenerregten Gleichstrommotors

Der 2. Schritt:

Dieser Antrieb besitzt zwei Energiespeicher, die rotatorisch bewegte Masse mit dem Massenträgheitsmoment J und die Ankerinduktivität L_A . Aus der Tabelle 2.4 können die erforderlichen Funktionen für die Zustandsgrößen, teilweise mit entsprechender Anpassung der Signalnamen, übernommen werden:

$$\omega = \frac{1}{J} \cdot \int M_B \, dt \quad \text{und} \quad i_A = \frac{1}{L_A} \cdot \int u_L \, dt.$$

Sie lauten nach der Transformation in den Bildbereich

$$\omega = \frac{1}{J} \cdot \frac{1}{s} \cdot M_B = \frac{1}{J \cdot s} \cdot M_B, \quad (3.10 \, a)$$

$$i_A = \frac{1}{L_A} \cdot \frac{1}{s} \cdot u_L = \frac{1}{L_A \cdot s} \cdot u_L. \quad (3.10 \text{ b})$$

Der 3. Schritt:

Eine der Eingangsgrößen der beiden Funktionen in Gl. (3.10), das Beschleunigungsmoment M_B , ermittelt sich aus der *Momentenbilanz*. Sie lautet analog zur Kräftebilanz in Abschn. 3.2

$$M_B = M_M - M_R - M_L. \quad (3.11 \text{ a})$$

Die Spannungsbilanz der Masche des elektrischen Teils ist nach u_L aufzulösen (s. Abb. 3.9 und **Anhang A, Tabelle A.1**) und lautet

$$u_L = u_e - u_R - e. \quad (3.11 \text{ b})$$

Aus den im 2. und 3. Schritt entstandenen Beziehungen entstehen die beiden Teil-Blockschaltbilder in Abb. 3.10.

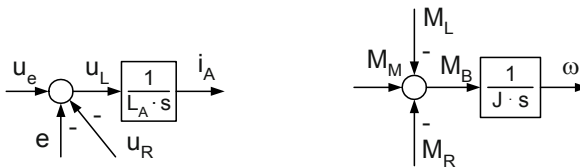


Abb. 3.10 Permanentmagnetenerregter Gleichstrommotor, Blockschaltbilder des 2. und 3. Schrittes

Da auch die Momentenbilanz zur Modellierung vieler der noch zu behandelnden technischen Systeme Verwendung findet, ist auch sie mit allgemeinem Ansatz in den **Anhang A, Tabelle A.1**, übernommen worden. In Analogie zum Blockschaltbild der Kräftebilanz ist dort die (in diesem Beispiel zwar nicht benötigte) später oft erforderliche Integration

$$\varphi = \frac{1}{s} \cdot \omega \quad (3.12)$$

mit in das Blockschaltbild aufgenommen worden (s. z. B. Abschn. 4.1.4).

Der 4. Schritt:

Die noch „freien“ Enden der Pfeile in den Blockschaltbildern in Abb. 3.10 werden mit Hilfe von teilweise bereits verwendeten Grundbeziehungen und von bisher noch nicht aufgetauchten Grundbeziehungen belegt. Die folgende Grundbeziehung kann aus **Anhang A, Tabelle A.2**, übernommen werden (ohmsches Gesetz):

$$u_R = R_A \cdot i_A.$$

Das Reibmoment ist analog Gl. (3.8 b):

$$M_R = k \cdot \omega. \quad (3.13)$$

Die Wirkungen zwischen dem elektrischen und dem mechanischen Teil werden für diesen Motor wie folgt beschrieben, wobei der Faktor K_M ein Maß für Größe und die Leistungsfähigkeit des Motors ist und Φ der magnetische Fluss:

- Induzierte Spannung (Induktionsgesetz):

$$e = K_M \cdot \Phi \cdot \omega. \quad (3.14)$$

- Motormoment (Kraftwirkungsgesetz):

$$M_M = K_M \cdot \Phi \cdot i_A. \quad (3.15)$$

(Im Rahmen dieses Buches erfolgt keine tiefer gehende Herleitung dieser Beziehungen. Der Parameter $K_M \cdot \Phi$ wird jedoch in Motordatenblättern der meisten Hersteller angegeben.)

Der 5. Schritt:

Es entsteht das Blockschaltbild in Abb. 3.11.

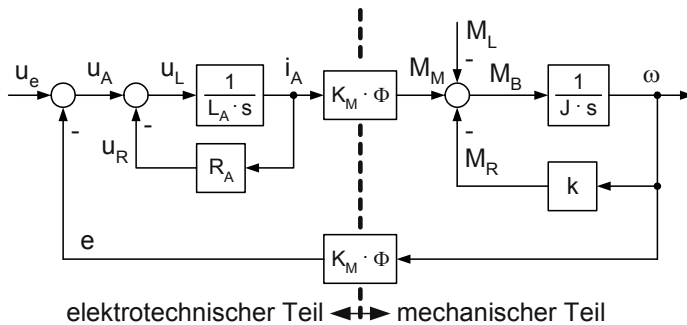


Abb. 3.11 Das Blockschaltbild des permanentmagnetenerregten Gleichstrommotors

Eine erste Sichtkontrolle zeigt:

- Das Blockschaltbild ist vollständig. Alle Eingangsgrößen in Blöcke oder in Bilanzgleichungen sind gleichzeitig Ausgangsgrößen, entstehen also innerhalb des Modells, mit Ausnahme der „echten“ Eingangsgrößen u_e und M_L .
- Alle Wirkungskreise besitzen eine Wirkungsumkehr.

3.3.2 Die Gesamtfunktion

Als erstes wird das Blockschaltbild in eine solche Form gebracht, dass die Kreisformel für das Gesamtsystem angesetzt werden kann. (Das kann, wenn entsprechende Erfahrung gesammelt worden ist, zumindest teilweise auch „im Kopf“ realisiert werden). Bei der Berechnung der Gesamt-ÜTF wird auf Methoden zurückgegriffen, die in Abschn. 2.1.3 beschrieben worden sind.

Die beiden kleinen Wirkungskreise in Abb. 3.11 zwischen u_A und i_A sowie M_M und ω können einfach mit der Kreisformel zu je einem Block zusammengefasst werden. Es ergeben sich folgende ÜTF:

$$\frac{i_A(s)}{u_A(s)} = \frac{\frac{1}{L_A} \cdot \frac{1}{s}}{1 + \frac{R_A}{L_A} \cdot \frac{1}{s}} = \frac{1}{L_A \cdot s + R_A} = \frac{1/R_A}{1 + T_A \cdot s} \quad \text{mit } T_A = \frac{L_A}{R_A}, \quad (3.16)$$

$$\frac{\omega}{M_M - M_L} = \frac{\frac{1}{J} \cdot \frac{1}{s}}{1 + \frac{k}{J} \cdot \frac{1}{s}} = \frac{1}{J \cdot s + k}. \quad (3.17)$$

Die ÜTF des Ankers (Gl. (3.16)) wird in die Normalform (die absoluten Glieder des Nenners sind dann jeweils gleich eins) gebracht, da die Ankerzeitkonstante T_A in Motordatenblättern angegeben wird. In Gl. (3.17) ist die Normalform nicht erforderlich. Beide Wirkungskreise besitzen proportionales Verhalten mit Verzögerung 1. Ordnung (PT1-Verhalten). Dieses Vorgehen führt zu dem einfacheren Blockschaltbild in Abb. 3.12.

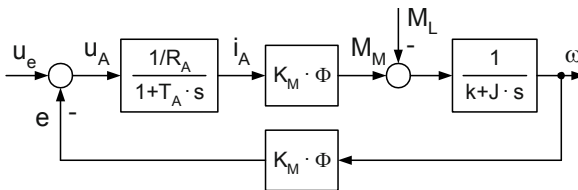


Abb. 3.12 Vereinfachtes Blockschaltbild des permanentmagnetenerregten Gleichstrommotors

Die sich einstellende Motorwinkelgeschwindigkeit ω resultiert hier aus zwei sich überlagernden Eingangsgrößen, der anliegenden Betriebsspannung u_e und dem an der Welle angreifenden Lastmoment M_L . Das Lastmoment wirkt im normalen Betrieb dem inneren Motormoment M_M entgegen und damit ω -verringend.

Der Ansatz für die Gesamtfunktion lautet mit Hilfe der auf beide Eingangsgrößen angewendeten Kreisformel (s. Kap. 2):

$$\omega = \frac{\frac{1/R_A}{1+T_A \cdot s} \cdot K_M \cdot \Phi \cdot \frac{1}{k+J \cdot s}}{1 + \frac{1}{k+J \cdot s} \cdot (K_M \cdot \Phi)^2 \cdot \frac{1/R_A}{1+T_A \cdot s}} \cdot u_e + \frac{-\frac{1}{k+J \cdot s}}{1 + \frac{1}{k+J \cdot s} \cdot (K_M \cdot \Phi)^2 \cdot \frac{1/R_A}{1+T_A \cdot s}} \cdot M_L$$

Nächste Schritte sind:

- Beseitigung der Doppelbrüche:

$$\omega = \frac{K_M \cdot \Phi \cdot u_e - R_A \cdot (1+T_A \cdot s) \cdot M_L}{R_A \cdot (1+T_A \cdot s) \cdot (k+J \cdot s) + (K_M \cdot \Phi)^2}$$

- Ausmultiplizieren und Sortieren:

$$\omega = \frac{K_M \cdot \Phi \cdot u_e - R_A \cdot (1+T_A \cdot s) \cdot M_L}{(K_M \cdot \Phi)^2 + R_A \cdot k + R_A \cdot (J+k \cdot T_A) \cdot s + R_A \cdot J \cdot T_A \cdot s^2},$$

- Herstellen der Normalform:

$$\omega = \frac{K_M \cdot \Phi}{(K_M \cdot \Phi)^2 + R_A \cdot k} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_A \cdot (J+k \cdot T_A)}{(K_M \cdot \Phi)^2 + R_A \cdot k} \cdot s + \frac{R_A \cdot T_A \cdot J}{(K_M \cdot \Phi)^2 + R_A \cdot k} \cdot s^2} \cdot u_e - \frac{R_A}{(K_M \cdot \Phi)^2 + R_A \cdot k} \cdot \frac{1+T_A \cdot s}{1 + \frac{R_A \cdot (J+k \cdot T_A)}{(K_M \cdot \Phi)^2 + R_A \cdot k} \cdot s + \frac{R_A \cdot T_A \cdot J}{(K_M \cdot \Phi)^2 + R_A \cdot k} \cdot s^2} \cdot M_L. \quad (3.18 \text{ a})$$

Diese Funktion hat die allgemeine Form (deren Nennerform schon bekannt ist)

$$\omega = \frac{K_{P1}}{1+2DT \cdot s + T^2 \cdot s^2} \cdot u_e - \frac{K_{P2}}{1+2DT \cdot s + T^2 \cdot s^2} \cdot M_L - \frac{K_D \cdot s}{1+2DT \cdot s + T^2 \cdot s^2} \cdot M_L. \quad (3.18 \text{ b})$$

Die ersten zwei Summanden sind Übertragungsglieder mit proportionalem Verhalten und Verzögerung 2. Ordnung (PT2-Glied), der dritte ein Übertragungsglied mit differenzierendem Verhalten und Verzögerung 2. Ordnung (DT2-Glied). Für diese Übertragungsglieder sind in **Anhang B** alle Informationen, z. B. die Lösungsansätze für die Ermittlung des Zeitverlaufs von ω bei sprungförmigem Verlauf der Eingangsgrößen u_e und M_L , zu finden.

Ein Zahlenbeispiel. Für einen speziellen permanentmagnetenerregten Gleichstrommotor, einen sog. Schlankankermotor, sind Kenngrößen und Übertragungsfaktoren

aus entsprechenden Datenblättern ermittelt worden (s. Tabelle 3.1). Sie sind zum Teil für die Kennzeichnung der Motorgröße und zum Teil für die Berechnung der Koeffizienten in den Gln. (3.18 a) und (3.18 b) erforderlich.

Tabelle 3.1 Kenngrößen eines Schlankankermotors [3.4]

Nenn- größe	u_{nenn}	n_{nenn}	ω_{nenn}	M_{nenn}	k	J	T_A	i_{nenn}	R_A	$K_M \cdot \Phi$
500 W	24 V	3000 U/min	314,2 s^{-1}	1,6 Nm	$6 \cdot 10^{-5}$ $Nm \cdot s$	12 $kg \cdot cm^2$	2,8 ms	25 A	0,16 Ω	$6,3 \cdot 10^{-2}$ Vs

Anmerkung:

Motoren sind reibungsarm gelagert. In diesem Zahlenbeispiel entsteht bei Nenn-drehzahl ein Reibmoment von etwa einem Prozent des Nennmomentes. Die Motorverluste entstehen vor allem im ohmschen Widerstand R_A des Rotors.

Werden die erforderlichen Werte in die Gl. (3.18 a) eingesetzt, dann ergibt sich für K_{P1} , K_{P2} , K_D , T und D nach Gl. (3.18 b):

$$K_{P1} = \frac{K_M \cdot \Phi}{(K_M \cdot \Phi)^2 + R_A \cdot k} = \frac{6,3 \cdot 10^{-2} Vs}{(6,3 \cdot 10^{-2} Vs)^2 + 0,16 \frac{V}{A} \cdot 6 \cdot 10^{-5} Nm \cdot s \cdot \frac{1 V \cdot A \cdot s}{1 Nm}} = 15,8 \frac{1}{Vs},$$

$$K_{P2} = \frac{R_A}{(K_M \cdot \Phi)^2 + R_A \cdot k} = \frac{0,16 \frac{V}{A}}{(6,3 \cdot 10^{-2} Vs)^2 \cdot \frac{1 Nm}{1 V \cdot A \cdot s} + 0,16 \frac{V}{A} \cdot 6 \cdot 10^{-5} Nm \cdot s} = 40,2 \frac{1}{Nm \cdot s},$$

$$K_D = \frac{R_A \cdot T_A}{(K_M \cdot \Phi)^2 + R_A \cdot k} = \frac{0,16 \frac{V}{A} \cdot 0,0028 s}{(6,3 \cdot 10^{-2} Vs)^2 \cdot \frac{1 Nm}{1 V \cdot A \cdot s} + 0,16 \frac{V}{A} \cdot 6 \cdot 10^{-5} Nm \cdot s} = 0,113 \frac{1}{Nm},$$

$$T^2 = \frac{R_A \cdot T_A \cdot J}{(K_M \cdot \Phi)^2 + R_A \cdot k} = \frac{0,16 \frac{V}{A} \cdot 0,0028 s \cdot 12 kg \cdot cm^2 \cdot \frac{1 N s^2}{1 kg m} \cdot \frac{1 m^2}{10^4 cm^2}}{(6,3 \cdot 10^{-2} Vs)^2 \cdot \frac{1 Nm}{1 V \cdot A \cdot s} + 0,16 \frac{V}{A} \cdot 6 \cdot 10^{-5} Nm \cdot s} = 1,35 \cdot 10^{-4} s^2$$

$$\Rightarrow T \approx 0,0116 s = 11,6 ms.$$

$$2DT = \frac{R_A \cdot (J + k \cdot T_A)}{(K_M \cdot \Phi)^2 + R_A \cdot k} =$$

$$\frac{0,16 \frac{V}{A} \cdot \left(12 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2 \cdot \frac{1 \text{ N s}^2}{1 \text{ kg m}} \cdot \frac{1 \text{ m}^2}{10^4 \text{ cm}^2} + 6 \cdot 10^{-5} \text{ Nm s} \cdot 0,0028 \text{ s} \right)}{\left(6,3 \cdot 10^{-2} \text{ V s} \right)^2 \cdot \frac{1 \text{ Nm}}{1 \text{ V} \cdot \text{A} \cdot \text{s}} + 0,16 \frac{V}{A} \cdot 6 \cdot 10^{-5} \text{ Nm} \cdot \text{s}} = 0,048 \text{ s} = 48 \text{ ms}$$

$$\rightarrow D = \frac{2DT}{2T} = \frac{48 \text{ ms}}{2 \cdot 11,6 \text{ ms}} = 2,07.$$

Da $D > 1$ ist, entstehen reelle Zeitkonstanten (s. **Anhang B, Tabelle B.1**):

$$T_{1/2} = T \cdot \left(D \pm \sqrt{D^2 - 1} \right) = 11,6 \text{ ms} \cdot \left(2,07 \pm \sqrt{2,07^2 - 1} \right) \quad (3.18 \text{ c})$$

$$\rightarrow T_1 = 45 \text{ ms}, T_2 = 3 \text{ ms}.$$

Aus **Anhang B, Tabellen B.1** und **B.2**, können für diese Koeffizienten die drei Zeitfunktionen der Sprungantworten des Motors ermittelt werden und zur Gesamtfunktion addiert werden (Anwendung des Superpositionsgesetzes).

Die obige Auflistung der Kenngrößen und Übertragungsfaktoren enthält auch sog. Nenngrößen. Mit ihrer Hilfe kann überprüft werden, ob die ermittelten Werte für K_{p1} und K_{p2} , richtig sein können. Aus Gl. (3.18 a) entsteht die Funktion für das statische Verhalten des Motors, wenn die Laplace-Operatoren s null gesetzt werden:

$$\omega = \frac{K_M \cdot \Phi}{(K_M \cdot \Phi)^2 + R_A \cdot k} \cdot u_e - \frac{R_A}{(K_M \cdot \Phi)^2 + R_A \cdot k} \cdot M_L = 15,8 \frac{1}{\text{V s}} \cdot u_e - 40,2 \frac{1}{\text{Nm} \cdot \text{s}} \cdot M_L.$$

Werden die Nenngrößen für u_e und M_L eingesetzt, ergibt sich (von Rundungsfehlern abgesehen) die Nenngröße von ω . Auch der Nennstrom i_{Nenn} kann überprüft werden (s. Gl. (3.15)):

$$i_{Nenn} = \frac{M_M}{K_M \cdot \Phi} = \frac{1,6 \text{ Nm}}{6,3 \cdot 10^{-2} \text{ V s}} \cdot \frac{1 \text{ V} \cdot \text{A} \cdot \text{s}}{1 \text{ Nm}} \approx 25 \text{ A}.$$

3.4 Einfacher Hydraulikantrieb

Der Name „Antrieb“ bedeutet, dass etwas mit Hilfe von Kräften oder Drehmomenten bewegt werden soll. Es spielen also auch hier Bausteine der Mechanik eine Rolle. Hinzu kommen bisher nicht verwendete Bausteine der Fluidtechnik.

3.4.1 Erarbeitung Blockschaltbild

Der 1. Schritt:

Das Schema des Hydraulikantriebs zeigt Abb. 3.13. Er besteht aus einem Hydraulikzylinder, dessen Kolbenstange eine Masse m bewegt, und aus Hydraulikleitungen zum Fluidbehälter und zu einer Druckquelle, die analog den Spannungsquellen in Abschn. 3.1 und 3.3 die Eingangsgröße Druck p_e bereitstellt. Der Strömungswiderstand R_h dient der Begrenzung des Volumenstromes Q_1 und damit auch der Geschwindigkeit v . Die an der Masse m angreifenden Kräfte sind die Druckkraft F_1 , die Beschleunigungskraft F_B , die Reibkraft F_R und die Lastkraft F_L als weitere Eingangsgröße. Die Bewegungsgrößen sind wiederum die Geschwindigkeit v und der Weg s . Von den Parametern des Hydraulikzylinders gehen die linke Kolbenfläche A_1 und das Volumen V_1 des kompressiblen Fluids (meist ein Mineralöl) in das spätere Modell ein. Die adäquaten Größen auf der rechten Seite haben keinen Einfluss auf das Verhalten des Antriebs, da Kurzschluss zum Fluidbehälter besteht, der Druck p_2 etwa null ist.

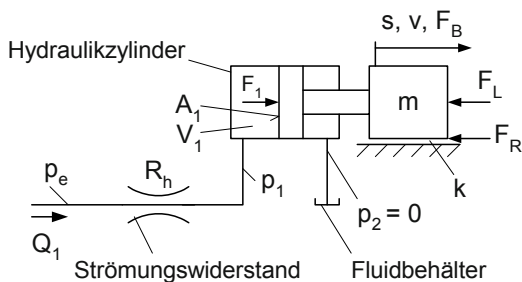


Abb. 3.13 Schema eines einfachen Hydraulikantriebs

Es soll untersucht werden, wie sich der Antrieb verhält, wenn der Druck p_e sich, z. B. sprungförmig, verändert.

Der 2. Schritt:

Dieser Antrieb besitzt zwei Energiespeicher, die zu bewegende Masse m und das kompressible Fluid-Volumen V_1 . Für ersteren kann die Funktion wiederum aus Tabelle 2.4 entnommen werden. Aus

$$v = \frac{1}{m} \cdot \int F_B dt$$

wird nach der Transformation in den Bildbereich

$$v = \frac{1}{m \cdot s} \cdot F_B$$

(s. auch Gl. (3.6)).

Für die zweite Funktion sind Näherungen erforderlich, um die Beschreibung als lineares System zu ermöglichen:

- Es wird das Verhalten an einem Arbeitspunkt $s = s_0$ betrachtet, d.h., das Volumen V_1 , dessen Größe normalerweise mit dem Weg s wächst, wird an diesem Arbeitspunkt als konstant angenommen ($V_1 = V_{10} = A_1 \cdot s_0 = \text{konst.}$). Das führt zu einem vernachlässigbaren Fehler, wenn der zu berechnende Vorgang in der Nähe von $s = s_0$ stattfindet.
- Das im Volumen V_1 eingeschlossene Hydraulikmedium, hier ein Mineralöl, ist kompressibel. Sein Kompressibilitätsfaktor β ist das Maß für die relative Volumenänderung bei Druckänderung: $\beta = \frac{\Delta V_1/V_{10}}{\Delta p_1}$. Er wird als konstant angenommen.. Damit ist die Speicherkapazität dieses Volumens, ihr allgemeiner Name ist C_y (s. Tabelle 2.4): $C_y = V_{10} \cdot \beta$ in der Dimension cm^3/bar bzw. m^5/N .

Nach Transformation in den Bildbereich wird aus der Funktion in Tabelle 2.4

$$p_1 = \frac{1}{C_y} \cdot \int Q_{\text{gesp}} dt \quad \text{und}$$

$$p_1 = \frac{1}{C_y \cdot s} \cdot Q_{\text{gesp}} = \frac{1}{V_{10} \cdot \beta \cdot s} \cdot Q_{\text{gesp}} . \quad (3.19)$$

Beachte: In der Hydraulik werden (im Gegensatz zur Thermodynamik, Kap. 6) die Drücke als Differenz zum Luftdruck definiert.

Der 3. Schritt (mit Teilen des 4. Schrittes):

Die beiden Eingangsgrößen der Funktionen des 2. Schrittes sind aus Bilanzgleichungen ermittelbar. Die Kräftebilanz lautet (s. auch Abschn. 3.2.1:

$$F_B = F_1 - F_L - F_R . \quad (3.20)$$

Die Druckkraft-Funktion wird aus Abb. 3.13 abgeleitet:

$$F_1 = A_1 \cdot p_1. \quad (3.21)$$

Die Volumenstrombilanz im Volumen V_1 enthält ebenfalls eine noch nicht definierte Größe, den so genannten Verschiebe-Volumenstrom Q_V :

$$Q_V = A_1 \cdot v. \quad (3.22)$$

Er entsteht durch die Kolbenbewegung, in deren Folge ein Volumen im Zylinder verdrängt bzw. freigegeben wird.

Die Volumenstrombilanz lautet damit:

$$Q_{gesp} = Q_1 - Q_V. \quad (3.23)$$

Aus den im 2. und 3. Schritt ermittelten Beziehungen entstehen die beiden Teil-Blockschaltbilder in Abb. 3.14.

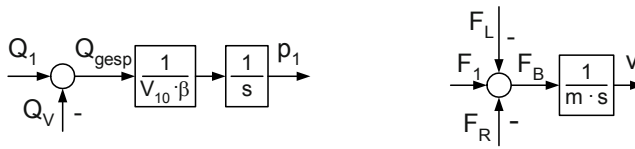


Abb. 3.14 Einfacher Hydraulikantrieb, Blockschaltbild des 2. und 3. Schrittes

Da auch die Volumenstrombilanz in Verbindung mit dem zugehörigen Speicher zur Modellierung weiterer technischer Systeme benötigt wird, ist sie mit allgemeinem Ansatz in den **Anhang A, Tabelle A.3**, übernommen worden.

Vervollständigung des 4. Schrittes:

Der Strömungswiderstand R_h wird in Anlehnung an den Ohmschen Widerstand als Verhältnis von Druckabfall $p_e - p_1$ zu Volumenstrom Q_1 definiert. Er wird in diesem Beispiel-Antrieb als konstant angenommen und es ergibt sich

$$Q_1 = \frac{1}{R_h} \cdot (p_e - p_1). \quad (3.24)$$

Die meisten Strömungswiderstände, vor allem jene zur Steuerung von Volumenströmen, sind nichtlinear. Darauf wird in Abschn. 4.3 detailliert eingegangen.

Es fehlt nur noch die Beziehung der Reibkraft, die wiederum geschwindigkeitsproportional angenommen wird (s. Gl. (3.8 b)):

$$F_R = k \cdot v.$$

Die Gleichungen (3.21), (3.22) und (3.24) zur Druckkraft, zum Verschiebepotenzenstrom und zum Strömungswiderstand sind als typische Grundbeziehungen der Fluidtechnik in **Anhang A, Tabelle A.4**, übernommen worden.

Der 5. Schritt:

Es entsteht das Blockschaltbild in Abb. 3.15.

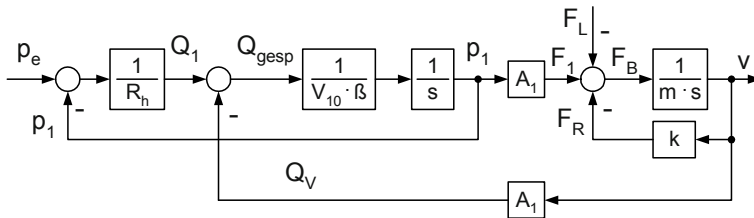


Abb. 3.15 Das Blockschaltbild des einfachen Hydraulikantriebs

3.4.2 Die Gesamtfunktion im Bildbereich

Auch dieses System hat, wie der im vorherigen Beispiel behandelte Gleichstrommotor, zwei Eingangsgrößen (Abb. 3.15), den Druck p_e und die Lastkraft F_L . In linearen Systemen gilt das Gesetz der ungestörten Superposition, d. h., es kann die Reaktion der interessierenden Ausgangsgröße, hier der Geschwindigkeit v , zunächst als Reaktion auf die eine Eingangsgröße (die andere wird null gesetzt) und danach auf die andere Eingangsgröße berechnet werden und danach beide Reaktionen addiert werden.

Die Reaktion auf die Eingangsgröße F_L kann auf der Basis von Abb. 3.16 errechnet werden. Da p_e null gesetzt ist, wurde Abb. 3.15 etwas umgezeichnet, um die Parallelität beider Rückwirkungen einfacher zu erkennen. Der p_e -Pfeil wurde in Abb. 3.16 z. B. nicht dargestellt.

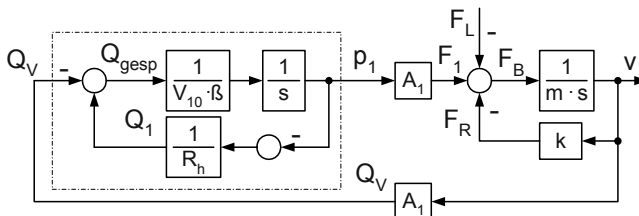


Abb. 3.16 Das Blockschaltbild des Hydraulikantriebs für $p_e = 0$

Es ist festzustellen, dass jeder Wirkungskreis eine Wirkungskumkehr besitzt.

Zuerst muss die ÜTF p_1/Q_V für den strich-punktiert umrandeten Teil des Blockschaltbildes ermittelt und gedanklich als Ersatzblock in Abb. 3.16 eingefügt werden. Mit Hilfe der Kreisformel (s. Gl. (2.2):

$$\frac{x_a}{x_e} = \frac{G_{\text{vorwärts}}(s)}{1 + G_{\text{Kreis}}(s)}$$

ergibt sich für diesen Block:

$$\frac{p_1}{Q_V} = \frac{-\frac{1}{V_{10} \cdot \beta \cdot s}}{1 + \frac{1}{R_h \cdot V_{10} \cdot \beta \cdot s}} = -\frac{R_h}{1 + R_h \cdot V_{10} \cdot \beta \cdot s}.$$

Bei nochmaliger Anwendung der Kreisformel ergibt sich die Abhängigkeit der Kolbengeschwindigkeit v von der angreifenden Lastkraft F_L

$$\frac{v}{F_L} = G_{FL}(s)$$

über die typischen Zwischenstufen

$$\begin{aligned} G_{FL}(s) &= \frac{v}{F_L} = \frac{-\frac{1}{m \cdot s}}{1 + \frac{1}{m \cdot s} \cdot \left(k + A_1^2 \cdot \frac{R_h}{1 + R_h \cdot V_{10} \cdot \beta \cdot s} \right)} \\ &= -\frac{1 + R_h \cdot V_{10} \cdot \beta \cdot s}{m \cdot s \cdot (1 + R_h \cdot V_{10} \cdot \beta \cdot s) + k \cdot (1 + R_h \cdot V_{10} \cdot \beta \cdot s) + A_1^2 \cdot R_h} \\ &= -\frac{1 + R_h \cdot V_{10} \cdot \beta \cdot s}{k + A_1^2 \cdot R_h + s \cdot (m + k \cdot R_h \cdot V_{10} \cdot \beta) + m \cdot R_h \cdot V_{10} \cdot \beta \cdot s^2} \end{aligned}$$

letztendlich in Normalform zu

$$G_{FL}(s) = -\frac{1}{k + A_1^2 \cdot R_h} \cdot \frac{1 + R_h \cdot V_{10} \cdot \beta \cdot s}{1 + \frac{m + k \cdot R_h \cdot V_{10} \cdot \beta}{k + A_1^2 \cdot R_h} \cdot s + \frac{m \cdot R_h \cdot V_{10} \cdot \beta}{k + A_1^2 \cdot R_h} \cdot s^2}. \quad (3.25)$$

Die zweite ÜTF (jetzt ist $F_L = 0$ gesetzt worden)

$$\frac{v}{p_e} = G_{pe}(s),$$

welche die Abhängigkeit der Kolbengeschwindigkeit vom Eingangsdruck p_e widerspiegelt, ist etwas schwieriger zu ermitteln. Im Gegensatz zum permanentmagneterregten Gleichstrommotor schneiden sich zwei der drei Rückwirkungen. Der Ansatz für die Gesamtfunktion kann sofort hingeschrieben werden, wenn das Blockschaltbild in Abb. 3.15 zielstrebig umgeformt wird. Die innere Schleife rechts wird analog Gl. (3.17) aufgelöst:

$$\frac{v}{F_1 - F_L} = \frac{\frac{1}{m \cdot s}}{1 + \frac{k}{m \cdot s}} = \frac{1}{m \cdot s + k}. \quad (3.25)$$

Die beiden anderen Rückwirkungsschleifen werden mit Hilfe des Umzeichnens des Blockschaltbildes (s. z. B. Abb. 2.3) parallel angeordnet (Abb. 3.17).

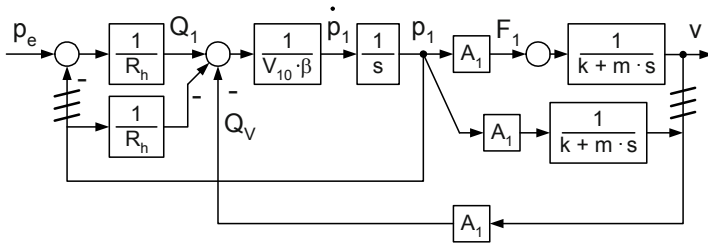


Abb. 3.17 Das umgezeichnete Blockschaltbild des Hydraulikantriebs

Somit kann wiederum direkt die Kreisformel angewendet werden:

$$\begin{aligned} G_{pe}(s) = \frac{v}{p_e} &= \frac{\frac{1}{R_h} \cdot \frac{1}{V_{10} \cdot \beta \cdot s} \cdot A_1 \cdot \frac{1}{k + m \cdot s}}{1 + \frac{1}{V_{10} \cdot \beta \cdot s} \cdot \left(\frac{1}{R_h} + A_1^2 \cdot \frac{1}{k + m \cdot s} \right)} \\ &= \frac{A_1}{V_{10} \cdot \beta \cdot s \cdot (k + m \cdot s) \cdot R_h + k + m \cdot s + A_1^2 \cdot R_h} \\ &= \frac{A_1}{k + A_1^2 \cdot R_h + s \cdot (m + k \cdot R_h \cdot V_{10} \cdot \beta) + m \cdot R_h \cdot V_{10} \cdot \beta \cdot s^2}. \end{aligned}$$

Die Normalform lautet

$$G_{pe}(p) = \frac{v}{p_e} = \frac{A_1}{k + A_1^2 \cdot R_h} \cdot \frac{1}{1 + \frac{m + k \cdot R_h \cdot V_{10} \cdot \beta}{k + A_1^2 \cdot R_h} \cdot s + \frac{m \cdot R_h \cdot V_{10} \cdot \beta}{k + A_1^2 \cdot R_h} \cdot s^2}. \quad (3.26)$$

Die Gesamtfunktion ist

$$v = G_{pe}(s) \cdot p_e + G_{FL}(s) \cdot F_L.$$

Beide ÜTF haben denselben Nenner, da beide den identischen Wirkungskreis besitzen. Damit kann auch geschrieben werden

$$v = \frac{\frac{A_1}{k + A_1^2 \cdot R_h} \cdot p_e - \frac{1}{k + A_1^2 \cdot R_h} \cdot (1 + R_h \cdot V_{10} \cdot \beta \cdot s) \cdot F_L}{1 + \frac{m + k \cdot R_h \cdot V_{10} \cdot \beta}{k + A_1^2 \cdot R_h} \cdot s + \frac{m \cdot R_h \cdot V_{10} \cdot \beta}{k + A_1^2 \cdot R_h} \cdot s^2}. \quad (3.27 \text{ a})$$

Die Funktion hat wiederum die bekannte Form eines Systems 2. Ordnung

$$v = \frac{K_{P1} \cdot p_e - K_{P2} \cdot (1 + T_D \cdot s) \cdot F_L}{1 + 2DT \cdot s + T^2 \cdot s^2}. \quad (3.27 \text{ b})$$

Ein Zahlenbeispiel. Folgende Übertragungsfaktoren sind für einen derartigen Hydraulikantrieb aus [3.11] übernommen worden (s. Tabelle 3.2):

Tabelle 3.2 Übertragungsfaktoren eines Hydraulikantriebs (Beispiel)

A_1	β	V_{10}	m	k	F_L	R_h
1000 mm^2	10^{-3} mm^2/N	10^5 mm^3	2000 kg	10 $N \cdot s/mm$	200 N	$1,5 \cdot 10^{-4}$ $N \cdot s/mm^5$

Werden die erforderlichen Werte in die Gln. (3.27 a) und (3.27 b) eingesetzt, dann ergeben sich für K_{P1} , K_{P2} , T_D , T und D :

$$K_{P1} = \frac{A_1}{k + A_1^2 \cdot R_h} = \frac{1000 \text{ mm}^2}{10 \frac{N \cdot s}{mm} + (1000 \text{ mm}^2)^2 \cdot 1,5 \cdot 10^{-4} \frac{N \cdot s}{mm^5}} = 6,25 \frac{mm^3}{N \cdot s},$$

$$K_{P2} = \frac{1}{k + A_1^2 \cdot R_h} = \frac{1}{10 \frac{N s}{mm} + \left(1000 mm^2\right)^2 \cdot 1,5 \cdot 10^{-4} \frac{N s}{mm^5}} = 6,25 \cdot 10^{-3} \frac{mm}{N s},$$

$$T_D = R_h \cdot V_{10} \cdot \beta = 1,5 \cdot 10^{-4} \frac{N s}{mm^5} \cdot 10^5 mm^3 \cdot 10^{-3} \frac{mm^2}{N} = 0,015 s,$$

$$T^2 = \frac{m \cdot R_h \cdot V_{10} \cdot \beta}{k + A_1^2 \cdot R_h} = \frac{2000 kg \cdot 1,5 \cdot 10^{-4} \frac{N s}{mm^5} \cdot 10^5 mm^3 \cdot 10^{-3} \frac{mm^2}{N} \cdot \frac{1 N}{1000 kg \cdot mm / s^2}}{10 \frac{N s}{mm} + \left(1000 mm^2\right)^2 \cdot 1,5 \cdot 10^{-4} \frac{N s}{mm^5}} \approx 1,9 \cdot 10^{-4} s^2$$

$$\rightarrow T \approx 0,014 s,$$

(Da sich die Dimension der Masse (hier kg) nicht herauskürzt, muss eine entsprechende Erweiterung mit $\frac{1 N}{1000 kg \cdot mm / s^2}$ durchgeführt werden.)

$$2DT = \frac{m + k \cdot R_h \cdot V_{10} \cdot \beta}{k + A_1^2 \cdot R_h} = \frac{2000 kg \cdot \frac{1 N}{1000 kg \cdot mm / s^2} + 10 \frac{N s}{mm} \cdot 1,5 \cdot 10^{-4} \frac{N s}{mm^5} \cdot 10^5 mm^3 \cdot 10^{-3} \frac{mm^2}{N}}{10 \frac{N s}{mm} + \left(1000 mm^2\right)^2 \cdot 1,5 \cdot 10^{-4} \frac{N s}{mm^5}} \approx 0,0134 s$$

$$\rightarrow D = \frac{2DT}{2T} = \frac{0,0134 s}{2 \cdot 0,014 s} = 0,48.$$

Wird in Gl. (3.27) der Laplace-Operator s gleich null gesetzt, dann entsteht eine Aussage über das statische Verhalten:

$$v = \frac{A_1}{k + A_1^2 \cdot R_h} \cdot p_e - \frac{1}{k + A_1^2 \cdot R_h} \cdot F_L = 6,25 \frac{mm^3}{N s} \cdot p_e - 6,25 \cdot 10^{-3} \frac{mm}{N s} \cdot F_L.$$

Für z. B. $p_e = 100 bar = 10 N / mm^2$ und $F_L = 200 N$ ergibt sich eine stationäre Geschwindigkeit $v \approx 61 mm / s$. Das stimmt mit den Ergebnissen in [3.11] überein.

3.5 Heizplatte

In diesem Beispiel ist die Wärmekapazität von Körpern die Basis für das Speichern von Energie und damit für die verzögerte Veränderung von Temperaturen in diesem System.

3.5.1 Erarbeitung Blockschaltbild

Der 1. Schritt:

Das Schema der Heizplatte zeigt Abb. 3.18 a in allgemeiner Form und Abb. 3.18 b für den für die Modellierung umgezeichneten thermodynamischen Teil. (Beachte: Die beiden Eingangsgrößen sind nicht identisch.) In einem thermodynamischen System werden in Körpern Wärmeleistungen P_i gespeichert. Das führt zu Änderungen der Temperaturen ϑ_i dieser Körper und zum Wandern von Wärmeleistungen vom Körper i zum Körper j , wenn eine Temperaturdifferenz $\vartheta_i - \vartheta_j > 0$ besteht.

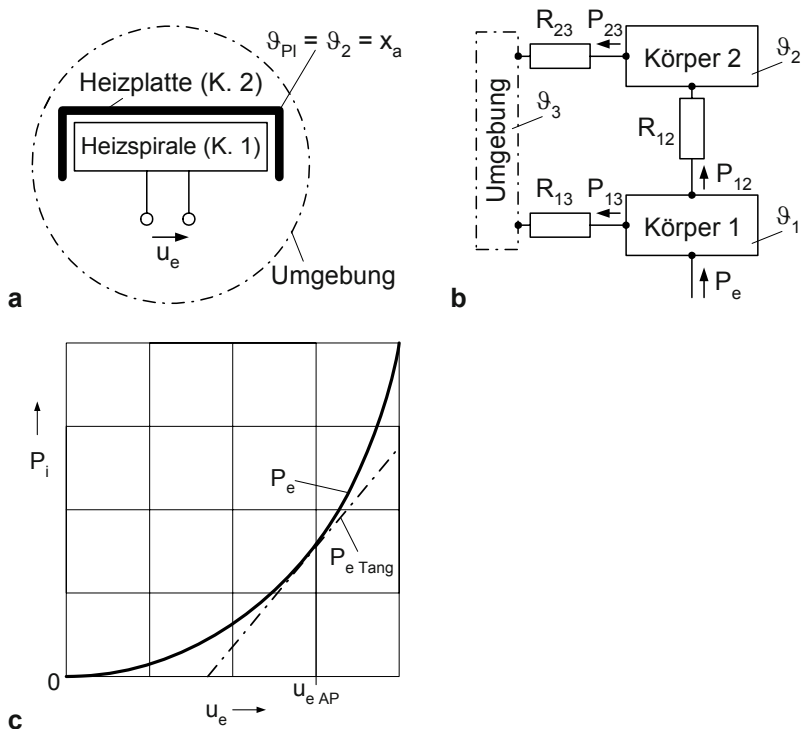


Abb. 3.18 Heizplatte. **a** Schema allgemein **b** Schema für Modellierung umgezeichnet **c** qualitative Kurvenverläufe der Funktionen $P_e = f(u_e)$ Heizspirale = Körper 1, Heizplatte = Körper 2

Die Heizspirale aus einer temperaturfesten Legierung besitzt den elektrischen Widerstand R . Wird eine Spannung u_e angelegt, entsteht eine elektrische Leistung, die vollständig in die Eingangs-Wärmeleistung P_e überführt wird:

$$P_e = \frac{u_e^2}{R} . \quad (3.28 \text{ a})$$

Die linearisierte Funktion lautet gemäß Gl. (3.1)

$$P_{e \text{ Tang}} = \frac{u_{e \text{ AP}}^2}{R} + \frac{2 u_{e \text{ AP}}}{R} \cdot (u_e - u_{e \text{ AP}}) = \frac{2 u_{e \text{ AP}}}{R} \cdot u_e - \frac{u_{e \text{ AP}}^2}{R} . \quad (3.28 \text{ b})$$

Die qualitativen Kurvenverläufe beider Funktionen sind in Abb. 3.18 c dargestellt.

Im Folgenden wird das thermodynamische System mit seinen Wärmeleistungen und Temperaturen, also die Reaktion des Systems auf Änderungen der Eingangs-Wärmeleistung P_e , berechnet, so dass Gl. (3.28 b) nicht in das Gesamt-Modell eingeht.

Der 2. Schritt:

Die Energiespeicher sind die Körper 1 und 2. Ihre allgemeine Funktion ist aus Tabelle 2.4 zu übernehmen:

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{C_W} \cdot \int P_{W \text{ gesp}} dt .$$

Nach der Transformation in den Bildbereich gilt für diese Körper:

$$\mathcal{Q}_1 = \frac{1}{C_{W1} \cdot s} \cdot P_{W \text{ gesp}1} , \quad \mathcal{Q}_2 = \frac{1}{C_{W2} \cdot s} \cdot P_{W \text{ gesp}2} . \quad (3.29 \text{ a})$$

Die Umgebung speichert zwar ebenfalls Wärmeleistung, die Auswirkung auf die Temperatur $\mathcal{Q}_3$ ist jedoch infolge der sehr großen Wärmekapazität der Umgebung i. Allg. vernachlässigbar. Die Wärmekapazität C_W eines Körpers ist von seiner Masse m und von seiner spezifischen Wärmekapazität c abhängig:

$$C_W = m \cdot c . \quad (3.29 \text{ b})$$

Der 3. Schritt:

Die entstehenden Temperaturdifferenzen sind die Ursache für den Transport von Wärmeleistungen. Es entstehen folgende Bilanzgleichungen

$$P_{W \text{ gesp}1} = P_{el} - P_{12} - P_{13} , \quad P_{W \text{ gesp}2} = P_{12} - P_{23} . \quad (3.30)$$

Aus den im 2. und 3. Schritt ermittelten Beziehungen entstehen die beiden Teil-Blockschaltbilder in Abb. 3.19.

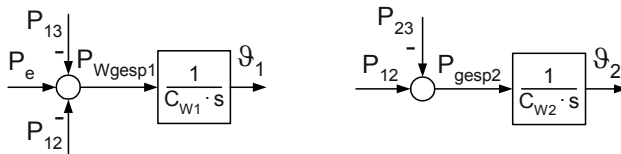


Abb. 3.19 Heizplatte, Blockschaltbilder des 2. und 3. Schrittes

Da die Wärmeleistungsbilanz in Verbindung mit dem jeweiligen Wärmespeicher zur Modellierung weiterer technischer Systeme aufgestellt werden muss, ist sie mit allgemeinem Ansatz in den **Anhang A, Tabelle A.3**, übernommen worden.

Der 4. Schritt:

Dem Transport einer Wärmeleistung P_{mn} von Körper m zu Körper n wird analog zum ohmschen Widerstand ein Widerstand R_{mn} entgegengesetzt (die Leistung P_{mn} entspricht dem Strom, der Temperaturabfall $\Delta\vartheta_{mn}$ dem Spannungsabfall). Der Widerstand R_{mn} wird in diesem Beispiel als konstant angenommen:

$$\Delta\vartheta_{mn} = R_{mn} \cdot P_{mn} \text{ bzw. } P_{mn} = \frac{1}{R_{mn}} \cdot \Delta\vartheta_{mn}. \quad (3.31)$$

Bei detaillierteren Betrachtungen ist zu erkennen, dass sich der Widerstand gegen den Transport einer Wärmeleistung aus mehreren, teilweise nichtlinearen Bestandteilen zusammensetzt, z. B. Wärmeübergangswiderständen zwischen benachbarten festen Stoffen und Fluiden. Darauf wird in Kap. 6 eingegangen.

Die Gleichung (3.31) ist als typische Grundbeziehung der Thermodynamik in **Anhang A, Tabelle A.4**, übernommen worden.

Der 5. Schritt:

Mit Hilfe der Schritte 2 bis 4 entsteht das Blockschaltbild in Abb. 3.20.

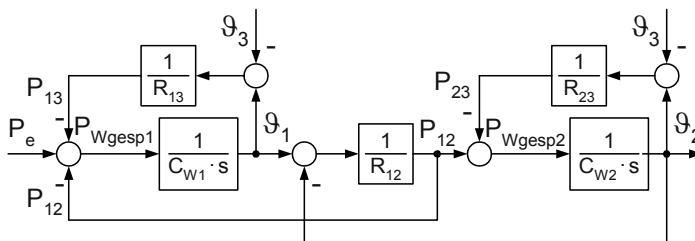


Abb. 3.20 Das Blockschaltbild einer Heizplatte

Die Kontrolle zeigt, dass alle gefundenen Zusammenhänge im Blockschaltbild berücksichtigt worden sind und alle vier Wirkungskreise eine Wirkungsumkehr beinhalten.

3.5.2 Gesamtübertragungsfunktion

Wird davon ausgegangen, dass die Umgebungstemperatur ϑ_3 im betrachteten Zeitraum konstant bleibt, dann muss die Reaktion des Systems auf Änderungen von ϑ_3 nicht untersucht werden. Es genügt die Berechnung der Gesamt-ÜTF $\frac{\vartheta_2}{P_e}$ für den

Fall $\vartheta_3 = 0$. Es muss jedoch beachtet werden, dass sich das ergebende $\vartheta_2(t)$ dann die Differenz zur Umgebungstemperatur ist. Um die ÜTF zu berechnen, sollte wie in Abschn. 3.1.2 vorgegangen werden: zuerst die beiden inneren Schleifen m. H. der Kreisformel auflösen. Es ergeben sich die ÜTF

$$\frac{\vartheta_1}{P_e - P_{12}} = \frac{\frac{1}{C_{W1} \cdot s}}{1 + \frac{1}{C_{W1} \cdot s} \cdot \frac{1}{R_{13}}} = \frac{R_{13}}{1 + C_{W1} \cdot R_{13} \cdot s}, \quad (3.32a)$$

$$\frac{\vartheta_2}{P_{12}} = \frac{\frac{1}{C_{W2} \cdot s}}{1 + \frac{1}{C_{W2} \cdot s} \cdot \frac{1}{R_{23}}} = \frac{R_{23}}{1 + C_{W2} \cdot R_{23} \cdot s}. \quad (3.32b)$$

Das Blockschaltbild vereinfacht sich dann zu dem in Abb. 3.21.

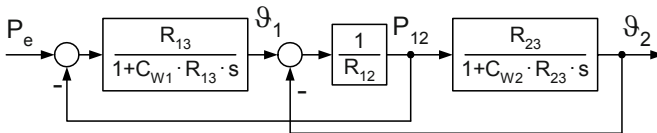


Abb. 3.21 Das vereinfachte Blockschaltbild einer Heizplatte

Auf das Umzeichnen wird verzichtet; das Verschieben der äußeren Summationsstelle und der äußeren Verzweigungsstelle wird jetzt „im Kopf“ vorgenommen (vgl. Abb. 3.16). Das führt zu dem Ansatz

$$\frac{\mathcal{G}_2}{P_e} = \frac{\frac{R_{13}}{1 + C_{W1} \cdot R_{13} \cdot s} \cdot \frac{1}{R_{12}} \cdot \frac{R_{23}}{1 + C_{W2} \cdot R_{23} \cdot s}}{1 + \frac{1}{R_{12}} \cdot \left(\frac{R_{13}}{1 + C_{W1} \cdot R_{13} \cdot s} + \frac{R_{23}}{1 + C_{W2} \cdot R_{23} \cdot s} \right)}.$$

Mit den üblichen Umformungen ergibt sich die relativ große ÜTF in Normalform

$$\frac{\mathcal{G}_2}{P_e} = \frac{R_{13} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(C_1 \cdot R_{13} + C_2 \cdot R_{23}) \cdot R_{12} + R_{13} \cdot R_{23} \cdot (C_1 + C_2)}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \cdot s + \frac{C_1 \cdot R_{13} \cdot C_2 \cdot R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \cdot s^2}. \quad (3.33)$$

Eine Modellvereinfachung ist möglich, wenn angenommen werden kann, dass die Heizspirale gut gegen die Umgebung isoliert ist; dann geht $R_{13} \rightarrow \infty$. Es ergibt sich die wesentlich übersichtlichere ÜTF

$$\frac{\mathcal{G}_2}{P_e} = \frac{R_{23}}{1 + (C_1 \cdot R_{12} + (C_1 + C_2) \cdot R_{23}) \cdot s + (C_1 \cdot R_{12} \cdot C_2 \cdot R_{23}) \cdot s^2}. \quad (3.34)$$

(Für die Herleitung der Gl. (3.34) reicht es nicht, in Gl. (3.33) R_{13} unendlich zu setzen; das muss bereits in der Nebenrechnung in Gl. (3.32a) geschehen.)

Auf ein Zahlenbeispiel wird verzichtet, da in Kap. 6 auf komplexere thermodynamische Systeme, die den hier beschriebenen Fall mit enthalten, ausführlich (einschließlich konkreter Berechnungen) eingegangen wird.

3.6 Zwei verbundene offene Flüssigkeitsbehälter

Systeme mit Behältern großer Speicherkapazität, wie sie vor allem in der Verfahrenstechnik anzutreffen sind, sind dadurch charakterisiert, dass die Prozesse des Befüllens und Entleerens oder des Mischens ihrer Inhalte sehr langsam ablaufen, dass sie sehr große Zeitkonstanten besitzen. Bei zwei verbundenen Behältern können diese Zeitkonstanten manuell ermittelt werden.

3.6.1 Erarbeitung Blockschaltbild

Der 1. Schritt:

Das Schema der zwei verbundenen offenen Flüssigkeitsbehälter, die von einer Pumpe-Elektromotor-Kombination mit Wasser versorgt werden, zeigt Abb. 3.22.

Es interessiert der Zeitverlauf der Füllstandshöhe h_2 , die mit einem Füllstandssensor in die proportionale Spannung u_a umgesetzt wird, nach Veränderung der Spannung u_e .

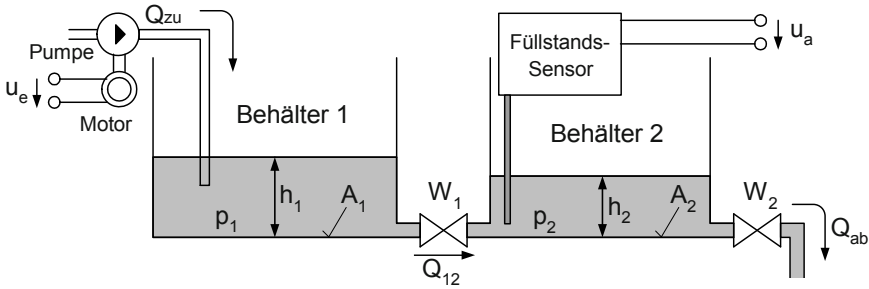


Abb. 3.22 Das Schema zweier verbundener offener Flüssigkeitsbehälter, die von einer Pumpe-Elektromotor-Kombination mit Wasser versorgt werden. A_i Behältergrundfläche, p_i Bodendruck, W_i Strömungswiderstand

Der 2. Schritt:

Die Energiespeicher sind die Behälter 1 und 2. Die allgemeine Funktion ihrer Zustandsgrößen ist aus Tabelle 2.4 (mit den dort verwendeten Kurzzeichen) zu übernehmen:

$$p_i = \frac{\rho \cdot g}{A_i} \cdot \int Q_{gespi} dt.$$

Nach der Transformation in den Bildbereich gilt für diese Behälter:

$$p_1 = \frac{\rho \cdot g}{A_1 \cdot s} \cdot Q_{gesp1}, \quad p_2 = \frac{\rho \cdot g}{A_2 \cdot s} \cdot Q_{gesp2}. \quad (3.35)$$

In der Praxis werden auch in Flüssigkeitsbehältersystemen (im Gegensatz zur Thermodynamik, Kap. 6) die Drücke als Differenz zum Luftdruck definiert.

Wie in Abschn. 3.3 beschrieben, besitzt der Elektromotor ebenfalls Energiespeicher. In diesem Abschnitt wird angenommen, dass die durch einen Elektromotor verursachten Verzögerungen im Verhältnis zu den durch die Behälter entstehenden Verzögerungen vernachlässigbar klein sind. (Ein Zahlenbeispiel folgt.)

Der 3. Schritt:

Die Volumenstrombilanzen lauten:

$$Q_{gesp1} = Q_{zu} - Q_{12}, \quad Q_{gesp2} = Q_{12} - Q_{ab}. \quad (3.36)$$

Aus den im 2. und 3. Schritt ermittelten Beziehungen entstehen die beiden Teil-Blockschaltbilder in Abb. 3.23. (In diesen Blockschaltbildern sind die Zwischengrößen $V_{\text{gesp}i}$ und h_i mit dargestellt.)

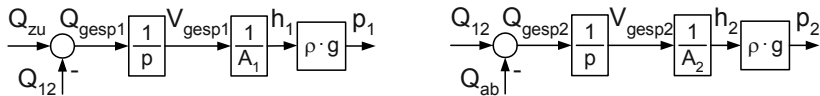


Abb. 3.23 Blockschaltbilder des 2. und 3. Schrittes der Modellierung zweier verbundener offener Flüssigkeitsbehälter

Da auch diese Art von Volumenstrombilanzen in Verbindung mit den zugehörigen Behältern zur Modellierung weiterer technischer Systeme benötigt werden, sind sie mit allgemeinem Ansatz in den **Anhang A, Tabelle A.3**, übernommen worden.

Der 4. Schritt:

In derartigen Behältersystemen werden Strömungswiderstände i. Allg. mit W_i bezeichnet. Sie werden ebenfalls, wie in der Ölhydraulik, in Anlehnung an den Ohmschen Widerstand als Verhältnis von Druckabfall zu Volumenstrom definiert (s. Abschn. 3.4 und **Anhang A, Tabelle A.4**). Die Strömungswiderstände werden auch in diesem Beispiel als konstant angenommen:

$$Q_{12} = \frac{1}{W_1} \cdot (p_1 - p_2), \quad (3.37 \text{ a})$$

$$Q_{ab} = \frac{1}{W_2} \cdot p_2. \quad (3.37 \text{ b})$$

Das Verhalten der Pumpe-Elektromotor-Kombination wird näherungsweise als proportional wirkend angenommen, auch das des Füllstandssensors:

$$Q_{zu} = K_1 \cdot u_e, \quad u_a = K_2 \cdot h_2. \quad (3.38)$$

Es ist erkennbar, dass dieses System mehrere Nichtlinearitäten enthalten könnte (hinzu käme eine weitere Nichtlinearität, wenn z. B. sich ein Behälter nach oben verjüngen würde). Unter der Bedingung, dass alle Nichtlinearitäten an einem Arbeitspunkt linearisiert werden können, ist die lineare Beschreibung in Abschn. 3.6.2 möglich.

Der 5. Schritt:

Es entsteht das Blockschaltbild in Abb. 3.24.

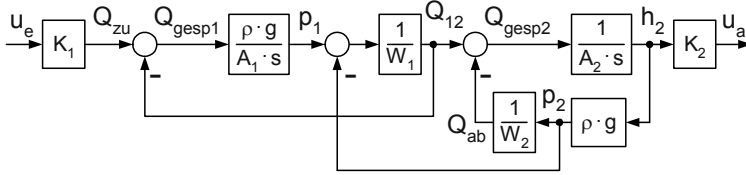


Abb. 3.24 Das Gesamt-Blockschaltbild zweier verbundener offener Flüssigkeitsbehälter

Es ist zu erkennen, dass alle drei Wirkungskreise eine Wirkungsumkehr beinhalten.

3.6.2 Die Gesamtübertragungsfunktion

Um die Gesamt-ÜTF zu ermitteln, muss das Blockschaltbild so umgeformt werden, dass einer der drei Wirkungskreise aufgelöst werden kann (Abb. 3.25 a).

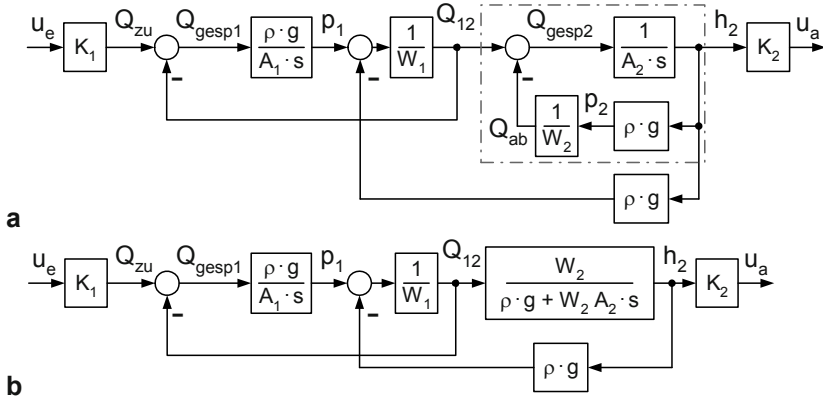


Abb. 3.25 Das umgezeichnete Gesamt-Blockschaltbild der zwei verbundenen offenen Flüssigkeitsbehälter **a** mit gekennzeichnetem aufzulösendem Wirkungskreis **b** mit nach Gl. (3.39) aufgelöstem Wirkungskreis

Die Übertragungsfunktion dieses Wirkungskreises lautet, nachdem die Kreisformel angewendet worden ist:

$$\frac{h_2}{Q_{12}} = \frac{\frac{1}{A_2 \cdot s}}{1 + \frac{1}{A_2 \cdot s} \cdot \rho \cdot g \cdot \frac{1}{W_2}} = \frac{W_2}{\rho \cdot g + W_2 \cdot A_2 \cdot s} \quad (3.39)$$

Die Beseitigung der Doppelbrüche ist hier ausreichend, die Normalform wird bei diesem Zwischenergebnis nicht benötigt.

Das führt zu dem weiteren Zwischen-Blockschaltbild in Abb. 3.25 b. Auch hier kann auf das Umzeichnen verzichtet werden. Das Verschieben der äußeren Summationsstelle und der äußeren Verzweigungsstelle wird analog Abb. 3.16 durchgeführt. Das führt zu dem Ansatz

$$G(s) = \frac{u_a}{u_e} = \frac{K_1 \cdot \frac{\rho \cdot g}{A_1 \cdot s} \cdot \frac{1}{W_1} \cdot \frac{W_2}{\rho \cdot g + W_2 \cdot A_2 \cdot s} \cdot K_2}{1 + \frac{1}{W_1} \cdot \left(\frac{\rho \cdot g}{A_1 \cdot s} + \frac{W_2}{\rho \cdot g + W_2 \cdot A_2 \cdot s} \cdot \rho \cdot g \right)}$$

$$= \frac{K_1 \cdot \rho \cdot g \cdot W_2 \cdot K_2}{(\rho g + W_2 \cdot A_2 \cdot s) \cdot A_1 \cdot s \cdot W_1 + \rho \cdot g \cdot (\rho g + W_2 \cdot A_2 \cdot s) + \rho \cdot g \cdot W_2 \cdot A_1 \cdot s}.$$

Die Normalform mit dem bekannten PT2-Verhalten lautet

$$G(s) = \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot W_2}{\rho \cdot g} \cdot \frac{1}{1 + \frac{W_1 A_1 + W_2 A_1 + W_2 A_2}{\rho \cdot g} \cdot s + \frac{W_1 A_1 \cdot W_2 A_2}{(\rho \cdot g)^2} \cdot s^2}$$

$$= \frac{K_P}{1 + 2DT \cdot s + T^2 \cdot s^2}. \quad (3.40)$$

Ein Zahlenbeispiel. Ein Laborbehältersystem für Wasser besitze die Übertragungsfaktoren gemäß Tabelle 3.3 (die Widerstandswerte sind an einem typischen Arbeitspunkt ermittelt worden):

Tabelle 3.3 Kenngrößen eines Laborbehältersystems (Beispiel)

K_1	K_2	A_1	A_2	W_1	W_2
$3,3 \frac{\text{cm}^3}{\text{s} \cdot \text{V}}$	$1,0 \frac{\text{V}}{\text{cm}}$	19 cm^2	39 cm^2	$9 \cdot 10^{-4} \frac{\text{bar} \cdot \text{s}}{\text{cm}^3}$	$3,6 \cdot 10^{-4} \frac{\text{bar} \cdot \text{s}}{\text{cm}^3}$

Der Bodendruck p_i in den Behältern beträgt $p_i = \rho \cdot g \cdot h_i$.

Es werden $g = 10 \text{ m/s}^2$ und $\rho = 1 \text{ kg/dm}^3$ gesetzt. Benötigt wird, damit mit den obigen Dimensionen gerechnet werden kann, für $\rho \cdot g$ die Dimension bar/cm . Die Umrechnung kann durch gezieltes Erweitern vorgenommen werden:

$$\rho \cdot g = \frac{1 \text{ kg}}{\text{dm}^3} \cdot \frac{10 \text{ m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{10 \text{ bar}}{1 \text{ N/mm}^2} \cdot \frac{1 \text{ N}}{1 \text{ kg m/s}^2} \cdot \frac{1 \text{ dm}^2}{10^4 \text{ mm}^2} \cdot \frac{1 \text{ dm}}{10 \text{ cm}} = 10^{-3} \frac{\text{bar}}{\text{cm}}.$$

Das führt auf $p_i = \rho \cdot g \cdot h_i = 0,001 \frac{\text{bar}}{\text{cm}} \cdot h_i$.

Werden diese Werte in Gl. (3.40) eingesetzt, ergibt sich für K_P :

$$K_P = \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot W_2}{\rho \cdot g} = \frac{3,3 \frac{\text{cm}^3}{\text{s} \cdot \text{V}} \cdot 1,0 \frac{\text{V}}{\text{cm}} \cdot 3,6 \cdot 10^{-4} \frac{\text{bar} \cdot \text{s}}{\text{cm}^3}}{0,001 \frac{\text{bar}}{\text{cm}}} = 1,2.$$

In den folgenden Beziehungen für T und D sind die Dimensionen nicht angegeben. Es lässt sich aber leicht nachprüfen, dass sie sich bis auf Dimensionen s^2 und s herauskürzen:

$$T^2 = \frac{W_1 \cdot A_1 \cdot W_2 \cdot A_2}{(\rho \cdot g)^2} = \frac{9 \cdot 10^{-4} \cdot 19 \cdot 3,6 \cdot 10^{-4} \cdot 39}{(0,001)^2} = 240 \text{ s}^2 \rightarrow T \approx 15,5 \text{ s},$$

$$2DT = \frac{W_1 \cdot A_1 + W_2 \cdot A_1 + W_2 \cdot A_2}{\rho \cdot g} = \frac{9 \cdot 10^{-4} \cdot 19 + 3,6 \cdot 10^{-4} \cdot 19 + 3,6 \cdot 10^{-4} \cdot 39}{0,001} \approx 38 \text{ s}$$

$$\rightarrow D = \frac{2DT}{2T} = \frac{38 \text{ s}}{2 \cdot 15,5 \text{ s}} = 1,225.$$

Da die Dämpfung $D > 1$ ist, entstehen reelle Zeitkonstanten:

$$T_{1/2} = T \cdot \left(D \pm \sqrt{D^2 - 1} \right) = 15,5 \text{ s} \cdot \left(1,225 \pm \sqrt{1,225^2 - 1} \right)$$

$$\rightarrow T_1 = 30 \text{ s}, T_2 = 8 \text{ s}.$$

Bei einem Vergleich dieser Zeitkonstanten mit denen des Elektromotors in Abschn. 3.3 wird erkennbar, dass die Vernachlässigung der Zeitkonstanten des Elektromotors hier berechtigt ist.

Mit Hilfe von **Anhang B, Tabelle B.1**, ist für diese Koeffizienten die Sprungantwort des Behältersystems anzugeben, hier die normierte Sprungantwort, deren statischer Endwert dem Wert eins zustrebt (u_{e0} ist die Eingangssprunghöhe):

$$\frac{u_a(t)}{K_P \cdot u_{e0}} = 1 + \frac{1}{T_1 - T_2} \cdot (T_2 \cdot e^{-t/T_2} - T_1 \cdot e^{-t/T_1}) = 1 + \frac{1}{22 \text{ s}} \cdot (8 \text{ s} \cdot e^{-t/8 \text{ s}} - 30 \text{ s} \cdot e^{-t/30 \text{ s}}).$$

Nach $t = 60 \text{ s}$ sind erst etwa 82 % des statischen Endwertes erreicht:

$$\frac{u_a(t)}{K_P \cdot u_{e0}} = 1 + \frac{1}{22 \text{ s}} \cdot (8 \text{ s} \cdot e^{-60 \text{ s}/8 \text{ s}} - 30 \text{ s} \cdot e^{-60 \text{ s}/30 \text{ s}}) = 1 - 0,184 \approx 0,82.$$

Es ist ersichtlich, dass bei um Größenordnungen größeren Behältergrundflächen A_i die Eigenzeitkonstante T ebenfalls um Größenordnungen größer sein wird und Übergangsvorgänge mehrere Stunden dauern können (s. Gl. (3.40)).

3.7 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden Systeme beschrieben und in adäquate mathematische Modelle überführt, die eine geschlossene Berechnung typischer Zeitverläufe erlauben. Das setzte voraus, dass

- ausschließlich lineare Modelle hergeleitet wurden und dass
- die Beispielsysteme nur jeweils zwei relevante Energiespeicher besaßen.

Die Beispiele dieses Kapitels enthalten bis auf die Torsionsfeder alle Energiespeicher, die in Tabelle 2.4 aufgeführt sind.

Die Übertragungsfunktionen aller Modelle wurden in eine Form gebracht, die die entstehenden Verzögerungseinflüsse mit Hilfe der Parameter Eigenzeitkonstante T und Dämpfung D beschreiben. Die Sprungantworten aller Modelle können direkt aus **Anhang B** entnommen werden.

Die Beispielsysteme wurden so gewählt, dass sowohl rein elektrische, mechanische oder thermische Systeme zu modellieren waren als auch solche mit Komponenten aus mehreren Bereichen, z. B. der Elektrotechnik und der Technischen Mechanik oder der Fluidtechnik und der Technischen Mechanik. Letztere zeigen die Vorteile der Blockschaltmethode anschaulich auf.

Viele der Beispielsysteme werden in den komplexeren Systemen der Folgekapitel als Teilsysteme wieder auftauchen. Damit wird die Modellierung dieser Systeme, die teilweise sehr hoher Ordnung und mehrfach nichtlinear sind, deutlich erleichtert. Die in diesem Kapitel ermittelten Modell-Bausteine und die aus diesen Bausteinen bestehenden Komponenten sind zum Zwecke des schnellen Auffindens in den **Anhang A, Tabelle A.1 bis Tabelle A.4**, aufgenommen worden.

4 Technische Systeme mit typischen Nichtlinearitäten

In diesem Kapitel stehen die mathematischen Beschreibungen typischer Nichtlinearitäten im Vordergrund. In Kap. 2, Tabelle 2.2 und Abb. 2.1, wurde beispielhaft gezeigt, wie nichtlineare Übertragungsglieder in einem Blockschaltbild dargestellt werden. Im einfachen Fall stehen in den Blöcken nichtlineare Funktionen einer Variablen wie in den Beispielen in Abb. 4.1. Im entsprechenden Block steht die Funktion selbst in zwei Varianten (s. die drei Beispiele links), ihre allg. Funktion $x_a = f(x_e)$ oder ihre grafische Entsprechung als qualitatives Diagramm (s. Beispiel ganz rechts). Für letztere gehen die konkreten Funktionen aus dem Kontext der jeweiligen Abbildung hervor.

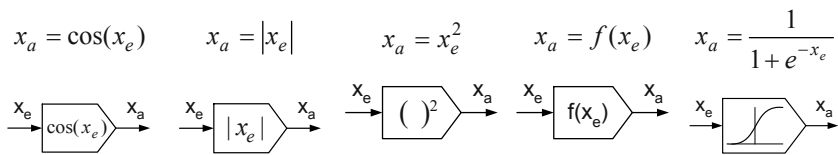


Abb. 4.1 Einfache Nichtlinearitäten (unter den nichtlinearen Funktionen jeweils der Block)

Häufig vorkommende Nichtlinearitäten sind auch die Multiplikation und die Division mehrerer veränderlicher Größen (s. Abb. 4.2).

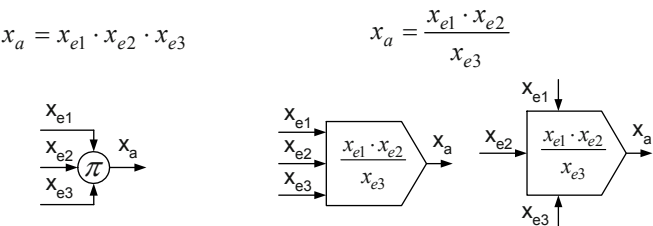


Abb. 4.2 Beispiele der Nichtlinearitäten Multiplikation und Division (unter den nichtlinearen Funktionen jeweils Entsprechungen im Blockschaltbild)

Dies alles ist zusätzlich in **Anhang A, Tabelle A.5**, dargestellt und wird in späteren Beispielen verwendet.

Darüber hinaus existieren in technischen Systemen typische weitere Nichtlinearitäten, die im Rahmen der folgenden Beispiele modelliert werden.

4.1 Feder-Masse-Systeme mit nichtlinearen Reibungs- und Federcharakteristika

4.1.1 Fallende Kugel

Eine starre Kugel der Masse m falle auf einen nachgiebigen Untergrund und werde von diesem zurückgefedert.

Der 1. Schritt:

Das Schema dieses Systems zeigt Abb. 4.3.

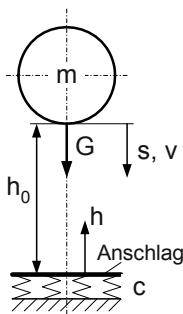


Abb. 4.3 Starre Kugel fällt auf nachgiebigen Untergrund (Schema)

Der 2. bis 5. Schritt:

Das System hat dieselbe Struktur wie das in Abb. 3.5, da ebenfalls eine Masse m einer der Energiespeicher ist. In die Kräftebilanz gehen hier allerdings die Gewichtskraft $G = m \cdot g$ (g ... Erdbeschleunigung), die Kraft des Luftwiderstandes F_{LW} und die erst beim Auftreffen der Kugel auf den Untergrund wirksam werdende Kraft des Anschlages F_{An} ein:

$$F_B = G - F_{LW} - F_{An} \quad \text{mit} \quad G = m \cdot g. \quad (4.1)$$

Ein weiterer Unterschied sind die beiden aus nichtlinearen Beziehungen ermittelbaren Kräfte F_{LW} und F_{An} .

Der Luftwiderstand eines bewegten Körpers wächst nicht linear, sondern in erster Näherung quadratisch mit der Geschwindigkeit, die Kraft F_{LW} wird in Richtung der Geschwindigkeit angegeben (berücksichtigt durch die Vorzeichen-Funktion $\text{sign}(v)$). Dass sie der Bewegung entgegengerichtet ist, wird im Blockschaltbild durch die negative Rückwirkung deutlich:

$$F_{LW} \approx k \cdot v^2 \cdot \text{sign}(v) . \quad (4.2)$$

Der Anschlag wird als lineare Feder definiert, die allerdings nur in einem bestimmten Bereich des Weges s wirkt:

$$F_{An} = \begin{cases} 0 & \text{für } s < h_0 \\ c \cdot (s - h_0) & \text{für } s \geq h_0 . \end{cases} \quad (4.3)$$

Die Materialdämpfung des Anschlages wird vernachlässigt. Nicht im Modell berücksichtigt wird auch, dass die Anschlagkraft infolge der wachsenden Kontaktfläche zwischen Kugel und Anschlag nicht proportional mit der Erhöhung der Eindringtiefe wächst.

Das Blockschaltbild zeigt Abb. 4.4, es ist dem in Abb. 3.7 ähnlich.

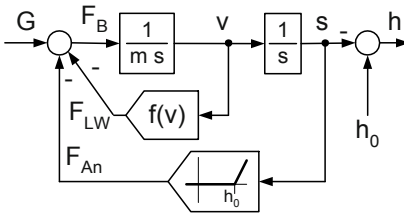


Abb. 4.4 Blockschaltbild des Beispiels „Kugel fällt auf Untergrund“

Die Funktionen in den Gln. (4.2) und (4.3) sind in **Anhang A, Tabelle A.5**, aufgenommen worden, da sie oft benötigt werden.

Ein Zahlenbeispiel. Fällt die Kugel (sie habe die Anfangsgeschwindigkeit null) auf einen nachgiebigen Untergrund mit vernachlässigbarer Materialdämpfung, wird sie wieder nach oben beschleunigt und erreicht einen Umkehrpunkt unterhalb der Startposition. Dieser Punkt ist abhängig vom Luftwiderstand.

- Von folgenden Kenngrößen und Übertragungsfaktoren wird ausgegangen:
 - $m = 0,1 \text{ kg}$,
 - $G = 1 \text{ N}$,
 - $h_0 = 0,1 \text{ m}$,
 - $c = 10000 \text{ N/m}$,
 - $k = 0,25 \text{ N (s/m)}^2$.

Anmerkungen:

- Die Erdbeschleunigung wird mit $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ angesetzt, damit ist

$$G = m \cdot g = 10 \text{ m/s}^2 \cdot 0,1 \text{ kg} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 1 \text{ N} .$$

- Die Masse m muss im Simulations-Blockschaltbild die Dimension $N \cdot s^2 / m$ haben. Die Umrechnung ist einfach, da $1 N = 1 kg \cdot m/s^2$ ist:

$$0,1 kg = 0,1 kg \cdot \frac{1 N}{1 kg \cdot m/s^2} = 0,1 \frac{N \cdot s^2}{m}.$$

Eine Simulation auf der Basis des Blockschaltbildes in Abb. 4.4 führt zu den Signalverläufen in Abb. 4.5.

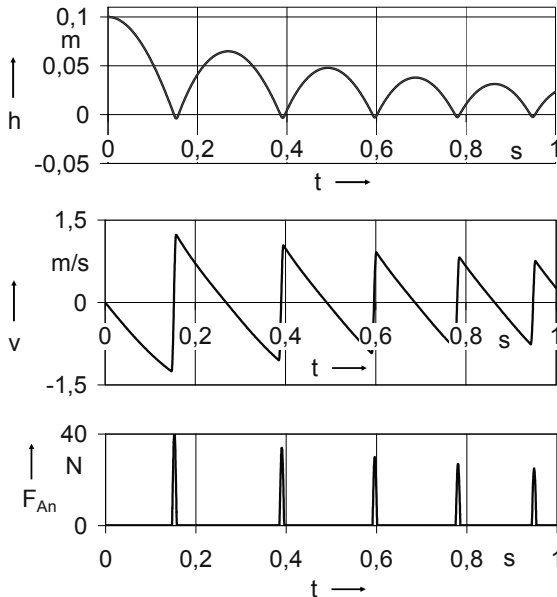


Abb. 4.5 Fallende Kugel, Signalverläufe. h ... Höhe der Kugel über dem Untergrund, v ... Geschwindigkeit, F_{An} ... Aufprallkraft

Die Verifizierung dieser Verläufe kann für die erste Phase überschlägig an Hand der Leistungen vorgenommen werden. Bei vernachlässigter Luftreibung ist im Moment des Aufpralls die potentielle Energie vollständig in kinetische überführt worden (s. Tabelle 2.4):

$$\frac{m}{2} \cdot \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 = \frac{m}{2} \cdot \dot{h}^2 = G \cdot h.$$

Damit ist zu diesem Zeitpunkt

$$\dot{h} = -\sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot h}{m}} = -\sqrt{\frac{2 \cdot 1 \text{ N} \cdot 0,1 \text{ m}}{0,1 \text{ N s}^2 / \text{m}}} \approx -1,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Die Zeit, die bis zum ersten Auftreffen der Kugel vergeht, kann m. H. der Erdbeschleunigung ermittelt werden: Aus

$$\dot{h} = -g \cdot t$$

ergibt sich

$$t = \frac{\dot{h}}{-g} = \frac{-1,4 \text{ m/s}}{-10 \text{ m/s}^2} = 0,14 \text{ s}.$$

Die Eindringtiefe nach dem ersten Auftreffen ist ebenfalls m. H. einer Leistungsgleichung abschätzbar (s. Tabelle 2.4). Es ist

$$\frac{m}{2} \cdot \dot{h}^2 = \frac{c}{2} \cdot h^2$$

und damit

$$h = \dot{h} \cdot \sqrt{m/c} = -1,4 \text{ m/s} \cdot \sqrt{\frac{0,1 \text{ N s}^2 / \text{m}}{10000 \text{ N/m}}} \approx -4,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

Die Multiplikation von $h = 4,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ mit der Federkonstante c des Anschlages ergibt die maximale Anschlagskraft: $F_{An} \approx 44 \text{ N}$. Diese Werte entstehen bei der Simulation annähernd auch. Die Unterschiede resultieren aus dem im Modell berücksichtigten Luftwiderstand.

Es sei darauf hingewiesen, dass die Vernachlässigung der Materialdämpfung im dargestellten Zeitbereich des Vorganges keinen merklichen Einfluss auf die Signalverläufe hat. Sichtbar wird der Einfluss, wenn die Amplituden kleiner werden. Ein exakteres Modell eines Anschlages wird in Abschn. 4.1.3 hergeleitet.

4.1.2 Feder-Masse-System mit unterschiedlichen Reibkraftmodellen

Die Reibung zwischen bewegten Körpern ist ein kompliziertes Phänomen. Es umfasst elastische und plastische Deformationen von Oberflächenbereichen der kontaktierenden Körper. In den Modellen des dynamischen Verhaltens technischer

Systeme müssen Reibkräfte als Funktion der Relativgeschwindigkeiten der kontaktierenden Körper beschrieben werden. Die bekanntesten Modelle sind:

- die Flüssigkeits- oder hydrodynamische Reibung,
- die Luftreibung,
- die Festkörper-, trockene oder coulombsche Reibung,
- die striebsche Reibung.

Der 1. bis 3. Schritt:

Es wird wiederum ein einfaches Feder-Masse-System zugrunde gelegt. Es habe die Struktur gemäß Abb. 4.6 a. Die Masse m bewegt sich auf einer Unterlage, zwischen Masse und Unterlage entsteht eine Reibkraft F_R . Das Blockschaltbild des 2. und 3. Schrittes kann mit den hier wirkenden Eingangskräften direkt aus **Anhang A, Tabelle A.1**, entnommen werden (s. Abb. 4.6 b).



Abb. 4.6 Feder-Masse-System mit unterschiedlichen Reibkraftmodellen. **a** Schema **b** Blockschaltbild des 2. und 3. Schrittes

Der 4. Schritt:

Die Federkraft ist (s. Gl. (3.8 a))

$$F_F = c \cdot (s_e - s).$$

Luftreibung kommt in einem System nach Abb. 4.6 a kaum vor. Sie ist zudem in Abschn. 4.1.1 beschrieben worden (Gl. 4.2). In diesem Abschnitt werden die drei anderen der o. g. Modelle näher untersucht.

Bei Flüssigkeits- oder hydrodynamischer Reibung kann in guter Näherung ein lineares Reibkraftmodell verwendet werden (vgl. auch Gl. (3.8 b)). Die Reibkraft F_{hdR} ist:

$$F_{hdR} = k \cdot v. \quad (4.4 a)$$

Dieser Ansatz gilt dann mit ausreichender Genauigkeit, wenn sich zwischen den reibenden Flächen eine Flüssigkeit oder ein Schmiermittel befindet.

Bei direkter Berührung der reibenden Flächen entsteht Festkörper-, trockene oder coulombsche Reibung. Die Funktion der Reibkraft F_{trR} lautet:

$$F_{trR} = F_{trR0} \cdot \text{sign}(v). \quad (4.4 b)$$

Der Betrag F_{trR0} ist dabei näherungsweise der Normalkraft proportional (s. z. B. [4.4, 4.5]). Für die Berücksichtigung einer Reibkraft in Modellen des dynamischen Verhaltens ist wichtig, dass eine Reibkraft immer der Bewegungsrichtung entgegenwirkt. Da ihr Betrag hier konstant und keine lineare Funktion der Geschwindigkeit v ist, muss dieses Verhalten mit Hilfe der Vorzeichenfunktion (Signumfunktion $sign$) berücksichtigt werden. Dies ist in Abschn. 4.1.1 beschrieben worden.

Ein weiteres Modell geht auf die Stribeck-Kurve zurück [4.4, 4.5]. Diese Kurve besteht aus den Bereichen Festkörperreibung, Mischreibung und Flüssigkeitsreibung (letzteres analog Gl. (4.4 a)). Das Modell der Reibkraft F_{StR} ist:

$$F_{StR} = k \cdot v + \left(F_{trR0} + F_{StR0} \cdot e^{-|K \cdot v|} \right) \cdot sign(v). \quad (4.4 c)$$

Die nichtlinearen Reibkraftmodelle sind in **Anhang A, Tabelle A.5**, aufgenommen worden. Auf Details wird an Hand von Zahlenbeispielen eingegangen.

Der 5. Schritt:

Die qualitativen Kurvenverläufe der nichtlinearen Funktionen $F_{iR} = f(v)$ zeigen die entsprechenden Blöcke in Abb. 4.7, dem Blockschaltbild für die Reibkraftmodelle.

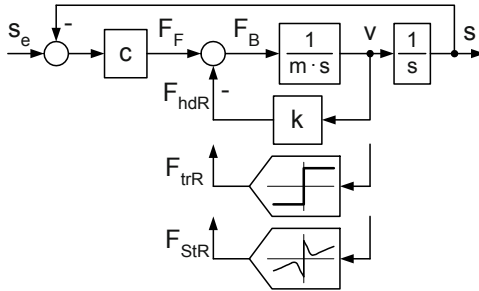


Abb. 4.7 Blockschaltbild eines Feder-Masse-Systems mit unterschiedlichen Reibkraftmodellen

Zahlenbeispiele. Die Masse m wird größer und die Federkonstante c wird kleiner gewählt als in Abschn. 4.1.1. Damit werden die Eigenzeitkonstante T (s. Gl. (3.9))

$$T = \sqrt{m/c} \quad (4.5)$$

und die Periodendauer T_{per} einer schwach gedämpften Schwingung

$$T_{per} \approx 2\pi \cdot T \quad (4.6)$$

größer. Mit $m = 0,2 \text{ kg} = 0,2 \text{ N s}^2 / \text{m}$ und $c = 197 \text{ N / m}$ ist

$$T_{per} \approx 2\pi \cdot T = 0,2 \text{ s}.$$

Die Reibkräfte werden wie folgt festgelegt:

$$F_{hdR} = k \cdot v = 2 \text{ N s / m} \cdot v,$$

$$F_{trR} = F_{trR0} \cdot \text{sign}(v) = 4 \text{ N} \cdot \text{sign}(v),$$

$$F_{StR} = k \cdot v + \left(F_{trR0} + F_{StR0} \cdot e^{-|K \cdot v|} \right) \cdot \text{sign}(v) = 2 \text{ N s / m} \cdot v + \left(4 \text{ N} \cdot e^{-|4 \text{ s / m} \cdot v|} \right) \cdot \text{sign}(v).$$

(Der Parameter F_{trR0} wurde im letzten Modell null gesetzt.)

Die Kurvenverläufe der Funktionen $F_{iR} = f(v)$ sind in Abb. 4.8 dargestellt. Sie haben bei $v = \pm 2 \text{ m/s}$ etwa gleichgroße Reibkraftwerte.

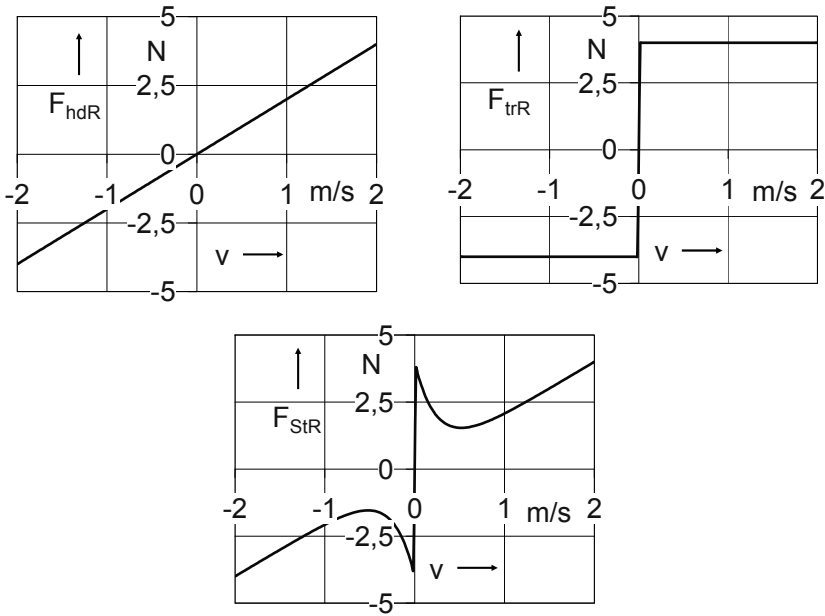


Abb. 4.8 Die quantitativen Kennlinien $F_{iR} = f(v)$ der Reibkraftmodelle F_{hdR} , F_{trR} , F_{StR}

Ein Vergleich des Verhaltens des Feder-Masse-Systems bei Ansatz dreier unterschiedlicher Reibkraft-Modelle wird bei Dreieckimpulsen des Weges $s_e(t)$ der Höhe 1 m und der Breite 2 s durchgeführt (der Betrag der Änderungsgeschwindigkeiten $|ds_e/dt|$ ist damit 1 m/s). Aufgezeichnet werden die Wege s_e und s , die Geschwindigkeit v und die jeweilige Reibkraft F_{hdR} , F_{trR} , bzw. F_{StR} .

Flüssigkeits- oder hydrodynamische Reibung. Die Verläufe der interessierenden Größen zeigt Abb. 4.9.

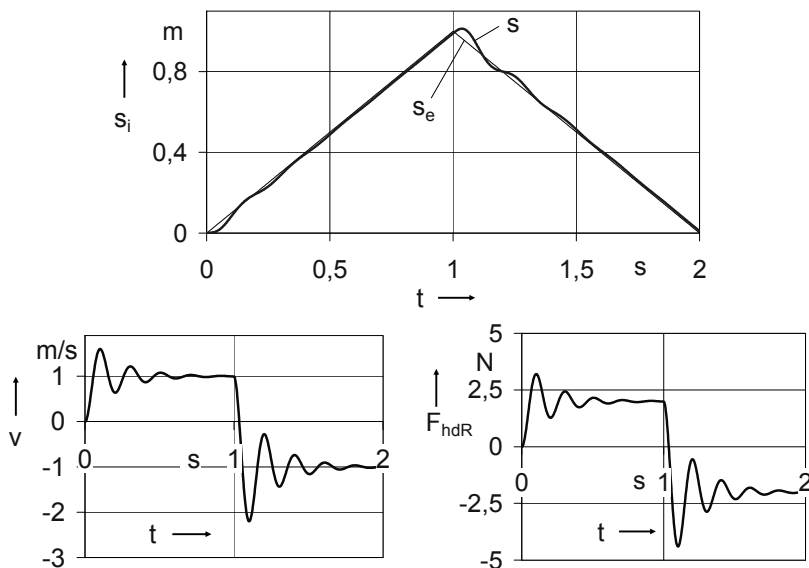


Abb. 4.9 Die Verläufe der Wege s_e und s , der Geschwindigkeit v und der Reibkraft F_{hdR} bei Flüssigkeitsreibung, Weg-Umkehrpunkt bei 1 m

Wird die Kreisformel auf das Blockschaltbild in Abb. 4.7 angewendet, ergeben sich für dieses lineare System eine Eigenzeitkonstante $T \approx 0,32$ s (s. Gl. (3.9)). Die Kurven in Abb. 4.9 bestätigen das. Sie dienen dem Vergleich mit dem Verhalten des Systems bei Verwendung der anderen beiden Reibkraftmodelle.

Das Blockschaltbild und die Zeitverläufe zeigen, dass das System mit der linearen Reibkraft-Funktion insgesamt ein lineares System ist.

Mit Hilfe von Gl. (3.9) ist die Dämpfung nachzurechnen. Es ist

$$D = \frac{2 DT}{2 T} = \frac{k / c}{2 \sqrt{m / c}} = \frac{2 \text{ N s / m} / 197 \text{ N / m}}{2 \sqrt{0,2 \text{ N s}^2 / \text{m} / 197 \text{ N / m}}} = 0,16.$$

Ein Vergleich mit den Sprungantworten eines PT2-Gliedes in **Anhang B** zeigt, dass der Verlauf der Geschwindigkeit v in der ersten Sekunde zwischen den Kurven mit den Dämpfungswerten $D = 0,1$ und $D = 0,2$ liegt. (Die Eingangsgröße s_e ist eine Rampenfunktion und $\dot{s}_e$ damit eine Sprungfunktion. Der Weg s ist eine Rampenantwort und $v = \dot{s}$ eine Sprungantwort.)

Trockene Reibung. Die Verläufe der zu Abb. 4.9 analogen Größen Wege, Reibkraft und Geschwindigkeit zeigt Abb. 4.10.

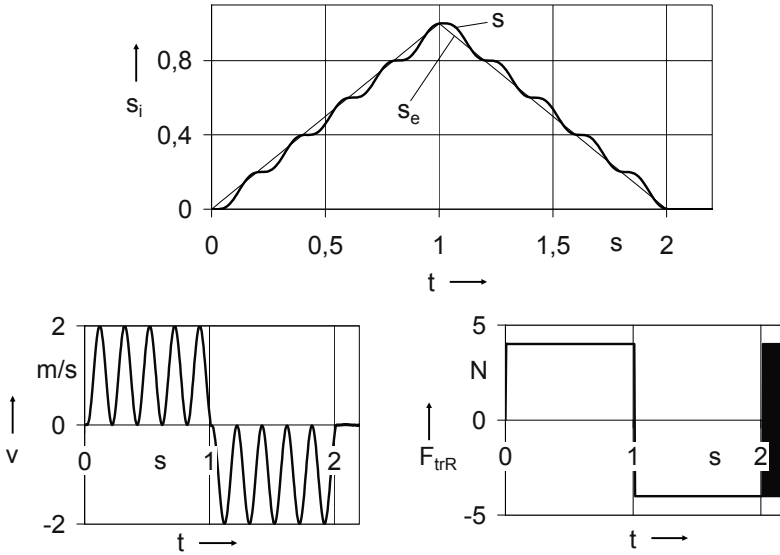


Abb. 4.10 Die Verläufe der Wege s_e und s , der Geschwindigkeit v und der Reibkraft F_{trR} bei trockener Reibung, Weg-Umkehrpunkt bei 1 m

Ein Vergleich der Verläufe bei trockener Reibung mit denen bei Flüssigkeitsreibung zeigt, dass dieses Modell für die Nachbildung eines Zeitverlaufes nicht geeignet ist. Die Kurve $F_{trR} = f(v)$ besitzt waagerechte Kurventeile, die zu den ungedämpften Schwingungen der Geschwindigkeit mit der Eigenfrequenz des Feder-Masse-Systems führen. Die Amplituden der Geschwindigkeitsschwingung sind immer so groß wie der Betrag von ds_e/dt , hier 1 m/s.

Ungünstig ist auch, dass sich bei $t > 2$ s in diesem Modell trotz $ds_e/dt = 0$ die Reibkraft zwischen ihren Grenzwerten hin und her bewegt. Ursache ist die Unstetigkeit der Funktion $F_{trR} = f(v)$ bei $v = 0$. Die Auswirkungen auf die Signale Geschwindigkeit v und Weg s ist jedoch gering, da sich die Kraftimpulse im Wesentlichen gegenseitig aufheben (s. Abb. 4.10).

Stribecksche Reibung. Die Verläufe bei stribeckscher Reibung entsprechen bei dem gegebenen Verlauf von s_e annähernd denen bei Flüssigkeitsreibung. Ursache ist, dass die Sollgeschwindigkeiten $\dot{s}_e$ bei ± 1 m/s liegen und beide Kurven $F_{trR} = f(v)$ in Abb. 4.8 bei diesen Geschwindigkeiten fast den gleichen (positiven) Anstieg haben.

Bei Geschwindigkeiten, in denen die Kurve $F_{SlR} = f(v)$ (Abb. 4.8 rechts) einen negativen Anstieg besitzt, entsteht der so genannte *Stick-Slip-Effekt* [4.7]. Die entstehenden Signalverläufe zeigt Abb. 4.11.

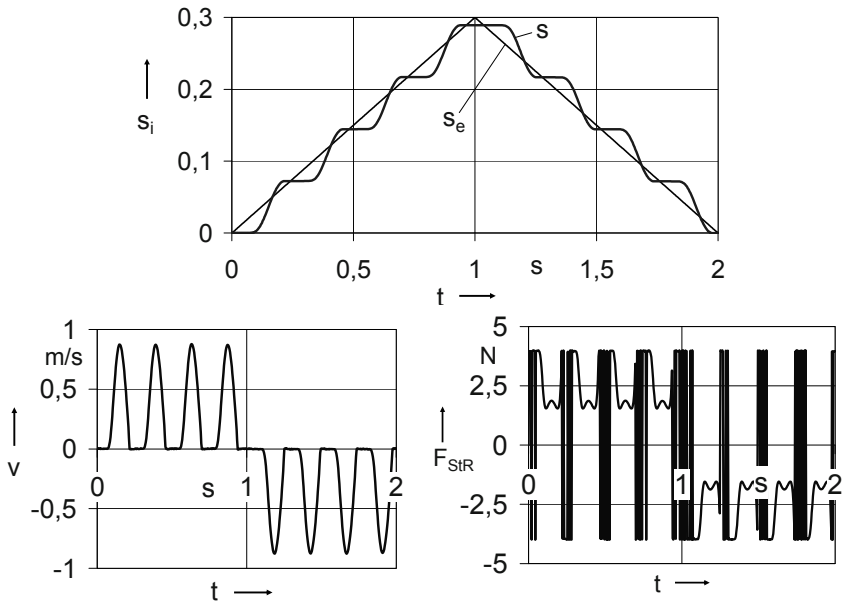


Abb. 4.11 Die Verläufe der Wege s_e und s , der Geschwindigkeit v und der Reibkraft F_{StR} , bei striebscher Reibung, Umkehrpunkt des Weges bei $0,3\text{ m}$

Die Masse kommt kurzzeitig zum Stillstand, um dann mit überproportionaler Geschwindigkeit dem vorgegebenen Weg wieder nachzueilen und ihn kurzzeitig zu überholen. (Der Stick-Slip-Effekt ist z. B. beim Knarren einer langsam bewegten Tür zu beobachten.) Das schnelle Hin- und Herspringen der Reibkraft in Abb. 4.11 unten rechts bei $v \approx 0$ ist auch hier der Unstetigkeit im Reibkraft-Modell bei $v = 0$ geschuldet. Es hat auf das Verhalten vernachlässigbaren Einfluss, da sich die negativen und positiven Impulse im Wesentlichen kompensieren.

4.1.3 Feder-Masse-System mit zwei Massen und Anschlag zum Schutz einer Feder

Es gilt in diesem Abschnitt ein relativ exaktes Modell des Anschlags zu finden, indem auch die Reibungsverluste im Inneren des Anschlags berücksichtigt werden.

Der 1. Schritt:

Die Struktur des Systems zeigt Abb. 4.12 a. Das System kann als Hintereinanderschaltung zweier Systeme nach Abschn. 4.1.2 verstanden werden, ergänzt durch einen Anschlag, der die Feder zwischen den beiden Massen m_1 und m_2 vor Über-

lastung schützt. Die Federn können sowohl Druck- als auch Zugkräfte aufnehmen. Der Anschlag kann eine Druckkraft, aber keine Zugkraft aufnehmen.

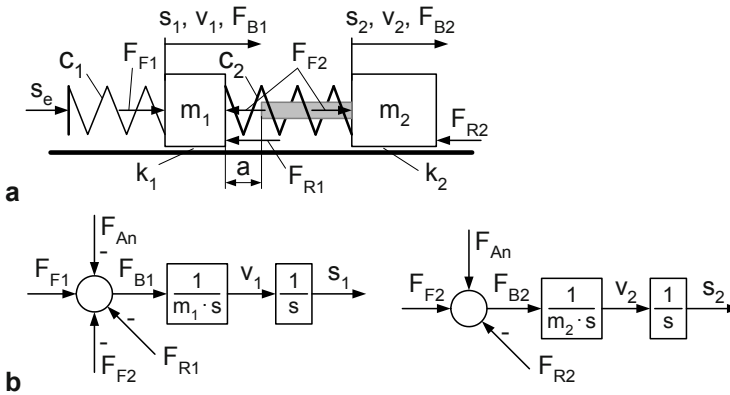


Abb. 4.12 Feder-Masse-System mit zwei Massen. **a** Schema **b** Blockschaltbilder des 2. und 3. Schrittes

Der 2. und 3. Schritt:

Die Zahl der Speicher hat sich gegenüber den bisherigen Beispielen verdoppelt (zwei Massen, zwei Federn), es entstehen zwei Teilsysteme. Die Blockschaltbilder des 2. und 3. Schrittes können, mit den hier wirkenden Eingangskräften, direkt aus **Anhang A, Tabelle A.1**, entnommen werden (Abb. 4.12 b). (Die Einbindung der Anschlagkraft F_{An} ist analog Abschn. 4.1.1 erfolgt, sie wird im 4. Schritt noch näher beschrieben.)

Der 4. Schritt:

Die beiden Teilsysteme sind über die Feder 2 und damit über die Wege s_1 und s_2 miteinander verkoppelt.

Die noch fehlenden linearen Grundbeziehungen sind (s. Abschn. 3.2.1, Gln. (3.8 a) und (3.8 b)):

$$F_{F1} = c_1 \cdot (s_e - s_1) \text{ und } F_{R1} = k_1 \cdot v_1 \text{ sowie} \quad (4.7 \text{ a})$$

$$F_{F2} = c_2 \cdot (s_1 - s_2) \text{ und } F_{R2} = k_2 \cdot v_2. \quad (4.7 \text{ b})$$

Die nichtlineare Grundbeziehung, der Anschlag, ist in Abschn. 4.1.1 als Federwirkung beschrieben worden (Gl. (4.3)). Das wird hier im Index „F“ berücksichtigt:

$$F_{AnF} = \begin{cases} 0 & \text{für } s_1 - s_2 < a \\ c_{An} \cdot (s_1 - s_2 - a) & \text{für } s_1 - s_2 \geq a \end{cases} \quad (4.8 \text{ a})$$

Im Abschn. 4.1.1 wurde schon darauf hingewiesen, dass die Beschreibung der Anschlagkraft als reine Federkraft oft nicht ausreichend ist. Anschläge werden meist aus Materialien gefertigt, die eine hohe innere Reibung besitzen, wie Aluminium, Hartgummi oder bestimmte Kunststoffe. Das bedeutet, dass die Anschlagkraft im Wegbereich ihrer Wirksamkeit nicht nur vom Weg selbst, sondern auch von seiner Änderungsgeschwindigkeit abhängig ist. Wird diese zusätzliche Kraft als geschwindigkeitsproportionale Reibkraft F_{AnR} beschrieben, ergibt sich

$$F_{AnR} = \begin{cases} 0 & \text{für } s_1 - s_2 < a \\ k_{An} \cdot (v_1 - v_2) & \text{für } s_1 - s_2 \geq a \end{cases} \quad (4.8 \text{ b})$$

Die Darstellung von F_{AnR} im Blockschaltbild ist aufwändiger als bei F_{AnF} , da neben den Wegen auch die Geschwindigkeiten berücksichtigt werden müssen (s. Abb. 4.10: $F_{AnR} = f(s_1, s_2, v_1, v_2)$).

Die Gesamt-Anschlagkraft ist

$$F_{An} = F_{AnF} + F_{AnR}, \quad (4.8 \text{ c})$$

wobei beachtet werden muss, dass sie nur als Druckkraft wirksam wird, also nicht negativ werden kann.

Der 5. Schritt: Es entsteht das Blockschaltbild in Abb. 4.13 (die interessierenden Ausgangsgrößen seien F_{F1} , F_{F2} und F_{An} sowie s_1 und s_2).

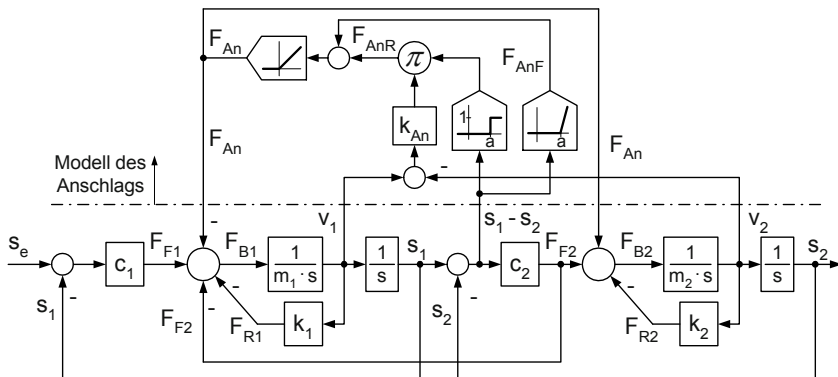


Abb. 4.13 Das Blockschaltbild des Feder-Masse-Systems mit zwei Massen

Für die Kontrolle auf richtige Vorzeichenwahl ist wiederum das Durchlaufen aller Wirkungskreise hilfreich: In jedem findet eine Wirkungskumkehr statt.

Hier ist eine manuelle Berechnung der Gesamt-ÜTF möglich, solange der Anschlag nicht wirksam ist. Sie ist sehr mühsam und führt zu einem Ergebnis, das

kaum sinnvoll ausgewertet werden kann. Das Blockschaltbild ist aber eine gute Grundlage für die Simulation des Verhaltens dieses Modells.

Das Modell des Anschlages ist bei Berücksichtigung der Materialdämpfung relativ umfangreich. Oft spielt das Verhalten an einem Anschlag keine große Rolle bei der Bewertung eines Systemverhaltens; wichtig ist oft nur, dass das Erreichen eines Anschlages erkannt wird. Dann ist die Modellierung des Anschlages als Feder ausreichend.

Simulationsläufe zur Verifizierung des Simulationsmodells.

Die Simulation ist nur möglich für ganz konkrete Parameterwerte des Modells und für einen gegebenen Verlauf der Eingangsgröße s_e . Es ist zusätzlich darauf zu achten, dass die Dimensionen aller Übertragungsfaktoren und Übertragungsfunktionen mit denen der Signale harmonisieren. Es müssen nicht unbedingt SI-Einheiten benutzt werden, die entsprechenden Umrechnungen müssen aber sicher beherrscht werden.

Es werden in diesem Abschnitt Simulationen durchgeführt für die Parameter in Tabelle 4.1. Die Eingangsgröße sei eine Sprungfunktion mit der Sprunghöhe $s_0 = 10 \text{ cm}$. In Kap. 2 ist bereits die Dimension des Differenzialoperators s mit $1/\text{Zeiteinheit}$ hergeleitet worden; damit hat der Integraloperator $1/s$ die Dimension Zeiteinheit , hier s .

Tabelle 4.1 Gewählte Parameterwerte

Parameter	m_1	m_2	k_1, k_2	c_1, c_2	c_{An}	k_{An}	a
Wert und Dimension	10 $\text{kg}^*)$	20 kg	1 N s/cm	20 N/cm	400 N/cm	5 N s/cm	1 oder 10 cm

*) ... Die Dimension kg ist hier nicht die geforderte Dimension, denn in einem Block mit der Ausgangsgröße v_i in cm/s und der Eingangsgröße F_{Bi} in N (s. Abb. 4.13) muss die Dimension der Masse $\text{N s}^2/\text{cm}$ sein. Die Umrechnung kann zielstrebig mit gezielten Erweiterungen durchgeführt geführt werden, z. B.:

$$10 \text{ kg} = 10 \text{ kg} \cdot \frac{1 \text{ N}}{1 \text{ kg m/s}^2} \cdot \frac{1 \text{ m}}{100 \text{ cm}} = 0,1 \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{cm}}.$$

Damit hat die ÜTF $\frac{1}{\text{m} \cdot \text{s}}$ die geforderte Dimension $\frac{\text{cm}}{\text{N} \cdot \text{s}}$.

Für die gewählten Parameter ergeben sich m. H. der Simulation die Zeitverläufe in den Abb. 4.14 und 4.15. Simulationszeit und Simulationsschrittweite (sie hängen von den Verzögerungen des Modells ab) werden meist grob abgeschätzt und dann über Probieren optimiert. (Auf verwendete Integrationsverfahren wird in diesem Buch nicht näher eingegangen.) Die Kurven in Abb. 4.14 entstehen für $a = 10 \text{ cm}$, die Kurven in Abb. 4.15 für $a = 1 \text{ cm}$.

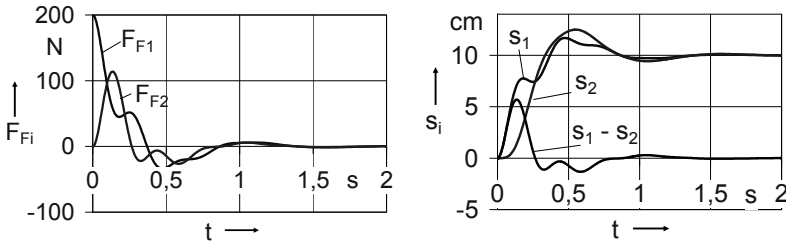


Abb. 4.14 Die Zeitverläufe der Federkräfte F_{F1} , F_{F2} , der Wege s_1 , s_2 und der Wegdifferenz $s_1 - s_2$ für $a = 10 \text{ cm}$ (Anschlag nicht wirksam)

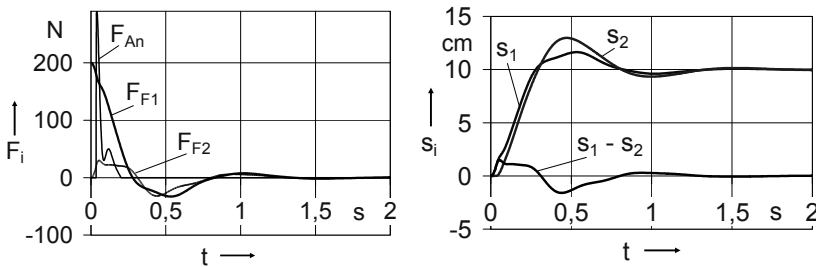


Abb. 4.15 Die Zeitverläufe der Federkräfte F_{F1} , F_{F2} , der Anschlagkraft F_{An} , der Wege s_1 , s_2 und der Wegdifferenz $s_1 - s_2$ für $a = 1 \text{ cm}$ (Anschlag wirksam)

In Abb. 4.14 ist der Anschlag nicht wirksam, da der maximale Wert der Wegdifferenz $s_1 - s_2$ kleiner als a ist. Die Kraft F_{F1} beginnt infolge des Weg-Sprunges bei 200 N , die Kraft F_{F2} ist proportional der Wegdifferenz $s_1 - s_2$.

Die Kurvenverläufe in Abb. 4.15 ändern sich bis auf die Endwerte deutlich. Der Anschlag wirkt ab etwa 50 ms (Kraftspitze im Kräfte-Diagramm von F_{An}). Wäre der Anschlag nur als Feder modelliert worden, entstünden in der Phase des Wirkens des Anschlages infolge der großen Federkonstante c_{An} hochfrequente und schwach gedämpfte Schwingungen. Die Wegdifferenz $s_1 - s_2$ ist als dritte Kurve im Weg-Diagramm dargestellt, sie ist wiederum proportional der F_{F2} -Kurve im Kräfte-Diagramm.

Quantitative Auswertung der Simulationsläufe.

Diese Verläufe müssen entweder experimentell (ist meist schwierig) oder mit Hilfe von Abschätzungen überprüft werden, damit unter anderem Eingabefehler sofort erkannt und korrigiert werden können. Auf diese Verifizierung wird in diesem Beispiel etwas ausführlicher eingegangen.

Es ist sofort zu erkennen, dass, wie zu erwarten, alle Kräfte und Wegdifferenzen für $t \rightarrow \infty$ gegen null und die Wege gegen 10 cm gehen. Dies reicht aber i. Allg. noch nicht aus. Aus dem Schema in Abb. 4.12 a geht hervor, dass näherungsweise ein Verhalten 2. Ordnung zu erreichen ist, wenn bei ausreichend gro-

ßem Abstand a einmal $m_1 \ll m_2$ und einmal $m_2 \ll m_1$ werden. Und das kann, wie schon mehrfach erwähnt, relativ einfach nachgerechnet werden. Für z. B. $m_1 \ll m_2$ und gleichzeitig $k_1 \rightarrow 0$ ergibt sich eine Reihenschaltung der Federn mit der Gesamtfederkonstante

$$c = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2} \quad (4.9)$$

und damit näherungsweise ein Einmassenschwinger mit dem Blockschaltbild in Abb. 4.16.

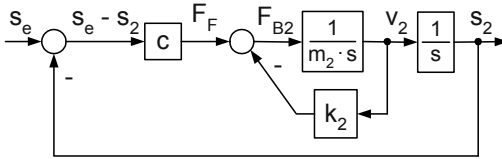


Abb. 4.16 Das Blockschaltbild des Feder-Masse-Systems mit ursprünglich zwei Massen

Mit der Überführung des inneren Wirkungskreises in einen Block (Kreisformel) mit der ÜTF

$$\frac{v_2}{F_F} = \frac{\frac{1}{m_2 \cdot s}}{1 + \frac{1}{m_2 \cdot s} \cdot k_2} = \frac{1}{m_2 \cdot s + k_2} \quad (4.10)$$

ergibt sich als Gesamt-ÜTF

$$\begin{aligned} \frac{s_2}{s_e} &= \frac{c \cdot \frac{1}{m_2 \cdot s + k_2} \cdot \frac{1}{s}}{1 + c \cdot \frac{1}{m_2 \cdot s + k_2} \cdot \frac{1}{s}} = \frac{c}{m_2 \cdot s^2 + k_2 \cdot s + c} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{k_2}{c} \cdot s + \frac{m_2}{c} \cdot s^2} = \frac{1}{1 + 2DT \cdot s + T^2 \cdot s^2} \end{aligned} \quad (4.11)$$

ein PT2-Verhalten. Da die Parameter in Tabelle 4.1 gegeben sind, können c , T und D berechnet werden. Es sind

$$c = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2} = \frac{20 \text{ N/cm} \cdot 20 \text{ N/cm}}{20 \text{ N/cm} + 20 \text{ N/cm}} = 10 \text{ N/cm},$$

$$T = \sqrt{\frac{m_2}{c}} = \sqrt{\frac{0,2 \text{ N} \cdot \text{s}^2 / \text{cm}}{10 \text{ N} / \text{cm}}} = 0,1414 \text{ s} \text{ und}$$

$$D = \frac{2DT}{2T} = \frac{\frac{k_2}{c}}{\frac{2T}{2T}} = \frac{\frac{1 \text{ N} \cdot \text{s} / \text{cm}}{10 \text{ N} / \text{cm}}}{2 \cdot 0,1414 \text{ s}} = 0,35.$$

Um Rechenaufwand oder Nachschlagen zu vermeiden, kann ein PT2-Glied mit den ermittelten Parametern parallel zum eigentlichen System simuliert werden. In Abb. 4.17 sind die Kurven für s_2 abgebildet (links die des originalen Systems mit sehr klein gewählten Werten für m_1 und k_1 : $m_1 = 0,01 \text{ kg}$ und $k_1 = 0,1 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{cm}}$ und rechts die des näherungsweise berechneten für exakt $m_1 = 0$ und $k_1 = 0$).

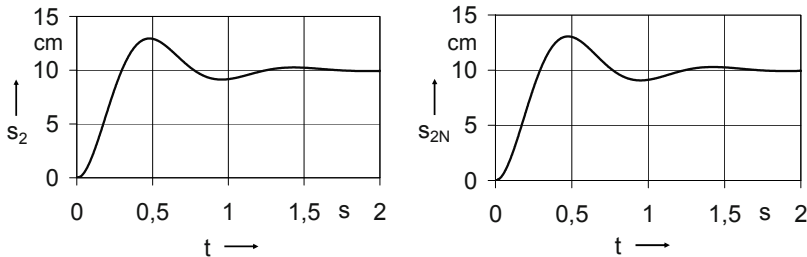


Abb. 4.17 Die Zeitverläufe des originalen Systems mit sehr klein gewählten Werten für m_1 und k_1 : $m_1 = 0,01 \text{ kg}$ und $k_1 = 0,1 \text{ N s/cm}$ (s_2 , links) und des näherungsweise berechneten für exakt $m_1 = 0$ und $k_1 = 0$ (s_{2N} , rechts)

Die beiden Kurven sind fast identisch, die Parametereingabe wird mit hoher Wahrscheinlichkeit keine Fehler aufweisen.

Es kann nunmehr mit dem Modell experimentiert werden, um z. B. über Probieren zu ermitteln, bei welchen Parameterkombinationen es dem aperiodischen Grenzfall für beide Teilsysteme nahe kommt. Auf die Auswertung wird in anderen Beispielen ausführlicher eingegangen.

4.1.4 Feder-Masse-System mit Reibungskopplung und Ritzel-Zahnstange-Kopplung

In [4.2] wird ein Feder-Masse-System ähnlich dem in Abb. 4.18 mathematisch beschrieben. Seine Eingangsgröße ist das mathematisch positiv wirkende Moment M_e .

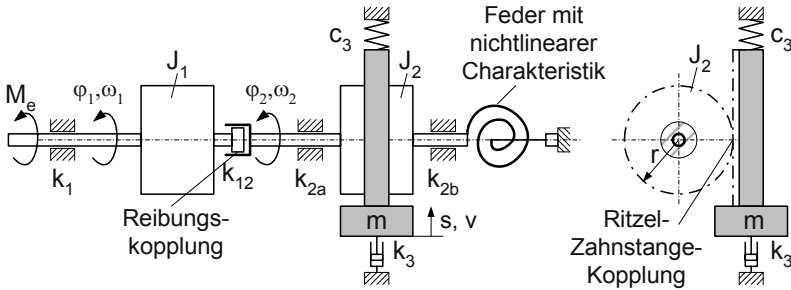


Abb. 4.18 Feder-Masse-System nach [4.2] mit Reibungskopplung und Ritzel-Zahnstange-Kopplung.

Das System besteht aus drei Teilsystemen, die über eine Reibungs- und über eine Ritzel-Zahnstange-Kopplung verbunden sind. Auf die Signal- und Parameternamen wird teilweise erst an Hand der Modellerarbeitung eingegangen, in Abb. 4.18 sind die Winkel φ_i , Winkelgeschwindigkeiten ω_i , die Federkonstante c_3 , Massenträgheitsmomente J_i , Faktoren der Geschwindigkeitsproportionalen Reibung k_i bzw. k_{ij} , der Weg s und die Geschwindigkeit v eingezeichnet. Die Herleitung des Simulationsmodells erfolgt in [4.2] auf der Basis von Differenzialgleichungen 2. Ordnung und statischen Beziehungen. In der Endform besteht das Modell aus vier Differenzialgleichungen 1. Ordnung und einer statischen Beziehung. Das adäquate Modell (es sind die Differenzialgleichungen in den Bildbereich transformiert worden) ergibt sich m. H. der Blockschaltbildmethode. Darauf wird in Verbindung mit den Gln. (4.19 a) bis (4.19 e) noch detailliert eingegangen.

Das Modell der Reibungskopplung ist relativ einfach zu finden, es muss jedoch beachtet werden, dass die Differenz der Winkelgeschwindigkeiten Eingangsgröße des Reibmoment-Modells ist. Die Modellierung der Ritzel-Zahnstange-Paarung ist wegen des Formschlusses zwischen den Zähnen relativ schwierig. Im Folgenden werden zwei unterschiedliche Modelle dafür erarbeitet (und deren Verhalten mit den Mitteln der Simulation verglichen):

- eine Feder-Dämpfungs-Kopplung (die Zahnnachgiebigkeit und die Zahnreibung gehen in das Modell ein) und
- die Zusammenfassung der beiden Massenträgheiten J_2 und m zu einer Ersatz-Trägheit J_{ers} .

4.1.4.1 Feder-Masse-System mit Reibungskopplung und Feder-Dämpfungs-Kopplung

Der 1. Schritt der Modellierung ist das Zeichnen des Schemas. Das System habe die Struktur gemäß Abb. 4.19 a (Ein Unterschied zu Abb. 4.18 ist in der Ansicht rechts erkennbar, da Federn und Dämpfer der Feder-Dämpfungs-Kopplung in der Ansicht links genauso verdeckt sind wie die Ritzel-Zahnstange-Kopplung.) Es sind jetzt alle für die Modellierung zusätzlich erforderlichen Momente M_i und Kräfte F_i eingezeichnet. Ihre Namen sind aus den Kürzeln F für Feder, R für Reibung und B für Beschleunigung sowie den Nummern der drei Teilsysteme hergeleitet worden.

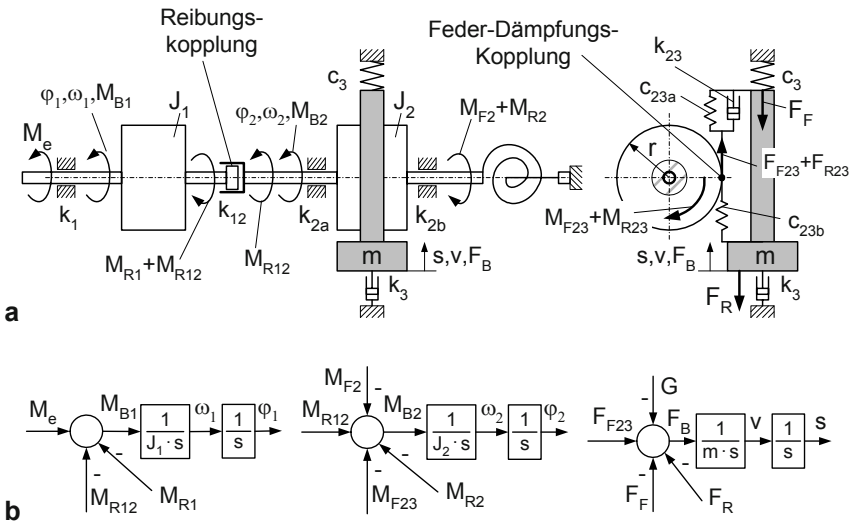


Abb. 4.19 Feder-Masse-System mit Reibungskopplung und Federkopplung. **a** Schema (links Seitenansicht, rechts Vorderansicht) **b** Blockschaltbilder des 2. und 3. Schrittes

Der 2. und 3. Schritt:

Die Blockschaltbilder des 2. und 3. Schrittes der drei Teilsysteme können, mit den hier wirkenden Eingangsmomenten und -kräften, direkt aus **Anhang A, Tabelle A.1**, entnommen werden (Abb. 4.19 b).

Der 4. Schritt:

Zu den fehlenden statischen Beziehungen innerhalb der drei Teilsysteme:

- Die Funktionen für die Reibmomente und -kräfte können aus **Anhang A, Tabelle A.2**, übernommen werden:

$$M_{R1} = k_1 \cdot \omega_1, \quad M_{R2} = k_2 \cdot \omega_2 \quad \text{mit} \quad k_2 = k_{2a} + k_{2b}, \quad F_R = k_3 \cdot v. \quad (4.12)$$

- Die Federkraft F_F im System 3 kompensiert mit ihrem Anfangswert die Gewichtskraft G , so dass im Gesamt-Blockschaltbild (Abb. 4.19) auf die Darstellung von F_{F0} und G verzichtet werden kann:

$$F_F = c_3 \cdot s - F_{F0} \text{ mit } F_{F0} = G. \quad (4.13)$$

- Das Federmoment im System 2 besitze die nichtlineare Charakteristik

$$M_{F2} = c_2 \cdot \varphi_2^3. \quad (4.14)$$

Die grafische Darstellung ist eine kubische Parabel, die Federwirkung wächst progressiv. (Die Federung in Kraftfahrzeugen besitzt z. B. häufig eine progressive Kennlinie, um Fahrwerkschäden bei hoher Last zu vermeiden. Die progressive Kennlinie der Feder wird z. B. durch unterschiedliche Windungsabstände und Materialdicken erreicht.)

Zu den statischen Beziehungen zwischen den Teilsystemen:

- Zu beachten ist, dass für das Reibmoment zwischen Teilsystem 1 und 2 die Differenz der Winkelgeschwindigkeiten in Ansatz gebracht werden muss:

$$M_{R12} = k_{12} \cdot (\omega_1 - \omega_2). \quad (4.15)$$

- Bei der Federkopplung zwischen Teilsystem 2 und 3 ist zu beachten, dass für die Federwirkung der Federn mit der Gesamtfederkonstante $c_{23} = c_{23a} + c_{23b}$ die Wegdifferenz zwischen dem Weg s und dem Umfangsweg des Rotors 2 s_{Umf} maßgebend ist. Die Beziehungen zwischen den translatorischen und rotatorischen Größen sind (aufgenommen auch in **Anhang A, Tabelle A.2**):

$$M_{F23} = r \cdot F_{F23}, \quad (4.16 \text{ a})$$

$$M_{R23} = r \cdot F_{R23}, \quad (4.16 \text{ b})$$

$$v_{Umf} = r \cdot \omega_2, \quad (4.16 \text{ c})$$

$$s_{Umf} = r \cdot \varphi_2. \quad (4.16 \text{ d})$$

Der 5. Schritt:

Es entsteht das Blockschaltbild in Abb. 4.20 (die interessierenden Ausgangsgrößen seien die Momente M_{R12} und M_{F2} sowie die Bewegungsgrößen φ_1 , φ_2 und s). Die drei Teilsysteme und ihre Kopplungskomponenten sind speziell gekennzeichnet.

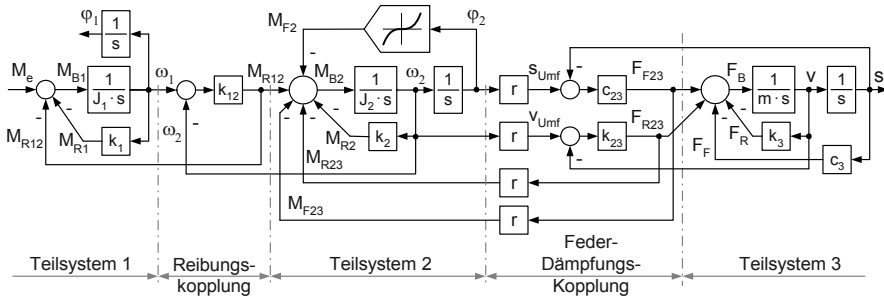


Abb. 4.20 Das Blockschaltbild des Feder-Masse-Systems mit Reibungskopplung und Feder-Dämpfungs-Kopplung

Die Kontrolle zeigt:

- Alle Eingangsgrößen sind mit Ausnahme der echten Eingangsgröße M_e gleichzeitig Ausgangsgrößen innerhalb des Systems, das Modell ist mit hoher Wahrscheinlichkeit vollständig.
- In jedem Wirkungskreis findet eine Wirkungsumkehr statt.

Das Blockschaltbild ist die Grundlage für die folgende Simulation des Verhaltens dieses Modells.

Simulationslauf zur Verifizierung des Simulationsmodells:

Es wird eine Simulation durchgeführt für die Parameter in Tabelle 4.2, ihre Größenordnungen liegen im Bereich bisheriger Beispiele, so dass die entstehenden Kurvenverläufe gut interpretierbar sind. Um dem tatsächlichen Verhalten nahe zu kommen, muss die Federwirkung zwischen den Teilsystemen 2 und 3 viel höher sein als die der anderen Federn.

Tabelle 4.2 Gewählte Parameterwerte in Abb. 4.19

	Teilsysteme 1 und 2			Teilsystem 3			Reibp.	Ritzel-Feder		
Parameter	$J_1 = J_2$	c_2	$k_1 = k_2$	m	c_3	k_3	k_{12}	c_{23}	k_{23}	r
Wert	0,1	500	1	20	500	20	10	$2 \cdot 10^4$	20	0,1
Dimension	$Nm \cdot s^2$	Nm	Nm/s	kg	N/m	$N \cdot s/m$	Nm/s	N/m	$N \cdot s/m$	m

Die Simulationsergebnisse für einen sprunghöhenförmigen Verlauf von M_e zeigt Abb. 4.21. Die Funktion lautet $M_e(t) = 5 Nm \cdot s(t)$, $s(t)$ ist die Sprungfunktion mit der Sprunghöhe eins, der Einheitssprung. Die Anfangswerte aller sechs Integrationen wurden auf null gesetzt. Die dargestellten Kurven über der Zeit sind:

- die Momente M_{R12} , M_{F2} ,
- die Winkel φ_1 , φ_2 ,
- die Wege s , $\Delta s = s_{Umf} - s$.

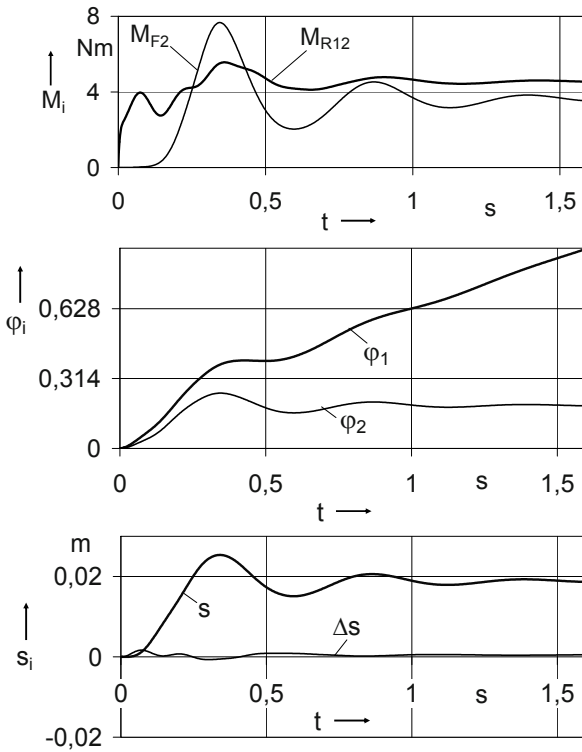


Abb. 4.21 Simulationsergebnisse des Feder-Masse-Systems mit Reibungskopplung und Feder-Dämpfungs-Kopplung, Verläufe der Signale M_{R12} , M_{F2} , φ_1 , φ_2 , s , $\Delta s = s_{Umf} - s$

Die Signalverläufe sind plausibel (die Reibparameter k_i und k_{ij} sind relativ klein gewählt worden, so dass die Signalverläufe teilweise schwach gedämpft sind): Sowohl φ_2 als auch s streben einem statischen Endwert zu, φ_1 einem konstanten Anstieg. Die Parameter der Feder-Dämpfungs-Kopplung wurden so gewählt, dass die Wegdifferenz $\Delta s = s_{Umf} - s$ in Relation zum Gesamtweg s in der Simulation noch deutlich sichtbar ist. Ein quantitativer Vergleich wird nach Vorliegen der Zeitverläufe des folgenden Systemmodells durchgeführt.

4.1.4.2 Feder-Masse-System mit Reibungskopplung und Ersatz-Trägheit J_{ers}

Bei einer starren Verbindung zwischen Teilsystem 2 und 3 besteht eine geometrische Bindungsgleichung:

$$s = r \cdot \varphi_2 . \quad (4.17)$$

Diese Bindungsgleichung reduziert den Gesamt-Freiheitsgrad des Systems. Die Teilsysteme 2 und 3 besitzen nur noch eine unabhängige Koordinate und es muss eine Ersatz-Trägheit berechnet werden. Das auf das Teilsystem 2 bezogene Ersatz-trägheitsmoment J_{ers} der Teilsysteme 2 und 3 lässt sich aus folgender Gleichung kinetischer Energien (Energiesatz) herleiten (s. z. B. [4.4]):

$$\frac{J_{ers}}{2} \cdot \omega_2^2 = \frac{J_2}{2} \cdot \omega_2^2 + \frac{m}{2} \cdot v^2 . \quad (4.18 \text{ a})$$

Da jetzt nach Gl. (4.16 c)

$$v_{Umf} = v = r \cdot \omega_2 \quad (4.18 \text{ b})$$

ist, ergibt sich:

$$J_{ers} = J_2 + m \cdot r^2 . \quad (4.18 \text{ c})$$

Die Parameter des Teilsystems 3 gehen über die Bindungsgleichungen in die Momentenbilanz des Teilsystems 2 ein. Das ist aus dem Schema und dem Blockschaltbild in Abb. 4.22 zu ersehen.

Das mathematische Modell in diesem Blockschaltbild ist mit dem Differenzialgleichungssystem in [4.2] kompatibel (d/dt in einer Dgl. entspricht in Abb. 4.22 dem Operator s). Werden die Zusammenhänge in Abb. 4.22 in der Form hingeschrieben wie in [4.2], dann ergibt sich:

$$\varphi_1 \cdot s = \omega_1 , \quad (4.19 \text{ a})$$

$$\omega_1 \cdot s = \frac{1}{J_1} \cdot (M_e - (k_1 + k_{12}) \cdot \omega_1 + k_{12} \cdot \omega_2) , \quad (4.19 \text{ b})$$

$$\varphi_2 \cdot s = \omega_2 , \quad (4.19 \text{ c})$$

$$\omega_2 \cdot s = \frac{1}{J_2 + m \cdot r^2}$$

$$\cdot (k_{12} \cdot \omega_1 - (k_2 + k_{12} + k_3 \cdot r^2) \cdot \omega_1 - c_2 \cdot \varphi_2^3 - c_3 \cdot r^2 \cdot \varphi_2 - (G - F_{F0}) \cdot r), \quad (4.19 \text{ d})$$

$$s = r \cdot \varphi_2. \quad (4.19 \text{ e})$$

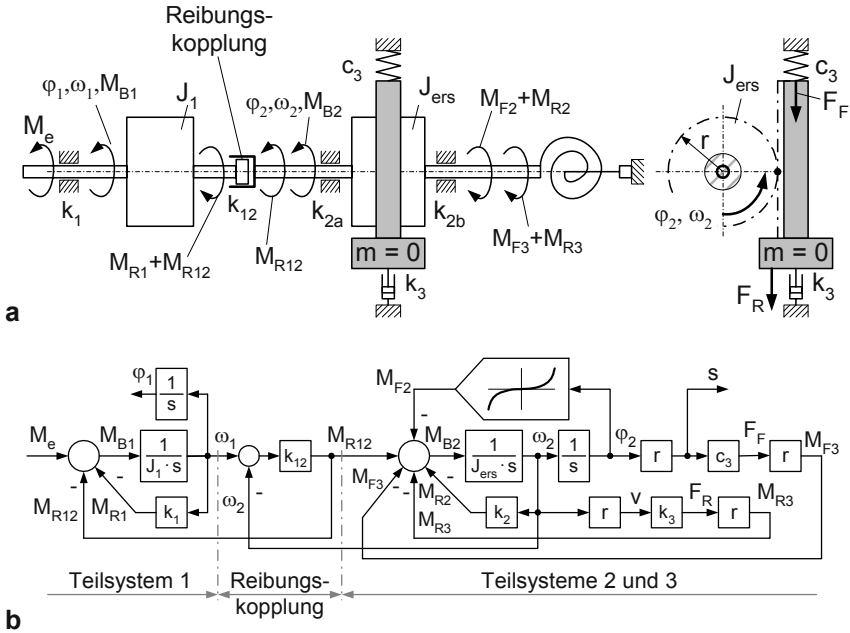


Abb. 4.22 Das Feder-Masse-System mit Reibungskopplung und Ersatz-Trägheit J_{ers} . **a** Schema **b** Blockschaltbild

Die beiden Modelle sind identisch. Der Vorteil der Blockschaltbildmethode ist jedoch erkennbar: Die Herleitung des Gesamtmodells ist transparent und es wird kein Modellbaustein vergessen, das wäre im Blockschaltbild sofort zu sehen.

Simulationsläufe zur Verifizierung des Simulationsmodells:

Es wird eine Simulation durchgeführt für die relevanten Parameter in Tabelle 4.2. Das Ersatz-Trägheitsmoment ist nach Gl. (4.18 b):

$$J_{\text{ers}} = J_2 + m \cdot r^2 = 0,1 \text{ Nm} \cdot \text{s}^2 + 20 \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \cdot (0,1 \text{ m})^2 = 0,3 \text{ Nm} \cdot \text{s}^2.$$

Die Simulationsergebnisse für einen ebenfalls sprungförmigen Verlauf von M_e ($M_e(t) = 5 \text{ Nm} \cdot s(t)$) zeigt Abb. 4.23. Die Anfangswerte der jetzt vier Integrationen wurden wiederum auf null gesetzt.

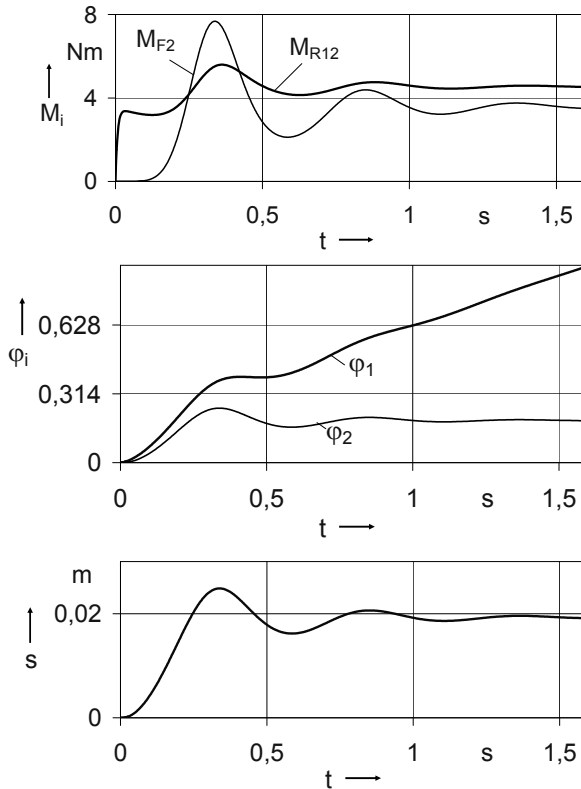


Abb. 4.23 Simulationsergebnisse des Feder-Masse-Systems mit Reibungskopplung und Ersatz-Trägheit J_{ers} , Verläufe der Signale M_{R12} , M_{F2} , φ_1 , φ_2 , s

Die Zeitverläufe der Signale sind in beiden Modellen fast gleich, aber dem Modell mit Ersatzmasse ist der Vorzug zu geben. Vor allem müssen bei der Feder-Dämpfungskopplung wegen der großen Federkonstante c_{23} sehr kleine Simulationsschrittweiten verwendet werden, was zu langen Rechenzeiten führt.

Der Vorteil der Modellierung und Simulation beider Ansätze ist, dass leicht überprüft werden kann, ob Modellierungs- oder auch Eingabefehler vorliegen.

der Anschlagkraft F_{An} . Das Reibmoment M_R resultiert aus der inneren Reibkraft des Federstabes.

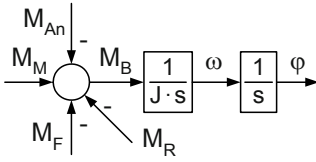


Abb. 4.25 Blockschaltbild der Schritte 2 und 3 für das mechanische Teilsystem eines magneterregten Drehschwingers

Das elektro-magnetische Teilsystem. Die Induktivität L ist nicht konstant, weshalb das Blockschaltbild aus **Anhang A, Tabelle A.1**, modifiziert werden muss: Der Luftspalt des Magneten und damit auch der magnetische Gesamtwiderstand R_m verändern sich während einer Schwingungsperiode stark. Die Basisgleichung lautet nach [4.6]:

$$L = \frac{N^2}{R_m} \quad (4.20)$$

(L ... Induktivität, N ... Windungszahl, R_m ... magnetischer Widerstand).

Der magnetische Gesamtwiderstand entsteht aus der Summe der Widerstände des Eisenkerns und des Flachankers sowie der beiden Luftspalte. Maßgebend ist der der Luftspalte, deren minimale Höhe vom unteren Anschlag begrenzt wird, so dass die Eisenwiderstände vernachlässigt werden können (Voraussetzung ist hierbei, dass $\delta_0 > s_{Anu}$ ist). Damit ergibt sich [4.6]:

$$R_m = 2 \cdot \frac{\delta}{\mu_0 \cdot A} \quad \text{und} \quad (4.21)$$

$$L = \frac{K_{Mg}}{\delta} \quad \text{mit} \quad K_{Mg} = N^2 \cdot \mu_0 \cdot A \quad (4.22)$$

(μ_0 ... Permeabilität der Luft, A ... Durchtrittsfläche der magnetischen Feldlinien, δ ... Luftspalthöhe).

Das Blockschaltbild der Schritte 2 und 3 für das elektro-magnetische Teilsystem eines magneterregten Drehschwingers ist in Abb. 4.26 dargestellt.

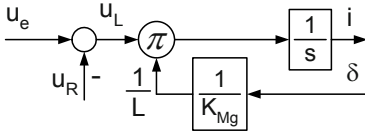


Abb. 4.26 Blockschaltbild der Schritte 2 und 3 für das elektro-magnetische Teilsystem eines magneterregten Drehschwingers

Der 4. Schritt:

Das mechanische Teilsystem. Das Reib- und das Federmoment können aus **Anhang A, Tabelle A.2**, übernommen werden:

$$M_R = k \cdot \omega, \quad (4.23 \text{ a})$$

$$M_F = c \cdot \varphi. \quad (4.23 \text{ b})$$

Für die Anschlagkraft F_{An} ist zu schreiben (s. **Anhang A, Tabelle A.5**):

$$F_{An} = \begin{cases} c_{An} \cdot (s^* + s_{Ano}) & \text{für } s^* \leq -s_{Ano} \\ 0 & \text{für } -s_{Ano} < s^* < s_{Anu} \\ c_{An} \cdot (s^* - s_{Anu}) & \text{für } s^* \geq s_{Anu} \end{cases} \quad (4.24)$$

Sie ordnet sich in das rotatorisch beschriebene mechanische Teilsystem wie folgt ein:

$$s^* = r_{An} \cdot \varphi \text{ und } M_{An} = r_{An} \cdot F_{An}.$$

Die grafische Darstellung der Rückwirkung $M_{An} = f(\varphi)$ zeigt das Blockschaltbild in Abb. 4.27.

Das elektro-magnetische Teilsystem. Der ohmsche Widerstand R der Wicklung des Magneten führt zu der Beziehung (s. **Anhang A, Tabelle A.2**):

$$u_R = R \cdot i.$$

Die Basis-Gleichung für die Kraft F_M eines Elektromagneten als Funktion des Stromes i lautet [4.6]:

$$F_M = \frac{i^2}{2} \cdot \frac{dL(\delta)}{d\delta}. \quad (4.25)$$

Um Gl. (4.25) für die Berechnung der Magnetkraft F_M anwenden zu können, muss $dL/d\delta$ ermittelt werden. Mit Hilfe von Gl. (4.22) ergibt sich über

$$\frac{dL}{d\delta} = -\frac{K_{Mg}}{\delta^2}$$

die Kraft F_M zu

$$F_M = \frac{K_{Mg}}{2} \cdot \frac{i^2}{\delta^2}. \quad (4.26)$$

Das Minuszeichen kann entfallen, da i quadratisch eingeht und δ ohnehin immer positiv ist.

Die Verbindungen zwischen den Teilsystemen. Die Beziehungen zwischen Momenten und Kräften sowie Wegen und Winkeln (s. **Anhang A, Tabelle A.2**) lauten

$$M_M = r \cdot F_M, \quad (4.27 \text{ a})$$

$$s = r \cdot \varphi, \quad (4.27 \text{ b})$$

$$\delta = \delta_0 - s. \quad (4.27 \text{ c})$$

Das führt **im 5. Schritt** zum Gesamt-Blockschaltbild nach Abb. 4.27.

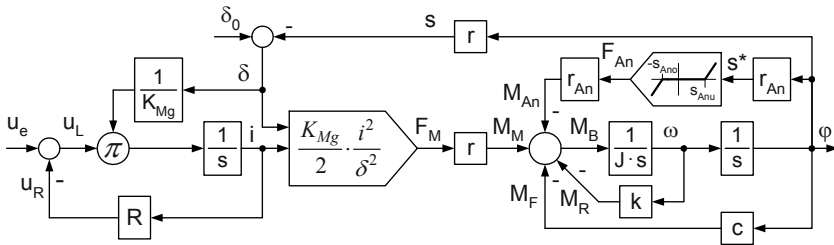


Abb. 4.27 Das Blockschaltbild eines von einem Elektromagneten angeregten Drehschwingers.

Die Überprüfung der Wirkungsumkehr in den Wirkungskreisen ist hier infolge der Blöcke, in deren Funktion die Luftspalthöhe eingeht, nicht einfach. Für kleine Wege s sind $\delta \approx \delta_0 = \text{konst.}$ und die Wirkungsumkehr in den Wirkungskreisen gegeben. Es ist erkennbar, dass eine Rückwirkung des mechanischen Teilsystems auf das elektro-magnetische Teilsystem in diesem Fall ($\delta \approx \delta_0 = \text{konst.}$) nicht entsteht.

4.2.2 Simulationsläufe

Simulationen wurden an einem Drehschwinger durchgeführt, für den Ergebnisse eigener experimenteller Untersuchungen vorliegen, so dass die Simulationsergebnisse relativ einfach verifiziert werden konnten.

Zuerst gilt es, die Magnetkonstante K_{Mg} nach Gl. (4.22) zu bestimmen. Für die Parameter

- Windungszahl $N = 300$,
- Permeabilität der Luft $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{V \cdot s}{A \cdot m}$ und
- Durchtrittsfläche der magnetischen Feldlinien $A = 140 \text{ mm}^2 = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$

ergibt sich:

$$K_{Mg} \approx 1,6 \cdot 10^{-5} \frac{V \cdot s \cdot m}{A} .$$

Der Hebelarm des Magneten beträgt $r = 40 \text{ mm} = 0,04 \text{ m}$. Die in Abb. 4.27 versetzt gezeichneten Anschläge befinden sich mit dem Magneten in einer Wirkungslinie ($r_{An} = r = 40 \text{ mm} = 0,04 \text{ m}$), damit kann ihr Wirkungsbeginn auf den Luftspalt bezogen werden.

Tabelle 4.3 Gewählte Parameterwerte der Teilsysteme in Abb. 4.27

	El.-magn.Teilsystem			Mechanisches Teilsystem						
Parameter	K_{Mg}	δ_0	R	J	c	k	s_{Ano}	s_{Anu}	r_{An}	c_{An}
Wert	$1,6 \cdot 10^{-5}$	0,002	2,5	$2,5 \cdot 10^{-4}$	400	0,01	0,001	0,001	0,04	$4 \cdot 10^4$
Dimension	$\frac{V \cdot s \cdot m}{A}$	m	Ω	$kg \cdot m^2$	Nm	$Nm \cdot s$	m	m	m	N/m

Die erste Simulation wird für einen breiten Impuls der Eingangsspannung u_e durchgeführt. Die Impulshöhe wird so gewählt, dass sich der stationäre Wert von s nur wenig vom Wert null entfernt. Dann können alle stationären Werte einfach überprüft werden. (Anhand der Blöcke in Abb. 4.27 und ihrer Funktion kann leicht abgeschätzt werden: Eine Impulshöhe von 5 V führt zu einem stationären Strom von 2 A , zu einer Kraft von 8 N und einer Änderung der Luftspalthöhe δ von 2 mm auf etwa $1,97 \text{ mm}$.) Die Simulationsergebnisse in Abb. 4.28 bestätigen das.

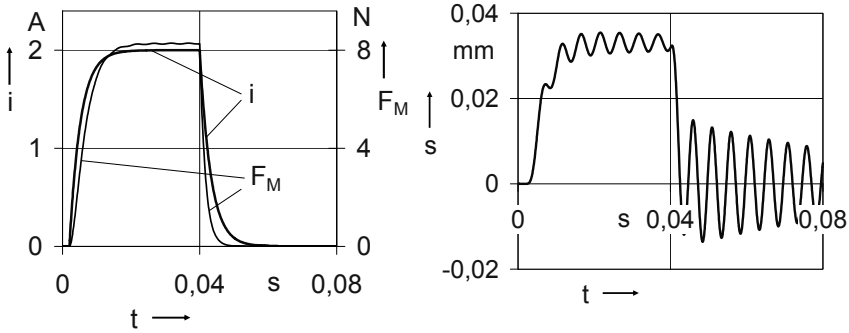


Abb. 4.28 Simulationsergebnisse des Elektromagneten mit Drehschwinger bei impulsförmiger Anregung. Ordinaten: Strom i , Magnetkraft F_M , Weg s

Obwohl die Luftspalthöhe fast konstant bleibt, ist ein nichtlineares Verhalten zu erkennen. Ursache der großen Amplituden des Weges beim Ab- und der kleinen Amplituden beim Zuschalten ist die unterschiedlich große Änderungsgeschwindigkeit der etwa dem Stromquadrat proportionalen Kraft des Magneten (siehe Verlauf von F_M im Vergleich zu i in Abb. 4.28).

Aus der Kurve $s(t)$ ist die Periodendauer der mechanischen Schwingungen von etwa 5 ms abzulesen und es ist zu erkennen, dass die Dämpfung sehr klein ist. Letzteres ist typisch für derartige Anordnungen. Aus den Parametern J , c und k ist analog Gl. (3.9) zu ermitteln:

$$T = \sqrt{\frac{J}{c}} = \sqrt{\frac{2,5 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{400 \text{ Nm}} \cdot \frac{1 \text{ N}}{1 \text{ kg} \cdot \text{m} / \text{s}^2}} = 7,9 \cdot 10^{-4} \text{ s}, \quad (4.28 \text{ a})$$

$$2DT = \frac{k}{c} = \frac{0,01 \text{ Nm} \cdot \text{s}}{400 \text{ Nm}} = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ s}. \quad (4.28 \text{ b})$$

Das führt zu den Werten für die Dämpfung und die Periodendauer der Ausschwingvorgänge. Die Dämpfung D beträgt

$$D = \frac{2DT}{2T} = \frac{2,5 \cdot 10^{-5} \text{ s}}{2 \cdot 7,9 \cdot 10^{-4} \text{ s}} = 0,016. \quad (4.28 \text{ c})$$

Die Periodendauer T_{per} ergibt sich für die geringe Dämpfung D zu

$$T_{per} \approx 2\pi \cdot T \approx 0,005 \text{ s} = 5 \text{ ms}. \quad (4.29)$$

Damit sind wesentliche Teile der Eingabe überprüft. Noch keine Rolle haben bisher die Anschläge gespielt. Vor allem der untere muss verhindern, dass die Luftspalthöhe zu klein wird, da sonst die Magnetkraft die Federkraft übersteigen könnte und der Flachanker auf den Eisenkern trifft.

Eine weitere Simulation wird für den eigentlichen Einsatz als Schwinger durchgeführt (s. o.). Die Resonanzfrequenz des Schwingers beträgt (s. Gl. (4.29))

$$f_R = \frac{1}{T_{Per}} \approx 200 \text{ Hz} . \quad (4.30)$$

Wenn das System in der Nähe dieser Frequenz mit einer möglichst großen, aber gleichzeitig ausreichend kleinen Amplitude (die Anschläge dürfen nicht erreicht werden) sinusförmig schwingen soll, sollte es auch sinusförmig angeregt werden. Bei näherer Betrachtung des Blockes $F_M = f(i)$ in Abb. 4.27 mit seiner Quadrierung des Stromes zu erkennen, dass die Erregerfrequenz halb so hoch sein muss wie die Schwinger-Frequenz, denn es ist [4.1]

$$(\sin(\omega \cdot t))^2 = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(2 \cdot \omega \cdot t)) . \quad (4.31)$$

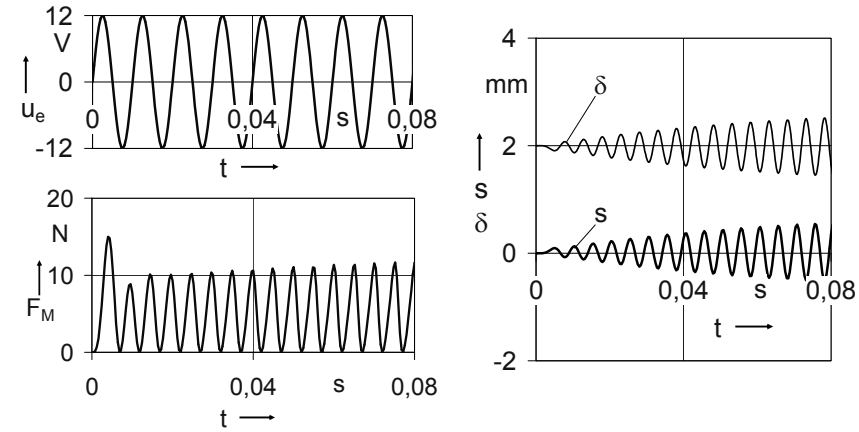
Die Zeitverläufe für die Eingangsgröße $u_e = 12 \text{ V} \cdot \sin(628 \text{ s}^{-1} \cdot t)$ zeigt Abb. 4.29 a ($\omega = 2\pi \cdot 100 \text{ Hz}$).

Wird die Amplitude der Eingangsgröße zu hoch gewählt, werden die Anschläge wirksam. Das ist in Abb. 4.29 b dargestellt ($u_e = 18 \text{ V} \cdot \sin(628 \text{ s}^{-1} \cdot t)$).

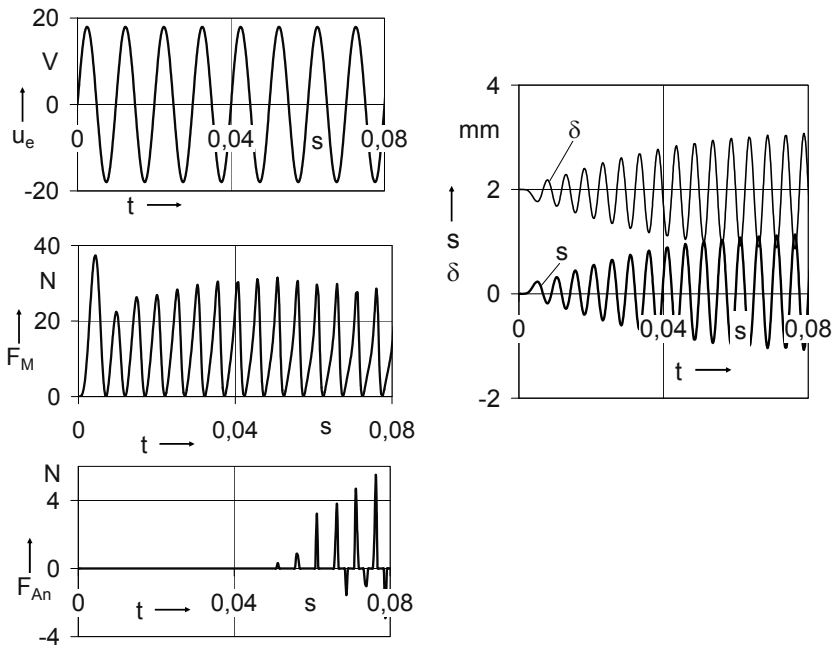
Weitere Verhaltensweisen werden im Rahmen dieses Kapitels nicht untersucht. Es ist klar, dass bei Anregungen, die das System in größerem Abstand zu seiner Resonanzfrequenz schwingen lassen, für die gleichen Wegamplituden größere Ströme und Kräfte erforderlich sind.

Einige Aussagen zu den Kurven in Abb. 4.29:

- Auf Grund der Nulldurchgänge der Erregungsspannung (und damit des Stromes) geht die Kraft zweimal pro Erreger-Periode auf null zurück. Dies führt zur Frequenzverdoppelung. Infolge der gleichzeitigen periodischen Veränderungen der Luftspalthöhe δ weicht die Form der Magnetkraftkurve etwas von der Sinusform ab.
- Da die Magnetkraft eine Zugkraft mit einem Mittelwert größer als null ist, stellt sich der Schwingungsmittelpunkt des Weges auf einen positiven Wert ein. Da die Amplitude aber etwa zwei Größenordnungen größer als dieser Mittelwert ist, wird das in den dargestellten Kurven nicht sichtbar.
- Die Federkonstanten der Anschläge wurden relativ klein gewählt, um hochfrequente Schwingungen zu vermeiden. Dass die Anschläge erreicht werden, ist am Auftreten endlich großer Anschlagkräfte zu erkennen.



a



b

Abb. 4.29 Simulationsergebnisse des Elektromagneten mit Drehschwinger bei sinusförmiger Anregung, Verläufe der Signale Spannung u_e , Magnetkraft F_M , Anschlagkraft F_{An} , Weg s und Luftspalthöhe δ **a** Erregeramplitude 12 V **b** Erregeramplitude 18 V

4.3 Hydraulikantrieb mit typischen Nichtlinearitäten

In diesem Abschnitt wird ein Hydraulikantrieb modelliert, der annähernd die gleiche Grundstruktur wie der Antrieb in Abb. 3.13 besitzt. Es werden aber folgende Nichtlinearitäten berücksichtigt:

- turbulente Strömung in Drosselventilen,
- sich stark ändernde Volumina,
- Kavitation,
- Endlagendämpfung,
- Anschlag.

Diese Nichtlinearitäten werden im Abschn. 4.3.1 im Rahmen der Herleitung ihrer mathematischen Modelle ausführlich beschrieben.

4.3.1 Erarbeitung der Blockschaltbilder

Der 1. Schritt:

Das Schema dieses Antriebes zeigt Abb. 4.30 (die Kurzzeichen s. teilweise Abschn. 3.4.1). Der Arbeitszylinder ist so gestaltet, dass vor Erreichen des rechten Anschlages des Kolbens eine Bremskraft (Druckkraft auf den Zapfen an der rechten Seite des Arbeitskolbens) entsteht. Dargestellt ist der Zustand vor dem Schalten des Wegeventils VW , das in seiner anderen Schaltstellung die Druckquelle DQ mit dem Antrieb verbindet (Anfangszustand). Das Drosselventil $VDr\ 1$ ist nicht einstellbar; $VDr\ 2$ ist einstellbar (s. Pfeil), um einen günstigen Verlauf der Druckkraft auf den Zapfen erreichen zu können. Der Weg des Kolbens zwischen den Anschlägen ist der Kolbenhub H .

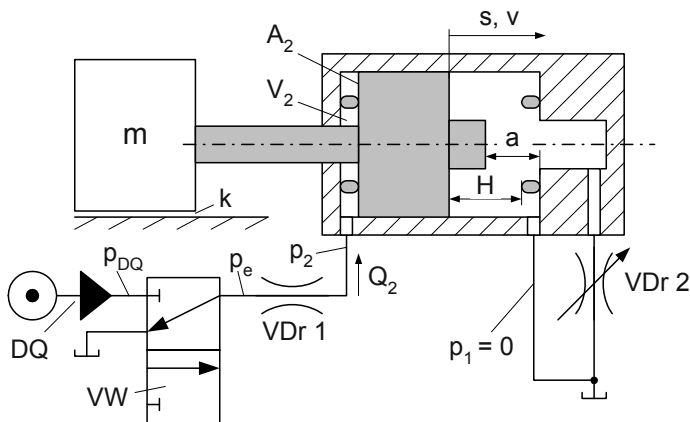


Abb. 4.30 Hydraulikantrieb mit Endlagendämpfung VD_r Drosselventil

Aufgrund der Einfachheit der Kräftebilanz wurde auf die Darstellung der Kräfte in Abb. 4.30 verzichtet.

Die Endlagendämpfung oder –bremsung wird erst wirksam, wenn der Weg s größer als der Abstand a ist. Vorher spielt die rechte Seite des Zylinders keine Rolle, da $p_1 \approx 0$ ist. In einem solchen Fall ist es am günstigsten, wenn das System mit zwei Modellen beschrieben wird:

- Modell 1 für $s \leq a$ und
- Modell 2 für $s > a$.

Die Verbindung zwischen beiden Modellen wird mit Hilfe der Simulation hergestellt, indem die Signalwerte, die Modell 1 für $s = a$ erreicht hat, als Anfangswerte für Modell 2 verwendet werden. (Diese Vorgehensweise wird in späteren komplexeren Beispielen noch oft anzutreffen sein.)

Modell 1.

Der 2. und 3. Schritt:

Der Antrieb besitzt zwei Energiespeicher wie in Abschn. 3.4: die zu bewegend Masse m und ein kompressibles Fluid-Volumen, hier V_2 . Die Modelle des 2. und 3. Schrittes können wiederum als Blockschaltbild aus **Anhang A, Tabelle A.3**, übernommen werden (Abb. 4.31), allerdings mit einer Modifikation, da V_2 jetzt wegen der starken Veränderungen zwischen $s = 0$ und $s = H$ als Funktion des Weges s beschrieben werden muss:

$$V_2 = V_{20} + A_2 \cdot s \quad (4.32)$$

(s. Abb. 4.31 rechts).

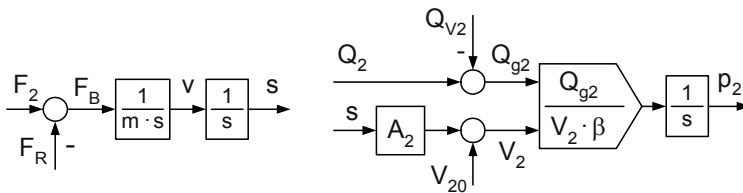


Abb. 4.31 Hydraulikantrieb mit Endlagendämpfung, Blockschaltbilder des 2. und 3. Schrittes für Modell 1

Der 4. Schritt:

Die Volumenstrombilanz im Volumen V_2 enthält die Volumenströme Q_2 und Q_{V2} . Der Verschiebe-Volumenstrom Q_{V2} ist analog Gl. (3.22)

$$Q_{V2} = A_2 \cdot v .$$

Das Drosselventil $VDr\ 1$ besitzt eine Drosselstelle mit abrupten Querschnittsänderungen, die zu turbulenter Strömung führen. Das berechtigt zur Beschreibung des Drosselventils in folgender Form [4.9]:

$$Q_2 = k_{Dr} \cdot A_{VDr1} \cdot \sqrt{|p_e - p_2|} \cdot \text{sign}(p_e - p_2). \quad (4.33\ a)$$

Da die Wurzel nur vom Betrag der Druckdifferenz gebildet werden kann, Druckdifferenzen aber positiv und negativ sein können, muss die mathematische Beschreibung die Vorzeichenfunktion (*sign*-Funktion) enthalten. Für die Stetig-Steuerungen aller Hydraulikanlagen spielen derartige Drosselstellen eine wichtige Rolle. Die Drosselstellen sind dann sog. Steuerspalte, die meist über den Drosselquerschnitt (hier A_{VDr1}), der eine weitere Variable darstellt, verstellbar sind. Die Gl. (4.33 a) wurde in allgemeiner Form und mit ihrer grafischen Entsprechung in **Anhang A, Tabelle A.5**, übernommen.

Die Fläche A_{VDr1} ist der engste Strömungsquerschnitt im Drosselventil. Seine konstruktive Gestaltung wird vom Durchflussbeiwert α , der in k_{Dr} eingeht, berücksichtigt. Er liegt im Bereich $0,6 < \alpha < 1$. Sind die Übergangszonen zwischen den großen und kleinen Querschnitten sehr kurz, strebt α gegen 0,6, bei relativ langen Übergangszonen gegen eins [4.9].

Der Beiwert k_{Dr} enthält noch die Dichte ρ des Hydraulikmediums, sie liegt für Hydrauliköl bei etwa $0,9\text{ kg/dm}^3$. Damit kann in Drosselstellen hydraulischer Anlagen mit einem Drosselbeiwert k_{Dr} von

$$\begin{aligned} k_{Dr} &= \alpha \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho}} \\ &= (0,6 \dots 1,0) \cdot \sqrt{\frac{2}{0,9\text{ kg/dm}^3} \cdot \frac{1\text{ kg m/s}^2}{1\text{ N}} \cdot \frac{10^3\text{ mm}^2}{1\text{ m}} \cdot \frac{10^6\text{ mm}^3}{1\text{ dm}^3}} \\ &\approx (3 \dots 5) \cdot 10^4 \frac{\text{mm}^2}{\text{s} \cdot \sqrt{\text{N}}} \end{aligned} \quad (4.33\ b)$$

gerechnet werden.

Die Druckkraft-Funktion und die Reibkraftfunktion (Ansatz hier: geschwindigkeitsproportionale Reibkraft) werden ebenfalls aus Abschn. 3.4.1 übernommen:

$$F_2 = A_2 \cdot p_2, \quad F_R = k \cdot v.$$

Der Begriff Kavitation steht für den Prozess der Bildung von Hohlräumen in Flüssigkeiten, wenn der Druck in der Flüssigkeit unter den Dampfdruck absinkt. Ursache ist, dass Flüssigkeiten keine Zugspannungen übertragen können. Dann treten in der Flüssigkeit gelöste Gase und Dampfblasen in diese Hohlräume ein und erhöhen die Kompressibilität des Volumens um Größenordnungen. Der Druck bleibt

zunächst nahezu konstant, auch wenn sich die Größe dieser Hohlräume verändert. Steigt der Druck wieder auf Werte oberhalb des Dampfdruckes an, lösen sich diese gasförmigen Bestandteile schlagartig wieder in der Flüssigkeit. Da die Drücke in der Hydraulik als Differenz zum Luftdruck angegeben werden und mit Drücken weit oberhalb des Luftdruckes gearbeitet wird, kann dieses Phänomen relativ einfach im Modell eines Hydraulikantriebes berücksichtigt werden. Es ist

$$p_2 = \begin{cases} p_2^* & \text{für } p_2^* \geq 0 \\ 0 & \text{für } p_2^* < 0, \end{cases} \quad (4.33 \text{ c})$$

wobei das Signal p_2^* für das Ausgangssignal der Integration $1/s$ in Abb. 4.31 rechts steht. In diesem Antriebsbeispiel tritt Kavitation ein, wenn (s. Abb. 4.30) der Antrieb schwach gedämpft ist. Nach Zuschalten des Druckes p_{DQ} nimmt die Druckkraft F_2 schnell zu und beschleunigt die Masse über die spätere stationäre Geschwindigkeit hinaus: Der Kolben läuft der Ölsäule quasi davon, der Druck bricht zeitweilig infolge von Kavitation zusammen. Auch Gl. (4.33 c) wurde in allgemeiner Form und mit ihrer qualitativen grafischen Darstellung in **Anhang A, Tabelle A.5**, übernommen.

Der 5. Schritt:

Es ergibt sich das Blockschaltbild in Abb. 4.32.

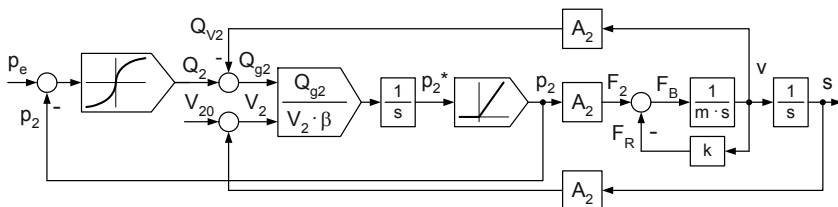


Abb. 4.32 Das Blockschaltbild des Modells 1 des Hydraulikantriebes

Da das Drosselventil $VD_r 1$ als nicht einstellbar angenommen wird, entsteht keine Kurvenschar, sondern nur eine Kurve im Block $Q_2 = f(p_e - p_2)$.

(Wenn die Nichtlinearitäten in Abb. 4.32 linearisiert würden, entstünde die Struktur des Blockschaltbildes in Abb. 3.11.)

Modell 2.

Der 1. Schritt:

Das Schema des Antriebs-Zustandes für $s > a$ zeigt Abb. 4.33 a. Am Arbeitszylinder liegt weiterhin der konstante Druckquellendruck p_{DQ} an. Der Arbeitskolben hat im Arbeitszylinder ein Volumen V_3 geschaffen, in welchem der Druck p_3 herrscht.

$$p_3 = \begin{cases} p_3^* & \text{für } p_3^* \geq 0 \\ 0 & \text{für } p_3^* < 0 \end{cases}$$

Die Beschreibung der Anschläge in Abb. 4.33 a an den Hubgrenzen wird analog Abschn. 4.2.1 vorgenommen (die Materialdämpfung wurde auch hier nicht in das Modell einbezogen). Die Anschlagkraft F_{An} ist damit:

$$F_{An} = \begin{cases} c_{An} \cdot s & \text{für } s \leq 0 \\ 0 & \text{für } 0 < s < H \\ c_{An} \cdot (s - H) & \text{für } s \geq H \end{cases} \quad (4.34)$$

Im Blockschaltbild (s. **5. Schritt**) ist die qualitative grafische Darstellung von Gl. (4.34) verwendet worden.

Über Drosselventil 2 fällt keine Druckdifferenz ab, sondern der Druck p_3 (der infolge Kavitation nicht negativ werden kann), weshalb hier auf die Signum-Funktion (s. Gl. (4.32)) verzichtet werden kann:

$$Q_3 = k_{VDr2} \cdot A_{VDr2} \cdot \sqrt{p_3} \quad (4.35)$$

Das ist auch in der grafischen Darstellung dieses Blockes in Abb. 4.34 berücksichtigt worden.

Der 5. Schritt:

Das Blockschaltbild in Abb. 4.34 enthält alle in den bisherigen Schritten beschriebenen Zusammenhänge.

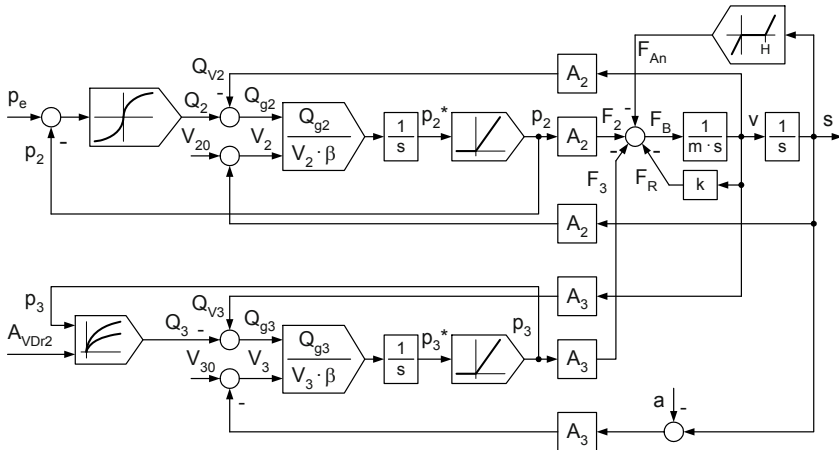


Abb. 4.34 Das Blockschaltbild des Modells 2 des Hydraulikantriebs

Die Kontrolle zeigt, dass alle Wirkungskreise geschlossen sind, es sind keine Zusammenhänge vergessen worden.

4.3.2 Simulationsläufe

Zunächst wird Modell 1 simuliert, um, wie oben beschrieben, Anfangswerte für Modell 2 zu erhalten. Folgende Kenngrößen und Übertragungsfaktoren sind für einen derartigen Hydraulikantrieb wie in Abschn. 3.4.2 aus [4.9] übernommen worden.

Tabelle 4.4 Gewählte Parameterwerte des Modells 1 in Abb. 4.32

p_{DQ}	A_2	β	V_{20}	m	k	c_{An}	k_{Dr}	A_{1Dr1}
10 N/mm^2	1000 mm^2	10^{-3} mm^2/N	10^5 mm^3	2000 kg	10 $N\ s/mm$	200 N/mm	$4 \cdot 10^{-4}$ $\frac{mm^2}{s \cdot \sqrt{N}}$	0,5 mm^2

Die Dimensionen sind bis auf die der Masse kompatibel. Eine Umrechnung ergibt:

$$m = 2000\ kg = 2000\ kg \cdot \frac{1N}{1\ kg\ m/s^2} \cdot \frac{1m}{1000\ mm} = 2\ \frac{N\ s^2}{mm}.$$

Nach Überführung des Blockschaltbildes in Abb. 4.32 in ein adäquates Simulationsblockschaltbild ergeben sich die Zeitverläufe in Abb. 4.35.

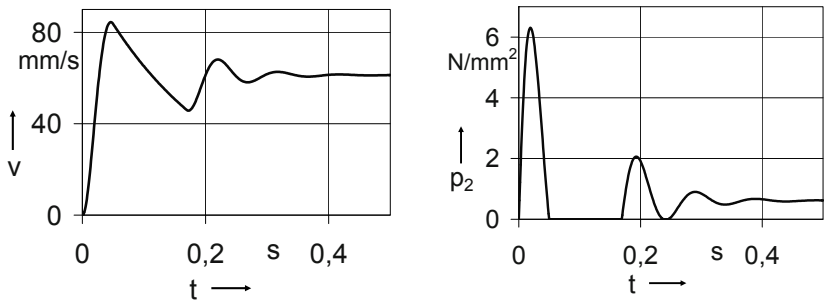


Abb. 4.35 Simulationsergebnisse des Modells 1

Von Interesse für die spätere Simulation von Modell 2 sind $p_2(t)$ und $v(t)$, da ihre stationären Werte (die nach etwa 0,5 s bereits erreicht sind) als Anfangswerte in das Modell 2 eingehen:

$$v(t \rightarrow \infty) \approx 61 \text{ mm/s}, \quad p_2(t \rightarrow \infty) \approx 0,62 \text{ N/mm}^2 = 6,2 \text{ bar}.$$

Die Simulation von Modell 2 wird auf der Basis von Abb. 4.34 durchgeführt. Zunächst gilt es weitere Parameter festzulegen.

Tabelle 4.5 Zusätzliche Parameterwerte des Modells 2 in Abb. 4.34

A_3	V_{30}	H	a	A_{VD2}	c_{An}
500 <i>mm</i> ²	7000 <i>mm</i> ³	100 <i>mm</i>	95 <i>mm</i>	0,12 <i>mm</i> ²	10 ⁴ <i>N/mm</i>

Das Verhalten des Antriebes während der Endlagenbremsung zeigt Abb. 4.36 (die Signalnamen entsprechen denen in Abb. 4.34, der Zeitverlauf des Druckes p_3 ist als dünne Linie dargestellt).

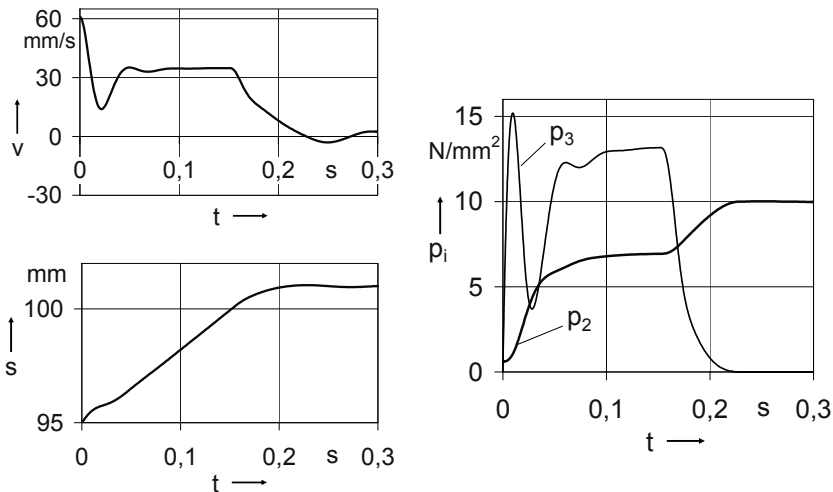


Abb. 4.36 Simulationsergebnisse des Modells 2

Im Moment des Eintauchens des Zapfens in den Zylinderraum mit dem Volumen V_3 steigt der Druck p_3 in diesem relativ kleinen Volumen sehr schnell an und bremst den Kolben zunächst überproportional ab. Im stationären Fall geht die Geschwindigkeit auf etwa die Hälfte zurück und der Kolben prallt nach etwa 150 ms mit entsprechend geringerer Energie an den Anschlag (der relativ nachgiebig angenommen worden ist, er wird um etwa 1 mm zusammengedrückt). Das Ausschlagen am Anschlag wurde nicht bis zum Endzustand $v = 0$ simuliert.

Das berechnete Verhalten der Endlagenbremsung ist nicht optimal. Günstiger wäre ein stetiger Abfall der Geschwindigkeit auf null.

Dieses Verhalten wird annähernd erreicht, wenn anstelle des Drosselventils *VDr 2* Kerben mit sich ändernden Drosselquerschnitten auf dem Zapfen eingefräst würden und diese die Verbindung zwischen Raum 3 und Raum 1 herstellen.

Die optimale Auslegung der die Endlagenbremsung bestimmenden Parameter ist generell kompliziert, da viele andere Parameter des Antriebs Einfluss auf den Anfangszustand haben. In der Elektrohydraulik wird mit Hilfe von Lageregelungen verhindert, dass der Kolben an den Hubenden anschlagen kann, so dass der konstruktive Aufwand der Endlagenbremsung dann meist nicht erforderlich ist (s. Kap. 8).

4.4 Drehfeldmotoren

Folgende Motoren besitzen ein von Spulen im Stator erzeugtes Drehfeld:

- Asynchronmotoren,
- elektronisch kommutierte Motoren (EC-Motoren),
- Synchronmotoren,
- Schrittmotoren.

Ein Modell ihres dynamischen Verhaltens ist komplizierter als das des Gleichstrommotors. Im Gegensatz zum Motorenentwickler benötigt der Anwender oft ein relativ einfaches Modell eines drehzahlgesteuerten Motors als Bestandteil des Gesamtmodells eines komplexeren Antriebssystems. Ziel dieses Abschnittes ist die Herleitung einfacher Modelle von Asynchronmotoren und von elektronisch kommutierten Motoren (Name auch: bürstenloser Gleichstrommotor).

4.4.1 Asynchronmotor (ASM)

Der 1. Schritt:

Das Schema eines Asynchronmotors zeigt Abb. 4.37. Der Ständer besitzt mehrere von phasenverschobenen Wechselströmen durchflossene Wicklungsstränge, die selbst geometrisch versetzt angeordnet sind.

Der einfachste Fall ist: Drei um 120° versetzt angeordnete Wicklungsstränge (Polpaarzahl $p = 1$) werden von um 120° zueinander phasenverschobenen sinusförmigen Wechselströmen durchflossen (Abb. 4.37 a). Die Magnetfelder der Spulen überlagern sich zu einem rotierenden Drehfeld konstanter Stärke. Dieses Drehfeld kann von einem Standard-Dreiphasen-Netz erzeugt werden, es besitzt dann die Drehfrequenz 50 Hz bzw. die Drehzahl 3000 U/min .

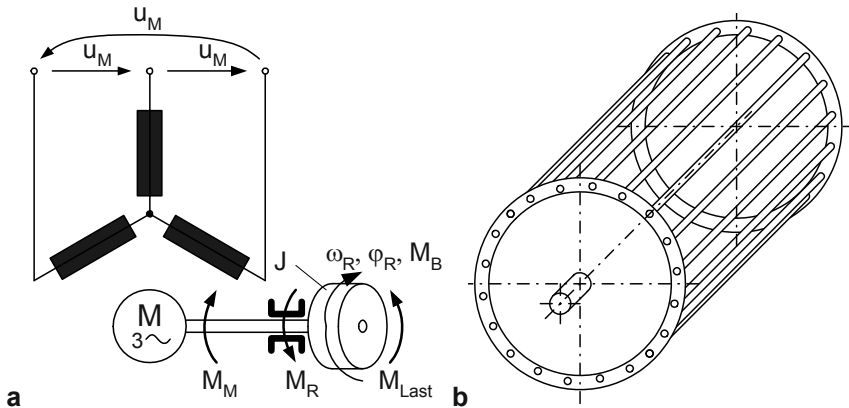


Abb. 4.37 Schema von Komponenten eines Asynchronmotors. **a** Wicklungsstränge des Stators und allgemeiner Rotor **b** Kurzschlussläufer als Rotor

Der Rotor ist meist ein sog. Kurzschlussläufer (Abb. 4.37 b), dessen axial angeordnete Leitungsstränge von den Drehfeldlinien geschnitten werden und in diesen Spannungen induzieren, wenn sich Rotor und Drehfeld unterschiedlich schnell drehen. Die im Rotor entstehenden Ströme bilden mit den Feldlinien einen von null verschiedenen Winkel, es entsteht ein Drehmoment auf den Rotor [4.3, 4.5, 4.8]. Damit ein antreibendes Drehmoment entsteht, muss die Drehzahl des Drehfeldes größer sein als die des Rotors:

$$n_{\text{Drehfeld}} > n_{\text{Rotor}} .$$

Die Kenngröße für Asynchronität dieser Drehzahlen n_i bzw. Winkelgeschwindigkeiten ω_i ist der Schlupf sl :

$$sl = \frac{n_{\text{Drehfeld}} - n_{\text{Rotor}}}{n_{\text{Drehfeld}}} = \frac{\omega_{Df} - \omega_R}{\omega_{Df}} . \quad (4.36)$$

Der 2. bis 4. Schritt:

Es ist effizienter, hier die schrittweise Herleitung der Modell-Bausteine zu modifizieren. Dann kann von der Kloss'schen Gleichung ausgegangen werden [4.3, 4.5, 4.8]. Das entstehende innere Motormoment M_M ist

$$M_M = M_k \cdot \frac{2}{\frac{sl}{sl_k} + \frac{sl_k}{sl}} . \quad (4.37 \text{ a})$$

Darin sind das Kippmoment M_k und der Kippschlupf sl_k [4.3, 4.5, 4.8]:

$$M_k = \frac{m}{2 \cdot L^*} \cdot \left(\frac{u_M}{\omega_{Df}} \right)^2, \quad (4.37 \text{ b})$$

$$sl_k \approx \frac{R^*}{\omega_{Df} \cdot L^*}. \quad (4.37 \text{ c})$$

Der ohmsche Widerstand R^* resultiert im Wesentlichen aus dem des Rotors, die Induktivität L^* ist die Streuinduktivität des gesamten Motors, m ist die Anzahl der Stator-Wicklungen ($m = 3$ bei Polpaarzahl $p = 1$, s. Abb. 4.37 a).

Die Beziehungen (4.36) bis (4.37 c) führen zu dem Kurvenverlauf der Funktion $\omega_R = f(M_{Last})$ in Abb. 4.38 (1. Quadrant), wenn das Reibmoment vernachlässigt wird und damit im stationären Betrieb des Motors $M_M \approx M_{Last}$ ist. (Bei den Berechnungen wird M_M ermittelt, da $\omega_R = f(M_{Last})$ zwischen M_{An} und M_k doppeldeutig ist. Erst danach werden Ordinate und Abszisse getauscht, da für den Motor das Lastmoment die unabhängige Variable ist.)

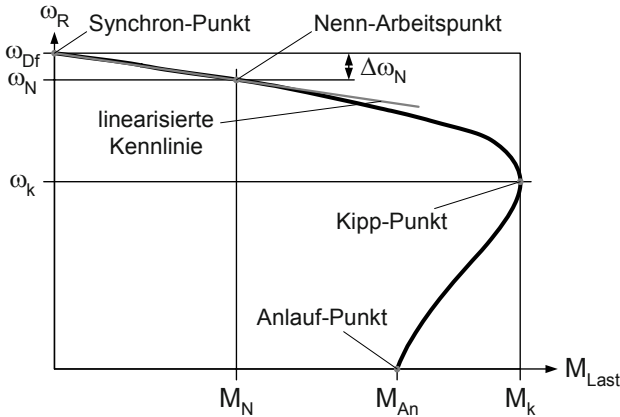


Abb. 4.38 Kurvenverlauf der Funktion $\omega_R = f(M_{Last})$ im 1. Quadranten

Werden die Beziehungen (4.36), (4.37 b) und (4.37 c) in Gl. (4.37 a) eingesetzt, ergibt sich:

$$M_M = \frac{m}{\omega_{Df}} \cdot \frac{R^*}{sl} \cdot \frac{u_M^2}{(R^*/sl)^2 + \omega_{Df}^2 \cdot (L^*)^2}. \quad (4.38)$$

Diese nichtlineare Funktion, in der die Induktivität L^* als Energiespeicher berücksichtigt worden ist, ist im Folgenden die eine Basis der Modellierung des dynamischen Verhaltens des Motors.

Der zweite Energiespeicher ist die Massenträgheit des Rotors. Das Blockschaltbild kann aus **Anhang A, Tabelle A.1**, entnommen werden.

Es wird wiederum drehzahlproportionale Reibung angenommen (s. z. B. Gl. (4.4 a)):

$$M_R = k \cdot \omega_R . \quad (4.39)$$

Eine stetige Drehzahlsteuerung in großen Drehzahlbereichen ist bei diesen Motoren nur mit Hilfe der Veränderung der Drehfeldfrequenz möglich. Dies setzt das Vorhandensein eines Frequenzumrichters voraus, auf dessen Funktionsweise nicht im Einzelnen eingegangen werden kann. Für das zu erarbeitende Modell reicht aus, dass er mit Hilfe einer Steuerspannung u_{St} annähernd sinusförmig verlaufende Spannungen unterschiedlicher Frequenz erzeugt, näherungsweise folgende Funktionen realisierend:

$$\omega_{Df} = K_{Umr1} \cdot u_{St} , \quad (4.40 \text{ a})$$

$$u_M = K_{Umr2} \cdot \omega_{Df} . \quad (4.40 \text{ b})$$

Der 5. Schritt:

Die Gl. (4.40 b) berücksichtigt die aus Gl. (4.37 b) ableitbare Bedingung, dass das Kippmoment des Motors bei unterschiedlichen Drehfeld-Winkelgeschwindigkeiten ω_{Df} nur dann konstant bleibt, wenn das Verhältnis u_M/ω_{Df} konstant ist.

Damit ergibt sich das Blockschaltbild in Abb. 4.39:

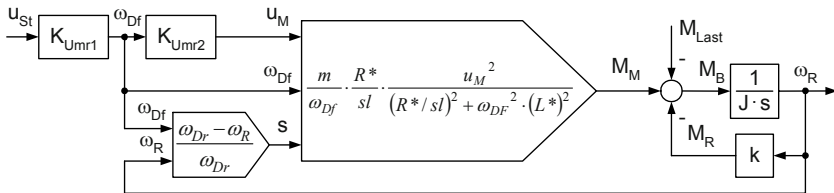


Abb. 4.39 Blockschaltbild eines umrichtergetriebenen Asynchronmotors

Simulationsläufe:

Es wurden folgende Parameter gewählt:

- Umrichter (bei $u_{St} = 5 \text{ V}$ sollen sich $\omega_{Df} = 314 \text{ s}^{-1}$ und $u_M = 220 \text{ V}$ ergeben):
 - $K_{Umr1} = 62,8 \text{ s}^{-1}/\text{V}$,

- $K_{Umr2} = 0,7 \text{ V/s}^{-1}$,
- elektromagnetischer Teil des Motors:
 - Anzahl der Stator-Wicklungen $m = 3$,
 - ohmscher Widerstand $R^* = 10 \text{ } \Omega$,
 - Streuinduktivität $L^* = 0,2 \text{ V s/A}$,
- mechanischer Teil des Motors:
 - Massenträgheitsmoment $J = 2 \text{ kg cm}^2 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Nm s}^2$,
 - Faktor der drehzahlproportionalen Reibung $k = 0,0001 \text{ Nm s}$.

Das Kippmoment des Motors kann mit Hilfe von Gl. (4.37 b) berechnet werden:

$$M_K = \frac{m}{2 \cdot L^*} \cdot \left(\frac{u_M}{\omega_{Df}} \right)^2 = \frac{3}{2 \cdot 0,2 \text{ V s/A}} \cdot \left(0,7 \frac{\text{V}}{\text{s}^{-1}} \right)^2 \cdot \frac{1 \text{ Nm}}{1 \text{ VA s}} = 3,68 \text{ Nm}.$$

Die Abb. 4.40 b zeigt die statischen Kennlinien des Motors mit Umrichter bis fast zum Kippmoment, sie sind mittels Simulation ermittelt worden. Die Zeitverläufe der Eingangsgrößen zeigt Abb. 4.40 a. Als Parameter wurde ω_{Df} gewählt (ω_{Df} ist der Spannung u_{St} proportional).

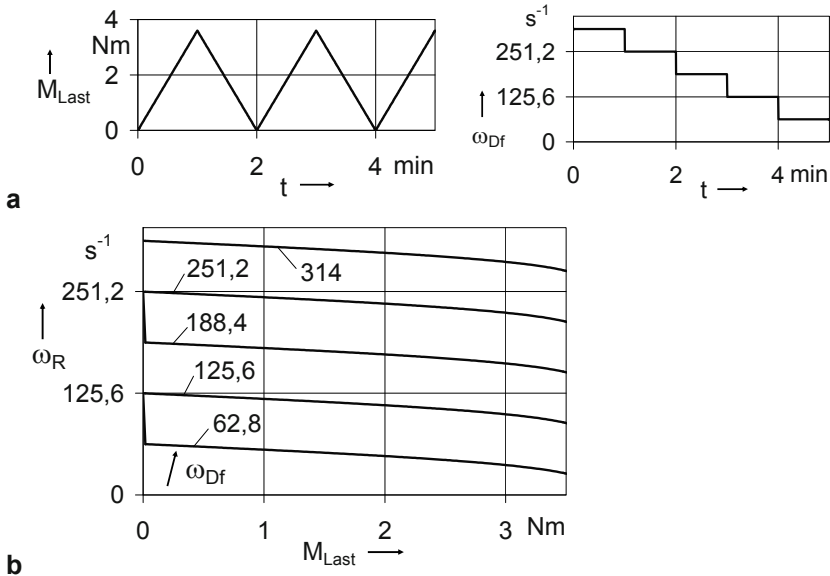


Abb. 4.40 Simulationsergebnisse des quasi-statischen Verhaltens des Asynchronmotors. **a** Verläufe der Eingangsgrößen **b** statische Kennlinien $\omega_{Df} = f(M_{Last})$ mit dem Parameter ω_{Df} (bei $M_{Last} = 0$ ist $\omega_R \approx \omega_{Df}$)

Die Eingangsgröße M_{Last} wurden so langsam verändert, dass das Modell des dynamischen Verhaltens des Motors mit Umrichter in Näherung die statischen Kennlinien $\omega_R = f(M_{Last})$ wiedergibt. Es ist zu erkennen, dass die Kennlinien zwischen $M_{Last} = 0$ und etwa $M_{Last} = 1,5 \text{ Nm}$ einer Geraden nahe kommen, es entsteht in diesem Bereich annähernd eine Kennlinie wie die eines Gleichstrommotors mit Fremderregung (s. Abschn. 3.3).

Es muss jedoch immer das Kippmoment beachtet werden. Da noch das Reibmoment und das Beschleunigungsmoment in die Momentenbilanz eingehen, sollte das Lastmoment nicht größer als etwa die Hälfte des Kippmoments werden, zumal in der Nähe des Kippmoments die Kurve $\omega_R = f(M_{Last})$ eines ASM steil abfällt (vgl. Abb. 4.38).

Eine weitere Simulation zeigt das dynamische Verhalten des Motors mit Umrichter in Abb. 4.41. Der Motor befindet sich für $t = 0$ an dem Arbeitspunkt Lastmoment $M_{Last} = 1 \text{ Nm}$, $\omega_{Df} = 125,6 \text{ s}^{-1}$ (entsteht bei $u_{St} = 2 \text{ V}$) sowie $\omega_R = 119 \text{ s}^{-1}$. Die Überprüfung dieser Werte ist mit Gl. (4.37 a) bis Gl. (4.37 c) möglich, da das Reibmoment viel kleiner ist als das Lastmoment. Die Motordrehzahl soll sich verdoppeln, d. h. die Steuerspannung wird auf $u_{St} = 4 \text{ V}$ erhöht.

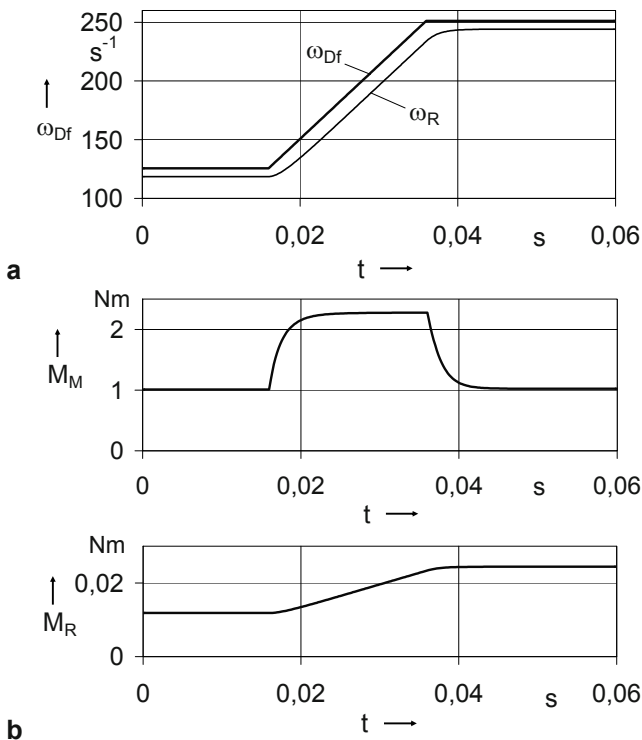


Abb. 4.41 Simulationsergebnisse der Drehzahlsteuerung des Asynchronmotors. **a** Verläufe der Winkelgeschwindigkeiten ω_{Df} sowie ω_R (dünne Linie) **b** Verläufe der Momente M_M und M_R

Geschieht das zu schnell, steigt das Beschleunigungsmoment so weit an, dass der Kippunkt des Motors erreicht wird und sehr große Ströme entstehen. Um das zu vermeiden, wird in den Umrichter meist eine Funktion eingebaut, die die Änderungsgeschwindigkeit von ω_{Df} begrenzt. In Abb. 4.41 a wurde das in Form einer Rampe mit der Übergangszeit 0,02 s realisiert. Die Rotor-Winkelgeschwindigkeit ω_R ist in allen Phasen des Übergangsvorganges kleiner als ω_{Df} , da der Schlupf zur Realisierung des Motor-Moments erforderlich ist. Das erforderliche Motormoment M_M beträgt während des Übergangsvorganges etwa 2,3 Nm (Abb. 4.41 b).

Das Modell in Abb. 4.39 sollte nur für mittlere und größere Winkelgeschwindigkeiten verwendet werden, bei sehr kleinen gelten einige vereinfachende Ansätze nicht ausreichend.

4.4.2 Elektronisch kommutierter Motor (ECM)

Sein Wirkprinzip entspricht dem des Gleichstrommotors mit Permanentmagnet-Erregung, aber mit Umkehr der Anordnungen für Erregerfeld und stromführende Spulen:

- Das Erregerfeld befindet sich im Rotor (es wird mit Hilfe von Permanentmagneten gebildet).
- Die stromführenden Spulen befinden sich im Stator.

Der Vorteil gegenüber dem Gleichstrommotor mit Permanentmagnet-Erregung ist, dass der Rotor nicht an eine Spannungsquelle angeschlossen werden muss.

Der 1. Schritt:

Das Schema dieses Motors zeigt Abb. 4.42. Die Stromwendung in den jetzt feststehenden Spulen 1 bis 3 übernimmt eine spezielle Steuerschaltung.

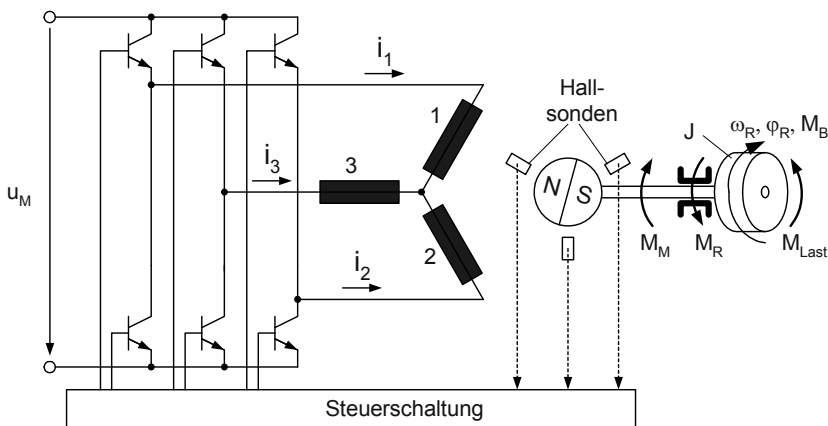


Abb. 4.42 Schema eines EC-Motors

Eingangsgrößen der Steuerung sind die Signale von Sensoren, die die Lage des Rotors detektieren, z. B. von Hallsonden (sie erkennen Nord- und Südpol des Permanentmagneten). Die Steuerschaltung steuert die für diese Position "richtigen" Transistoren so an, dass der Winkel zwischen Rotorfeld und Statorfeld immer in der Nähe von 90° liegt.

Das Statorfeld wird damit von der Position des Rotorfeldes gesteuert. Der Motor ist eigengeführt wie der Gleichstrommotor mit Permanentmagnet-Erregung in Abschn. 3.3. Die Drehzahlstellung wird über die angelegte Gleichspannung u_M durchgeführt.

Der 2. bis 5. Schritt:

Das mathematische Modell des statischen und des dynamischen Verhaltens entspricht dem des permanentmagnetenerregten Gleichstrommotors, wenn die Kommutierung dafür sorgt, dass der Winkel zwischen Rotorfeld und Statorfeld immer 90° ist (Abb. 4.43, vgl. mit Abb. 3.11).

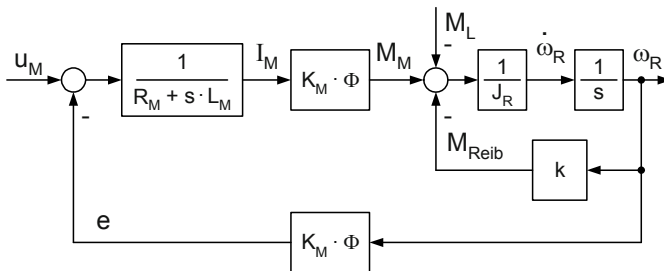


Abb. 4.43 Blockschaltbild eines EC-Motors bei idealer Kommutierung

Wird die Position jedoch relativ grob gemessen und die Bestromung der Statorwicklungen blockweise durchgeführt, entsteht ein schwankendes Drehmoment über eine Rotorumdrehung. Im folgenden Simulationsbeispiel wird angenommen, dass sechs Positionen detektiert werden. Die in den sechs Rotorpositionen zu schaltenden Ströme in den drei Stator-Wicklungen 1 bis 3 führen zu einem sechseckigen Drehfeld.

Mit Hilfe der Steuerschaltung werden die Relationen zwischen dem Rotorwinkel φ_R und dem Drehfeldwinkel φ_{Df} gemäß Abb. 4.44 realisiert. Der Basiswinkel der Simulation ist der des Rotors, so dass die berechneten Statorwinkel Werte zwischen 120° und 420° einnehmen. Der Differenzwinkel $\Delta\varphi$, dessen Idealwert 90° wäre, schwankt dann immer zwischen 60° und 120° und der Sinus zwischen 1,0 und 0,866. Die Steuerschaltung in Abb. 4.42 realisiert annähernd das in Abb. 4.44 dargestellte Verhalten des Stator-Feldwinkels.

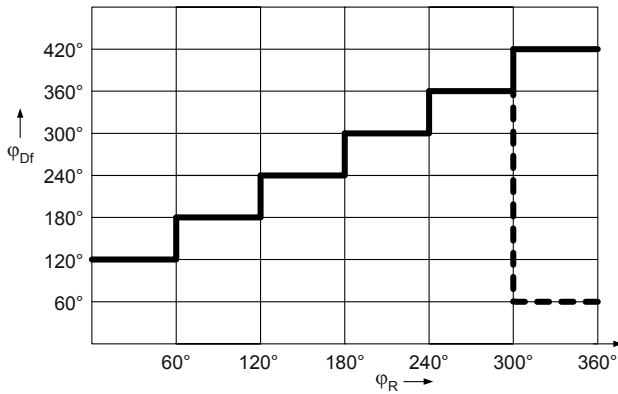


Abb. 4.44 Das von der Steuerschaltung realisierte Verhalten des Drehfeldes

Das führt zu dem modifizierten Blockschaltbild in Abb. 4.45.

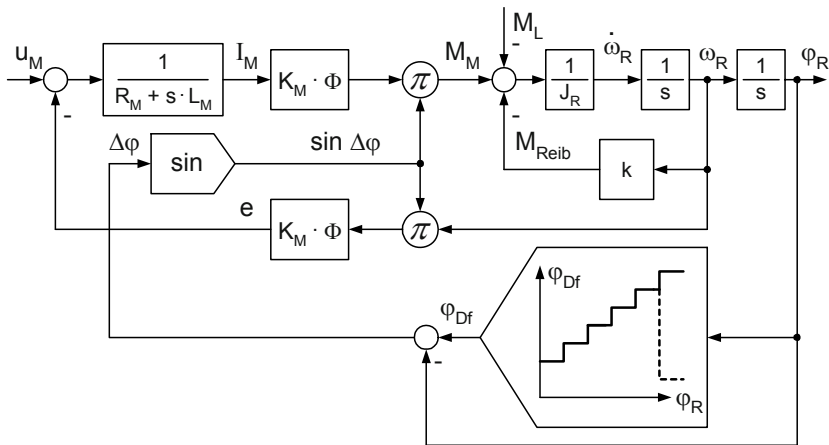


Abb. 4.45 Blockschaltbild eines EC-Motors bei blockweiser Bestromung des Stators

Simulationslauf:

Für den Simulationslauf auf der Basis des Modells in Abb. 4.45 wurden folgende Parameter gewählt:

- elektromagnetischer Teil des Motors:
 - $K_M \cdot \Phi = 0,1 \text{ Vs}$,
 - ohmscher Widerstand $R_M = 4 \Omega$,
 - elektrische Zeitkonstante $T_e = L_M/R_M = 0,002 \text{ s}$,

- mechanischer Teil des Motors:
 - Massenträgheitsmoment $J = 1,4 \text{ kg cm}^2 = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ Nm s}^2$,
 - Faktor der drehzahlproportionalen Reibung $k = 0,0001 \text{ Nm s}$,
- Eingangsgrößen:
 - Lastmoment $M_L = 0,05 \text{ Nm}$,
 - Motorspannung $u_M = \begin{cases} 10 \text{ V} & \text{für } t \leq 0,25 \text{ s} \\ 5 \text{ V} & \text{für } t > 0,25 \text{ s} \end{cases}$.

In Abb. 4.46 sind die Zeitverläufe der relevanten Winkel dargestellt. (Der Rotorwinkel wird im Simulationsmodell bei Erreichen des Wertes $\varphi_R = 360^\circ$ immer auf null gesetzt.) Der Sinus von $\Delta\varphi$ beeinflusst das Motormoment M_M und die induzierte Rückwirkungsspannung e .

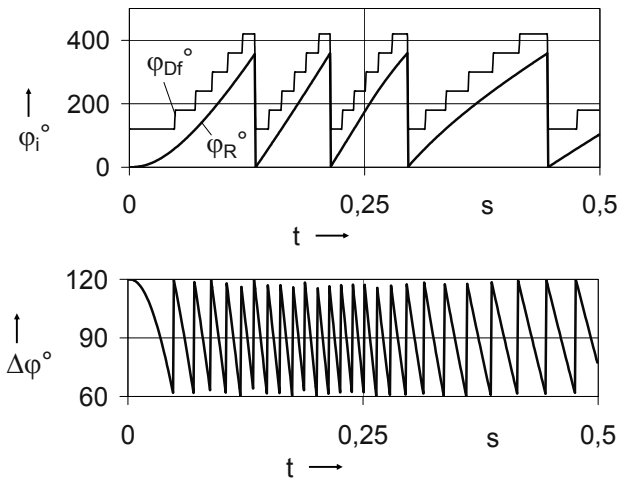


Abb. 4.46 Simulationsergebnisse der Drehzahlsteuerung des EC-Motors., Verläufe der Winkel φ_{Df} , φ_R und $\Delta\varphi$

Die Abb. 4.47 zeigt die Verläufe des Motormoments M_M und der sich einstellenden Rotor-Winkelgeschwindigkeiten ω_R .

Die deutlich sichtbaren Oberwellen des Motormoments erklären sich aus den Winkelverläufen in Abb. 4.46. Die Amplituden dieser Oberwellen werden kleiner und ihre Frequenz erhöht sich, wenn im Stator die Polpaarzahl p und im Rotor die Anzahl der Permanentmagnete erhöht werden.

Aus dem Verlauf der Rotor-Winkelgeschwindigkeit ω_R ist zu erkennen, dass die Steuerung der Drehzahl des Motors mit Hilfe der anliegenden Gleichspannung u_M wie beim konventionellen permanentmagneterregten Gleichstrommotor geschieht.

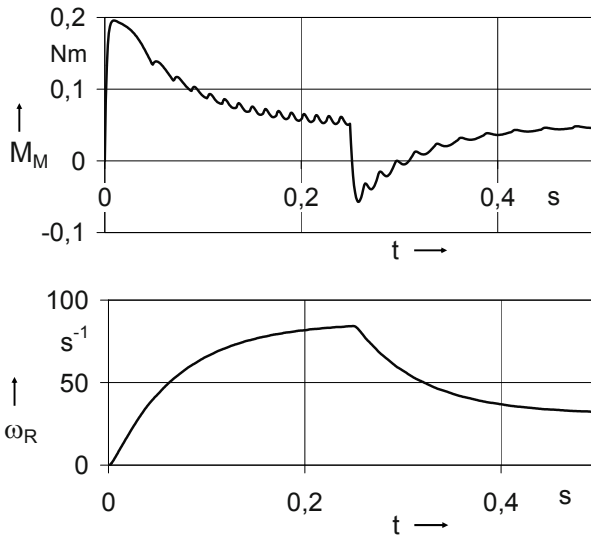


Abb. 4.47 Simulationsergebnisse der Drehzahlsteuerung des EC-Motors, Verläufe des Moments M_M und der Winkelgeschwindigkeit ω_R

4.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden zunächst allgemeine Nichtlinearitäten in die Blockschaltform überführt. Danach wurden nichtlineare Systeme beschrieben und in adäquate mathematische Modelle überführt. Ihr Verhalten wurde mit Hilfe der Simulation ermittelt. Eine Simulation des Modell-Verhaltens ist beim Auftreten von Nichtlinearitäten meist erforderlich, auch wenn die analysierten Systeme nur Verzögerungen niedriger Ordnung besitzen.

Die Beispiel-Systeme stammen aus den Bereichen Technische Mechanik, Elektrotechnik und Fluidtechnik:

- mehrere rein mechanische Systeme,
- das elektro-mechanische System Drehschwinger,
- ein Hydraulikantrieb,
- elektrische Drehfeldmotoren.

Systeme mit Komponenten aus dem Bereich der Thermodynamik sind in das Kapitel 4 nicht aufgenommen worden. Sie werden ausführlich in Kapitel 6 behandelt.

Die wichtigen Modell-Bausteine zur Beschreibung nichtlinearen Verhaltens sind in **Anhang A, Tabelle A.5**, zusammengestellt worden.

5 Schaltungen mit Operationsverstärkern

Der Operationsverstärker (Kurzname *OPV*; Symbol und Anschlüsse s. Abb. 5.1 a) ist seit langem eine der wichtigsten Komponenten der Analog-Elektronik. Anwendung findet er unter anderem in der Messtechnik und in der Regelungstechnik, in der Unterhaltungselektronik und in der Nachrichten- und Kommunikationstechnik.

Das Kapitel 5 soll, dem Charakter des Buches entsprechend, dem Einsteiger in die Modellierung technischer Systeme den Zugang auch zu Schaltungen mit Operationsverstärkern ermöglichen, indem er die bisher beschriebenen Bausteine und Werkzeuge einsetzt. Dabei werden Schaltungen im Vordergrund stehen, in denen die Verzögerungen, die im *OPV* selbst entstehen, stark vereinfacht beschrieben oder sogar vernachlässigt werden können, weil sie wesentlich kleiner sind als die der umgebenden Beschaltungen.

In diesem Kapitel sind die bisher gegangenen Schritte 1 bis 5 bei der Modellermittlung nicht der günstigste Weg der Modellermittlung. Vielmehr werden die Beschaltungen am effektivsten über die Spannungsteilerregel beschrieben.

5.1 Allgemeines Modell von Schaltungen mit Operationsverstärkern

Im Symbol in Abb. 5.1 a ist zu erkennen, dass der *OPV* einen *nicht invertierenden* („+“) und einen *invertierenden* („-“) Eingang besitzt. Damit können die Vorzeichen der Eingangsspannungen nach Vorgabe festgelegt werden oder negative und auch positive Rückwirkungen realisiert werden.

Ein *OPV* besitzt eine sehr große Verstärkung K . Sie ist der Anstieg der Kurve $u_a = f(u_D)$ in Abb. 5.1 b, der bis nahe an die positive und die negative Versorgungsspannung $\pm u_V$ als konstant angenommen werden kann (K liegt meist im Bereich von 10^5 bis 10^6).

Ein *OPV* hat einen so hohen Eingangswiderstand, dass der Strom in den beiden Eingängen meist vernachlässigt werden kann (s. Abb. 5.1 a: $i_e \rightarrow 0$). Sein Ausgangswiderstand ist im Vergleich zu dem Widerstand nachfolgender Schaltungen meist so klein, dass er ebenfalls vernachlässigt werden kann. In allen Beispielen ab Abschn. 5.2 wird von der Berechtigung dieser beiden Vernachlässigungen ausgegangen.

Aus den bisherigen Angaben kann das Blockschaltbild für die Komponente *OPV* in Abb. 5.1 c abgeleitet werden. Der Anstieg der Kurve im nichtlinearen Block ist mit der Verstärkung K gegeben, als Grenzwerte werden näherungsweise

die positive und die negative Versorgungsspannung $\pm u_V$ angenommen. Die mathematische Funktion des Blockes lautet damit

$$u_a = \begin{cases} +u_V & \text{für } u_D > +\frac{u_V}{K} \\ K \cdot u_D & \text{für } -\frac{u_V}{K} \leq u_D \leq +\frac{u_V}{K} \\ -u_V & \text{für } u_D < -\frac{u_V}{K} \end{cases} \quad (5.1)$$

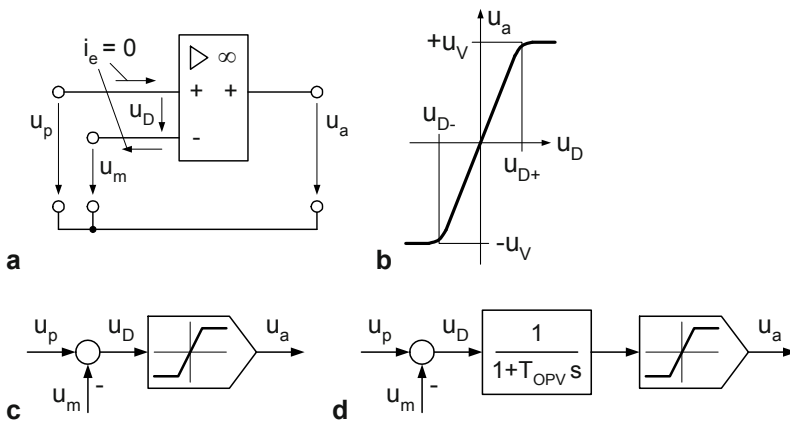


Abb. 5.1 Der Operationsverstärker (OPV). **a** Symbol mit Spannungen und Strömen **b** statische Kennlinie **c** Blockschaltbild eines OPV, unverzögert wirkend **d** Blockschaltbild eines OPV mit Tiefpassverhalten

Im Folgenden werden einige typische Schaltungen in ein adäquates mathematisches Modell überführt und ihr Verhalten teilweise mit Hilfe der Simulation ermittelt. In diesen Schaltungen wird die Ausgangsspannung u_a auf den invertierenden, aber auch auf den nicht invertierenden Eingang zurückgeführt. Oft wird die zurückgeführte Spannung u_p oder u_m in einer Spannungsteilerschaltung aus ohmschen Widerständen aus der Ausgangsspannung u_a gewonnen. D. h., dass die Rückführung ein statischer Übertragungsfaktor ist, was in Verbindung mit dem Blockschaltbild in Abb. 5.1 c in der Simulation zu einer sog. *algebraischen Schleife* führt. Sie entsteht, wenn in einem Modell-Wirkungskreis keine Verzögerung vorhanden ist. Sie muss dann künstlich geschaffen werden (s. Kap. 8) oder es muss eine bisher vernachlässigte Verzögerung im System berücksichtigt werden. Dieser Weg wird im Folgenden gegangen.

Aus der inneren Schaltung des OPV mit ihren zahlreichen Kapazitäten oder auch aus dem Parameter „obere Grenzfrequenz“ ist erkennbar, dass im OPV eine

Verzögerung zwischen Eingangsgröße u_D und Ausgangsgröße u_a besteht. Sie kann für die Schaltungen, die in diesem Kapitel behandelt werden, mit ausreichender Genauigkeit als Tiefpass 1. Ordnung beschrieben werden (s. Abb. 5.1 d).

Für z. B. $u_D = 1 \text{ mV} \cdot s(t)$, $K = 10^5$ und $T_{OPV} = 10 \text{ } \mu\text{s}$ bis $T_{OPV} = 100 \text{ } \mu\text{s}$ liegt die *slew rate* des Tiefpasses 1. Ordnung im interessierenden Spannungsbereich zwischen etwa $10 \text{ V}/\mu\text{s}$ und $1 \text{ V}/\mu\text{s}$ (*slew rate* ... maximale Änderungsgeschwindigkeit der Ausgangsspannung, $s(t)$... Einheitssprungfunktion).

Die Operationsverstärkeranwendungen lassen sich unter den genannten Voraussetzungen auf eine allgemeine Basisschaltung und ein zugehöriges Basismodell zurückführen. Abb. 5.2 a zeigt die Basisschaltung.

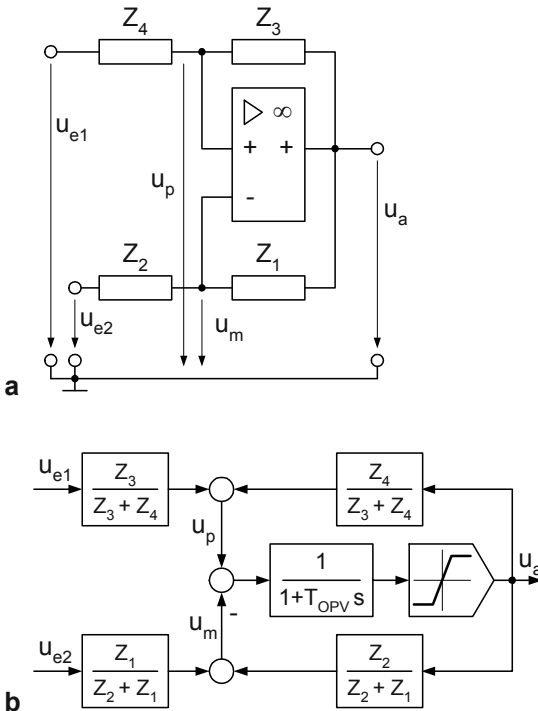


Abb. 5.2 Allgemeine Operationsverstärker-Schaltung. **a** Schaltung mit komplexen Widerständen **b** Blockschaltbild

Aus Abb. 5.2 a kann das Blockschaltbild in Abb. 5.2 b entwickelt werden. Für $i_e = 0$ (s. Abb. 5.1 a) ist nach der Spannungsteilerregel

$$u_p - u_a = (u_{e1} - u_a) \cdot \frac{Z_3}{Z_3 + Z_4} \quad (5.2 \text{ a})$$

und damit

$$\begin{aligned} u_p &= u_{e1} \cdot \frac{Z_3}{Z_3 + Z_4} + u_a \left(1 - \frac{Z_3}{Z_3 + Z_4} \right) \\ &= u_{e1} \cdot \frac{Z_3}{Z_3 + Z_4} + u_a \left(\frac{Z_4}{Z_3 + Z_4} \right). \end{aligned} \quad (5.2 \text{ b})$$

Analog ergeben sich:

$$u_m - u_a = (u_{e2} - u_a) \cdot \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad \text{und} \quad (5.3 \text{ a})$$

$$u_m = u_{e2} \cdot \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} + u_a \cdot \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}. \quad (5.3 \text{ b})$$

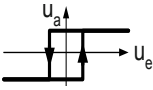
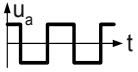
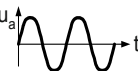
In den konkreten *OPV*-Schaltungen sind viele der allgemeinen komplexen Widerstände Z_i in Abb. 5.2 a ohmsche oder imaginäre Widerstände bzw. sie sind null oder unendlich groß. Für einige *OPV*-Anwendungen ist dies in Tabelle 5.1 zusammengestellt, sie enthält

- Angaben zur realisierten Funktion,
- zu den Widerständen Z_1 bis Z_4 und
- zu den Eingangsgrößen u_{e1} und u_{e2} sowie
- die Information, ob die Ausgangsspannung auf den invertierenden (GegK. ... Gegenkopplung) und/oder auf den nicht invertierenden Eingang (MitK. ... Mitkopplung) zurückgeführt wird.

In der Spalte „Name (Abschn.)“ ist angeführt, in welchem Abschnitt detailliert auf die entsprechende Schaltung eingegangen wird.

Mit der Tabelle sollte erst gearbeitet werden, wenn die folgenden Abschnitte durchgearbeitet worden sind.

Tabelle 5.1 Schaltungen des *OPV*

Name (Abschn.)	Funktion	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	u_{e1}	u_{e2}	Geg K.	Mit K.
Nicht invertierender Verstärker (5.2)	$u_a = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \cdot u_e$	R_1	R_2	$\rightarrow \infty$	0	u_e	0	ja	-
Spannungsfolger = Impedanzwandler (5.2)	$u_a = u_e$	0	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$	0	u_e	0	ja	-
Invertierender Verstärker	$u_a = -\frac{R_1}{R_2} \cdot u_e$	R_1	R_2	$\rightarrow \infty$	0	0	u_e	ja	-
Integrierer	$u_a = -\frac{1}{C_1 \cdot s \cdot R_2} \cdot u_e$	$\frac{1}{C_1 \cdot s}$	R_2	$\rightarrow \infty$	0	0	u_e	ja	-
Differenzierer	$u_a = -R_1 \cdot C_2 \cdot s \cdot u_e$	R_1	$\frac{1}{C_2 \cdot s}$	$\rightarrow \infty$	0	0	u_e	ja	-
Tiefpass = PT1-Glied (5.3)	$u_a = \frac{-\frac{R_1}{R_2}}{1 + R_1 \cdot C_1 \cdot s} \cdot u_e$	$\frac{R_1}{1 + R_1 \cdot C_1 \cdot s}$	R_2	$\rightarrow \infty$	0	0	u_e	ja	-
Differenzverstärker (5.4)	$u_a = \frac{R_1}{R_2} \cdot (u_1 - u_2)$	R_1	R_2	$\rightarrow \infty$	0	$\frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot u_1$	u_2	ja	-
Nicht invertierender Schmitt-Trigger		$\rightarrow \infty$	0	R_3	R_4	u_e	0	-	ja
Astabiler Multivibrator (5.5)		R_1	$\frac{1}{C_2 \cdot s}$	R_3	R_4	0	0	ja	ja
Wien-Oszillator (5.6)		R_1	R_2	$R_3 + \frac{1}{s \cdot C_3}$	$\frac{R_4}{1 + T_4 \cdot s}$	0	0	ja	ja

5.2 Nicht invertierender Verstärker

Eine häufig angewendete *OPV*-Schaltung ist der nicht invertierende Verstärker, vor allem auch in seiner Spezifikation als Impedanzwandler bzw. Spannungsfolger. Abb. 5.3 zeigt beide Schaltungen (oben) und die Blockschaltbilder (unten). Eine wichtige Eigenschaft dieses Verbrauchers ist der hohe Eingangswiderstand, die Eingangsspannung u_e belastet ihre Spannungsquelle nicht. Mit Hilfe von Ta-

belle 5.1 kann Abb. 5.2 in Abb. 5.3 überführt werden, dies gilt ebenfalls für die Schaltungen und Blockschaltbilder ab Abschn. 5.3.

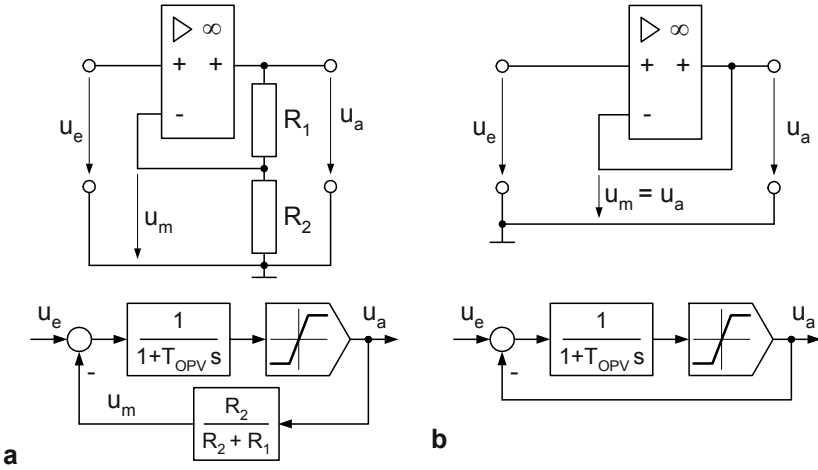


Abb. 5.3 Schaltungen und Blockschaltbilder eines nicht invertierenden Verstärkers. **a** mit der Verstärkung $V > 1$ **b** als Spannungsfolger mit der Verstärkung $V = 1$

Die Rückwirkung in Abb. 5.3 a führt zu der Spannung u_m am invertierenden Eingang gemäß Spannungsteilerregel

$$u_m = \frac{R_2}{R_2 + R_1} \cdot u_a = K_m \cdot u_a. \quad (5.4 \text{ a})$$

Wenn dieser Verstärker bei Ausgangsspannungen unterhalb der Versorgungsspannung betrieben wird, werden die Begrenzungen nicht wirksam und aus dem nichtlinearen Block wird der lineare Block

$$u_a = K \cdot (u_e - u_m). \quad (5.4 \text{ b})$$

Dies wiederum lässt die Analyse des Verhaltens über die Gesamt-Übertragungsfunktion wie in Kap. 3 zu. Die „Kreisformel“ führt auf

$$\frac{u_a}{u_e} = \frac{\frac{1}{1 + T_{OPV} \cdot s} \cdot K}{1 + \frac{1}{1 + T_{OPV} \cdot s} \cdot K \cdot K_m} = \frac{K}{1 + T_{OPV} \cdot s + K \cdot K_m} = \frac{1}{\frac{1}{K} + \frac{T_{OPV}}{K} \cdot s + K_m}.$$

Da die *OPV*-Verstärkung K um Größenordnungen größer als eins ist, kann in sehr guter Näherung geschrieben werden:

$$\frac{u_a}{u_e} = \frac{1}{K_m} \cdot \frac{1}{1 + \frac{T_{OPV}}{K \cdot K_m} \cdot s} \quad (5.4 \text{ c})$$

Die Zeitkonstante der Gesamt-ÜTF $\frac{T_{OPV}}{K \cdot K_m}$ ist damit um Größenordnungen kleiner als die in Abschn. 5.1 abgeschätzte Zeitkonstante T_{OPV} und kann meist vernachlässigt werden. Es ergibt sich ($V \dots$ Verstärkung)

$$\frac{u_a}{u_e} = \frac{1}{K_m} = \frac{1}{\frac{R_2}{R_2 + R_1}} = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) = V \quad (5.5)$$

Die Schaltung des Spannungsfolgers entsteht, wenn $R_1 \rightarrow 0$ und $R_2 \rightarrow \infty$ gehen. Gemäß Gl. (5.5) ist dann die Verstärkung $V = 1$. Spannungsfolger (bzw. Impedanzwandler) werden häufig einem *OPV* mit invertierender Beschaltung (s. Abschn. 5.3) vorgeschaltet, wenn durch das Eingangssignal die davor liegenden Komponenten einer Schaltung, z. B. ein Thermoelement, nicht belastet werden dürfen.

5.3 Tiefpass als Beispiel einer invertierenden Beschaltung

Eine breite Anwendung haben invertierende Beschaltungen gefunden. Mit ihnen können Verstärker, Integrierer, Differenzierer und weitere lineare Systeme aufgebaut werden. Die allgemeine Schaltung ist in Abb. 5.4 a dargestellt.

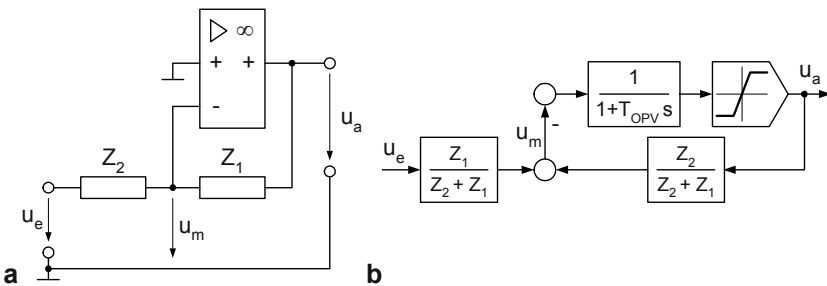


Abb. 5.4 Invertierende *OPV*-Beschaltung. **a** allgemeine Schaltung **b** Blockschaltbild

Auf zwei Eigenschaften sei an dieser Stelle hingewiesen:

- Der nicht invertierende Eingang wird an Masse gelegt, damit ist immer $u_p = 0$.
- Die Beschaltung führt zu einem Strom durch den Widerstand Z_2 , die Quelle der Eingangsspannung u_e wird belastet.

Die allgemeinen Widerstände Z_i können Wirk-, imaginäre oder komplexe Widerstände sein. Die Spannung u_m errechnet sich analog Gl. (5.3 b) zu

$$u_m = u_e \cdot \frac{Z_1}{Z_2 + Z_1} + u_a \cdot \frac{Z_2}{Z_2 + Z_1}.$$

Das führt zu dem Blockschaltbild in Abb. 5.4 b. Wenn jetzt wieder die Kreisformel angewendet wird, ergibt sich wegen des großen Faktors K (und damit $T_{OPV}/K \rightarrow 0$)

$$\frac{u_a}{u_e} = \frac{-\frac{Z_1}{Z_2 + Z_1} \cdot K}{1 + \frac{Z_2}{Z_2 + Z_1} \cdot K} = -\frac{Z_1 \cdot K}{Z_2 + Z_1 + Z_2 \cdot K} = -\frac{Z_1}{\frac{Z_2 + Z_1}{K} + Z_2} \approx -\frac{Z_1}{Z_2}. \quad (5.6)$$

Beim invertierenden Verstärker sind beide Widerstände ohmsche Widerstände, bei Integrierer und Differenzierer nur je einer, der andere ist ein imaginärer Widerstand (s. Tabelle 5.1). Ein Beispiel für eine etwas komplexere Schaltung ist ein Tiefpass 1. Ordnung (bzw. ein PT1-Glied). Die Schaltung zeigt Abb. 5.5.

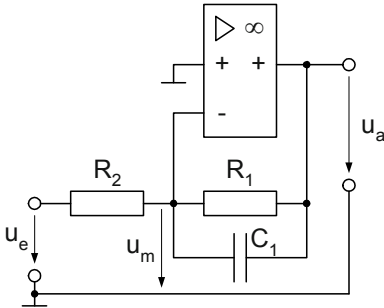


Abb. 5.5 Schaltung eines Tiefpasses 1. Ordnung

Die allgemeinen Widerstände werden zu

$$Z_1 = \frac{R_1}{1 + R_1 \cdot C_1 \cdot s} \quad (\text{s. Gl. (3.4)}) \quad \text{und} \quad Z_2 = R_2.$$

Mit Hilfe von Gl. (5.6) ergibt sich die Übertragungsfunktion eines Tiefpasses 1. Ordnung

$$G(s) = \frac{u_a}{u_e} = -\frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{1}{1 + R_1 \cdot C_1 \cdot s}. \quad (5.7)$$

5.4 Differenzverstärker

Ein Differenzverstärker ist die Kombination aus einer invertierenden und einer nicht invertierenden Beschaltung am OPV. Eine Variante mit vorgeschalteten Spannungsfolgern zeigt Abb. 5.6.

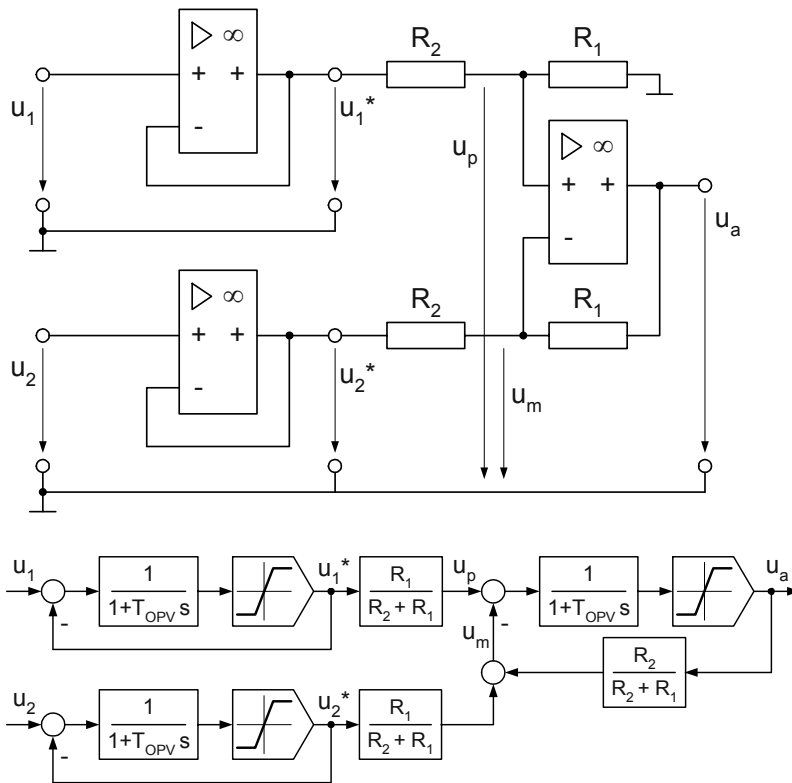


Abb. 5.6 Schaltung und Blockschaltbild eines nicht invertierenden Differenz-Verstärkers mit zwei vorgeschalteten Spannungsfolgern.

Die Blockschaltbilder der drei Teile dieser Schaltung sind aus Abb. 5.3 zu entnehmen. Die Kopplung zwischen diesen wird mit Hilfe der Widerstände R_1 und R_2 hergestellt. Die Spannung u_p ist m. H. der Spannungsteilerregel ermittelbar:

$$u_p = \frac{R_1}{R_2 + R_1} \cdot u_1^* . \quad (5.8)$$

Die Spannung u_m ist ebenfalls m. H. der Spannungsteilerregel zu errechnen. Hier muss beachtet werden, dass der Spannungsteiler auf der einen Seite an u_2^* und an der anderen Seite an u_a liegt (s. Gl. (5.3 b)). Es ist

$$u_m - u_a = (u_2^* - u_a) \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad \text{und}$$

$$u_m = u_2^* \cdot \frac{R_1}{R_2 + R_1} + u_a \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_1} .$$

Die Funktion für diesen Verstärker [5.1]

$$u_a = \frac{R_1}{R_2} \cdot (u_1 - u_2) = V \cdot (u_1 - u_2) . \quad (5.9)$$

gilt nur für den Fall, dass die Spannungen innerhalb der Begrenzungen liegen. Eine Simulation wird zeigen, dass das Modell diese Funktion nachbildet und dass das Modell in Abb. 5.6 auch bei zeitweise zu großen Signalwerten das Verhalten des Verstärkers richtig wiedergibt.

Folgende Parameter werden für die Simulation verwendet (s. Gln. (5.1) und (5.9), Abb. 5.1):

$$\frac{R_1}{R_2} = V = 3 , K = 10^5 , T_{OPV} = 100 \mu s , \text{Versorgungsspannung } u_V = 16 V .$$

Die angenommenen Verläufe der Eingangsspannungen sind:

$$u_1 = 4 V + 4 V \cdot \sin(1000 s^{-1} \cdot t) ,$$

$$u_2 = 4 V + 8 V \cdot \sin(1800 s^{-1} \cdot t) .$$

Das führt zu den Kurven in Abb. 5.7 (die bei $\pm 16 V$ abgeschnittenen sind die Simulationsergebnisse, die anderen das Ergebnis der Gl. (5.9)).

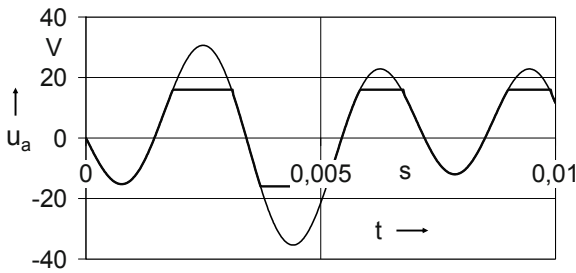


Abb. 5.7 Simulationsergebnisse des Modells des Differenzverstärkers im Vergleich mit Gl. (5.9)

Die Verstärkung $V=3$ führte dazu, dass nur im eigentlichen Differenzverstärker die Begrenzung erreicht wurde, in den Spannungsfolgen jedoch nicht.

5.5 Astabiler Multivibrator

In den bisherigen Beispielen wurden Rückführungen an den invertierenden Eingang gelegt, es ergaben sich ausschließlich Wirkungskreise mit einer Wirkungs-umkehr. In den folgenden Schaltungsbeispielen werden *Rückführsignale* bewusst auch *an den nicht invertierenden Eingang* gelegt (Mitkopplung), um nichtlineares Verhalten zu erzeugen (Abschn. 5.5) oder die Dämpfung einer Schaltung zu null werden zu lassen (Abschn. 5.6).

Mit Hilfe eines astabilen Multivibrators werden Rechteckschwingungen realisiert (Schaltung s. Abb. 5.8).

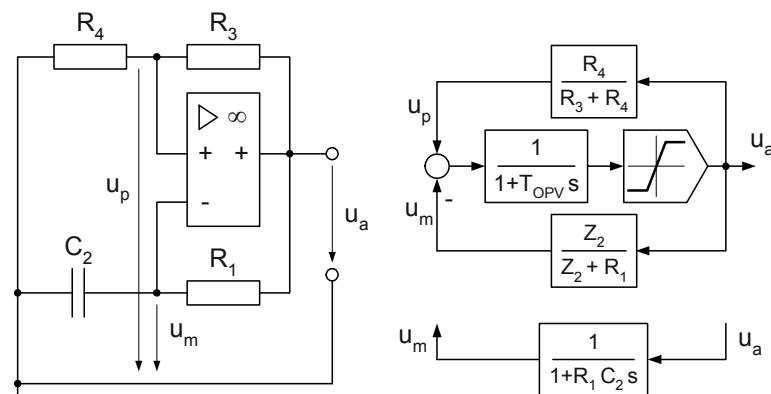


Abb. 5.8 Allgemeine Schaltung und Blockschaltbild eines astabilen Multivibrators

Der Term Z_2 in der Beschreibung als Übertragungsfunktion u_m/u_a lautet

$$Z_2 = \frac{1}{C_2 \cdot s} . \quad (5.10 \text{ a})$$

Damit ist

$$\frac{Z_2}{Z_2 + R_1} = \frac{\frac{1}{C_2 \cdot s}}{\frac{1}{C_2 \cdot s} + R_1} = \frac{1}{1 + R_1 \cdot C_2 \cdot s} \quad (5.10 \text{ b})$$

ein PT1-Glied (s. Abb. 5.8 rechts unten). Mit folgenden Parametern wurde eine Simulation durchgeführt:

- $\frac{R_4}{R_3} = 1$, $R_1 \cdot C_2 = 100 \text{ ms}$, $K = 10^5$, $T_{OPV} = 100 \mu\text{s}$ und
- Versorgungsspannung $u_V = 16 \text{ V}$.

Im Rückführglied mit der Übertragungsfunktion u_m/u_a wurde ein sehr kleiner Anfangswert ($+0,01 \text{ V}$) eingestellt, damit die Ausgangsspannung u_a sofort einen definierten Startwert einnimmt.

Das führt zu den Kurven in Abb. 5.9 (immer wenn u_m den Wert von u_p übertrifft, die Eingangsdifferenzspannung des OPV u_D also das Vorzeichen wechselt, kippt u_a in seinen anderen Grenzwert).

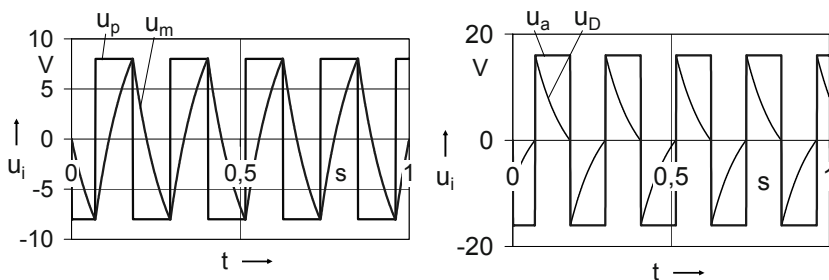


Abb. 5.9 Simulationsergebnisse des Modells des astabilen Multivibrators

Aus den Diagrammen ist eine Periodendauer von etwa $0,22 \text{ s}$ abzulesen. Sie hängt hauptsächlich von der Zeitkonstante $R_1 \cdot C_2$ ab, in geringem Maße auch vom Verhältnis R_4/R_3 [5.1]. Auf ihre Berechnung wird an dieser Stelle nicht ausführlich eingegangen.

5.6 Wien-Oszillator

Oszillatoren erzeugen sinusförmige Schwingungen. Der Wien-Oszillator verwendet zwei Kapazitäten, um ein Übertragungsglied 2. Ordnung zu schaffen. Die Schaltung zeigt Abb. 5.10 a.

Die Blockschaltbildstrukturen des Wien-Oszillators und des astabilen Multivibrators sind gleich (vgl. Abb. 5.10 b mit Abb. 5.8 rechts). Die komplexen Widerstände des Wien-Oszillators Z_3 und Z_4 sind

$$Z_3 = R_3 + \frac{1}{C_3 \cdot s} = \frac{1 + R_3 \cdot C_3 \cdot s}{C_3 \cdot s} \text{ und}$$

$$Z_4 = R_4 // \frac{1}{C_4 \cdot s} = \frac{R_4 \cdot \frac{1}{C_4 \cdot s}}{R_4 + \frac{1}{C_4 \cdot s}} = \frac{R_4}{1 + R_4 \cdot C_4 \cdot s} \text{ (s. Gl. (3.4)).}$$

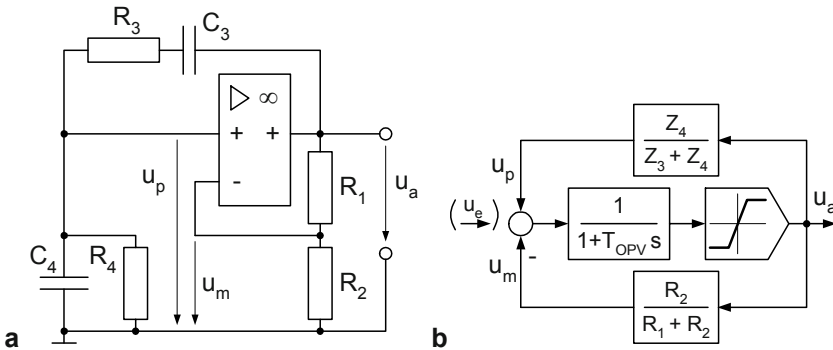


Abb. 5.10 Wien-Oszillator. **a** allgemeine Schaltung **b** Blockschaltbild

Das führt zur Übertragungsfunktion u_p/u_a

$$\begin{aligned} \frac{u_p}{u_a} &= \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4} = \frac{\frac{R_4}{1 + R_4 \cdot C_4 \cdot s}}{\frac{1 + R_3 \cdot C_3 \cdot s}{C_3 \cdot s} + \frac{R_4}{1 + R_4 \cdot C_4 \cdot s}} \\ &= \frac{R_4 \cdot C_3 \cdot s}{(1 + R_3 \cdot C_3 \cdot s) \cdot (1 + R_4 \cdot C_4 \cdot s) + R_4 \cdot C_3 \cdot s} \end{aligned}$$

mit der Endform

$$\begin{aligned}\frac{u_p}{u_a} &= \frac{R_4 \cdot C_3 \cdot s}{1 + (R_3 \cdot C_3 + R_4 \cdot C_4 + R_4 \cdot C_3) \cdot s + R_3 \cdot C_3 \cdot R_4 \cdot C_4 \cdot s^2} \\ &= \frac{T_{34} \cdot s}{1 + (T_3 + T_4 + T_{34}) \cdot s + T_3 \cdot T_4 \cdot s^2}.\end{aligned}\quad (5.11)$$

Der Oszillator entsteht, wenn das Gesamtverhalten die Dämpfung null besitzt, d.h., die invertierende Rückführung muss die in Gl. (5.11) vorhandene Dämpfung kompensieren. Da das System wiederum innerhalb seiner Grenzwerte $\pm u_V$ (s. Abb. 5.1) schwingt, kann mit der Kreisformel die Gesamt-ÜTF bestimmt werden. Obwohl das System später ohne Anregung von außen schwingt, wird zunächst von einer fiktiven Eingangsgröße u_e ausgegangen (Abb. 5.10 b).

Mit den Vereinfachungen $T_{OPV} = 0$, $\frac{u_m}{u_a} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = K_m$ ergeben sich der Ansatz

$$\begin{aligned}\frac{u_a}{u_e} &= \frac{K}{1 + K \cdot K_m - \frac{K \cdot T_{34} \cdot s}{1 + (T_3 + T_4 + T_{34}) \cdot s + T_3 \cdot T_4 \cdot s^2}} \\ &= \frac{K \cdot (1 + (T_3 + T_4 + T_{34}) \cdot s + T_3 \cdot T_4 \cdot s^2)}{(1 + K \cdot K_m) \cdot (1 + (T_3 + T_4 + T_{34}) \cdot s + T_3 \cdot T_4 \cdot s^2) - K \cdot T_{34} \cdot s} \\ &= \frac{1 + (T_3 + T_4 + T_{34}) \cdot s + T_3 \cdot T_4 \cdot s^2}{\left(\frac{1}{K} + K_m\right) \cdot (1 + (T_3 + T_4 + T_{34}) \cdot s + T_3 \cdot T_4 \cdot s^2) - T_{34} \cdot s}\end{aligned}$$

und mit $K \rightarrow \infty$ die Endform der Übertragungsfunktion

$$\frac{u_a}{u_e} = \frac{1}{K_m} \cdot \frac{1 + (T_3 + T_4 + T_{34}) \cdot s + T_3 \cdot T_4 \cdot s^2}{1 + \left(T_3 + T_4 + T_{34} - \frac{T_{34}}{K_m}\right) \cdot s + T_3 \cdot T_4 \cdot s^2}.$$

Die Dämpfung des Gesamtsystems wird null, wenn das lineare Glied im Nenner null wird. Es muss dann $1/K_m$ den Wert

$$\frac{1}{K_m} = \frac{T_3 + T_4 + T_{34}}{T_{34}}$$

besitzen. Werden die ursprünglichen Ausdrücke eingesetzt, ergeben sich

$$\frac{1}{K_m} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = \frac{R_3 \cdot C_3 + R_4 \cdot C_4 + R_4 \cdot C_3}{R_4 \cdot C_3}$$

und die Abgleichbedingung

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} + \frac{C_4}{C_3} . \quad (5.12)$$

Ist die Dämpfung des Gesamtsystems null, dann ist die Periodendauer des Oszillators T_P exakt:

$$T_P = 2\pi \cdot \sqrt{T_3 \cdot T_4} . \quad (5.13)$$

Ein Zahlenbeispiel. Die Widerstandswerte von R_3 und R_4 und die Kapazitäten C_3 und C_4 werden jeweils gleich groß gewählt und so, dass alle $R_i \cdot C_i = 0,001 \text{ s}$ sind. Es muss gemäß Gl. (5.12)

$$\frac{R_1}{R_2} = 2$$

sein, damit ungedämpfte Sinusschwingungen entstehen können. Die im Modell benötigten Funktionen bzw. Faktoren sind jetzt:

$$\frac{u_m}{u_a} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{R_1/R_2 + 1} = \frac{1}{3} \text{ und}$$

$$\begin{aligned} \frac{u_p}{u_a} &= \frac{R_4 \cdot C_3 \cdot s}{1 + (R_3 \cdot C_3 + R_4 \cdot C_4 + R_4 \cdot C_3) \cdot s + R_3 \cdot C_3 \cdot R_4 \cdot C_4 \cdot s^2} \\ &= \frac{0,001 \text{ s} \cdot s}{1 + 0,003 \text{ s} \cdot s + 10^{-6} \text{ s}^2 \cdot s^2} . \end{aligned}$$

Die Periodendauer des Oszillators beträgt

$$T_P = 2\pi \cdot \sqrt{10^{-6} \text{ s}^2} \approx 6,28 \text{ ms} .$$

Um den Oszillator anzuregen, kann ein entsprechend dimensionierter Spannungsimpuls aufgeschaltet werden (u_e in Abb. 5.10 b) oder, und das ist meist der Fall, die Kapazitäten werden extern auf einen bestimmten Wert aufgeladen und danach mittels Schalter wieder angeschlossen. In beiden Fällen entstehen ungedämpfte Sinusschwingungen, wenn die Werte der beteiligten Komponenten sehr gut aufeinander abgestimmt sind. (Auf eine Simulation konnte damit verzichtet werden.) Es sei erwähnt, dass die beschriebene Schaltung in der Praxis meist erweitert wird. Die Amplituden sind häufig nicht stabil, so dass Amplitudenregelun-

gen erforderlich werden können. Oder die Schwingungen erfüllen nicht die gestellten Anforderungen an die Sinusform, dann werden oft weitere Tiefpässe in die Schaltung integriert. Zur Untersuchung dieser Verhaltensweisen kann das ermittelte Blockschaltbild als Grundlage dienen.

5.7 Zusammenfassung

Die in Kap. 2 beschriebenen Werkzeuge wurden im Kap. 5 auf Schaltungen mit Operationsverstärkern angewendet. Ausgehend von einer Basisschaltung und einem adäquaten Blockschaltbild wurden folgende Schaltungen ausführlich analysiert:

- nicht invertierender Verstärker,
- Tiefpass als Beispiel einer invertierenden Beschaltung,
- Differenzverstärker,
- astabiler Multivibrator,
- Wien-Oszillator.

Da die Beschaltungen ausnahmslos ohmsche, imaginäre oder komplexe Widerstandsschaltungen aus Komponenten des Bereiches Elektrotechnik sind, wurden sie ausschließlich über die Spannungsteilerregel beschrieben. Deshalb konnte auf den Algorithmus der fünf Schritte verzichtet werden.

6 Thermodynamische Systeme

In diesem Kapitel werden thermodynamische Systeme mit dem Medium Gas behandelt. Bei geschlossenen thermodynamischen Systemen besteht mit der Umgebung ausschließlich Energieaustausch, aber kein Stoffaustausch (Beispiel: Druckflüssigkeitsspeicher der Hydraulik). Bei offenen thermodynamischen Systemen existieren beide Austausche.

Die Schritte 1 bis 5 bei der Modellermittlung werden erst ab Abschn. 6.3 bei der Analyse konkreter Systeme wieder angegeben. In den allgemeinen Herleitungen der Modelle thermodynamischer Systeme wird ein anderer Weg gewählt, da sich in einem Gasvolumen mehrere Größen wie Zustandsgrößen verhalten, aber nur eine Größe als Zustandsgröße beschrieben werden kann.

6.1 Allgemeines geschlossenes thermodynamisches System

Seine Hauptmerkmale sind ein abgeschlossenes Volumen und eine sich darin befindende konstante Gasmasse m . Das Volumen V selbst, der Druck p_G und die Temperatur T in diesem Volumen sind veränderlich. Ursachen können sein:

- Wirksamwerden einer internen thermischen Energiequelle mit der Leistung P_{int} (z. B. durch Verbrennungsvorgänge von Kraftstoff in diesem abgeschlossenen Volumen),
- Austausch von Wärmeleistungen P_{wi} mit der Umgebung infolge von Temperaturunterschieden zwischen dem abgeschlossenen Volumen und seiner Umgebung,
- Abgabe/Aufnahme mechanischer Leistung durch Druck-Volumen-Änderung.

Abb. 6.1 zeigt das allgemeine Schema eines geschlossenen thermodynamischen Systems mit einer Austausch-Wärmeleistung P_w .

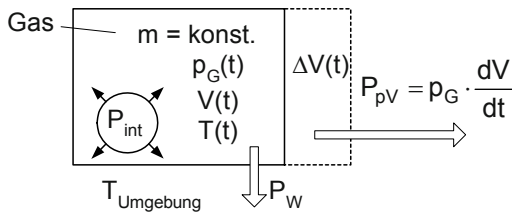


Abb. 6.1 Schema eines geschlossenen thermodynamischen Systems. p_G Gasdruck, V Gasvolumen, P_{int} Leistung einer internen thermischen Energiequelle, P_w Wärmeleistung, m Gasmasse, T Gastemperatur, $T_{Umgebung}$ Umgebungstemperatur, P_{pV} Druck-Volumen-Leistung

Die Druck-Volumen-Leistung P_{pV} ist das Produkt aus dem absoluten Druck p_G und der Änderungsgeschwindigkeit des Volumens V :

$$P_{pV} = p_G \cdot \frac{dV}{dt} = p_G \cdot \dot{V}. \quad (6.1)$$

Die Höhe der transportierten Wärmeleistung P_W hängt ab von der Temperaturdifferenz $T - T_{Umgebung}$, der Durchtrittsfläche der Wärme und der Wärmedurchlassfähigkeit der Wandung. Dieser komplizierte nichtlineare Prozess wird zunächst linear beschrieben:

$$P_W = G_W \cdot (T - T_{Umgebung}) \quad (6.2)$$

(s. Blockschaltbild in Abb. 6.2 b). G_W ist der allgemeine Wärmedurchgangswert [6.3, 6.7, 6.8]. In Abschnitt 6.5.2 wird auf seinen Zahlenwert während der Herleitung der Parameter für die Simulation des Verhaltens eines Stirlingmotors ausführlich eingegangen.

Als Bilanzgrößen sind die entsprechenden Leistungen geeignet (s. Abb. 6.1): die Druck-Volumenleistung P_{pV} sowie die Wärmeleistungen P_{int} und P_W . Die gespeicherte Leistung P_{gesp} ist die Änderungsgeschwindigkeit der inneren Energie U , welche wiederum proportional ist der Gasmasse m , der spezifischen Wärmekapazität c und der absoluten Temperatur T im Inneren des Volumens V :

$$U = m \cdot c \cdot T. \quad (6.3)$$

Damit ist nahe liegend, die Temperatur (analog zu Flüssigkeiten und festen Stoffen) als die Zustandsgröße des thermodynamischen Systems festzulegen.

Der Zusammenhang zwischen den physikalischen Größen m , p_G , V , T wird über die *Gasgleichung* hergestellt:

$$p_G = \frac{m \cdot R \cdot T}{V}. \quad (6.4)$$

In die Gasgleichung geht als neue Größe R , die spezifische Gaskonstante, ein. Ihr Wert hängt von der Art und der Zusammensetzung eines Gases ab.

Bei konstanter Masse m und von außerhalb des Systems bestimmten Werten des Volumens V kann die Gasgleichung genutzt werden, die noch fehlende Größe Absolutdruck p_G zu berechnen. Zu beachten ist,

- dass ein Gasvolumen V z. B. abhängig sein kann von Kolbenpositionen in Motoren oder Kompressoren und
- dass Druck und Temperatur mit ihren Absolutwerten in die Berechnungen eingehen.

Im Folgenden wird die Druck-Volumenleistung P_{pV} als nach außen wirkend, also die innere Energie U verringernd, angenommen.

Abb. 6.2 zeigt eine Variante des allgemeinen Blockschaltbildes mit $\dot{V}$ als Eingangsgröße und V aus dieser über die Integration berechnet ($V = \frac{1}{s} \cdot \dot{V}$). Es ist anzumerken, dass die zum Gesamtsystem gehörenden (meist mechanischen) Komponenten oft den Wert von V anstelle von $\dot{V}$ festlegen. Dann wird V zur Eingangsgröße und $\dot{V}$ errechnet sich daraus über die Differenziation ($\dot{V} = s \cdot V$). Darauf wird in entsprechenden Beispielen nochmals hingewiesen, erstmals im Abschn. 6.5.1.

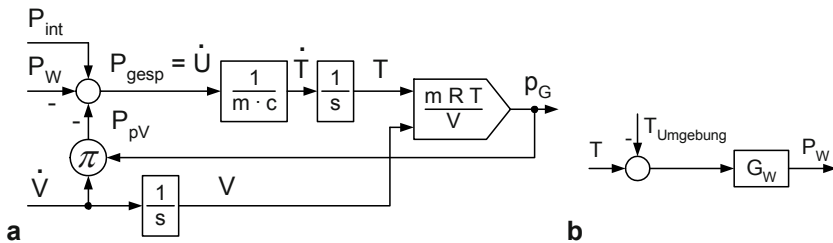


Abb. 6.2 Blockschaltbild eines geschlossenen thermodynamischen Systems **a** analog Abb. 6.1. **b** einfaches Modell des Wärmeaustauschs

Die meisten Blöcke sind aus Kap. 2 bekannt (z. B. $1/s$ für Integration). Die neu hinzugekommenen nichtlinearen Blöcke sind

- die Multiplikation der zwei sich ändernden Größen $\dot{V}$ und p_G zur Druck-Volumen-Leistung und
- die Berechnung von p_G mit Hilfe der Gasgleichung.

Für die Simulation des Verhaltens eines thermodynamischen Systems ist die Festlegung des Anfangszustandes wichtig. Meist sind die Werte von $V(0)$, $p(0)$ und $T(0)$ bekannt. Daraus muss dann für das entsprechende Gas (die Gaskonstante R ist stoffabhängig) die Masse $m(0)$ mit Hilfe der Gasgleichung berechnet werden.

6.2 Allgemeines offenes thermodynamisches System

Zu den bisherigen Größen kommen Gasmasseströme in das Volumen V hinein oder aus dem Volumen V heraus hinzu (Stoffaustausch über einen Drosselspalt). Im Folgenden wird von einem Gasmassestrom $\dot{m}$ zwischen dem offenen thermodynamischen System und einem benachbarten Raum (benR) ausgegangen (Schema in Abb. 6.3).

Seine Größe hängt von der Druckdifferenz $p_{benR} - p$ und dem Leitwert für einen Massestrom G_m ab. Es wird von der folgenden einfachen linearen Beziehung ausgegangen:

$$\dot{m} = G_m \cdot (p_{benR} - p_G). \quad (6.5)$$

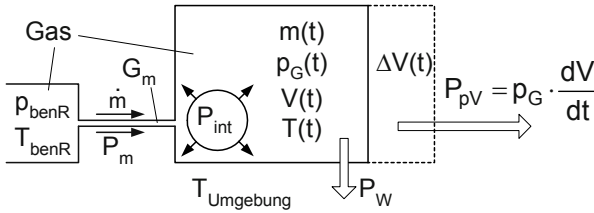


Abb. 6.3 Schema eines offenen thermodynamischen Systems. p_G Gasdruck im System, p_{benR} Druck im benachbarten Raum, V Gasvolumen, P_i Leistung, m Gasmasse, T Temperatur im System, T_{benR} Temperatur im benachbarten Raum, $\dot{m}$ Massestrom, G_m Massestrom-Leitwert, $T_{Umgebung}$ Umgebungstemperatur

Der Gasmassestrom $\dot{m}$ beeinflusst die Leistungsbilanz. Es wird eine von seiner Temperatur abhängende Leistung in das Volumen, in das er fließt, transportiert. Für $\dot{m} > 0$ trägt er eine von der Temperatur T_{benR} abhängende Leistung in das Volumen V ein, für $\dot{m} < 0$ führt er eine von der Temperatur T abhängende Leistung nach außen ab. Die vom Gasmassestrom $\dot{m}$ hervorgerufene Massestrom-Leistung P_m beträgt

$$P_m = R \cdot \dot{m} \cdot \begin{cases} T_{benR} & \text{für } \dot{m} > 0 \\ T & \text{für } \dot{m} \leq 0. \end{cases} \quad (6.6)$$

Leistungen mit geringem Einfluss auf die Gesamtbilanz, wie die kinetische Energie der Gasmasse und die Wärmeleistung infolge der Drosselung des Massestromes, werden vernachlässigt.

Um das Modell auch für die spätere Übernahme in komplexere thermodynamische Systeme übersichtlich zu halten, werden das interessierende Gasvolumen V und der Drosselspalt mit dem Leitwert G_m , der immer zwischen zwei Gasvolumina liegt, zunächst getrennt als Blockschaltbild dargestellt (Abb. 6.4 a). Es existieren zwischen diesen beiden Teilsystemen zwei Wirkungen ($P_m, \dot{m}$) und zwei Rückwirkungen (T, p_G). Die neu hinzugekommenen nichtlinearen Blöcke sind

- die vier Blöcke zur Berechnung von P_m (Multiplikationen und Ermittlung der Vorzeichen von $\dot{m}$) und
- die Berechnung von $\dot{T}$ aus den sich ändernden Größen P_{gesp} und m .

In das Gesamtschaltbild (Abb. 6.4 b) geht auch der in 6.1 beschriebene Wärmeaustausch P_W ein:

$$P_W = G_W \cdot (T - T_{\text{Umgebung}}).$$

Die Ermittlung des Anfangszustandes ist so wie beim geschlossenen thermodynamischen System vorzunehmen, es ist allerdings die Masse m nicht konstant. Mit Hilfe der Gasgleichung wird auch hier $m(0)$ ermittelt.

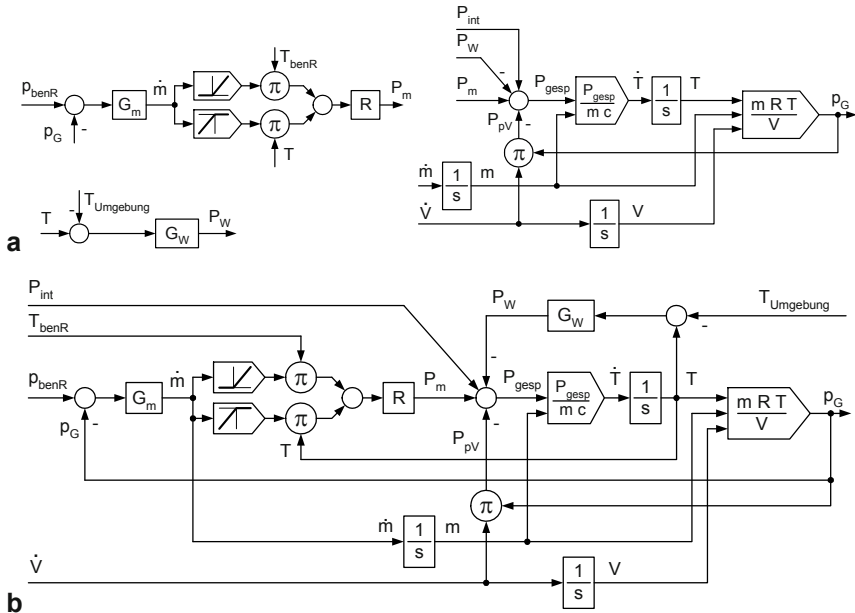


Abb. 6.4 Das Blockschaltbild des allgemeinen offenen thermodynamischen Systems in Abb. 6.3. **a** Modelle von Drosselspalt, Wärmeaustausch und Gasvolumen **b** Gesamtschaltbild

Analog zu Kap. 3 und 4 wurden die in diesem Kapitel bisher erarbeiteten und in vielen der folgenden Beispiele wieder verwendeten Teilmodelle in einer Tabelle zusammengefasst und in den **Anhang A** übernommen (**Tabelle A.6**).

6.3 Druckflüssigkeitsspeicher als geschlossenes thermodynamisches System

Druckflüssigkeitsspeicher haben die Aufgabe, hydraulische Energie (Druck mal Volumen) zu speichern und bei Bedarf an die Hydraulikanlage abzugeben. Das Haupteinsatzgebiet ist die Deckung des Volumenstrombedarfs einer Anlage bei Anforderungen, die zeitweilig über den maximal möglichen Volumenstrom der Pumpe(n) der Anlage hinausgehen.

6.3.1 Erarbeitung des Blockschaltbildes

Der am häufigsten eingesetzte Speicher ist der Blasenspeicher. In Abb. 6.5 a ist er im Anlieferungszustand dargestellt, im Betrieb ist die Gummibläse mit Stickstoff gefüllt und steht unter veränderlichem Gasdruck p_G .

Der 1. Schritt der Modellierung:

Zeichnen des Schemas mit den relevanten Signalen und Parametern, hier in drei für die Parameterbestimmung relevanten Zuständen (Abb. 6.5. b bis d).

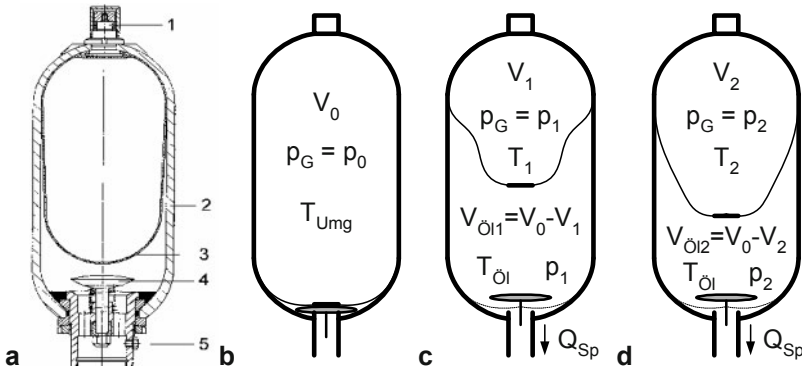


Abb. 6.5 Blasenspeicher. **a** allgemeines Schema **b** Basiszustand (gasgefüllt, Hydraulikanlage ausgeschaltet) **c** Zustand 1 (bei hohem Druckwert p_1), **d** Zustand 2 (bei niedrigem Druckwert p_2) 1 Stickstofffülleinrichtung, 2 Stahlgehäuse, 3 Gummibläse, 4 Tellerventil, 5 Hydraulikanschluss, p_G Gasdruck, V Gasvolumen, $V_{Öl}$ Ölvolumen, T_1 und T_2 Gastemperatur, T_{Umg} Umgebungstemperatur, $T_{Öl}$ Öltemperatur

Der Ermittlung des Blockschaltbildes wird zugrunde gelegt: Eine Pumpe mit $Q_P = 100 \text{ dm}^3/\text{min} = \text{konst.}$ fördert in eine Hydraulikanlage (Abb. 6.6 a), die den in Abb. 6.6 b dargestellten Volumenstrom Q_{Anl} periodisch fördert (Zykluszeit 8 s).

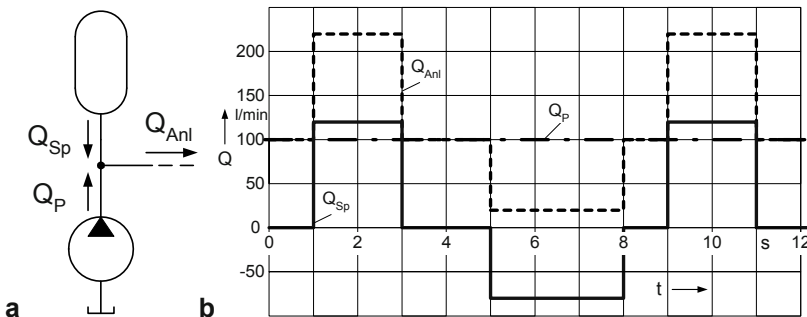


Abb. 6.6 Volumenströme. **a** Funktionsschaltplan **b** Zeitverläufe der Volumenströme der Pumpe Q_P , der Hydraulikanlage Q_{AnI} und des Speichers Q_{Sp}

Das führt dazu, dass nach einer Sekunde der Speicher für zwei Sekunden einen Volumenstrom von $Q_{Sp} = 120 \text{ dm}^3/\text{min}$ bereitstellen muss. In dieser Zeit vergrößert sich das Gasvolumen des Speichers um 4 dm^3 . Danach füllt sich der Speicher wieder mit Hydrauliköl auf den Anfangszustand.

Anmerkung: In diesem Beispiel ist der Mittelwert von Q_{Anl} gleich dem Volumenstrom der Pumpe Q_P angenommen worden. In der Praxis werden die Pumpen so ausgelegt, dass ihr maximal möglicher Volumenstrom größer als der Mittelwert von Q_{Anl} ist. Eine Druckregelung führt dazu, dass der Mittelwert von Q_P über die Zykluszeit so groß wird wie der Mittelwert von Q_{Anl} . Dieser Fall wird hier nicht weiter untersucht.

Der 2. und 3. Schritt müssen hier nicht explizit gegangen werden, da das Blockschaltbild in Abb. 6.2 prinzipiell übernommen werden kann. Nur die Namen und die Wärmeaustausche müssen angepasst werden (Abb. 6.7 a rechts). Das Gasvolumen grenzt teilweise an die Umgebung und teilweise an das mit Öl gefüllte Volumen (Abb. 6.5 c und d). Mit beiden erfolgt ein Wärmeaustausch. Im Folgenden wird nur der Wärmeaustausch mit dem Ölvolumen berücksichtigt (Wärmeleistung P_W).

Dieser muss **im 4. Schritt** noch beschrieben werden. Die Beziehung lautet gemäß **Tabelle A.6 in Anhang A**:

$$P_W = G_W \cdot (T - T_{Ol}). \quad (6.7)$$

Der 5. Schritt:

Für $T > T_{Ol}$ wird Wärme aus dem Gasvolumen abgeführt, für $T < T_{Ol}$ zugeführt. Der Wärmedurchgangswert G_W und die Öltemperatur T_{Ol} sind als konstant angenommen worden (Abb. 6.7 a links). Das Gesamtblockschaftbild ist in Abb. 6.7 b dargestellt. Es existieren zwischen beiden Teilsystemen je eine Wirkung und eine Rückwirkung (T, P_W).

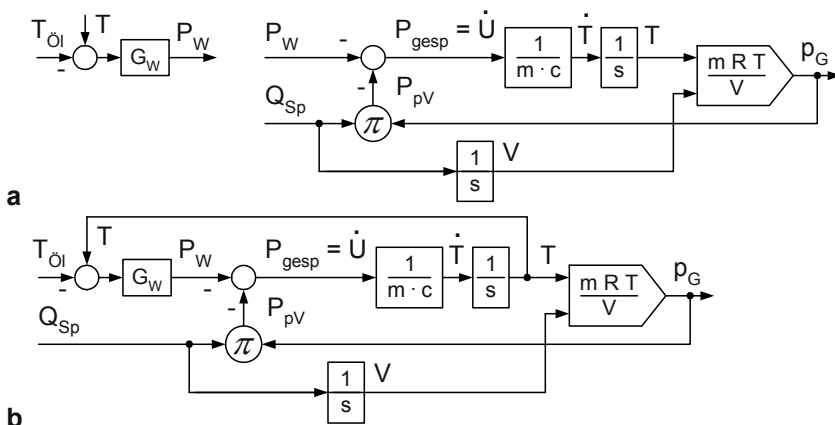


Abb. 6.7 Blockschaftbild eines Druckflüssigkeitsspeichers. **a** Wärmeaustausch und Gasvolumen getrennt dargestellt **b** Gesamtblockschaftbild

6.3.2 Simulationsläufe zur Verifizierung des Modells

Wegen der Nichtlinearitäten kann das Verhalten des Modells nur mit Hilfe von Simulationsrechnungen ausführlich untersucht werden. Diese Berechnungen können, wie schon früher erwähnt, nur mit konkreten Parametern durchgeführt werden. Folgende Parameter wurden aus der Literatur [6.3, 6.5] entnommen:

- Gaskonstante R des verwendeten Gases Stickstoff: $R = 297 \text{ Nm}/(\text{kg} \cdot \text{K})$,
- spezifische Wärmekapazität c bei konstantem Volumen: $c = 750 \text{ Nm}/(\text{kg} \cdot \text{K})$

Die eingeschlossene Gasmasse m errechnet sich mit Hilfe der Gasgleichung aus den Parametern des mit Gas, aber noch nicht mit Öl gefüllten Speichers (Abb. 6.5 b). Die Temperatur entspricht der Umgebungstemperatur. Als Parameter des Basiszustands werden festgelegt:

- Speichergröße V_0 (muss deutlich größer sein als die geforderte Volumenveränderung um 4 dm^3): $V_0 = 10 \text{ dm}^3 = 0,01 \text{ m}^3$,
- Fülldruck p_0 : $p_0 = 120 \text{ bar} = 120 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$,
- Umgebungstemperatur T_{Umg} beim Befüllen: $T_{\text{Umg}} = 300 \text{ K}$.

Es ist damit

$$m = \frac{V_0 \cdot p_0}{R \cdot T_{\text{Umg}}} = \frac{0,01 \text{ m}^3 \cdot 120 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2}{297 \text{ Nm}/(\text{kg} \cdot \text{K}) \cdot 300 \text{ K}} = 1,347 \text{ kg}.$$

Dieser Wert ändert sich während des zu analysierenden Zeitbereichs nicht.

Der Anfangszustand entspricht Abb. 6.5 c. Als weitere Parameter werden festgelegt (Speicher ist mit Stickstoff befüllt, Öldruck liegt an, die Anlage hat sich schon erwärmt):

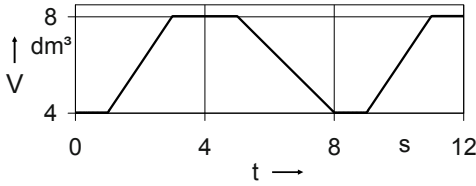
- Gasvolumen $V_1 = 4 \text{ dm}^3 = 0,004 \text{ m}^3$,
- Gastemperatur $T_1 = T_{\text{Öl}} = 330 \text{ K}$.

Das führt zu einem Anfangswert des Druckes p_1 :

$$p_1 = \frac{m \cdot R \cdot T_1}{V_1} = \frac{1,347 \text{ kg} \cdot 297 \text{ Nm}/(\text{kg} \cdot \text{K}) \cdot 330 \text{ K}}{0,004 \text{ m}^3} = 330 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 = 330 \text{ bar}.$$

Anmerkung: V_1 muss klein genug sein, um eine Volumenvergrößerung um 4 dm^3 zuzulassen. Wird es aber sehr klein gewählt, wird p_1 sehr hoch.

In Abb. 6.8 ist der sich aus Abb. 6.6 ergebende Zeitverlauf des Gasvolumens V dargestellt, wenn der Anfangswert des Gasvolumens $V(0) = 4 \text{ dm}^3$ ist.

Abb. 6.8 Zeitverlauf des Gasvolumens V

Der Leitwert G_W in Gl. (6.7) muss noch festgelegt werden, ehe eine Simulationsrechnung beginnen kann.

- Es ist $G_W = 0$ bei adiabatischem Verhalten (es entsteht kein Wärmeaustausch des Gasvolumens mit der Umgebung).
- G_W geht gegen unendlich bei vollkommenem Wärmeaustausch, d. h. bei isothermem Verhalten. Die Gastemperatur bleibt konstant bei $T = T_{\text{Öl}} = 330 \text{ K}$.

Die sich ergebenden unteren Druckwerte für diese beiden Grenzfälle können relativ einfach vorausberechnet werden, da bei adiabatischem Verhalten

$$p_1 \cdot V_1^{1,4} = p_2 \cdot V_2^{1,4} \quad (6.8)$$

gilt und bei isothermem Verhalten

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2. \quad (6.9)$$

Bei einem Ausgangsgasvolumen $V_1 = 4 \text{ dm}^3$ und einer Volumenänderung von 4 dm^3 ist $V_2 = 8 \text{ dm}^3$ (s. Abb. 6.5. b) und damit $V_1/V_2 = 0,5$. Die sich ergebenden unteren Druckwerte sind dann bei adiabatischem Verhalten

$$p_2 = p_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{1,4} = 330 \text{ bar} \cdot (0,5)^{1,4} = 125 \text{ bar}$$

bzw. bei isothermem Verhalten

$$p_2 = p_1 \cdot \frac{V_1}{V_2} = 330 \text{ bar} \cdot 0,5 = 165 \text{ bar}.$$

Für die so genannte polytrope Zustandsänderung, das ist die allgemeine Form einer thermodynamischen Zustandsänderung, kann diese Abschätzung nicht so einfach durchgeführt werden, wie die folgenden Simulationsergebnisse zeigen. In

Abb. 6.9 sind die Temperatur- und Druckverläufe jeweils im Vergleich mit dem adiabatischen Verhalten dargestellt. Gewählt wurde ein Wärmedurchgangswert

$$G_W = 400 \frac{N \cdot m}{s \cdot K}.$$

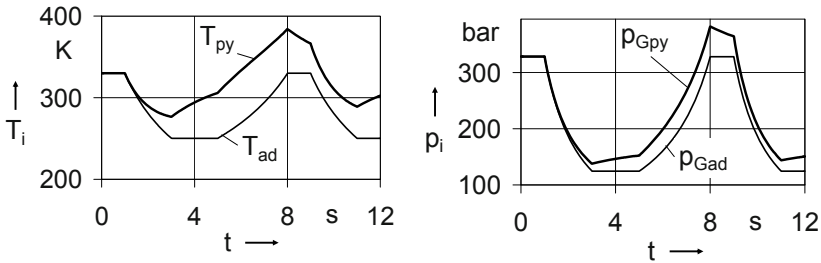


Abb. 6.9 Zeitverläufe der Gastemperatur T und des Gasdruckes p_G des Druckflüssigkeitsspeichers bei polytropem Verhalten (Index py) und bei adiabatischem Verhalten (Index ad)

Der Druck liegt bei adiabatischem Verhalten zwischen 330 bar und 125 bar. Die Simulation zeigt, dass bei endlich großen Werten von G_W sich die Temperatur auf einen Bereich um die Öltemperatur einschwingt und dass dies Auswirkungen auf den oberen Wert des Druckes hat. Der Einschwingvorgang ist in Abb. 6.9 fast abgeschlossen, der obere Wert des Druckes beträgt etwa 380 bar.

6.4 Arbeitszylinder der Pneumatik als offenes thermodynamisches System

Als Beispiel wird ein Arbeitszylinder gewählt, dessen linke Seite zeitweise aus einem (sehr großen) Druckluftbehälter DB über eine Drosselstelle mit Druckluft versorgt wird. Mit Hilfe eines Wegeventils kann die linke Arbeitszylinderseite an den Druckluftbehälter oder an Atmosphäre gelegt werden.

6.4.1 Erarbeitung des Blockschaltbildes

Der 1. Schritt der Modellierung:

In Abb. 6.10 ist das Schema des Arbeitszylinders mit den relevanten Signalen und Parametern dargestellt. In der rechten Seite des Arbeitszylinders herrscht Luftdruck p_L .

Wird mit Hilfe des Wegeventils die linke Seite an Luftdruck p_L gelegt, dann bewegt sich der Kolben infolge einer äußeren Kraft F_{Last} nach links. Der Weg wird durch federnde Anschläge begrenzt.

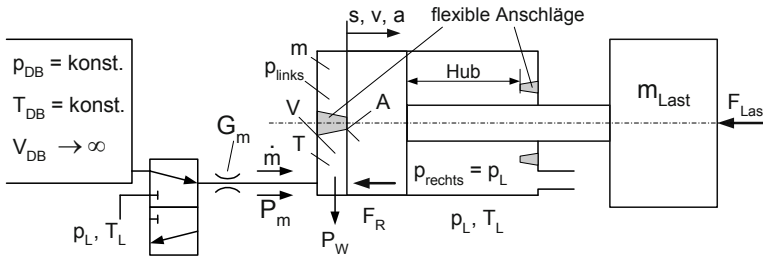


Abb. 6.10 Arbeitszylinder der Pneumatik, dessen linke Seite zeitweise aus einem Druckluftbehälter DB über eine Drosselstelle mit Druckluft mit dem Leitwert G_m versorgt wird. p_L Luftdruck, p_i Druck allg., V_i Gasvolumen allg., P_i Leistung allg., m Gasmasse, T Gastemperatur, T_L Lufttemperatur, T_{DB} Temperatur im DB , $\dot{m}$ Massestrom, G_m Massestrom-Leitwert

Der 2. und 3. Schritt:

Das Gesamtsystem besteht aus einem thermodynamischen und einem mechanischen Teilsystem (Abb. 6.11).

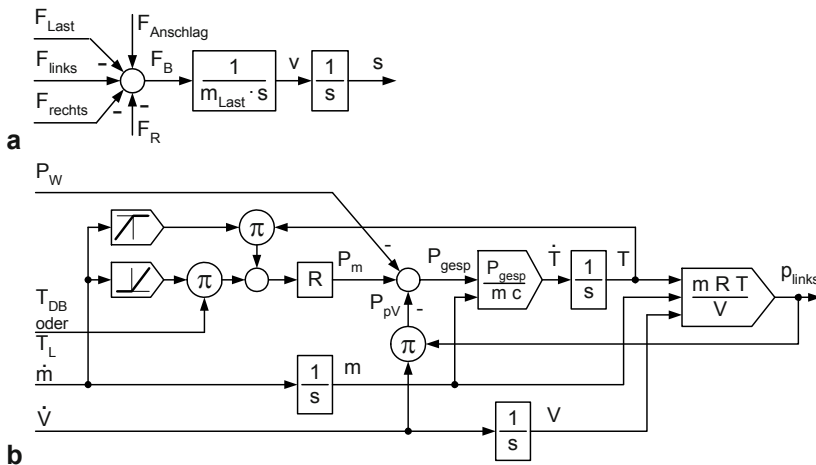


Abb. 6.11 Blockschaltbilder des 2. und 3. Schrittes der Ermittlung des Arbeitszylinder-Modells. **a** mechanisches Teilsystem **b** thermodynamisches Teilsystem

Aus **Anhang A, Tabelle A.1**, können die erforderlichen Beziehungen für das mechanische Teilsystem als Blockschaltbild entnommen werden (Abb. 6.11 a).

Das thermodynamische Teilsystem (Abb. 6.11 b) entspricht als Blockschaltbild im Wesentlichen dem in Abb. 6.4.

Folgende Anpassung ist vorgenommen worden (neben den nicht extra angegebenen Anpassungen der Namen):

$$P_m = R \cdot \dot{m} \cdot \begin{cases} T_{DB} & \text{für } \dot{m} \geq 0 \\ T & \text{für } \dot{m} < 0. \end{cases} \quad (6.10)$$

In die mathematische Beschreibung der Leistung P_m geht T_L nicht ein, weil nur bei $\dot{m} < 0$ die linke Seite der Drosselstelle an T_L liegt.

Der 4. Schritt, die Ermittlung der noch fehlenden statischen Beziehungen, umfasst folgende Aktivitäten:

- Aus **Anhang A, Tabelle A.2**, können die geschwindigkeitsproportionale Reibkraft $F_R = k \cdot v$ (andere Arten der Reibkraft wurden in Abschn. 4.1.2 beschrieben), die zwei Druckkräfte $F_{links} = A \cdot p_{links}$ und $F_{rechts} = A \cdot p_L$ und der Verschiebevolumenstrom $\dot{V} = A \cdot v$ entnommen werden. (Beachte: Da der Luftdruck sowohl auf die rechte Kolbenfläche als auch auf die Oberfläche der Masse m wirkt, ist die Kraft-Gesamtwirkung $F_{rechts} = A \cdot p_L$.)
- Die Funktion für die flexiblen Anschläge entspricht der in Abschn. 4.2.1 (Gl. (4.24)). Für die Anschlagkraft F_{An} ist unter Benutzung der Namen in Abb. 6.10 zu schreiben:

$$F_{An} = \begin{cases} c_{An} \cdot s & \text{für } s \leq -0 \\ 0 & \text{für } 0 < s < Hub \\ c_{An} \cdot (s - Hub) & \text{für } s \geq Hub. \end{cases} \quad (6.11)$$

- Die Fläche, über die die Wärmeleistung P_W mit der Umgebung ausgetauscht wird, und damit auch der Leitwert G_W sind von der Position s des Kolbens abhängig. Die verwendete Beziehung lautet analog zu Gl. (6.2) allgemein

$$P_W = G_W(s) \cdot (T - T_L) = (K_1 + K_2 \cdot s) \cdot (T - T_L). \quad (6.12)$$

- Der Massestrom $\dot{m}$ zwischen Druckbehälter und Zylinder wird mit einer linearen Beziehung im Modell berücksichtigt. Es wird in erster Näherung angenommen, dass $\dot{m}$ linear von der Differenz der Drücke im Behälter p_{DB} und im linken Zylinderraum p_{links} abhängt und dass der Leitwert G_m konstant ist:

$$\dot{m} = G_m \cdot (p_{DB} - p_{links}). \quad (6.13 a)$$

- Analog wird der Massestrom $\dot{m}$ zwischen Umgebung (Druck p_L) und Zylinder beschrieben, wenn das Wegeventil die alternative Schaltstellung einnimmt:

$$\dot{m} = G_m \cdot (p_L - p_{links}). \quad (6.13 \text{ b})$$

- Das Wegeventil ist berücksichtigt worden, indem zwei Eingangssignale zwischen Druckluftbehältersignalen und Signalen der Atmosphäre umgeschaltet werden können.

Der 5. Schritt: Das Blockschaltbild des Gesamtsystems zeigt Abb. 6.12.

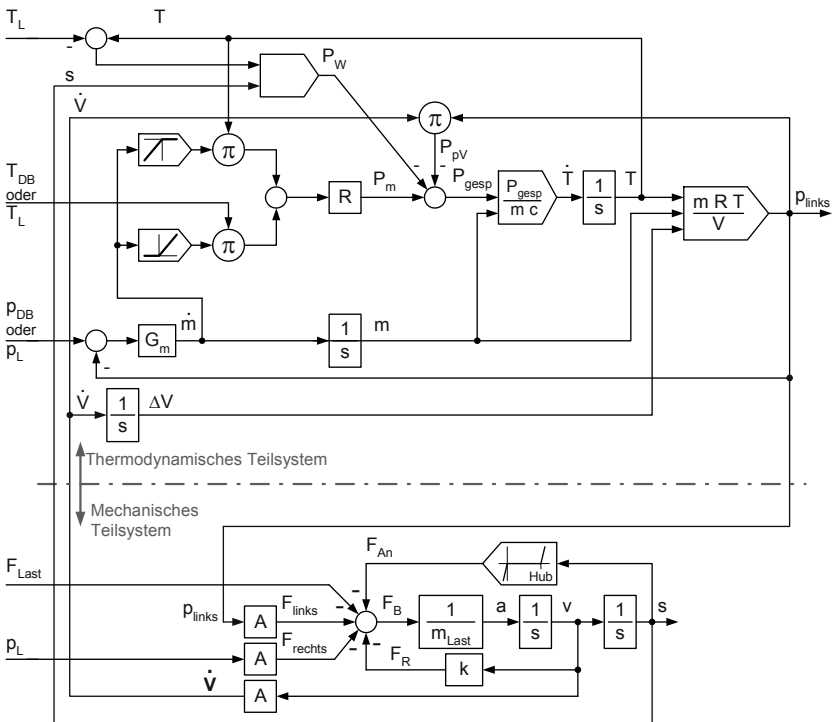


Abb. 6.12 Blockschaltbild des Gesamtsystems Arbeitszylinder-Modell

Die Sichtkontrolle zeigt:

- Das Blockschaltbild ist vollständig. Alle Eingangsgrößen in Blöcke oder in Bilanzgleichungen sind (mit Ausnahme der echten Eingangsgrößen links) gleichzeitig Ausgangsgrößen, entstehen also innerhalb des Modells. (Die Signale zwischen den Teilsystemen sind p_{links} , $\dot{V}$, s .)
- Alle Wirkungskreise besitzen eine Wirkungsumkehr.

6.4.2 Simulationslauf

Es wird eine Simulation durchgeführt für die folgenden Parameter (Gaskonstante und Wärmekapazität s. [6.3, 6.10]):

- Gaskonstante R von Luft: $R = 287 \text{ J/(kg K)} = 287 \text{ Nm/(kg} \cdot \text{K)}$,
- Spezifische Wärmekapazität c bei annähernd konstantem Volumen:
 $c = 720 \text{ J/(kg K)} = 720 \text{ Nm/(kg K)}$,
- Kolbenfläche: $A = 100 \text{ cm}^2 = 0,01 \text{ m}^2$,
- Hub: $Hub = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$,
- Zu bewegendes Lastmasse: $m_{Last} = 100 \text{ kg} = 100 \text{ N} \cdot \text{s}^2/\text{m}$,
- Federkonstante der Anschläge: $c_A = 6 \cdot 10^5 \text{ N/m}$,
- Faktor der geschwindigkeitsproportionalen Reibkraft: $k = 10^4 \text{ N} \cdot \text{s/m}$,
- Luft- und Druckluftbehältertemperatur: $T_L = T_{DB} = 300 \text{ K}$,
- Luftdruck: $p_L = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ N/m}^2$,
- Druckluftbehälterdruck: $p_{DB} = 5 \text{ bar} = 5 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$.

Die Funktion $P_W = f(T - T_L)$ mit den Parametern K_1 und K_2 ist schwer einzuschätzen, da die in der Luft gespeicherte Wärmeenergie zu großen Teilen auch an die umgebenden Metallteile mit ihrer großen Wärmekapazität abgegeben wird.

Zunächst wird die Wegabhängigkeit vernachlässigt ($K_2 = 0$) und $K_1 = 100 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{s} \cdot \text{K}}$ gesetzt.

Der Anfangszustand ist mit Hilfe einiger Annahmen errechenbar:

- Es seien $s(0) = 0$, $v(0) = 0$, $F_{Last}(0) = 0$.
- Vor dem Zuschalten des DB ist der Druck $p_{links}(0) = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ N/m}^2$.
- Die Temperatur im Zylinder betrage $T(0) = 300 \text{ K}$, das Volumen ist $V(0) = 300 \text{ cm}^3 = 3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$.
- Daraus wird m. H. der Gasgleichung $m(0)$ ermittelt:

$$m(0) = \frac{p_{links}(0) \cdot V(0)}{R \cdot T(0)} = \frac{10^5 \text{ N/m}^2 \cdot 3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3}{287 \text{ Nm/(kg} \cdot \text{K)} \cdot 300 \text{ K}} = 3,48 \cdot 10^{-4} \text{ kg} = 0,348 \text{ g}.$$

Als Schaltregime des Wegeventils wird vorgegeben:

1. Die linke Arbeitszylinderseite liegt zu Beginn der Simulation an Atmosphärendruck und -temperatur. Bei $t > 0$ wird die Lastkraft F_{Last} wirksam, d.h., der Kolben wird an den linken (federnden) Anschlag gedrückt.
2. Bei $t = 0,5 \text{ s}$ wird die linke Arbeitszylinderseite mit dem Druckluftbehälter verbunden. Der Druck p_{links} steigt an, der Kolben bewegt sich nach rechts bis zu seinem rechten Anschlag (die Dauer der Bewegungsphase soll kleiner als eine Sekunde sein). Der Druck p_{links} steigt weiter an.

3. Bei $t = 2 \text{ s}$ wird die linke Arbeitszylinderseite mittels Wegeventil wieder an Atmosphäre gelegt. Der Kolben bewegt sich infolge F_{Last} nach links bis zu seinem linken Anschlag.

Der angestrebte stationäre Zustand für den Rechtslauf, mit dem die späteren Simulationsergebnisse verglichen werden können, wird wie folgt definiert:

- Es soll eine Geschwindigkeit v von etwa $0,15 \text{ m/s}$ erreicht werden. Dann ist die Bewegungsdauer vom linken zum rechten Anschlag etwa $0,7 \text{ s}$, welcher also bei $t \approx 1,2 \text{ s}$ erreicht wird.
- Die Änderungsgeschwindigkeit des Volumens $\dot{V}$ ist damit

$$0,01 \text{ m}^2 \cdot 0,15 \text{ m/s} = 0,0015 \text{ m}^3/\text{s}.$$

- Der Reibkraftfaktor k wird so gewählt, dass im stationären Zustand

$$F_R \approx 1000 \text{ N} \text{ ist. Damit ist } k = F_R / v = 1000 / 0,15 \approx 7000 \text{ N} \cdot \text{s} / \text{m}.$$

- Die Lastkraft muss deutlich kleiner als die durch den Druckluftbehälterdruck erreichbare Druckkraft ($5 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \cdot 0,01 \text{ m}^2 = 5000 \text{ N}$) sein. Gewählt wurde

$$F_{Last} = 1000 \text{ N}.$$

- Der stationäre Zustand ($v \approx 0,15 \text{ m/s}$) wird erreicht, wenn der Druck p_{links} im Arbeitszylinder so hoch ist, dass $F_{links} = A \cdot p_{links} = A \cdot p_L + F_{Last} + F_R$ ist (s. Abb. 6.12 unten, $F_{rechts} = A \cdot p_L$). Das führt auf

$$p_{links} = 3000 \text{ N}/0,01 \text{ m}^2 = 3 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

- Unter der Annahme, dass sich die Temperatur T nicht wesentlich geändert hat, muss der Massestrom $\dot{m}$ dann

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \frac{p_{links} \cdot \dot{V}}{R \cdot T} = \frac{3 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \cdot 0,0015 \text{ m}^3/\text{s}}{287 \text{ Nm}/(\text{kg} \cdot \text{K}) \cdot 300 \text{ K}} \approx 0,005 \text{ kg/s} = 5 \text{ g/s}$$

sein.

- Dies führt zu folgendem Leitwert G_m :

$$G_m = \frac{\dot{m}}{p_{DB} - p_{links}} = \frac{5 \cdot 10^{-3} \text{ kg/s}}{(5 - 3) \cdot 10^5 \text{ N/m}^2} = 2,5 \cdot 10^{-8} \frac{\text{kg/s}}{\text{N/m}^2}.$$

In Abb. 6.13 ist ein Teil der Simulationsergebnisse dargestellt.

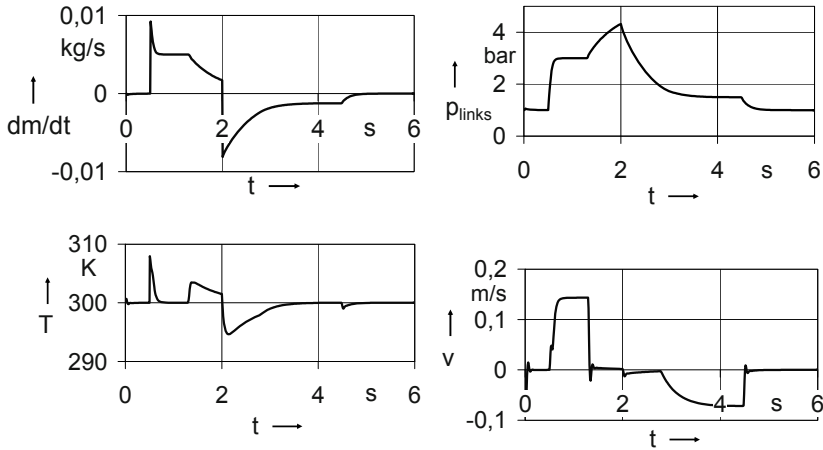


Abb. 6.13 Teil 1 der Simulationsergebnisse des Arbeitszylinder-Modells in Abb. 6.12

In diesen Zeitverläufen sind die Zustandsänderungen infolge des Schaltens des Wegeventils (nach 0,5 s und 2 s) und des Erreichens der Anschläge (nach etwa 1,2 s und 4,5 s) zu erkennen.

Aus einigen Verläufen kann geschlussfolgert werden, dass das Modell im Wesentlichen richtig ist:

- Geschwindigkeit v und Massestrom $\dot{m}$ verlaufen im stationären Bereich der Bewegung nach rechts so wie vorausberechnet.
- Die Temperatur T schwankt im Bereich der Umgebungstemperatur T_L .
- Der Druck p_{links} strebt zu den gerade anliegenden Werten, wenn sich der Kolben an einem Anschlag befindet.

In Abb. 6.14 ist ein zweiter Teil der Simulationsergebnisse aufgenommen worden: der Verlauf der inneren Energie U des aktuell in der linken Hälfte des Arbeitszylinders befindlichen Gases und das entsprechende pV -Diagramm.

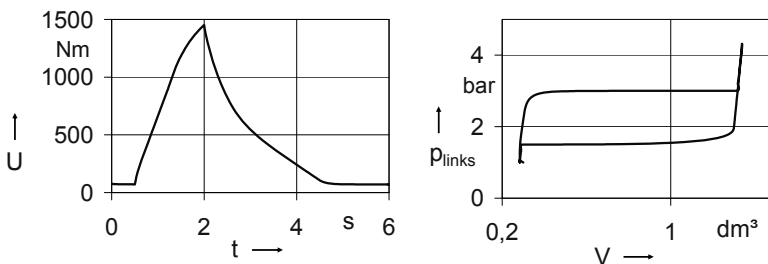


Abb. 6.14 Teil 2 der Simulationsergebnisse des Arbeitszylinder-Modells in Abb. 6.12

Die Funktion der inneren Energie $U = P_{gesp}/s$ im linken Zylinderraum wurde im Simulationsmodell berücksichtigt (in Abb. 6.12 jedoch nicht explizit dargestellt). Sie nimmt anfangs deutlich zu (bis zum Schaltvorgang nach 2 s) und geht am Ende auf etwa den Anfangswert zurück.

Das Aufzeichnen des pV -Diagramms ist für Verbrennungsmotoren und für Stirlingmotoren üblich (siehe ab Abschn. 6.5). Die eingeschlossene Fläche des simulierten Vorganges entspricht der während des Simulationszeitraumes an die Umgebung abgegebenen mechanischen Energie E_{mech} , die im Mechanik-Teil infolge von Reibung in Wärme umgewandelt wird. Im Diagramm $p_{links} = f(V)$ in Abb. 6.14 ist abzuschätzen, dass die Fläche etwa $1,5 \text{ bar} \cdot \text{dm}^3$ beträgt. Damit ist

$$E_{mech} = \frac{1,5 \text{ bar} \cdot \text{dm}^3}{1} \cdot \frac{10^5 \text{ N/m}^2}{1 \text{ bar}} \cdot \frac{1 \text{ m}^3}{1000 \text{ dm}^3} = 150 \text{ Nm}.$$

Aus dem Verlauf von v kann F_R abgeschätzt werden: Mit $k = 7000 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ ist F_R etwa 1000 N bei Rechtslauf und etwa 500 N bei Linkslauf infolge der nur halb so großen Geschwindigkeit. Da der Hub $0,1 \text{ m}$ ist, ist die Reibarbeit ebenfalls 150 Nm . Die Druck-Volumen-Arbeit wird, wie erwartet, in diesem Modell vollständig in Reibarbeit umgewandelt.

Eine weitergehende Beurteilung des Verhaltens kann hier nur mit Hilfe des Experimentes vorgenommen werden, da mehrere Parameter geschätzt werden mussten.

6.5 Stirlingmotor mit Verdränger

6.5.1 Wirkprinzip von Stirlingmotoren

Stirlingmotoren sind Heißluft-Motoren. Sie wandeln Wärmeenergie in mechanische Energie um. Aus einem Erhitzer gelangt Wärme über eine Wandung in einen Teil des Motors, in welchem relativ hohe Temperaturen herrschen. Ein Teil dieser Energie wird in die gewünschte mechanische Energie umgewandelt, aus dem anderen Teil entsteht in einem Kühler Abwärme, die in größeren Motoren weitergenutzt werden kann. Es gibt verschiedene Typen von Stirlingmotoren:

- den Stirlingmotor mit Verdränger (s. Abschn. 6.5), der nur eine sehr kleine mechanische Leistung abgeben kann, und
- den Stirlingmotor mit Arbeitszylinder und Kompressionszylinder (s. Abschn. 6.6), der mechanische Leistungen bis in den Kilowatt-Bereich abgeben kann.

Zuerst wird das Modell des Stirlingmotors mit Verdränger ermittelt, da es relativ einfach verifiziert werden kann.

Der Stirlingmotor mit Verdränger gehört zu den Motoren kleiner Leistung, da er im Bereich des Luftdruckes und bei niedrigen Temperaturen arbeitet. Dieser Typ ist damit geeignet, in einfachen und ungefährlichen Funktionsmodellen realisiert zu werden, z. B. mit Hilfe eines Bausatzes [6.4], wie in Abb. 6.15 in zwei Ansichten dargestellt. Die linke Ansicht zeigt vor allem die Anbindung zweier Kolbenstangen an eine Kurbel, die rechte zusätzlich den transparenten Zylinder zwischen zwei Aluminiumplatten. In diesem Zylinder läuft der wesentliche thermodynamische Prozess ab (Details s. in Abschn. 6.5.2).

Der Autor ist im Besitz eines solchen Modells und kann damit das Verhalten des noch zu ermittelnden mathematischen Modells mit dem des Funktionsmodells vergleichen.

Als Energiequelle dient jede Wärmequelle, mit der sich eine ausreichende Temperaturdifferenz zwischen den Aluminiumplatten erzeugen lässt. In Abb. 6.15 ist die Wärmequelle ein Behältnis mit heißem Wasser, auf welchem der Stirlingmotor steht.

Experimente können vor allem hinsichtlich der Wärmezuführung am Boden (Wasserdampf oder Heißluft) und der Wärmeabführung am Deckel (Luft, Eis oder vorgekühlte Metallteile) durchgeführt werden. Untersucht werden kann deren Auswirkung auf die Drehzahl. Das erreichbare (äußere) Drehmoment ist sehr klein, bei diesem Motormodell reicht die zugeführte Wärmeleistung aus, die während der Rotation entstehenden Reibverluste zu kompensieren.



Abb. 6.15 Aus einem Bausatz hergestellter Stirlingmotor mit Verdränger in zwei Ansichten

In der Bauanleitung [6.4] wird das Prinzip des Motors wie folgt beschrieben:

- „In einem abgedichteten, auf einer Seite beheizten Zylinder („Hauptzylinder“), schiebt ein Kolben („Verdrängerkolben“) die eingeschlossene Luft im ständigen Wechsel zwischen der heißen und der kalten Seite hin und her.
- Die Luft wird dadurch abwechselnd erwärmt und abgekühlt, was zu einer abwechselnden Ausdehnung und Zusammenziehung und zu einem abwechselnd höheren und niedrigeren Druck der Luft führt.
- Dieser pulsierende Luftdruckwechsel wird über einen mit dem Hauptzylinder verbundenen Kolben („Arbeitskolben“) in die Bewegung einer Kurbelwelle mit Schwungrad umgesetzt.
- Mit einem kleinen Teil der dabei erzeugten Energie wird auch der Verdrängerkolben bewegt, das System hält sich auf diese Weise selber in Gang.“

Um die Ermittlung eines mathematischen Modells zu ermöglichen, müssen diese Aussagen präzisiert werden. Beachtet werden muss vor allem, dass der Verdrängerkolben das Volumen des Hauptzylinders auf zwei ihr Volumen gegensinnig ändernde Kammern aufteilt. Über die zwei Aluminiumplatten wird in die eine Kammer Wärmeleistung eingebracht und aus der anderen abgeführt. Im Hauptzylinder findet ein thermodynamischer Kreisprozess statt. Die Aufteilung in klar abgegrenzte Takte wie z. B. beim Viertakt-Ottomotor ist hier nicht möglich. Auf die auch hier entstehenden Expansions- und Kompressionsphasen wird im Rahmen der Auswertung der Simulationsrechnungen eingegangen.

6.5.2 Erarbeitung des Blockschaltbildes

Der 1. Schritt der Modellierung:

In Abb. 6.16 ist das Schema eines Stirlingmotors mit Verdränger mit den relevanten Größen und Parametern dargestellt. Der Motor-Typ mit Verdränger ist dadurch gekennzeichnet, dass Änderungen des insgesamt in beiden Kammern eingeschlossenen Luftvolumens nur durch Bewegungen eines Arbeitskolbens im Arbeitszylinder erfolgen. Die Größe der Kammer 1 (oben) und der Kammer 2 (unten) wird von einem Verdränger, der vom Rotor mit dem Massenträgheitsmoment J bewegt wird, verändert. Diese Verdrängerbewegung führt zu einem Gasmassenstrom zwischen den Kammern.

Die weitere Modellierung wird aus Gründen der Übersichtlichkeit in zwei Stufen vorgenommen:

1. Reaktion des Mechanikteils auf Änderungen der Drücke p_1 und p_2 in Abhängigkeit der Kurbelstellung und
2. die Entstehung der für die mechanische Leistung verantwortlichen Druckverläufe infolge der Thermodynamik in den Gasräumen.

Da $R_S \approx 12 \cdot r$ ist (Wertangaben s. Abschn. 6.5.2.1), ist das Trägheitsmoment des Verdrängers ebenfalls vernachlässigbar, es wird gesetzt:

$$J \approx J_S.$$

Aus der **Tabelle A.1** in **Anhang A** können nunmehr die erforderlichen Beziehungen sofort als Blockschaltbild entnommen werden (Abb. 6.17 a). Die Anzahl der Eingangsgrößen und die Namen der Signale wurden angepasst (der Uhrzeigersinn wurde hier als positiver Drehsinn angenommen, M_1 und M_2 sind die von den Stangenkräften aufgebrachten Momente).

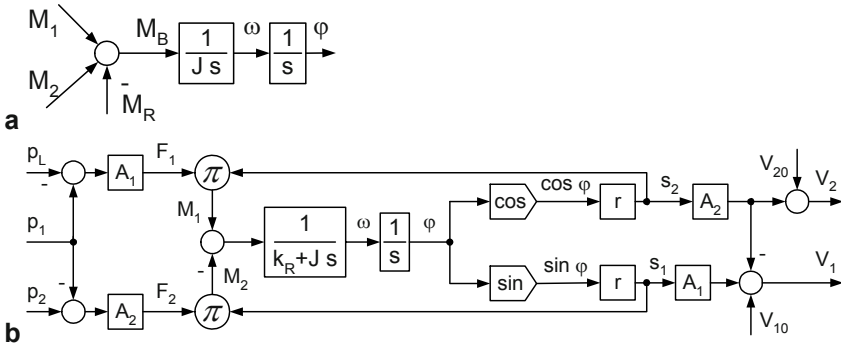


Abb. 6.17 Das Blockschaltbild des Mechanikteils. **a** Blockschaltbild des 2. und 3. Schrittes **b** gesamtes Blockschaltbild

Der 4. Schritt:

Die Kräfte auf den Arbeitskolben und den Verdrängerkolben sind

$$F_1 = A_1 \cdot (p_1 - p_L) \text{ und } F_2 = A_2 \cdot (p_2 - p_1). \quad (6.14)$$

Die Kurbeln und die zugehörigen Stangen bilden mit den jeweiligen Bewegungsachsen Kräfte-Dreiecke, die mit Hilfe des Kosinussatzes zu beschreiben sind. Ist jedoch, wie in diesem Fall, die Länge der Stangen viel größer als der Radius r , können die einfachen trigonometrischen Beziehungen Sinus und Kosinus angewendet werden. Das führt zu folgenden Wegen und Momenten (die Arbeitszylinderachse liegt in Flucht mit der des Verdrängers, sie wurde nur für eine übersichtlichere Darstellung in Abb. 6.17 etwas nach rechts verschoben):

$$s_1 = r \cdot \sin \varphi, \quad (6.15 \text{ a})$$

$$s_2 = r \cdot \sin(\varphi + \pi/2) = r \cdot \cos \varphi, \quad (6.15 \text{ b})$$

$$M_1 = F_1 \cdot r \cdot \cos \varphi, \quad (6.15 \text{ c})$$

$$M_2 = F_2 \cdot r \cdot \cos(\varphi + \pi/2) = F_2 \cdot r \cdot (-\sin \varphi) = -F_2 \cdot r \cdot \sin \varphi. \quad (6.15 \text{ d})$$

Die Wege s_1 und s_2 beeinflussen die Volumina V_1 und V_2 wie folgt: s_1 nur V_1 , s_2 sowohl V_1 als auch V_2 . Sind die Wege gleich null, haben die Volumina die Werte V_{10} und V_{20} .

Das Reibmoment ist wiederum geschwindigkeitsproportional angenommen worden (s. **Tabelle A.2** in **Anhang A**: $M_R = k \cdot \omega$). Ähnlich wie in früheren Beispielen ist der zugehörige kleine Wirkungskreis zu dem Block mit der ÜTF $\frac{1}{k_R + J \cdot s}$ zusammengefasst worden (s. z. B. in Abschn. 4.1.3.2 m. H. Gl. (4.10)).

Der Schritt 5:

Diese Zusammenhänge sind in Abb. 6.17 b dargestellt. Wird in erster Näherung $p_1 \approx p_2$ gesetzt, ist erkennbar, dass das Drehmoment gemäß Abb. 6.16 immer dann im Uhrzeigersinn wirkt, wenn

- in den Bereichen $-90^\circ < \varphi \leq 90^\circ$ $p_1 > p_L$ ist und
- im Bereich $90^\circ < \varphi \leq 270^\circ$ $p_1 < p_L$ ist.

Thermodynamisches System:

Der thermodynamische Teil des Motors muss diese Druckverläufe mit Hilfe der Zuführung und Abführung von Wärme sowie der Bewegung des Verdrängers erzeugen. Es ist zu beachten, dass der thermodynamische Teil als Eingangsgrößen sowohl die Volumina als auch deren Änderungsgeschwindigkeiten benötigt, die Volumina aber im mechanischen Teil ermittelt werden. Damit muss in den Modellen der Kammern 1 und 2 je eine Differenziation durchgeführt werden.

Das thermodynamische System besteht aus zwei Kammern und dem die beiden Kammern trennenden Verdränger. Dieser ist gleichzeitig ein sog. Regenerator, ein Zwischenspeicher von Wärmeenergie. Durch seine Porosität ist er in der Lage, Wärmeenergie schnell zu speichern und infolge seines relativ großen Volumens wesentlich mehr als die ihn umgebenden Gasvolumina.

Das Modell des thermodynamischen Systems wird Komponente für Komponente hergeleitet, ausgehend von der Stelle, an der die Wärmeleistung aus dem Heizer zugeführt wird. Die Komponenten werden zunächst ohne ihre Verkopplungen mit der Umgebung beschrieben. Da ihre Modelle entweder sehr klein sind oder direkt aus **Tabelle A.6** in **Anhang A** zu übernehmen sind, ist die übliche Unterteilung in Schritte nicht erforderlich. Es wird bei der Modellermittlung in folgender Reihenfolge vorgegangen:

1. Boden,
2. Kammer 2,
3. Verdränger/Regenerator mit Dichtspalt,
4. Kammer 1,
5. Deckel mit Dichtspalt (und ggf. Kühlmasse).

Boden:

Über ihn wird die Wärmeleistung P_{Wzu} zugeführt. Auf diese wird später die erreichte mechanische Leistung bezogen, um eine Aussage über den Wirkungsgrad zu bekommen. P_{Wzu} wird analog **Tabelle A.6** (Mitte) in **Anhang A** berechnet:

$$P_{Wzu} = G_{WH2} \cdot (T_H - T_2). \quad (6.16)$$

Das sehr einfache Blockschaltbild zeigt Abb. 6.18 a.

Kammer 2:

Sie ist ein offenes thermodynamisches System. Das Blockschaltbild kann aus **Tabelle A.6** (unten) in **Anhang A** entnommen und entsprechend angepasst werden. (Beachte: Berechnung von $\dot{V}_2$ aus V_2 .)

Der Wärmeaustausch, der mit dem Heizer mit der Temperatur T_H (P_{Wzu}) und mit dem Regenerator mit der Temperatur T_R (P_{W2R}) stattfindet, wird im Modell berücksichtigt (Signal- und Parameternamen s. Abb. 6.16). Der Wärmeaustausch mit der seitlichen Begrenzung der Kammer, dem Zylinder, wird vernachlässigt.

Stoffaustausch findet über den Spalt zwischen Zylinder und Verdränger ($\dot{m}_{21}$, P_{m21}) statt. Das führt zu dem Blockschaltbild in Abb. 6.18 b.

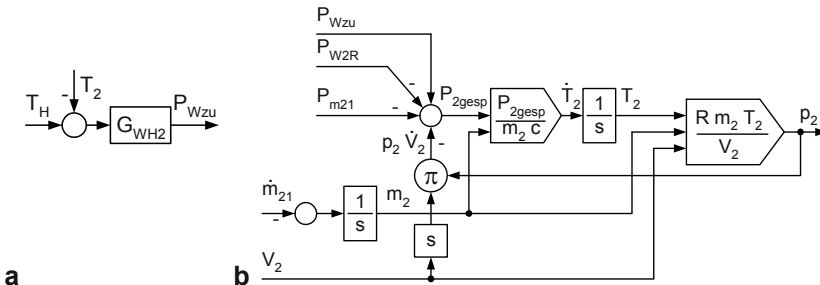


Abb. 6.18 Blockschaltbilder von Boden und Kammer 2. **a** Boden **b** Kammer 2

Verdränger/Regenerator mit Dichtspalt:

Der Verdränger besteht aus Schaumstoff und befindet sich zwischen den Kammern mit den Temperaturen T_2 und T_1 . Das Aufheizen auf der einen und das Abkühlen auf der anderen Seite erfolgt über die Grenzschichten mit den Leitwerten G_{W2R} und G_{WR1} . Die Temperatur T_R des Verdrängers ändert sich umso langsamer, je größer die Wärmekapazität des Regenerators C_{Reg} ist. Die Beziehungen können aus **Anhang A**, **Tabellen A.3** und **A.6**, entnommen werden und führen zu dem Blockschaltbild in Abb. 6.19 a.

Durch den Dichtspalt fließt der Gasstrom $\dot{m}_{21}$ mit dem zusätzlichen Effekt des Transports der Massestrom-Leistung P_{m21} . Das Modell kann aus **Anhang A**, **Tabelle A.6**, abgeleitet werden (s. Abb. 6.19 b).

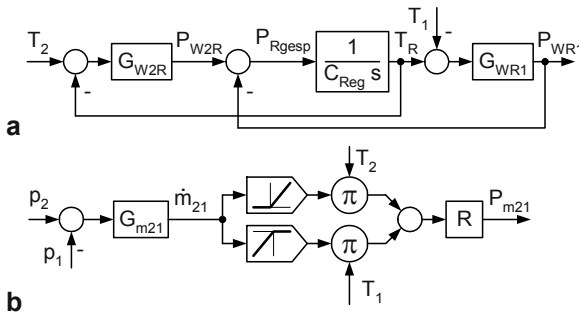


Abb. 6.19 Blockschaltbilder des Regenerators mit Dichtspalt. **a** Regenerator **b** Dichtspalt

Kammer 1:

Sie ist wiederum ein offenes thermodynamisches System wie Kammer 2. Das Blockschaltbild kann ebenfalls aus **Anhang A, Tabelle A.6**, entnommen und entsprechend angepasst werden.

Der Wärmeaustausch, der mit dem Regenerator mit der Temperatur T_R (P_{WR1}) und mit dem Kühlkörper mit der Temperatur T_K (P_{WK1}) stattfindet, wird im Modell berücksichtigt (Signal- und Parameternamen s. Abb. 6.16). Der Wärmeaustausch mit der seitlichen Begrenzung der Kammer, dem Zylinder, wird wiederum vernachlässigt.

Stoffaustausch findet an zwei Stellen statt, über den Spalt zwischen Zylinder und Verdränger ($\dot{m}_{21}$, Leistung P_{m21}) und über den (wesentlich engeren) Spalt zwischen Kammer 1 und Umgebung ($\dot{m}_{1L}$, Leistung P_{m1K}). Damit ändert sich die Masse m_1 in der Kammer 1.

Das führt zu dem Blockschaltbild in Abb. 6.20.

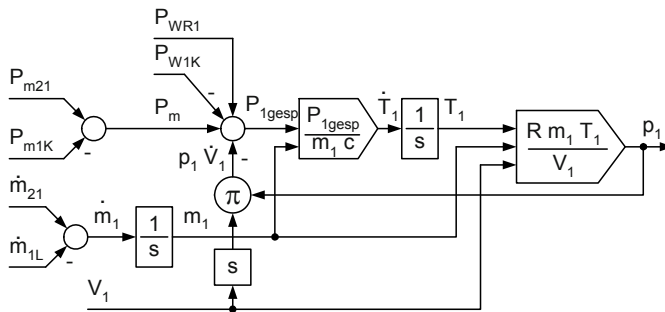


Abb. 6.20 Das Blockschaltbild der Kammer 1

Deckel mit Dichtspalt (und ggf. Kühlmasse):

Die Beschreibung erfolgt in Abb. 6.21 analog Abb. 6.18 a und Abb. 6.19 b.

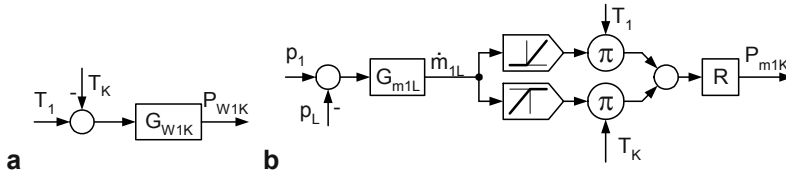


Abb. 6.21 Blockschaltbilder von Deckel mit Dichtspalt. **a** Deckel **b** Durchführung der Verdrängerstange zum Rotor

Diese Komponenten des thermodynamischen Teilsystems sind untereinander und mit dem mechanischen in unterschiedlicher Weise verkoppelt. In Abb. 6.22 ist das Gesamtschaltbild dargestellt. Es wurde so aufgebaut, dass die Haupteingangsgröße T_H oben links steht und die Hauptrichtung des Prozesses von links oben (Einbringung der Wärmeleistung P_{Wzu}) nach rechts unten (Drehung des Rotors) verläuft. Damit ist der Boden die erste Komponente, an die sich dann Kammer 2, Regenerator, Kammer 1, Deckel und Mechanik anschließen. Auf den grau unterlegten Flächen befinden sich die in den Abb. 6.17 bis 6.21 dargestellten Blockschaltbilder dieser Komponenten.

Die Sichtkontrolle ergibt, dass das Blockschaltbild vollständig ist (mit Ausnahme der echten Eingangsgrößen sind alle Eingangsgrößen in Blöcke oder in Bilanzgleichungen gleichzeitig Ausgangsgrößen). Auch die Wirkungsumkehr in den Wirkungskreisen ist gegeben. Sie ist wegen der vielen Nichtlinearitäten nicht einfach zu überprüfen. Oft hilft dabei eine logische Überlegung: z. B. wirkt $\dot{m}_{21}$ mit dem in Abb. 6.16 angesetzten Vorzeichen m_2 -verringend in Kammer 2.

6.5.3 Simulationslauf

6.5.3.1 Parameter

Es wird eine Simulation durchgeführt für die folgenden Parameter. Sie wurden entweder aus der Literatur entnommen, berechnet, messtechnisch ermittelt oder abgeschätzt (Parameternamen s. Abb. 6.16).

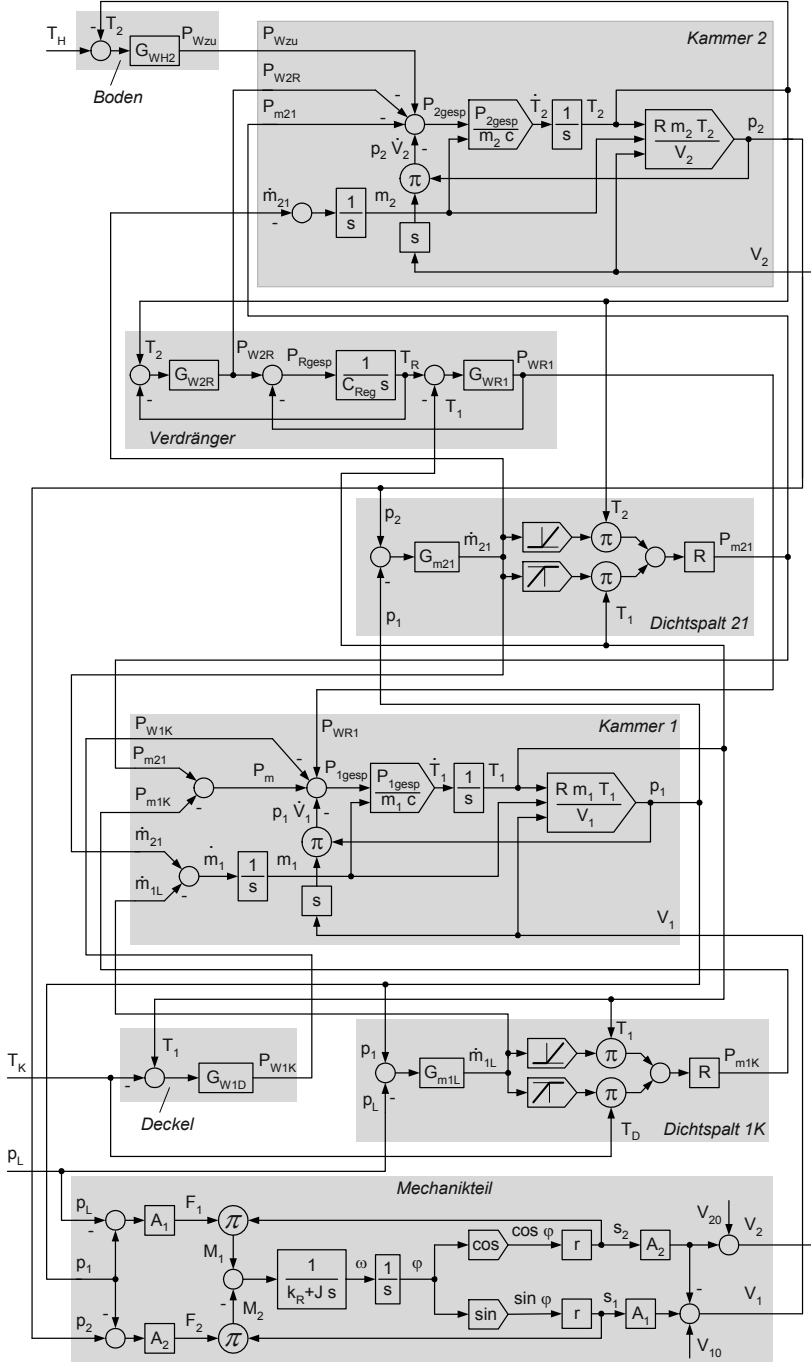


Abb. 6.22 Das Gesamtschaltbild des Stirlingmotors mit Verdränger

Mechanikteil (s. Abb. 6.17):

- Fläche des Arbeitskolbens: $A_1 = 3 \text{ cm}^2 = 0,0003 \text{ m}^2$,
- Fläche des Verdrängers: $A_2 = 100 \text{ cm}^2 = 0,01 \text{ m}^2$,
- Hebellänge: $r = 5 \text{ mm} = 0,005 \text{ m}$,
- Luftdruck (Eingangsgröße): $p_L = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ N/m}^2$.

Aus den Verdrängerwerten

- Höhe des Verdrängers: $B = 8 \text{ mm} = 0,008 \text{ m}$
- Höhe des Verdrängerzylinders: $H = 20 \text{ mm} = 0,02 \text{ m}$

kann das Gas-Gesamtvolumen bei $\varphi = 0$ abgeschätzt werden. Es beträgt 126 cm^3 und teilt sich wie folgt auf die Kammern 1 und 2 auf:

$$V_{10} = 66 \text{ cm}^3 = 66 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3, \quad V_{20} = 60 \text{ cm}^3 = 60 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3.$$

Aus den Parametern der Schwungscheibe

- Radius der Schwungscheibe: $R_S = 60 \text{ mm} = 0,06 \text{ m}$ und
- Masse der Schwungscheibe: $m_S \approx 55 \text{ g} = 0,055 \text{ kg}$

kann das Massenträgheitsmoment J mit Hilfe der Zylinderformel abgeschätzt werden:

$$J = \frac{m \cdot R_S^2}{2} = \frac{0,055 \cdot 0,06^2}{2} \approx 10^{-4} \text{ kg m}^2 = 10^{-4} \text{ Nm} \cdot \text{s}^2. \quad (6.17)$$

Der Faktor des geschwindigkeitsproportionalen Reibmomentes k_R wird so festgelegt, dass bei einer Winkelgeschwindigkeit $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$ eine Reibleistung von

$$P_{\text{Reib}} = k_R \cdot \omega^2 = 0,01 \text{ W}$$

entsteht. Diese Winkelgeschwindigkeit entspricht einer Drehzahl von $1,6 \text{ U/s}$ des Rotors (die Drehzahl des Funktionsmodells in Abb. 6.15 liegt in diesem Bereich). Der Faktor der geschwindigkeitsproportionalen Reibkraft ist damit

$$k_R = \frac{P_{\text{Reib}}}{\omega^2} = \frac{0,01 \text{ Nm/s}}{(10 \text{ s}^{-1})^2} = 10^{-4} \text{ Nm} \cdot \text{s}. \quad (6.18)$$

Thermodynamisches System:

Boden aus Aluminium:

Über ihn wird die Wärmeleistung P_{zu} zugeführt (s. Gl. (6.16)). Sein Wärmedurchgangswert G_{WH2} wird bestimmt von folgenden drei Widerständen beim Wärmedurchgang durch eine feste Wand:

- Wärmeübergangswiderstand an der Grenzfläche Heizraum zum Boden

$$R_{HB} = \frac{\alpha_{HB}}{A_2}, \quad (6.19 \text{ a})$$

- Widerstand gegen die Wärmeleitung im Boden

$$R_{BB} = \frac{d_{BB}}{\lambda_{BB} \cdot A_2}, \quad (6.19 \text{ b})$$

- Wärmeübergangswiderstand an der Grenzfläche Boden zur Kammer 2

$$R_{B2} = \frac{\alpha_{B2}}{A_2}. \quad (6.19 \text{ c})$$

Der Gesamtwiderstand ist die Summe dieser drei Widerstände, der Wärmeleitwert G_{WH2} sein Kehrwert:

$$G_{WH2} = \frac{1}{R_{HB} + R_{BB} + R_{B2}}. \quad (6.20)$$

Die beiden Wärmeübergangswiderstände sind schwer zu bestimmen. In der Bauphysik [6.3, 6.7, 6.8] existieren für Fenster, Wände oder Türen Richtwerte von α_{ij} . Sie liegen im Bereich $\alpha_{ij} = 0,01 \frac{m^2 \cdot K}{Nm/s} \dots 0,2 \frac{m^2 \cdot K}{Nm/s}$, abhängig von Windstärke, Richtung des Wärmestromes oder auch Luftfeuchte.

Die Durchtrittsfläche der Wärmeleistung ist in diesem Stirlingmotor $A_2 = 100 \text{ cm}^2 = 0,01 \text{ m}^2$. Das führt mit dem obigen Ansatz zu Wärmeübergangswiderstandswerten von

$$R_{HB} \approx R_{B2} = (1 \dots 20) \frac{K}{Nm/s}.$$

Der Widerstand gegen die Wärmeleitung im Boden ist demgegenüber vernachlässigbar klein. Mit $\lambda_{BB} = 238 \frac{W}{m \cdot K}$ (spezifische Wärmeleitfähigkeit von Aluminium [6.3]), $d_{BB} \approx 1 \text{ mm} = 0,001 \text{ m}$ (Materialdicke), $A_2 = 100 \text{ cm}^2 = 0,01 \text{ m}^2$ ergibt sich

$$R_{BB} = \frac{d_{BB}}{\lambda_{BB} \cdot A_2} = \frac{0,001}{238 \cdot 0,01} \approx 5 \cdot 10^{-4} \frac{K}{Nm/s}.$$

Damit ist

$$G_{WH2} \approx \frac{1}{R_{HB} + R_{B2}} = \frac{1}{2 \cdot \left((1 \dots 20) \frac{K}{Nm/s} \right)} = (0,025 \dots 0,5) \frac{Nm/s}{K}.$$

In der Simulation wurde der obere Wert verwendet. Er sagt aus, dass bei einer Temperaturdifferenz von 10 K zwischen Heizer und Kammer 2 eine Leistung von 5 Watt = 5 J/s = 5 Nm/s in das System eingebracht wird:

$$G_{WH2} = 0,5 \frac{Nm/s}{K}.$$

Deckel:

Dieser Wärmedurchgangswert wird auch hier verwendet

$$G_{W1K} = 0,5 \frac{Nm/s}{K}.$$

Kammer 2 und Kammer 1:

Die in Abb. 6.18 b und 6.21 auftauchenden Parameter sind, wie in Abschn. 6.4.2,

- Gaskonstante des verwendeten Gases Luft: $R = 287 \text{ Nm}/(\text{kg} \cdot \text{K})$,
- Die spezifische Wärmekapazität bei annähernd konstantem Volumen V :
 $c = 720 \text{ Nm}/(\text{kg} \cdot \text{K})$.

Auf die Anfangswerte der Integralglieder ($T_2(0)$, $m_2(0)$, $T_1(0)$, $m_1(0)$) wird später eingegangen.

Verdränger/Regenerator:

Der Verdränger besteht aus Schaumstoff, Sein Volumen beträgt $V_{Reg} \approx 80 \text{ cm}^3 = 8 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$. Seine Dichte ρ_S und seine spezifische Wärmekapazität c_S können nur geschätzt werden [6.1], sie liegen in den Bereichen:

$$\rho_S = (0,01 \dots 0,1) \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}, \quad c_S = (100 \dots 2000) \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}.$$

Das ergibt einen Bereich der Wärmekapazität C_{Reg}

$$C_{Reg} = c_S \cdot \rho_S \cdot V_{Reg} = \frac{(100 \dots 2000) \text{ Nm}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot \frac{(0,01 \dots 0,1) \text{ kg}}{0,001 \text{ m}^3} \cdot 8 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \approx (0,08 \dots 16) \frac{\text{Nm}}{\text{K}}.$$

Für den Wärmeübergangswiderstand werden die Überlegungen zum Boden zugrunde gelegt und dessen Werte übernommen.

Die Simulationen werden für folgende Werte des Verdrängers durchgeführt:

- Wärmekapazität $C_{Reg} = 0,2 \frac{\text{Nm}}{\text{K}},$
- Wärmedurchgangswerte $G_{W2R} = G_{WR1} = 0,5 \frac{\text{Nm} / \text{s}}{\text{K}}.$

Dichtspalt des Verdrängers:

Der Leitwert G_{m21} ist sehr schwer abzuschätzen. Er muss ausreichend groß sein, damit eine sehr geringe Druckdifferenz $p_2 - p_1$ ausreicht, den Massestrom $\dot{m}_{21}$ zwischen den Kammern zu realisieren. (Abschätzung: Im Bereich $\varphi = 0^\circ$ entsteht der maximale Verdränger-Volumenstrom. Für $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$ beträgt er mit $r = 0,005 \text{ m}$ und $A_2 = 0,01 \text{ m}^2$

$$\dot{V}_{21} = \omega \cdot r \cdot A_2 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 / \text{s}.)$$

Die Dichte ρ der Luft in den Kammern beträgt im Mittel etwa 1 kg/m^3 . Damit ist der maximale Massestrom $\dot{m}_{21\text{max}} \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ kg/s}$. Wird die erforderliche Druckdifferenz zum Erreichen von $\dot{m}_{21\text{max}}$ mit einem Tausendstel des Luftdrucks (also mit 100 N/m^2) angenommen, dann ist

$$G_{m21} = \frac{\dot{m}_{21}}{p_2 - p_1} = 5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg/s}}{\text{N/m}^2}.$$

Dichtspalt im Deckel für die Verdrängerstange:

Sein Leitwert G_{m1L} muss sehr klein sein, damit im Volumen V_1 noch genügend Druckvolumenleistung entstehen kann. Der Spalt hat aber auch eine Funktion: Nur durch ihn ist gesichert, dass der Druck p_1 im Bereich $90 < \varphi \leq 270^\circ$ phasenweise kleiner als der Luftdruck ist und somit auch in diesem Winkelbereich ein Moment im Uhrzeigersinn wirkt. Gewählt wurde als Leitwert des Dichtspaltes im Deckel

$$G_{m1L} = 5 \cdot 10^{-11} \frac{\text{kg/s}}{\text{N/m}^2},$$

also ein um fünf Größenordnungen kleinerer Leitwert als G_{m21} .

6.5.3.2 Der Anfangszustand

Der Anfangszustand des Motors ist erst nach dem Aufheizen des Systems hergestellt. Der Motor wird auf die Wärmequelle aufgesetzt (Abb. 6.15) und es vergehen mehrere Sekunden, bis alle Wärmespeicher ihre stationäre Anfangstemperatur erreicht haben. Der Rotor nimmt die Position $\varphi = 90^\circ$ ein, so dass auf ihn kein Moment wirkt, welche Werte die Drücke im System auch einnehmen würden (s. Abb. 6.16: s_1 besitzt seinen Maximalwert, der Arbeitskolben ist am oberen Totpunkt).

Nachdem das Blockschaltbild (Abb. 6.21) in das Simulations-Blockschaltbild übertragen und die Parameter eingetragen worden sind, könnte zunächst der Aufheizvorgang simuliert werden, um Eingabefehler zu erkennen und Anfangswerte der Simulation des eigentlichen Motorverhaltens zu ermitteln. (Dieser Weg war z. B. in Abschn. 4.3 gegangen worden.) Für den Stirlingmotor mit Verdränger sind die Anfangsbedingungen direkt errechenbar:

- Die Drücke p_1 und p_2 sind nach dem Aufheizen so hoch wie der Luftdruck p_L . Durch die Erwärmung der Luft in den Kammern steigen die Drücke p_1 und p_2 während des Aufheizens zunächst an. Infolge des endlich großen Leitwertes G_{m1L} gleichen sie sich aber wieder dem Luftdruck an.
- Die Eingangsgrößen sind: $T_H = 370 \text{ K}$, $T_K = 290 \text{ K}$, wobei nach 5 s eine Absenkung auf $T_K = 273 \text{ K}$ erfolgen soll (Aufbringen von Eis auf den Deckel).
- Die weiteren Temperatur-Anfangswerte liegen nach dem Aufheizen infolge der vier identischen Wärmedurchgangswerte des Modells bei: $T_2 = 350 \text{ K}$, $T_R = 330 \text{ K}$, $T_1 = 310 \text{ K}$.
- Ein Stirlingmotor benötigt wie ein Verbrennungsmotor eine von außen eingebrachte Anfangsenergie, ehe er selbst antreiben kann. Hier wird, nachdem sich das System aufgeheizt hat, in der Position $\varphi(0) = 90^\circ$ durch einen äußeren Impuls eine Anfangswinkelgeschwindigkeit $\omega(0) = 10 \text{ s}^{-1}$ realisiert.
- Die Anfangswerte der Volumina sind bei $\varphi(0) = 90^\circ$
 - $V_1(0) = V_{10} = 66 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$ und
 - $V_2(0) = V_{20} = 60 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$.
- Daraus sind m. H. der Gasgleichung $m_1(0)$ und $m_2(0)$ ermittelbar:

$$m_1(0) = \frac{p_1(0) \cdot V_1(0)}{R \cdot T_1(0)} = \frac{10^5 \text{ N/m}^2 \cdot 66 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3}{287 \text{ Nm/(kg} \cdot \text{K)} \cdot 310 \text{ K}} = 76 \cdot 10^{-6} \text{ kg},$$

$$m_2(0) = \frac{p_2(0) \cdot V_2(0)}{R \cdot T_2(0)} = \frac{10^5 \text{ N/m}^2 \cdot 60 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3}{287 \text{ Nm/(kg} \cdot \text{K)} \cdot 350 \text{ K}} \approx 60 \cdot 10^{-6} \text{ kg}.$$

Damit können auch die Anfangswerte aller Integratoren und des PT1-Gliedes zur Berechnung von ω in das Simulationssystem eingetragen werden.

6.5.3.3 Simulation des Motorverhaltens

Die Simulationsdauer ist auf 10 s eingestellt, nach 5 s wird die Deckel-Außentemperatur auf etwa $T_K = 273\text{ K}$ abgesenkt (Aufbringen von Eis).

Anmerkung: Als Simulationsschrittweite wurden $10\text{ }\mu\text{s}$ ermittelt, was zu einer Million Simulationsschritten führt. Versuche mit größeren Simulationsschrittweiten führten zu numerischer Instabilität, da einige Wirkungskreise des Systems sehr hohe Dynamik besitzen. Eine Vorausberechnung der Grenze ist bei einem solch komplexen Modell sehr schwierig. In der Praxis wird über Probieren eine günstige Simulationsschrittweite ermittelt. (Oder es kommt ein Simulator mit automatischer Schrittweitensteuerung zum Einsatz. Darauf wird in diesem Buch nicht näher eingegangen.)

Zunächst werden die eng zusammen wirkenden Signale p_1 , p_2 , $M_{ges} = M_1 - M_2$ und ω untersucht (s. Abb. 6.23). Der Verlauf des Druckes p_2 unterscheidet sich infolge des relativ großen Leitwertes G_{m21} in den Kurven nicht sichtbar vom Verlauf des Druckes p_1 .

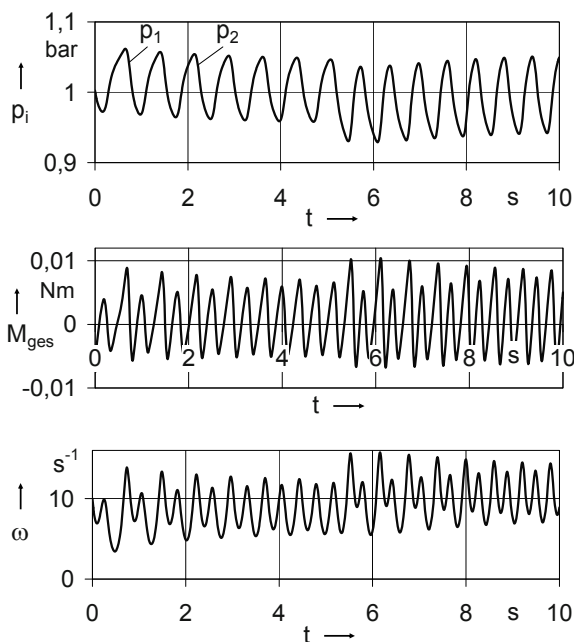


Abb. 6.23 Die Zeitverläufe von p_1 , M_{ges} , ω

Alle Signale schwingen um einen Mittelwert, die Frequenz des Druckverlaufs ist dabei halb so groß wie die der beiden anderen Signale. Die Frequenzverdoppelung entsteht dadurch, dass während einer Druckschwingungsperiode je zwei Phasen positiven und negativen Drehmomentes entstehen. Ist z. B. $p_1 > p_L$, dann befindet sich der Rotorwinkel in einem Bereich, in welchem die resultierende Druckkraft teilweise bremsend und teilweise beschleunigend wirkt.

Aus der Frequenz der Schwingungen des Druckes ist erkennbar, dass in den ersten fünf Sekunden der Motor etwa 1,5 Umdrehungen pro Sekunde erreicht, danach etwa zwei Umdrehungen pro Sekunde. Die Frequenzverdoppelung von M_{ges} ist auch als Oberwelle des ω -Verlaufs erkennbar. Die relativ großen Amplituden dieser Oberwellen entstehen infolge des kleinen Massenträgheitsmomentes der Schwungscheibe. Am Verlauf der Druckmaxima ist erkennbar, dass die Übergangsvorgänge innerhalb der zweimal fünf Sekunden noch nicht abgeklungen sind. Im stationären Fall schwingen die Drücke symmetrisch um den Luftdruck, wenn der Mittelwert von $\dot{m}_{1L}$ null geworden ist.

Abb. 6.24 zeigt den Verlauf der Temperaturen. Die Temperaturen der Kammern verlassen ihren Anfangswert in den ersten 5 Sekunden um etwa ein Kelvin infolge des Verschiebens der Massestrom-Leistung P_{m21} zwischen den Kammern.

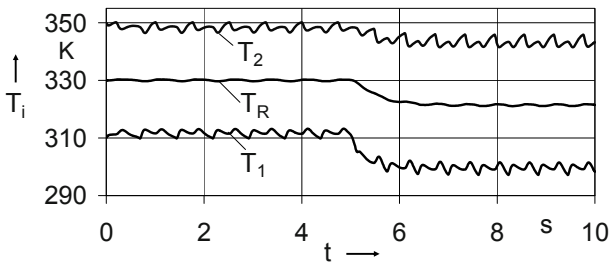


Abb. 6.24 Die Verläufe der Temperaturen T_2 , T_R und T_1 (Aufbringung von Eis auf den Deckel zum Zeitpunkt $t = 5$ s)

Nach Absenkung von T_K um 17 K verlassen auch die Temperaturen ihre bisherigen Wertebereiche, das umso stärker, je näher der jeweilige Wärmespeicher dem Deckel ist. Vor allem die Absenkung von T_R hat Einfluss auf das Energiegleichgewicht des Systems, da der Regenerator eine relativ große Wärmekapazität besitzt. Das ist an den Verläufen der zu- und abgeführten Leistungen P_{Wzu} und P_{W1K} (Abb. 6.25, obere und mittlere Kurve) zu erkennen. In der Phase nach dem Aufbringen des Eises auf den Deckel steigt die abgeführte Leistung wesentlich stärker an als die zugeführte. Und sie bleibt noch einige Sekunden größer, das entstehende Defizit wird von der im Regenerator frei werdenden Energie kompensiert. Eine wichtige Größe ist die Reibleistung (untere Kurve) bei der Einschätzung dieses Motors. Sie ist, da kein weiteres äußeres Moment wirkt, die Ausgangsleistung des Systems.

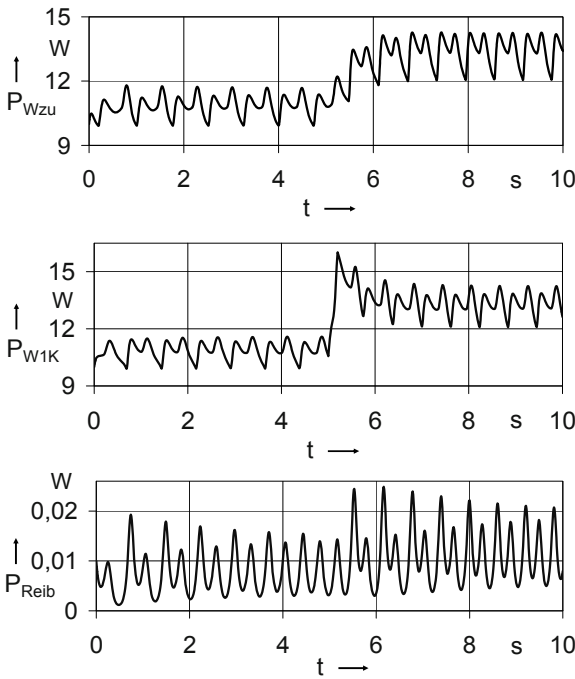


Abb. 6.25 Die Verläufe der Leistungen P_{Wzu} , P_{W1K} , P_{Reib} .

Die zugeführte Wärmeleistung liegt um Größenordnungen über der sehr geringen mechanischen Leistung, d.h. der Ausnutzungsgrad der Wärme ist gering. Dass das Prinzip schnell an Grenzen stößt, zeigt auch das während der Simulation ermittelte pV -Diagramm in Abb. 6.26. Die flachen Ellipsen sind in der ersten Phase entstanden ($t < 5$ s), die etwas höheren nach der Absenkung der Temperatur T_K (Aufbringen von Eis auf den Deckel). Die Linien zeigen, dass ständig noch ein Übergangsvorgang stattgefunden hat.

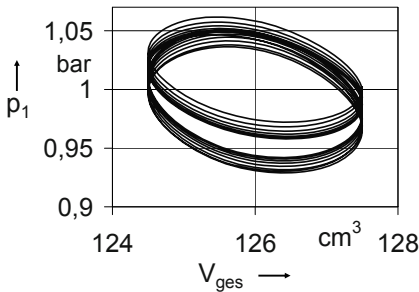


Abb. 6.26 Das pV -Diagramm des simulierten Prozesses.

Die Volumenänderungen werden nicht vom Verdränger, sondern von dem wesentlich kleineren Arbeitszylinder bestimmt und der Luftdruck ist etwa der Mittelwert der Druckgrenzen. Damit ist die erreichbare Fläche des Kreisprozesses bei einem Stirlingmotor mit Verdränger sehr klein.

Das Prinzip Stirlingmotor mit Verdränger hat nur Bedeutung für die Demonstration des Stirlingmotor-Prinzips. Für den Verfasser war wichtig, dass er das simulierte Verhalten mit dem Experiment vergleichen und damit das Modell verifizieren konnte.

6.6 Stirlingmotor mit Arbeitszylinder und Kompressionszylinder

Dieser Stirlingmotor-Typ kann wesentlich größere mechanische Leistungen realisieren als der mit Verdränger, bedingt durch wesentlich größere Arbeitsdrücke und höhere Temperaturen der eingespeisten Wärmeenergie.

- In [6.6] wird ein in ein Blockheizkraftwerk integrierter Stirlingmotor beschrieben, welcher einen Generator antreibt, der eine Leistung bis 3 kW in das Netz einspeist. Der Arbeitsdruck beträgt 33 bar , die Drehzahl bis 1000 U/min . Zum Temperaturbereich existieren keine Angaben.
- In [6.9] wird ein 500-W -Stirlingmotor einschließlich konstruktiver Daten dokumentiert. Genannte Daten sind z.B.: Arbeitsdruck 10 bar , Drehzahl etwa 800 U/min , Temperaturbereich 200 °C bis 650 °C (s. Abschn. 6.6.2).

Ausführlich beschrieben wird in [6.2] das Prinzip dieses Stirlingmotor-Typs. Die Ausführungen werden von informativen Signal-Verläufen unterstützt, die zum Vergleich mit dem Verhalten des noch zu erarbeitenden Modells dieses Stirlingmotors dienen.

6.6.1 Erarbeitung des Blockschaltbildes

Der 1. Schritt der Modellierung:

Der Motor-Typ mit Arbeitszylinder und Kompressionszylinder ist dadurch gekennzeichnet, dass Änderungen des eingeschlossenen Luftvolumens sowohl durch die Bewegungen eines Arbeitskolbens als auch eines Kompressionskolbens erfolgen. Das Schema dieses Stirlingmotors zeigt Abb. 6.27. Die Signale und Parameter wurden analog Abb. 6.16 gewählt, als Indices jedoch A für den Arbeitszylinder und K für den Kompressionszylinder.

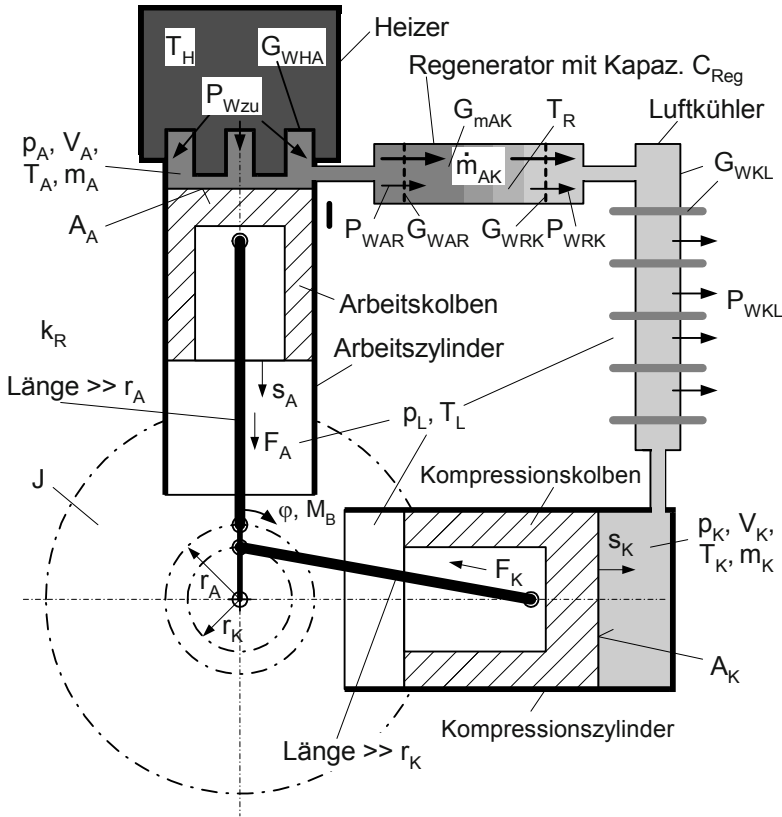


Abb. 6.27 Schema eines Stirlingmotors mit Arbeitszylinder und Kompressionszylinder

Die Modellierung wird in zwei Stufen vorgenommen:

1. Reaktion des Mechanikteils auf Änderungen der Drücke p_A und p_K in Abhängigkeit der Kurbelstellung und
2. die Entstehung der für die mechanische Leistung verantwortlichen Druckverläufe infolge der Thermodynamik in den Gasräumen.

Mechanikteil:

Der 2. und 3. Schritt:

Energiespeicher sind der Rotor mit der Schwungscheibe und den Pleueln, der Pleuelstange mit Pleuellager sowie der Pleuellager mit Pleuellager. Sie werden wie in Abschn. 6.5 auf ein Gesamt-Massenträgheitsmoment J reduziert, da das Massenträgheitsmoment der Schwungscheibe so groß angenommen werden kann, dass die Speicherwirkungen der übrigen Massen demgegenüber vernachlässigt werden können.

$$s_K = r_K \cdot \sin \varphi, \quad (6.22 \text{ b})$$

$$M_A = F_A \cdot r_A \cdot \sin \varphi, \quad (6.22 \text{ c})$$

$$M_K = -F_K \cdot r_K \cdot \cos \varphi. \quad (6.22 \text{ d})$$

Die Wege s_A und s_K beeinflussen die Volumina V_A und V_K . Ist der Winkel φ gleich null, haben die Volumina die Werte V_{A0} und V_{K0} .

Schritt 5:

Die für den Mechanikteil gefundenen Funktionen sind in Abb. 6.28 b als Blockschaltbild dargestellt. Die Ähnlichkeit mit Abb. 6.17 b wäre noch größer, wenn auch hier von gleichgroßen Kurbelradien ausgegangen worden wäre.

Thermodynamisches System:

Der thermodynamische Teil dieses Motors hat eine wesentlich andere Struktur als der des Stirlingmotors mit Verdränger. Die Leistungsflüsse sind in beiden Motoren aber ähnlich. Der wesentliche Unterschied ist, dass hier eine Massestrom-Verbindung zur Umgebung weitestgehend verhindert werden muss, während diese im Stirlingmotor mit Verdränger Voraussetzung für sein Funktionieren ist.

Das thermodynamische System besteht aus den zwei Zylindervolumina V_A und V_K und dem diese trennenden Regenerator. Dieser muss in der Lage sein, Wärmeenergie zu speichern und gleichzeitig den Gasmassestrom $\dot{m}_{AK}$ ohne großen Druckabfall $p_A - p_K$ hindurchströmen zu lassen.

Das Modell des thermodynamischen Systems wird ebenfalls Komponente für Komponente hergeleitet, ausgehend von der Stelle, an der die Wärmeleistung aus dem Heizer zugeführt wird. Die Komponenten werden zunächst ohne ihre Verkopplungen mit der Umgebung beschrieben. Da ihre Modelle entweder sehr klein sind oder aus **Tabelle A.6** in **Anhang A** direkt übernommen werden können, wird auf die übliche Unterteilung in Schritte verzichtet. Es wird in folgender Reihenfolge vorgegangen:

1. Trennwand zwischen Heizer und Arbeitszylinder,
2. Hochtemperaturseite (Arbeitszylinder oben bis Regenerator links),
3. Regenerator,
4. Tieftemperaturseite (Kompressionszylinder rechts bis Regenerator rechts),
5. Trennwand zwischen Tieftemperaturseite und umgebender Luft.

Trennwand zwischen Heizer und Arbeitszylinder:

Über sie wird die Wärmeleistung P_{Wzu} zugeführt. P_{Wzu} wird analog **Tabelle A.6** (Mitte) in **Anhang A** berechnet:

$$P_{Wzu} = G_{WHA} \cdot (T_H - T_A). \quad (6.23)$$

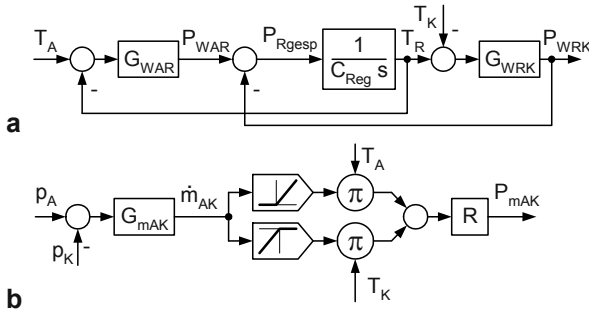


Abb. 6.30 Blockschaltbilder des Regenerators. **a** Wärmetransport **b** Massestrom und Massestrom-Leistung

Tieftemperaturseite:

Sie ist wiederum ein offenes thermodynamisches System. Das Blockschaltbild ist dem für die Hochtemperaturseite ähnlich. Es kann ebenfalls aus **Tabelle A.6** in **Anhang A** entnommen und entsprechend angepasst werden.

Der Wärmeaustausch zwischen dem Regenerator mit der Temperatur T_R (P_{WRK}) und der Umgebung über den Kühler mit der Außentemperatur T_L (P_{WKL}) wird im Modell berücksichtigt. Der Wärmeaustausch über den Kompressionszylinder wird wiederum vernachlässigt.

Der Stoffaustausch über den Regenerator ist bereits im Zusammenhang mit der Hochtemperaturseite beschrieben worden. Eingangsgrößen in die Tieftemperaturseite sind der Gasstrom $\dot{m}_{AK}$ (womit sich die Masse m_K entsprechend ändert) und die Massestrom-Leistung P_{mAK} . In die entsprechenden Bilanzen gehen sie mit unterschiedlichen Vorzeichen ein.

Das führt zu dem Blockschaltbild in Abb. 6.31.

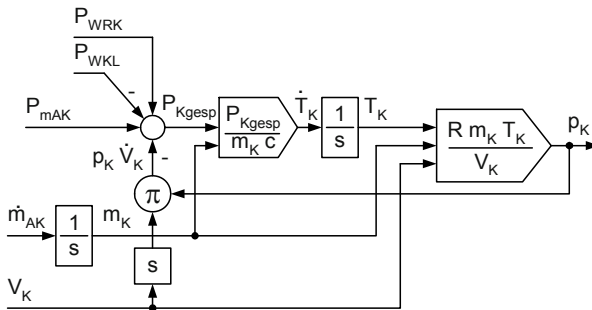


Abb. 6.31 Das Blockschaltbild der Tieftemperaturseite

Trennwand zwischen Tieftemperaturseite und umgebender Luft:

Die Beschreibung erfolgt wiederum auf der Basis eines linearen Ansatzes in Abb. 6.32 analog Abb. 6.29 a.

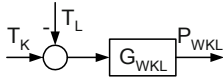


Abb. 6.32 Das Blockschaltbild der Trennwand KL zwischen Tieftemperaturseite und umgebender Luft

Die Komponenten des thermodynamischen Teilsystems sind untereinander und mit dem mechanischen Teilsystem vielfach verkoppelt. In Abb. 6.33 ist das Gesamtschaltbild dargestellt. Es wurde wiederum so aufgebaut, dass die Haupteingangsgröße T_H oben links steht. Auf den grau unterlegten Flächen befinden sich die in den Abb. 6.28 bis 6.32 dargestellten Blockschaltbilder dieser Komponenten.

Die Sichtkontrolle ergibt, dass das Blockschaltbild vollständig ist (mit Ausnahme der echten Eingangsgrößen sind alle Eingangsgrößen in Blöcke oder in Bilanzgleichungen gleichzeitig Ausgangsgrößen eines Blockes oder einer Summationsstelle).

6.6.2 Simulationslauf

6.6.2.1 Parameter

Es wird ein Simulationslauf durchgeführt für ein Modell eines Stirlingmotors, für den viele Parameter in [6.9] angegeben werden, z. B.:

- Ausgangsleistung: 300 bis 500 W ,
- Arbeitsmedium: Stickstoff (Luft wäre ebenfalls möglich),
- Arbeitsdruck: bis 10 $bar = 10^6 \text{ N/m}^2$,
- Drehzahl: bis etwa 800 U/min (das entspricht $\omega = 127 \text{ s}^{-1}$),
- Drehmoment: 8 Nm ,
- Temperatur im Heizer: 200°C bis 650°C (das entspricht 473 K bis 923 K),
- konstruktive Parameter:
 - Fläche des Arbeitskolbens: $A_A = 57 \text{ cm}^2 = 0,0057 \text{ m}^2$,
 - Fläche des Kompressionskolbens: $A_K = 72 \text{ cm}^2 = 0,0072 \text{ m}^2$,
 - Kurbellänge: $r_A = r_K = 38 \text{ mm} = 0,038 \text{ m}$,
 - Schwungrad: Masse $m = 7,5 \text{ kg}$, Radius $R_S = 140 \text{ mm}$.

Für Simulationsläufe werden weitere Parameter benötigt.

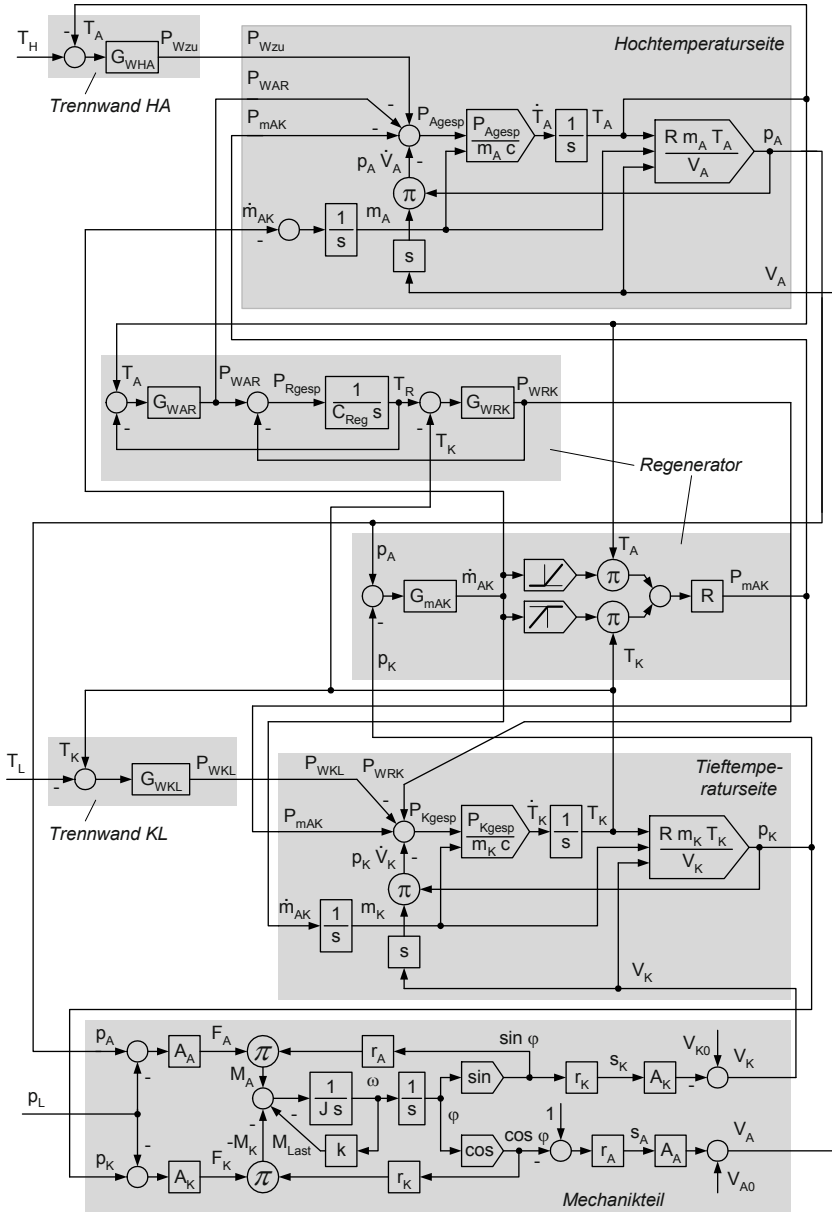


Abb. 6.33 Das Gesamtschaltbild des Stirlingmotors mit Arbeitszylinder und Kompressionszylinder

Mechanikteil:

- Das Massenträgheitsmoment des Schwungrades kann m. H. Gl. (6.17) abgeschätzt werden (Annahme: Schwungrad ist ein Zylinder). Die anderen bewegten Teile wurden summarisch berücksichtigt (zusätzlicher Anteil 40 %):

$$J = \frac{m \cdot R_S^2}{2} \cdot 1,4 = \frac{7,5 \cdot 0,14^2}{2} \cdot 1,4 \approx 0,1 \text{ kg m}^2 = 0,1 \text{ Nm} \cdot \text{s}^2. \quad (6.24)$$

- Der Faktor des geschwindigkeitsproportionalen Lastmomentes k wird so festgelegt, dass eine Ausgangsleistung von etwa 400 W bei einer Winkelgeschwindigkeit $\omega = 70 \text{ s}^{-1}$ entsteht. Aus

$$P_{ab} = k \cdot \omega^2 \quad (6.25 \text{ a})$$

ergibt sich analog zu Gl. (6.18)

$$k = \frac{P_{ab}}{\omega^2} = \frac{400 \text{ Nm/s}}{(70 \text{ s}^{-1})^2} \approx 0,08 \text{ Nm} \cdot \text{s}. \quad (6.25 \text{ b})$$

- Die Hubvolumina (Hubräume) in den beiden Zylindern betragen etwa 430 cm^3 bzw. 540 cm^3 . Da sich bei $\varphi = 0^\circ$ der Arbeitskolben in der oberen Endposition befindet, ist V_{A0} relativ klein. Der Kompressionskolben befindet sich dann in der Mittelposition, damit ist V_{K0} größer als das halbe Hubvolumen. Gewählt wird

$$V_{A0} = 200 \text{ cm}^3 \text{ und } V_{K0} = 500 \text{ cm}^3.$$

Thermodynamisches Teilsystem:

Folgende Parameter entsprechen denen in Abschn. 6.3.2:

- Gaskonstante R des verwendeten Gases Stickstoff: $R = 297 \text{ Nm}/(\text{kg} \cdot \text{K})$,
- spezifische Wärmekapazität c bei konstantem Volumen: $c = 750 \text{ Nm}/(\text{kg} \cdot \text{K})$.

Die weiteren Parameter,

- die vier Wärmeleitwerte G_{wij} ,
- der Leitwert für den Massestrom G_{mAK} , und
- die Wärmekapazität des Regenerators C_{Reg} ,

konnten aus [6.9] nicht ermittelt werden. Sie mussten zunächst geschätzt und dann mit Hilfe der Simulation so angepasst werden, dass im Modell die o. g. Bereiche

für Drücke, Temperaturen und Leistungen entstehen. Nach diesem Schritt wurden folgende Werte verwendet:

$$G_{WHA} = G_{WKL} = 100 \frac{Nm/s}{K},$$

$$G_{WAR} = G_{WRK} = 0,5 \frac{Nm/s}{K},$$

$$G_{mAK} = 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s},$$

$$C_{Reg} = 2 \frac{Nm}{K}.$$

6.6.2.2 Der Anfangszustand

Es werden die in der Praxis erforderlichen Stufen der Herstellung des Anfangszustandes des Stirlingmotors nachvollzogen:

1. Der Motor wird bei Umgebungstemperatur $T \approx 300 \text{ K}$ mit so viel Stickstoff gefüllt, dass ein entsprechender Druck entsteht.
2. Danach erfolgt das Aufheizen des Systems bei ruhendem Rotor.

(In Abschn. 6.6.2.3 wird beschrieben und simuliert, wie nach dem Aufheizen durch Aufbringen eines ausreichend starken äußeren Drehmoment-Impulses die Rotorbewegung schnell in die Nähe einer Winkelgeschwindigkeit gelangt, bei der der thermodynamische Kreisprozess in Gang gesetzt wird.)

Zu 1.: Wenn der Motor mit Gas gefüllt und der Gasdruck größer als der Luftdruck ist, bewegen die Kolben den Rotor in die Position, in der die Energie des Systems minimal ist. Das ist in diesem Fall die Stelle, in der das Gesamtgasvolumen am größten ist. Dort gilt im statischen Fall das Momentengleichgewicht

$$M_B = M_A - M_K - M_{Last} = 0.$$

Wegen $\omega = 0$ und damit $M_{Last} = 0$ (s. Gl. (6.21 a)) ist $M_A = M_K$ (s. Abb. 6.33):

$$(p_A - p_L) \cdot A_A \cdot r_A \cdot \sin \varphi = (p_K - p_L) \cdot A_K \cdot r_K \cdot \cos \varphi.$$

Bei ruhendem Rotor herrscht im System überall derselbe Druck. Damit ist

$$\varphi = \arctan\left(\frac{A_K \cdot r_K}{A_A \cdot r_A}\right). \quad (6.26)$$

Werden die gegebenen Werte eingesetzt und wird beachtet, dass das Gesamtvolumen für $\varphi > 180^\circ$ dem Maximum zustrebt, ergibt sich $\varphi = 231,6^\circ = 4,04 \text{ rad}$. (Die Ermittlung des Maximums des Gesamtgasvolumens aus der Funktion

$$V_{\text{ges}} = V_A + V_K = f(\varphi) = V_{A0} + r_A \cdot A_A \cdot (1 - \cos \varphi) + V_{K0} - r_K \cdot A_K \cdot \sin \varphi \quad (6.27)$$

führt auf das identische Ergebnis.)

Das Gesamtgasvolumen besitzt für $\varphi = 231,6^\circ = 4,04 \text{ rad}$ den Wert

$$V_{\text{ges}} = V_A + V_K = 551,1 + 714,4 = 1265,5 \text{ cm}^3.$$

Mit Hilfe der Gasgleichung kann die Relation zwischen Druck und Gasmasse im Stirlingmotor ermittelt werden. Da sich der Druck des Systems nach der Erwärmung und während des Betriebes noch stark erhöht, wird der Druck im kalten Zustand auf einen Wert von $2,5 \text{ bar}$ gebracht. Dafür ist die folgende Stickstoff-Masse m erforderlich:

$$m = \frac{p \cdot V_{\text{ges}}}{R \cdot T} = \frac{2,5 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \cdot 1265,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3}{297 \text{ Nm/(kg} \cdot \text{K)} \cdot 300 \text{ K}} = 3,55 \cdot 10^{-3} \text{ kg}.$$

Zu 2.: Wird jetzt der Heizer auf die Temperatur $T_H = 900 \text{ K}$ gebracht, setzt ein Wärmetransport über den Regenerator und den Kühler zur Umgebung ein. Da die Wärmeleitwerte G_{WHA} und G_{WKL} um zwei Größenordnungen größer als die des Regenerators sind, bestimmen die Wärmeleitwerte des Regenerators die Höhe des Wärmestromes am Ende des Aufheizens:

$$P_{Wzu} = P_{WAR} = P_{WRK} = P_{WKL} \approx G_{WAR} \cdot \frac{(T_H - T_L)}{2} = 0,5 \frac{\text{Nm/s}}{\text{K}} \cdot \frac{600 \text{ K}}{2} = 150 \frac{\text{Nm}}{\text{s}}.$$

Aufgrund der großen Unterschiede der Wärmeleitwerte und ihrer zusätzlich symmetrischen Anordnung entstehen folgende Temperaturen als Anfangswerte der Arbeitsphase des Motors:

$$T_A(0) \approx 900 \text{ K}, \quad T_R(0) \approx 600 \text{ K}, \quad T_K(0) \approx 300 \text{ K} = T_L.$$

Da sich das Gas im Arbeitszylinder stark und im Kompressionszylinder kaum erwärmt, entsteht eine Gasverschiebung zum Druckausgleich, so dass sich am Ende des Aufheizens des Motors ein höherer Druck p in den Zylindern einstellt und sich

in diesen auch andere Gasmengen befinden als nach dem Befüllen bei Umgebungstemperatur T_L , wobei die Gesamtmenge aber konstant bleibt. Da der Rotor weiterhin in seiner Position bleibt, können die unbekannten Größen m_{A0} und m_{K0} über folgende Beziehungen ermittelt werden:

$$m_A + m_K = \text{konst.} = 0,00355 \text{ kg}, \quad m_A(0) = \frac{p \cdot V_A(0)}{R \cdot T_A(0)}, \quad m_K(0) = \frac{p \cdot V_K(0)}{R \cdot T_K(0)}.$$

Werden die beiden rechten Beziehungen in die linke eingesetzt, errechnet sich der Druck p zu

$$p(0) = \frac{m_A + m_K}{\frac{V_A(0)}{R \cdot T_A(0)} + \frac{V_K(0)}{R \cdot T_K(0)}} = \frac{0,00355 \text{ kg}}{\frac{551,1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3}{297 \text{ Nm/(kg K)} \cdot 900 \text{ K}} + \frac{714,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3}{297 \text{ Nm/(kg K)} \cdot 300 \text{ K}}} \\ \approx 3,52 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 = 3,52 \text{ bar}.$$

Als Anfangswerte ergeben sich dann

$$m_A(0) \approx 0,00072 \text{ kg} \quad \text{und} \quad m_K(0) \approx 0,00278 \text{ kg}.$$

Die weiteren Anfangswerte liegen schon mit der Befüllung des Motors mit Stickstoff fest:

$$\omega(0) = 0, \quad \varphi(0) = 4,04 \text{ rad}.$$

6.6.2.3 Simulation des Motorverhaltens

Die Arbeitsphase des Stirlingmotors wird mit Hilfe eines äußeren Drehmoment-Impulses der Stärke $10 \text{ Nm} \cdot \text{s}$ gestartet. (Eingestellt wurde die Impulshöhe 250 Nm und die Impulsbreite 40 ms .) Das führt zu dem Verlauf der Winkelgeschwindigkeit in Abb. 6.34 a. Nach etwa $0,04 \text{ s}$ beginnt das System in einem Kreisprozess zu arbeiten.

Den Verlauf des Druckes p_A zeigt Abb. 6.34 b. Der Druck p_K schwingt phasengleich mit Druck p_A um einen Mittelwert oberhalb 6 bar . Die Amplitude von p_K ist etwas höher; diese Druckdifferenz ist Voraussetzung für den Gasmassenstrom zwischen den Zylindern. Dieser transportiert die für den Kreisprozess wesentliche Massenstrom-Leistung.

Der Druck p_A ist der eine Faktor des Drehmomentes M_A , das infolge des sich mit der Position φ des Rotors ändernden Hebelarmes gegenüber dem Druck deutlich phasenverschoben ist.

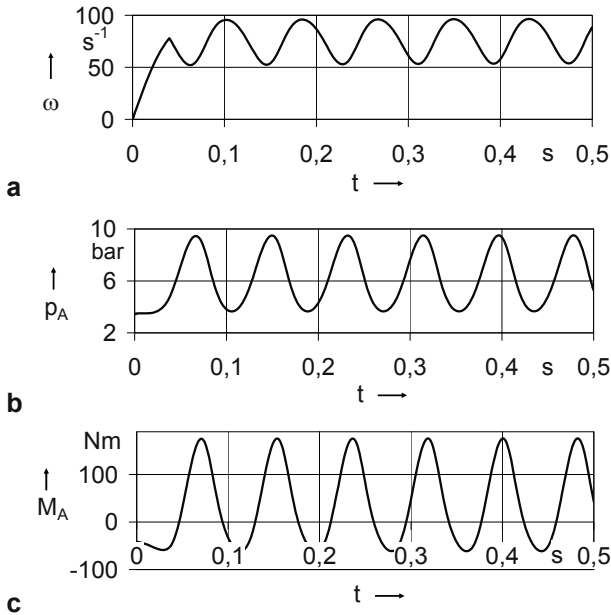


Abb. 6.34 Die Zeitverläufe von ω , p_A , M_A

Die Temperaturverläufe sind in Abb. 6.35 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die Temperaturdifferenzen $T_H - T_A$ und $T_K - T_L$ zeitweise unterschiedliche Vorzeichen besitzen. Das hat Auswirkungen auf die Transportrichtungen der Wärmeleistungen P_{Wzu} und P_{WKL} .

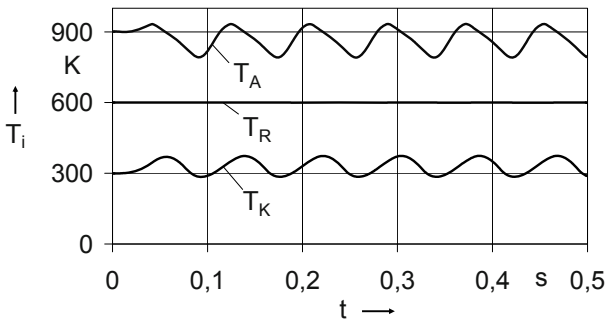


Abb. 6.35 Die Verläufe der Temperaturen T_A , T_R und T_K

Da die Wärmeleitwerte im Regenerator sehr klein sind, die Wärmekapazität des Regenerators relativ groß ist und die Temperaturen T_A und T_K im Bereich ihrer Anfangswerte verbleiben, entfernt sich die Temperatur T_R kaum von ihrem Anfangswert 600 K .

Abb. 6.36 a zeigt die Verläufe der Leistungen P_{Wzu} (Bereich etwa -3000 W bis 11000 W) und P_{WKL} (Bereich etwa -1500 W bis 6500 W). Wie schon aus dem Verlauf der Temperaturen zu erkennen, schwanken sowohl die zugeführte als auch die abgeführte Leistung stark und sie besitzen negative Anteile. Die Mittelwerte sind etwa 3800 W (P_{Wzu}) und 3300 W (P_{WKL}). Die Differenz ist die mechanische Leistung. Wird der Mittelwert von ω in Abb. 6.34 a (etwa 80 s^{-1}) in die Gl. (6.25 a) eingesetzt, ergibt sich $P_{mech} \approx 500\text{ W}$. (Der Wirkungsgrad dieses Modells ist damit etwa 13 %; in [6.6, 6.9] wird die Wärmeleistung P_{WKL} jedoch zu Heizzwecken weiterverwendet.)

Für einen Kreisprozess mit hoher Leistungsumsetzung ist eine hohe Massestrom-Leistung Voraussetzung. Aus dem Vergleich der Kurven in Abb. 6.36 a und b ist zu erkennen, dass die Massestrom-Leistung in der Größenordnung der beiden anderen Leistungen liegt.

Die Leistung, die infolge Drosselung des Gasmassestromes im Regenerator entsteht, ist wiederum zwei Größenordnungen kleiner als die der Massestrom-Leistung und kann, wie schon in Abschn. 6.2 abgeschätzt, vernachlässigt werden.

Anmerkung: Die Kurve in Abb. 6.36 b ändert bei Vorzeichenwechsel ihren Anstieg. Bei positivem Vorzeichen des Gasmassestromes $\dot{m}_{AK}$ geht die Temperatur im Arbeitszylinder multiplikativ in die Höhe der Massestrom-Leistung P_{mAK} ein, bei negativem Vorzeichen des Gasmassestromes $\dot{m}_{AK}$ die niedrigere Temperatur im Kompressionszylinder (s. Abb. 6.30 b).

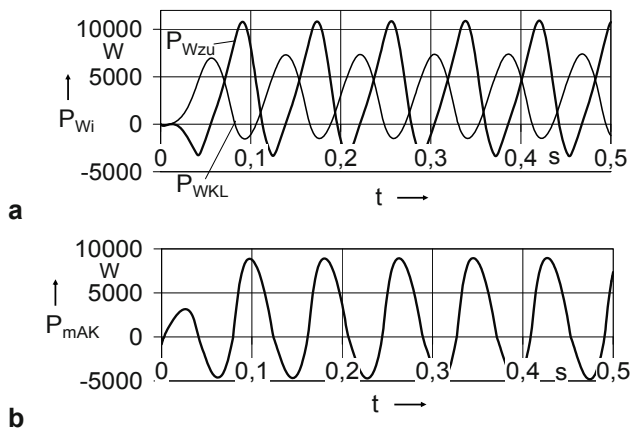


Abb. 6.36 Die Verläufe der Leistungen. **a** P_{Wzu} , P_{WKL} **b** P_{mAK}

Das pV -Diagramm (Abb. 6.37) mit der Abszisse Gesamtvolumen V_{ges} und dem Druck p_A als Ordinate zeigt, dass pro Kurbelumdrehung eine Druck-Volumenarbeit verrichtet wird, die um Größenordnungen über der des Stirlingmotors mit Verdränger liegt.

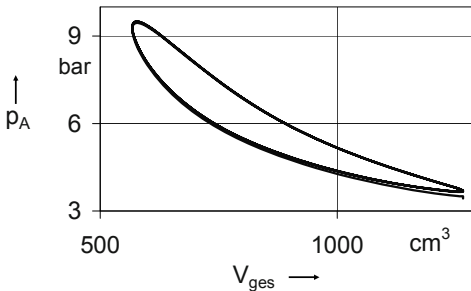


Abb. 6.37 Das pV -Diagramm des simulierten Prozesses

Eine grobe Abschätzung der Fläche ergibt etwa $400 \text{ bar} \cdot \text{cm}^3$, das sind $40 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{U}$. Bei der sich einstellenden Drehzahl von $750 \text{ U}/\text{min}$ beträgt die Druck-Volumen-Leistung des Modells etwa 500 W , wie dies mit den Parametern des Modells aus [6.9] angestrebt worden ist.

Der Stirlingmotor mit Arbeitszylinder und Kompressionszylinder arbeitet bei relativ hohen Drücken und ändert sein Gasvolumen etwa im Verhältnis 1:2. Dass sind die Voraussetzungen für eine relativ große Druck-Volumen-Leistung und damit eine große mechanische Ausgangsleistung.

6.7 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden die beiden allgemeinen thermodynamischen Systeme

- ohne Stoffaustausch mit der Umgebung (geschlossen) und
- mit Stoffaustausch mit der Umgebung (offen).

modelliert und die Teilmodelle in **Anhang A, Tabelle A.6**, zusammengestellt.

Diese Teilmodelle wurden genutzt, um folgende Systeme zu modellieren und zu simulieren:

- Druckflüssigkeitsspeicher der Hydraulik,
- Arbeitszylinder der Pneumatik,
- Stirlingmotor mit Verdränger,
- Stirlingmotor mit Arbeitszylinder und Kompressionszylinder.

Bis auf den Druckflüssigkeitsspeicher, der als geschlossenes thermodynamisches System beschrieben werden kann, sind die Beispiel-Systeme offene thermodynamische Systeme. Sehr komplex sind die Modelle der beiden Stirlingmotoren, da sie aus zwei offenen Systemen sowie aus Bausteinen der technischen Mechanik und teilweise aus Bausteinen der Fluidtechnik bestehen. Die Struktur ihrer thermodynamischen Systeme ist bis auf einen funktionsbedingten Dichtspalt beim Stirlingmotor mit Verdränger gleich, aber ihre Temperatur-, Druck- und Volumenbereiche sind sehr unterschiedlich. Die erreichbaren mechanischen Ausgangsleistungen eines Stirlingmotors mit Arbeitszylinder und Kompressionszylinder sind um Größenordnungen größer als die eines Stirlingmotors mit Verdränger.

7 Wanderwellen in Leitungen

In Abschn. 2.1.2 wurde die Modellbeschreibung im Rahmen dieses Buches auf ausschließlich *konzentrierte Parameter* beschränkt. Wenn Parameter in einem System als Kontinua auftreten, ist die Beschreibung eines solchen Systems mit partiellen Differenzialgleichungen angezeigt. Diese Differenzialgleichungen werden i. Allg. auf der Basis der Finite-Elemente-Methode m. H. spezieller Software gelöst.

Sind die Kontinua linear verteilt (z. B. Widerstände, Kapazitäten oder Massen in unverzweigten elektrischen oder fluidischen Leitungen), kann die Aufteilung dieser Leitungen in Abschnitte, die wiederum mit konzentrierten Parametern beschrieben werden, die Anwendung der bisher ermittelten Modellbausteine und Werkzeuge ermöglichen. Voraussetzung ist, dass die Leitung in so viele Abschnitte zerlegt wird, dass das Verhalten des Gesamtmodells dem des Kontinuums ausreichend nahe kommt. (Sind die Kontinua über Flächen oder Volumina verteilt, führt dieser Ansatz zu sehr großen Modellen und langen Rechenzeiten und ist damit nicht zu empfehlen.)

7.1 Wanderwellen in elektrischen Leitungen

Die bekanntesten Ursachen für das Entstehen von Wanderwellen in elektrischen Leitungen sind die Blitzenzladung in eine Freileitung und Schaltvorgänge in Hochspannungsnetzen. Dass sich die damit verbundenen Spannungsänderungen in Form von Wanderwellen in den Leitungen fortpflanzen, liegt an den Induktivitäten L_{ges} und Kapazitäten C_{ges} dieser Leitungen, die über die gesamte Leitung verteilt sind.

7.1.1 Erarbeitung des Blockschaltbildes

Der 1. Schritt:

Wird die Leitung in n gleichgroße Abschnitte unterteilt, entsteht die Ersatzschaltung in Abb. 7.1.

Jeder Leitungsabschnitt hat die Struktur des Reihenschwingkreises aus Abschn. 3.1. Seine Ausgangsspannung ist hier jedoch die Eingangsspannung des folgenden Leitungsabschnittes. Der Strom des folgenden Leitungsabschnittes hat zudem Einfluss auf den Ladezustand der Kapazität dieses Leitungsabschnittes usw. Alle Leitungsabschnitte sind mit den benachbarten über Wirkungen und Rückwirkungen miteinander verbunden. Es entsteht ein System höherer Ordnung.

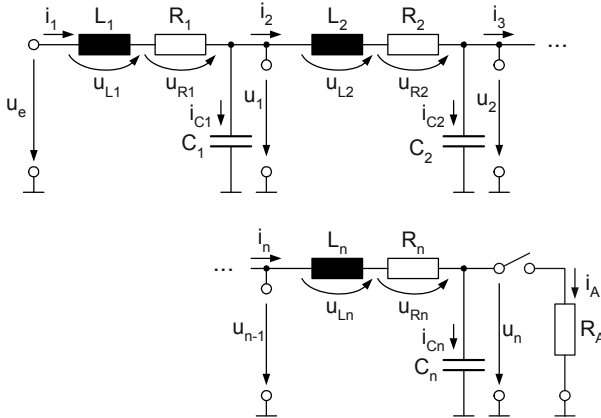


Abb. 7.1 Das Ersatzschaltbild einer elektrischen Leitung, bestehend aus n Segmenten, mit einem zuschaltbaren ohmschen Widerstand (Abschlusswiderstand R_A).

Ein Leitungssegment besitzt die Induktivität L_i , den ohmschen Widerstand R_i und gegenüber seiner Umgebung die Kapazität C_i . Im Unterschied zu Abb. 3.1 in Abschn. 3.1 kann der ohmsche Widerstand zwischen Leitung und Umgebung i. Allg. als unendlich groß angenommen werden. Das Blockschaltbild dieser Ersatzschaltung kann aus Abb. 3.3 entwickelt werden, so dass hier die detaillierte Bearbeitung des **2. bis 5. Schrittes** entfallen kann. Es muss lediglich beachtet werden, dass die Ströme i_{R2i} null sind und stattdessen der Strom des Folgesegments in die Strombilanz eingeht (Abb. 7.2).

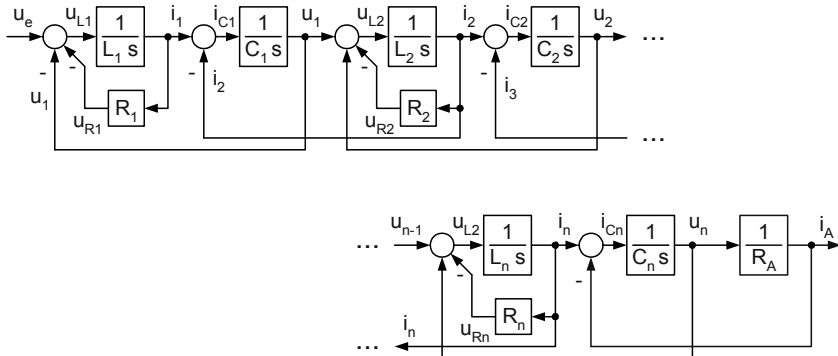


Abb. 7.2 Das Blockschaltbild einer elektrischen Leitung, bestehend aus n Segmenten, mit einem ohmschen Abschlusswiderstand.

Eine erste Kontrolle zeigt, dass die Ausgangssignale aller Blöcke und Summationsstellen gleichzeitig Eingangssignale anderer Blöcke und Summationsstellen sind und dass alle Wirkungskreise eine Wirkungskumkehr besitzen.

7.1.2 Simulationslauf

Abschlusswiderstand der Leitung ist der ohmsche Widerstand R_A . Es wird die Reaktion des Leitungssystems auf das Abschalten von R_A untersucht.

Für die Parameter von Freileitungen wurden Zahlenwerte aus der Literatur entnommen [7.1, 7.2, 7.6]:

- auf die Länge der Leitung bezogene Induktivität $L' = 1,67 \cdot 10^{-6} \frac{V s}{A m}$,
- auf die Länge der Leitung bezogene Kapazität $C' = 6,7 \cdot 10^{-12} \frac{A s}{V m}$,
- auf die Länge der Leitung bezogener ohmscher Widerstand (Kupfer, Querschnitt 260 mm^2) $R' = 6,7 \cdot 10^{-5} \frac{V}{A m}$,
- Ausbreitungsgeschwindigkeit einer elektromagnetischen Welle $v \approx 300 \text{ m}/\mu\text{s}$ (Lichtgeschwindigkeit).

Bei Aufteilung der Leitung in $n = 20$ Abschnitte ist das Gesamtsystem 40. Ordnung. Die zu untersuchende Leitung habe eine Länge von 3 km , die 20 Segmente besitzen damit eine Länge von $l = 150 \text{ m}$. Das führt zu folgenden Parametern ($i = 1 \dots 20$):

- Induktivität L_i :

$$L_i = L' \cdot l = 1,67 \cdot 10^{-6} \frac{V s}{A m} \cdot 150 \text{ m} = 2,5 \cdot 10^{-4} \frac{V s}{A} = 0,25 \text{ mH}, \quad (7.1)$$

- Kapazität C_i :

$$C_i = C' \cdot l = 6,7 \cdot 10^{-12} \frac{A s}{V m} \cdot 150 \text{ m} = 10^{-9} \frac{A s}{V} = 1 \text{ pF}, \quad (7.2)$$

- ohmscher Widerstand R_i :

$$R_i = R' \cdot l = 6,7 \cdot 10^{-5} \frac{A}{V m} \cdot 150 \text{ m} = 0,01 \text{ V} / \text{A} = 0,01 \Omega. \quad (7.3)$$

- Laufzeit der Welle durch die 3 km lange Leitung t_L :

$$t_L = \frac{3000 \text{ m}}{300 \text{ m} / \mu\text{s}} = 10 \mu\text{s} = 10^{-5} \text{ s}. \quad (7.4)$$

Das heißt, dass nach jeweils $10\ \mu\text{s}$ die Wanderwellen ein Leitungsende erreichen und reflektiert werden. Für das Simulationsbeispiel wird weiterhin angenommen:

- Die Amplitude der anliegenden Spannung betrage $u_e = 100\ \text{kV}$.
- Die Stromamplitude liege bei $1\ \text{kA}$ (bei einem Phasenwinkel von null ergibt das einen Maximalwert der übertragenen Leistung von $100\ \text{MW}$).
- Der Abschlusswiderstand ist $R_A = 100\ \Omega = 100\ \text{V/A}$.
- Es wird vereinfachend angenommen, dass der Strom i_A abgeschaltet wird (Abtrennen des Widerstandes R_A), wenn er gerade seinen Maximalwert erreicht hat.
- Der Strom i_A werde innerhalb von $3\ \mu\text{s}$ von seinem Augenblickswert $1\ \text{kA}$ auf null gehen.

Die Reaktion des Leitungsmodells zeigt Abb. 7.3. Von den 20 Strom- und den 20 Spannungs-Wanderwellen des Modells sind je vier dargestellt, die Ströme im 1., 5., 10. und 15. der 20 Leitungsabschnitte und die Spannungen im 5., 10., 15. und 20. Abschnitt.

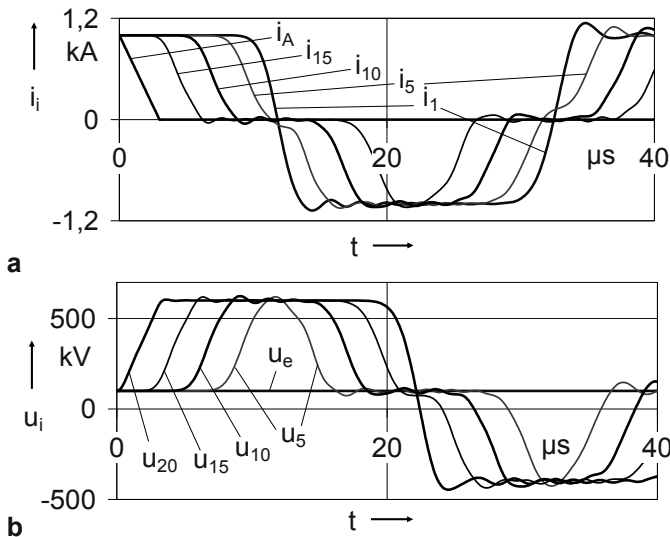


Abb. 7.3 Wanderwellen in einer elektrischen Leitung nach dem Abschalten des Verbraucherwiderstandes R_A . **a** Strom-Wellen i_1 , i_5 , i_{10} und i_{15} sowie Stromkurve i_A des Abschlusswiderstandes **b** Spannungs-Wellen u_5 , u_{10} , u_{15} und u_{20} sowie Eingangsspannung u_e

Die anderen dargestellten Größen sind die angenommene Stromkurve i_A des Abschlusswiderstandes und die als konstant angenommene Eingangsspannung u_e . Da diese Spannung sich sinusförmig ändert, ist diese Annahme fehlerbehaftet. Wenn aber bedacht wird, dass der dargestellte Zeitabschnitt nur zwei Tausendstel der Periodendauer einer 50-Hz -Schwingung beträgt, dann ist dieser Fehler vernachlässigbar.

Die grundsätzlichen Verläufe der Ströme und Spannungen kommen denen in der Literatur beschriebenen nahe. Die Oberwellen und die nur endlich großen Anstiege der Signale zwischen ihren Extremwerten entstehen durch die Diskretisierung der Leitungsparameter. Die Oberwellen sind umso kleiner und die Anstiege umso größer, je feiner die vorgenommene Segmentierung einer Leitung ist. Die Höhe der Wellen wird mit fortschreitendem Prozess geringer, da die ohmschen Widerstände das System dämpfen.

Das Verhältnis der Wellenhöhen zwischen Spannungen und Strömen von etwa 500 V/A entsteht auch bei Blitzentladungen in elektrische Leitungen. Wird nicht der Strom i_A abgeschaltet, sondern an derselben Stelle ein Blitzstrom i_{Blitz} eingeprägt, entsteht fast dasselbe Modell wie in Abb. 7.2.

Die entstehenden Spannungsmaxima stimmen mit Angaben in [7.1, 7.2, 7.6] überein: Die von Blitzen erzeugten Ströme erreichen nach etwa $3 \mu s$ einen Scheitelwert von 30 kA . Die daraus entstehenden Spannungswellen erreichen Scheitelwerte von etwa 15 MV , wenn keine schaltungstechnischen Maßnahmen ergriffen werden.

Auf detaillierte Betrachtungen z. B. der Maßnahmen zur Verhinderung von Zerstörungen infolge von Blitzentladungen mit Hilfe von Überspannungsableitern wird im Rahmen dieses Buches nicht eingegangen.

7.2 Wanderwellen in Flüssigkeitsleitungen

Auch in Flüssigkeitsleitungen entstehen Wanderwellen, da die Masse und die Kompressibilität des Fluids kontinuierlich in einer Flüssigkeitsleitung verteilt sind.

In hydraulischen Anlagen mit einer zentralen Druckversorgung für alle Antriebe können die Wanderwellen zur Beeinflussung eines Antriebs durch einen anderen führen. Sie können in sensiblen Antrieben Schwingungen erzeugen, die deren Ausgangssignale unzulässig beeinflussen [7.3, 7.4, 7.7].

Wanderwellen können in Getränkeabfülleinrichtungen zu Fehlmessungen der tatsächlich verfüllten Mengen führen [7.5].

In beiden Fällen haben die Modellierung dieser Leitungen und die Simulation ihres Verhaltens zu Erkenntnissen zur Beherrschung der genannten Probleme geführt. Im Folgenden wird das Beispiel Hydraulikleitung näher beschrieben.

7.2.1 Erarbeitung des Blockschaltbildes

Es wird eine typische Struktur in der Hydraulikanlage untersucht: eine Leitung zwischen nahezu idealer Druckquelle und einem Antrieb, die in ausreichend viele Segmente ihrer Masse m und ihrer Kompressibilität aufgeteilt wird. Ein Schema

dieser Leitung zeigt Abb. 7.4. Sie ist als mechanisches Analogon dargestellt (die Kompressibilität ist hier eine Federwirkung), da in dieser Darstellung das Verhalten anschaulich zu beschreiben ist.

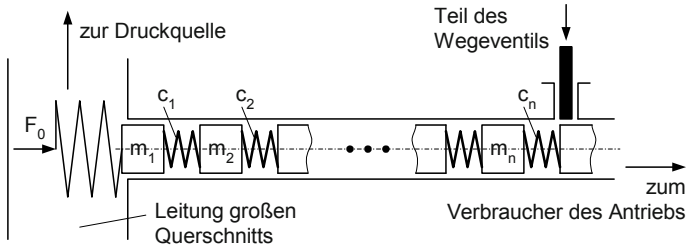


Abb. 7.4 Die mechanische Ersatzschaltung einer Hydraulikleitung, bestehend aus n Segmenten, zwischen Druckquelle und einem Antrieb

Von folgendem Anfangszustand wird ausgegangen: Der Antrieb hat sich bewegt und damit auch die Flüssigkeit in der Leitung zum Verbraucher des Antriebs (Arbeitszylinder oder Hydromotor). Zu Beginn des zu untersuchenden Vorgangs wird die Leitung mit Hilfe des Wegeventilschiebers geschlossen. Die aus Masse- und Federteilchen bestehende Flüssigkeitssäule in der Zuleitung zum Antrieb besitzt im Moment des Abbremsens einen bestimmten Spannungszustand der Federn. Die Masse- und Federteilchen treffen nacheinander auf die zugehörigen Federn und erhöhen deren Spannung, beginnend mit der dem Ventil nächstgelegenen und endend mit der vom Ventil am weitesten entfernt liegenden Feder. Danach setzt ein Entspannvorgang in umgekehrter Reihenfolge ein. Es wird angenommen, dass der Druckquellendruck p_{DQ} konstant ist, weil das große Volumen der Leitung großen Querschnitts wie eine zwar auf F_0 vorgespannte, aber extrem weiche Feder wirkt.

Der 1. Schritt:

Die Modellierung der Leitung mit dem angrenzenden Ventilschieber und der an der anderen Seite angrenzenden zentralen Druckleitung mit dem konstanten Druckquellendruck p_{DQ} wird auf der Basis des zu Abb. 7.4 adäquaten Schemas in Abb. 7.5 a vorgenommen.

Die Leitung ist in n Segmente aufgeteilt worden, für das i -te Segment sind die Signale, die mit den angrenzenden Segmenten in Wechselwirkung stehen, dargestellt.

Abb. 7.5 b zeigt das Innere des Segments i . Die Parameter V_i und m_i sind einfach zu ermitteln (ρ ... Dichte des Fluids):

$$V_i = A \cdot l_i, \quad (7.5 \text{ a})$$

$$m_i = A \cdot l_i \cdot \rho. \quad (7.5 \text{ b})$$

Alle Segmente sind gleich lang (Länge l_i) und besitzen die Fläche A .

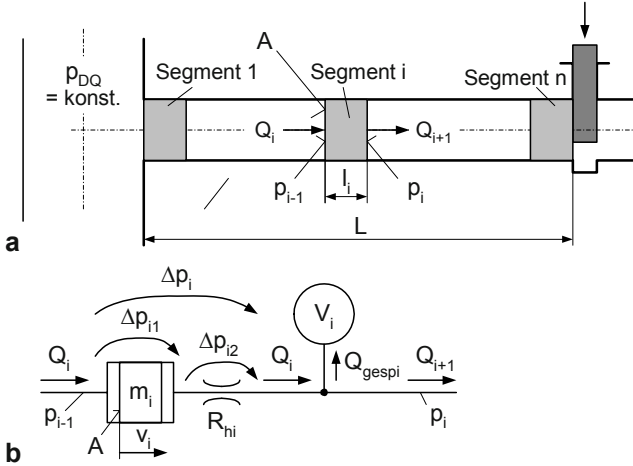


Abb. 7.5 Das Schema der Hydraulikleitung zwischen Ventilschieber und zentraler Druckleitung.
a Gesamtschema **b** Schema des Segments i

Der 2. bis 5. Schritt:

Im Segment i existieren zwei Speicher, die Masse m_i und das kompressible Volumen V_i . Für beide können die Blockschaltbilder aus **Anhang A, Tabellen A.1 und A.3**, entnommen werden, auf die explizite Darstellung der Blockschaltbilder des 2. und 3. Schrittes wird verzichtet.

Die noch fehlenden statischen Beziehungen lauten nach [7.3, 7.4, 7.7]:

$$C_{hi} = V_i \cdot \beta, \quad (7.6 \text{ a})$$

$$R_{hi} = 8\pi \cdot \frac{\nu \cdot \rho \cdot l_i}{A^2}. \quad (7.6 \text{ b})$$

(ρ ... Dichte des Fluids, β ... Kompressibilitätsfaktor des Fluids, ν ... kinematische Viskosität). Die Kapazität C_{hi} wurde in Gl. (3.19) hergeleitet. Gl. (7.6 b) für den Strömungswiderstand R_{hi} gilt für gerade Rohrleitungen der Länge l_i und des Innenquerschnittes A bei laminarer Strömung.

Es entsteht das detaillierte Blockschaltbild in Abb. 7.6 a. Für die Eingangssignale ist angedeutet, woher sie kommen, und für die Ausgangssignale, wohin sie wirken.

In Abb. 7.6 b sind die Blöcke so zusammengefasst, dass eine Struktur ähnlich der einer elektrischen Leitung in Abb. 7.2 entsteht (elektrisch-hydraulische Analogie). Die in den entsprechenden Blöcken stehenden Ausdrücke heißen deshalb hydraulische Induktivität L_{hi} (s. Gl. (7.7))

$$L_{hi} = \frac{m_i}{A^2} \cdot \tag{7.7}$$

und hydraulische Kapazität C_{hi} (s. Gl. (7.6 a)).

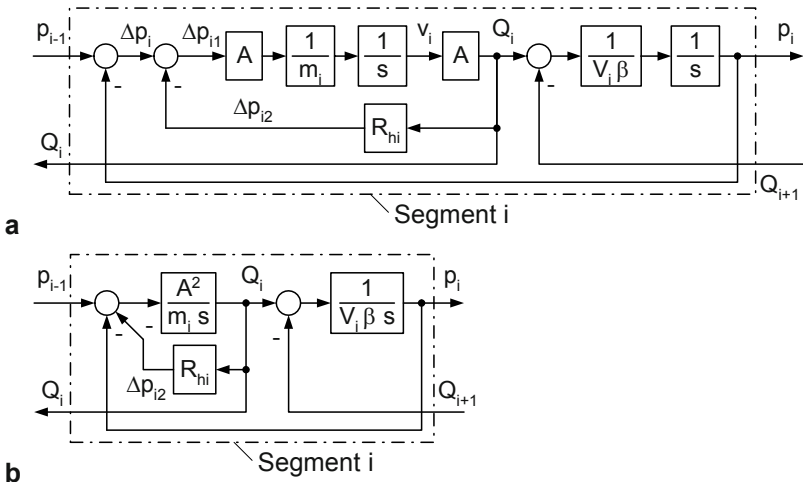


Abb. 7.6 Das Blockschaltbild des Segments i . **a** detailliert **b** mit Zusammenfassungen analog Abb. 7.2

In Tabelle 7.1 sind die sich jeweils entsprechenden Größen und Parameter der elektrisch-hydraulischen Analogie zusammengefasst.

Tabelle 7.1 Die Entsprechungen der elektrisch-hydraulischen Analogie

Elektrotechnik	Hydraulik
Spannung u	Druck p
Strom i	Volumenstrom Q
Ohmscher Widerstand R	Strömungswiderstand R_h
Induktivität L	hydraulische Induktivität L_h
Kapazität C	hydraulische Kapazität C_h

Das aus den Schemata in Abb. 7.5 und dem Segment-Blockschaltbild in Abb. 7.6 b entwickelte Modell zeigt Abb. 7.7. Der Abschlusswiderstand wird näherungsweise vom Wegeventil gebildet und wird, da im Wegeventil turbulente Strömung herrscht, analog Gl. (4.35) als nichtlinearer Leitwert beschrieben:

$$Q_{VW} = k_{VW} \cdot A_{VW}(t) \cdot \sqrt{p_n} \cdot \tag{7.8}$$

Der Strömungsquerschnitt A_{VW} ist die den Leitwert steuernde Größe.

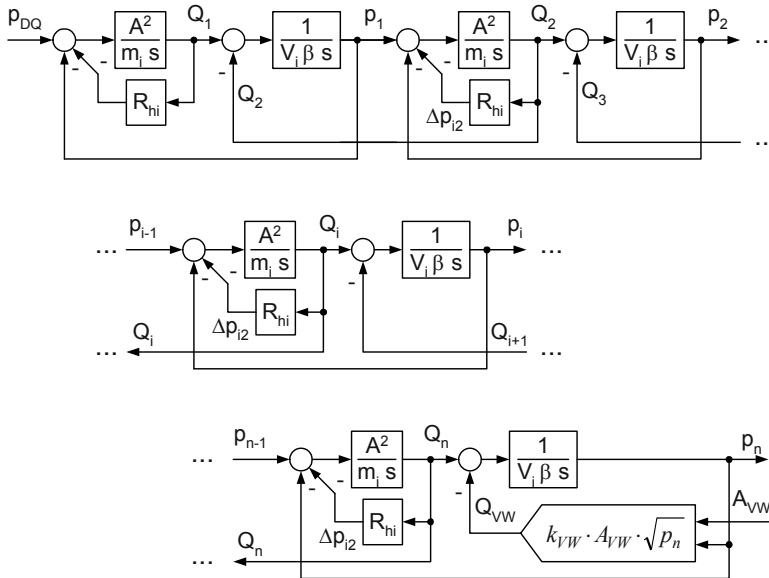


Abb. 7.7 Das Blockschaltbild der Hydraulikleitung zwischen zentraler Druckleitung und Ventil-schieber

7.2.2 Simulationsläufe

Es wird zuerst die Reaktion des Leitungsmodells auf das schnelle Schließen des Wegeventils berechnet, danach das Verhalten nach dem Öffnen des Ventils. Die Leitung ist in $n = 20$ Segmente aufgeteilt worden.

Folgende Parameter werden gewählt (in das Simulationsmodell gehen die mit den Dimensionen aus N , m und s ein):

- Geometrie:
 - Leitungslänge $L = 4 \text{ m}$ und damit $l_i = 0,2 \text{ m}$;
 - $A = 2 \text{ cm}^2 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$,
- Fluid:
 - Viskosität $\nu = 25 \text{ mm}^2/\text{s} = 25 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$,
 - Kompressibilität $\beta = 0,0008 \text{ mm}^2/\text{N} = 0,00008 \text{ bar}^{-1} = 8 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$,
 - Dichte $\rho = 0,9 \text{ kg/dm}^3 = 900 \text{ N s}^2/\text{m}^4$.

- Wegeventil und Druckquelle:

- Druckquellendruck für beide Vorgänge: $p_{DQ} = 100 \text{ bar} = 10^7 \text{ N/m}^2$,
- $k_{VW} = 0,05 \text{ m}^2/(\text{s} \sqrt{\text{N}})$ (s. Gl. (4.33 b)),
- Drosselquerschnitt bei geöffnetem Wegeventil $A_{VW} = 5 \text{ mm}^2 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$,
- Schließ- und Öffnungszeit des Wegeventils: $\Delta t = 1,5 \text{ ms} = 0,0015 \text{ s}$.

Es ergeben sich folgende Übertragungsfaktoren:

$$C_{hi} = V_i \cdot \beta = A \cdot l_i \cdot \beta = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 0,2 \text{ m} \cdot 8 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N} = 3,2 \cdot 10^{-14} \text{ m}^5/\text{N},$$

$$R_{hi} = 8\pi \cdot \frac{\nu \cdot \rho \cdot l_i}{A^2} = 8\pi \cdot \frac{25 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \cdot 900 \text{ N s}^2/\text{m}^4 \cdot 0,2 \text{ m}}{(2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2)^2} \approx 2,8 \cdot 10^6 \frac{\text{N s}}{\text{m}^5},$$

$$L_{hi} = \frac{m_i}{A^2} = \frac{l_i \cdot \rho}{A} = \frac{0,2 \text{ m} \cdot 900 \text{ N s}^2/\text{m}^4}{2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 9 \cdot 10^5 \cdot \frac{\text{N s}^2}{\text{m}^5}.$$

Die Anfangswerte der Integratoren sind

- die 20 Drücke $p_i(0) = 100 \text{ bar} = 10^7 \text{ N/m}^2$,
- die 20 Volumenströme
 - beim Abschaltvorgang: $Q_i(0) = 48 \text{ dm}^3/\text{min} = 48 \text{ l/min} = 0,0008 \text{ m}^3/\text{s}$,
 - beim Zuschaltvorgang: $Q_i(0) = 0$.

Ein Volumenstrom $Q = 0,0008 \text{ m}^3/\text{s}$ führt für $A = 0,0002 \text{ m}^2$ zu einer mittleren Strömungsgeschwindigkeit in der Leitung von 4 m/s . Die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit ist wesentlich höher, sie beträgt nach [7.3, 7.4, 7.7]

$$v_h = \frac{1}{\sqrt{\beta \cdot \rho}} = \frac{1}{\sqrt{8 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N} \cdot 900 \text{ N s}^2/\text{m}^4}} \approx 1180 \text{ m/s}. \quad (7.9)$$

Die Reflexionen an den Leitungsenden finden damit in Zeitabständen von

$$t_L = \frac{L}{v_h} = \frac{4 \text{ m}}{1180 \text{ m/s}} \approx 0,0034 \text{ s} = 3,4 \text{ ms}$$

statt. In Abb. 7.8 sind die Volumenströme und Drücke an den Leitungsenden und in der Leitungsmitte (Leitungsabschnitt 10) dargestellt. Die Volumenströme und Drücke ergeben sich während der Simulation in den Dimensionen m^3/s und N/m^2 , sie wurden außerhalb des Simulationsmodells in l/min und bar umgerechnet.

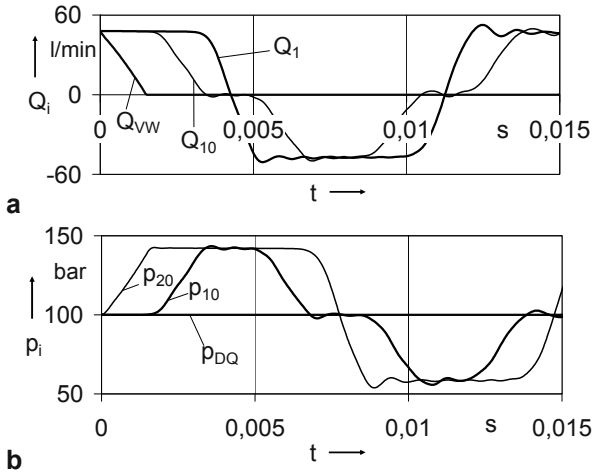


Abb. 7.8 Wanderwellen in einer Hydraulikleitung nach dem Schließen des Wegeventils. **a** Volumenstrom-Wellen Q_{10} und Q_1 sowie Wegeventil-Volumenstrom Q_{vw} **b** Druck-Wellen p_{10} und p_{20} sowie Druckquellendruck p_{DQ}

Die Verläufe der Volumenströme und Drücke sind denen in Abb. 7.3 sehr ähnlich. Die Amplitude der Oberwellen ist etwas kleiner, da der Strömungswiderstand R_{hi} einen etwas größeren Einfluss auf die Dämpfung hat als der ohmsche Widerstand in Abschn. 7.1.2.

In Abb. 7.9 ist das Verhalten der Leitung nach dem Zuschalten des Wegeventils vor dem Antrieb dargestellt.

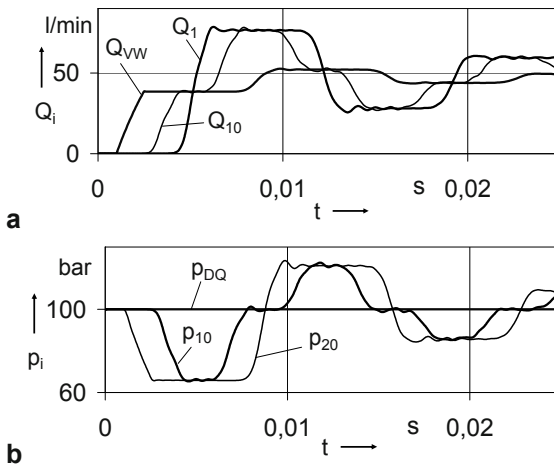


Abb. 7.9 Wanderwellen in einer Hydraulikleitung nach dem Öffnen des Wegeventils. **a** Volumenstrom-Wellen Q_{10} und Q_1 sowie Wegeventil-Volumenstrom Q_{vw} **b** Druck-Wellen p_{10} und p_{20} sowie Druckquellendruck p_{DQ}

Der stationäre Zustand baut sich ebenfalls schwingend auf. Die Druckwellenhöhen sind jedoch deutlich kleiner und die Dämpfung ist infolge des Wegeventilwiderstandes größer.

Die mit Hilfe der rechentechnischen Simulation ermittelten Druck-Wanderwellen sind oft Basis weiterer Berechnungen. In [7.3, 7.4, 7.7] ist dargestellt, wie die Druckwelle sich zu anderen Antrieben fortpflanzt. Diese Prozesse können mit Hilfe von aus der Elektrotechnik bekannten Zusammenhängen analysiert werden. Wesentliche Kenngrößen sind die Wellenwiderstände Z_{Wi} und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v_h . Gelangt z. B. eine Welle der Höhe Δp_E an eine Stelle, an der sich der Querschnitt ändert oder sich mehrere Leitungen treffen, ändert sich der Wellenwiderstand. Dann ändern sich auch die Wellenhöhen und zusätzlich entstehen weiterlaufende und zurücklaufende Wellen.

Darauf wird in diesem Buch nicht detailliert eingegangen.

7.3 Zusammenfassung

Die in den bisherigen Kapiteln ermittelten Bausteine und die verwendeten Werkzeuge sind geeignet, unverzweigte Leitungen, in denen Induktivitäten, Kapazitäten und Widerstände kontinuierlich verteilt sind, hinsichtlich auftretender Wanderwellen zu untersuchen. Dies gilt sowohl für elektrische als auch für Flüssigkeitsleitungen, die ebenfalls m. H. von Induktivitäten, Kapazitäten und (Strömungs-) Widerständen beschrieben werden können.

Das Kontinuum wird dadurch annähernd nachgebildet, dass die Leitungen in ausreichend viele Abschnitte unterteilt werden, welche dann mit konzentrierten Parametern beschrieben werden.

Systeme mit Kontinua, die über Flächen oder Volumina verteilt sind, sollten auf der Basis der Finite-Elemente-Methode m. H. spezieller Software analysiert werden. Die Finite-Elemente-Methode ist nicht Gegenstand dieses Buches.

8 Geregelte Systeme

In diesem Kapitel werden geregelte Systeme modelliert und simuliert. Dabei liegt der Schwerpunkt immer auf der Modellierung der Regelstrecken. Die verwendeten Reglermodelle werden angegeben und in die Simulationen eingebunden. Der Prozess ihrer Strukturierung und Dimensionierung ist nicht Gegenstand dieses Buches. Deshalb kommen meist relativ einfache Regler zum Einsatz.

Die meisten Regelungs-Beispiele sind Lageregelungen. Sie nehmen unter den Regelungen eine besondere Stellung ein:

- Die Regelstrecken von Lageregelungen besitzen meist integrales Verhalten, da die Ausgangsgrößen von Antrieben i. Allg. Geschwindigkeiten oder Winkelgeschwindigkeiten, die Regelgrößen aber Wege oder Winkel sind. Dies führt zu geringer Dämpfung des Regelkreises und zu erhöhter Neigung zur Instabilität.
- Die Regelungen sind oft mehrdimensional, weil es Positionen in der Ebene oder im Raum zu realisieren gilt.
- In speziellen Fällen gilt es, neben der Positionierung die Orientierung des Objekts in der Ebene oder im Raum zu gewährleisten.
- Oft sind Bahnen zu durchfahren, in denen die einzelnen Koordinaten bestimmten Zeitfunktionen genügen müssen.
- Die Mehrdimensionalität der Regelungen geht i. Allg. einher mit Mehrmassensystemen als Regelstrecken, deren Modelle Basis der Simulation des Regelkreisverhaltens sind.

In den behandelten Lageregelungen treten diese Eigenschaften zumindest teilweise auf.

8.1 Stehendes Pendel

In [8.8, 8.13] sind verschiedene Regelstrategien für ein stehendes Pendel beschrieben worden. Basis für die Reglerstrukturierung und –dimensionierung war ein mehrfach nichtlineares Modell höherer Ordnung der Regelstrecke, bestehend aus dem an einer motorbetriebenen Laufkatze befestigten Pendel. Prinzipbilder zeigt Abb. 8.1.

Zu Abb. 8.1 a: Das Pendel ist mit Hilfe von Kugellagern reibungsarm an die Laufkatze angelenkt. Mit Hilfe des Antriebs soll erreicht werden, dass der Winkel φ , den das Pendel zur Senkrechten einnimmt, immer dem Wert null zustrebt. Ein Winkelsensor ermittelt diesen Wert und gibt eine proportionale Spannung u_{ist} an den Regler, welcher diese mit dem Sollwert u_{soll} vergleicht. Bei einer Differenz

zwischen u_{soll} und u_{ist} wird im Regler eine Stellgröße u_{stell} gebildet, die dafür sorgt, dass der Antrieb die ermittelte Differenz wieder verringert.

Zu Abb. 8.1 b: Die zwei Teilsysteme Antrieb und Laufkatze-Pendel der Strecke gilt es zuerst zu modellieren, um eine Basis für die Reglerstrukturierung und –dimensionierung zu haben.

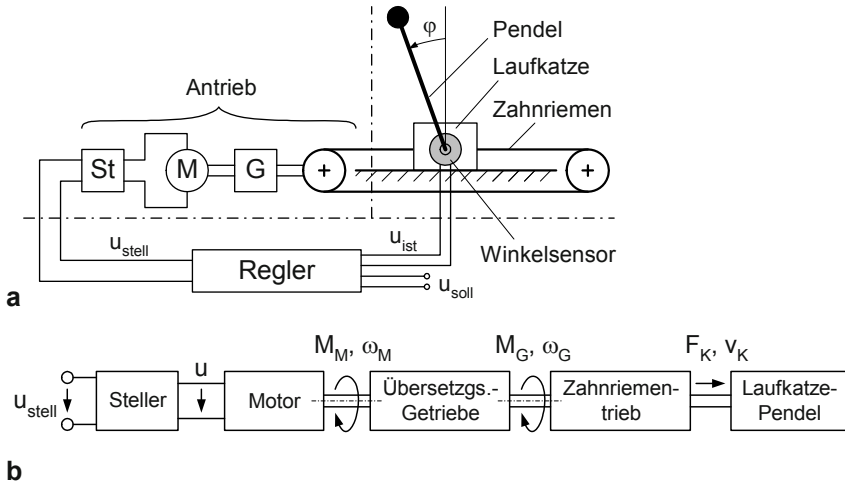


Abb. 8.1 Grobschemata des Gesamtsystems „Stehendes Pendel“. **a** die Regelung **b** die Strecke mit den Signalen zwischen den Komponenten. *St* Steller *M* Motor *G* Getriebe

8.1.1 Modell des Antriebs

Der Motor ist ein permanentmagneterregter Gleichstrommotor, wie er bereits in Abschn. 3.3 beschrieben worden ist. Es ist damit nicht notwendig, die fünf Modellierungsschritte detailliert zu gehen. Der Motor wird zum Antrieb ergänzt durch ein Zahnradgetriebe mit dem Übersetzungsverhältnis i , einen Zahnriementrieb sowie einen Steller. Die eigentlich massebehafteten Komponenten der Getriebe werden ohne eigene Energiespeicher beschrieben. Das ist möglich, wenn Nachgiebigkeiten der Wellen zwischen den Komponenten und des Zahnriemens vernachlässigt werden können. Dann werden die Trägheitseinflüsse des Motors und der Getriebe in Form einer Ersatzmasse m_{ers} der Masse der Laufkatze zugeschlagen. (Die Herangehensweise wurde in Abschn. 4.1.4.2 beschrieben. Die konkrete Berechnung erfolgt im Zusammenhang mit den Parameterermittlungen für die Simulation des Modellverhaltens.)

Im Sinne der Modellvereinfachung werden die Reibungseinflüsse der Getriebe denen des Motors zugeschlagen. Da das Motormodell aus Abschn. 3.3 übernom-

men werden kann, reicht das Schema in Abb. 8.1 b als Basis für die Ermittlung des Motormodells aus.

Folgende Übertragungsblöcke sind noch erforderlich (s. ebenfalls Abb. 8.1 b, vor allem hinsichtlich der Signalnamen):

- Modell des Stellers:

$$u = K_{St} \cdot u_{Stell} , \quad (8.1)$$

- Modell des Zahnradgetriebes:

$$M_G = i \cdot M_M \text{ und } \omega_M = i \cdot \omega_G , \quad (8.2)$$

- Modell des Zahnriementriebes (r_Z ist der Radius des Zahnriemenantriebsrades):

$$F_K = \frac{1}{r_Z} \cdot M_G \text{ und } \omega_G = \frac{1}{r_Z} \cdot v_K . \quad (8.3)$$

Es ergibt sich das Blockschaltbild des Antriebes in Abb. 8.2.

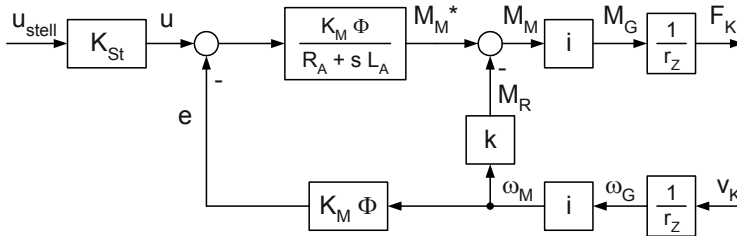


Abb. 8.2 Blockschaltbild des Antriebes

Im Übertragungsfaktor k für die geschwindigkeitsproportionale Reibung sind neben denen des Motors auch die Reibungseinflüsse des Zahnradgetriebes und des Zahnriementriebes enthalten.

8.1.2 Modell des Mehrmassensystems Laufkatze-Pendel

Der 1. Schritt:

Das Schema, das alle relevanten Parameter und Signale enthält, zeigt Abb. 8.3.

Die Eingangsgröße ist F_K , die Rückwirkungsgröße ist v_K (s. Abb. 8.2); die vor allem interessierende Ausgangsgröße, also die Regelgröße, ist der Winkel φ . (Hinweis: Die in Abschn. 8.1.1 genannte Ersatzmasse m_{ers} wird erst nach der Ermittlung des Modells des Mehrmassensystems der Masse der Laufkatze zugeschlagen.)

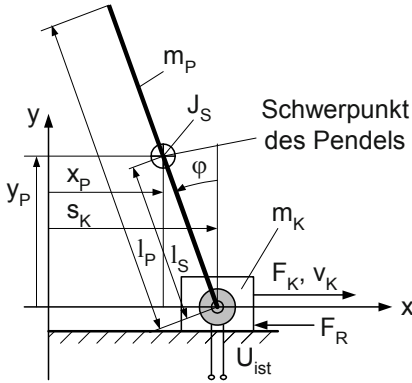


Abb. 8.3 Schema des Teilsystems Laufkatze-Pendel

Der 2. bis 4. Schritt:

Die gewohnte Herangehensweise versagt an einem solchen System, da mit der Beschleunigung der Masse der Laufkatze auch das Pendel mit beschleunigt wird.

In derartigen mehrgliedrigen mechanischen Systemen hat sich der sog. Lagrangesche Formalismus bewährt [8.4, 8.6, 8.10], der den 2. bis 4. Schritt in komplexer Form enthält. Ausgehend von der Lagrangeschen Funktion L für das System

$$L = E_{kin} - E_{pot} \quad (8.4)$$

(E_{kin} ... kinetische Energie, E_{pot} ... potenzielle Energie) werden für jede verallgemeinerte Koordinate q_i die in dieser Koordinate entstehenden Gleichgewichte der wirkenden Kräfte bzw. Momente P_{ij} wie folgt berechnet:

$$\sum_j P_{ij} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (8.5)$$

Die Summe der Kräfte bzw. Momente P_{ij} steht dabei für die von außen angreifenden Kräfte bzw. Momente; darauf wird noch eingegangen.

Das bedeutet, dass die benötigten Funktionen zunächst im Zeitbereich ermittelt werden. Bei der Ableitung nach der Zeit werden dabei die üblichen Kürzel verwendet, z. B.

$$\omega = d\varphi / dt \text{ und } v_K = \frac{ds_K}{dt}$$

(s. Abb. 8.3) oder auch allg.:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} \text{ und } \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}.$$

Die Anwendung des Lagrangeschen Formalismus auf das Teilsystem Laufkatze-Pendel führt zunächst zu den Energie-Funktionen:

- Potenzielle Energie

$$E_{pot} = m_P \cdot g \cdot l_S \cdot \cos \varphi. \quad (8.6)$$

- Kinetische Energie der Laufkatze

$$E_{kinK} = \frac{m_K}{2} \cdot v_K^2. \quad (8.7)$$

- Kinetische Energie des Pendels (J_S ... Trägheitsmoment des Pendels um den Schwerpunkt)

$$E_{kinP} = \frac{J_S}{2} \cdot \omega^2 + \frac{m_P}{2} \cdot v^2 \text{ mit } v^2 = \dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2.$$

Aus Abb. 8.3 ist abzulesen:

$$x_P = s_K - l_S \cdot \sin \varphi \text{ und } y_P = l_S \cdot \cos \varphi.$$

Das führt auf folgende Ableitungen:

$$\dot{x}_P = v_K - l_S \cdot \cos \varphi \cdot \omega \text{ und } \dot{y}_P = -l_S \cdot \sin \varphi \cdot \omega.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} v^2 &= (v_K - l_S \cdot \cos \varphi \cdot \omega)^2 + (-l_S \cdot \sin \varphi \cdot \omega)^2 \\ &= v_K^2 - 2 \cdot v_K \cdot l_S \cdot \cos \varphi \cdot \omega + l_S^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \omega^2 + l_S^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \omega^2 \end{aligned}$$

und wegen $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$

$$v^2 = v_K^2 - 2 \cdot v_K \cdot l_S \cdot \cos \varphi \cdot \omega + l_S^2 \cdot \omega^2.$$

Die kinetische Energie des Pendels ist damit

$$E_{kinP} = \frac{J_S}{2} \cdot \omega^2 + \frac{m_P}{2} \cdot \left(v_K^2 - 2 \cdot v_K \cdot l_S \cdot \cos \varphi \cdot \omega + l_S^2 \cdot \omega^2 \right). \quad (8.8)$$

Um für die Lagrangesche Funktion L , die jetzt die Form

$$\begin{aligned} L = E_{kin} - E_{pot} = \\ \underbrace{v_K^2 \cdot \left(\frac{m_K}{2} + \frac{m_P}{2} \right) + \omega^2 \cdot \left(\frac{J_S}{2} + \frac{m_P}{2} \cdot l_S^2 \right) - m_P \cdot v_K \cdot l_S \cdot \cos \varphi \cdot \omega}_{= E_{kin}} \\ - \underbrace{m_P \cdot g \cdot l_S \cdot \cos \varphi}_{= E_{pot}} \end{aligned} \quad (8.9)$$

hat, die Terme der rechten Seite von Gl. (8.5) berechnen zu können, müssen folgende partielle Ableitungen gebildet werden:

$$\frac{\partial L}{\partial \omega} = \omega \cdot \left(J_S + m_P \cdot l_S^2 \right) - m_P \cdot v_K \cdot l_S \cdot \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = m_P \cdot l_S \cdot \sin \varphi \cdot (v_K \cdot \omega + g),$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_K} = v_K \cdot (m_K + m_P) - m_P \cdot l_S \cdot \cos \varphi \cdot \omega,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_K} = 0.$$

Die zusätzliche Ableitung nach der Zeit ergibt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \omega} = \dot{\omega} \cdot \left(J_S + m_P \cdot l_S^2 \right) - m_P \cdot \dot{v}_K \cdot l_S \cdot \cos \varphi + m_P \cdot v_K \cdot l_S \cdot \sin \varphi \cdot \omega,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_K} = \dot{v}_K \cdot (m_K + m_P) - m_P \cdot l_S \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\omega} + m_P \cdot l_S \cdot \sin \varphi \cdot \omega^2.$$

Bevor diese Funktionen in Gl. (8.5) eingesetzt werden, wird noch ermittelt, welche äußeren Kräfte auf die Laufkatze und welche äußeren Momente auf das Pendel wirken.

Die äußeren Kräfte auf die Laufkatze sind die über den Zahnriemen (F_K) und die infolge der Reibung auf der Unterlage (F_R):

$$\sum F_j = F_K - F_R.$$

(Die Reibkraft F_R wird in diesem Teilsystem berücksichtigt, könnte aber, wie das spätere Gesamt-Blockschaltbild der Strecke zeigen wird, auch dem im Antrieb berücksichtigten Reibmoment zugeschlagen werden). Angesetzt wird eine geschwindigkeitsproportionale Reibkraft F_R

$$F_R = k_K \cdot v_K.$$

Ein äußeres Moment auf das Pendel entsteht nur infolge der Reibung im Lager des Pendels (M_R), da die Gewichtskraft $m_P \cdot g$ in der Lagrangeschen Funktion L berücksichtigt worden ist. Auch das Reibmoment wird geschwindigkeitsproportional angesetzt. Damit ist

$$\sum M_j = -M_R = -k_P \cdot \omega,$$

wobei auch hier das Vorzeichen (wie bei F_R) negativ anzusetzen ist.

- Aus Gl. (8.5) leitet sich für die Laufkatze die Funktion ab

$$\begin{aligned} \sum F_j &= F_K - k_K \cdot v_K \\ &= \dot{v}_K \cdot (m_K + m_P) - m_P \cdot l_S \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\omega} + m_P \cdot l_S \cdot \sin \varphi \cdot \omega^2 \end{aligned} \quad (8.10)$$

- und für das Pendel

$$\begin{aligned} \sum M_j &= -k_P \cdot \omega \\ &= \dot{\omega} \cdot (J_S + m_P \cdot l_S^2) - m_P \cdot \dot{v}_K \cdot l_S \cdot \cos \varphi + m_P \cdot v_K \cdot l_S \cdot \sin \varphi \cdot \omega \\ &\quad - m_P \cdot l_S \cdot \sin \varphi \cdot (v_K \cdot \omega + g) \\ &= \dot{\omega} \cdot (J_S + m_P \cdot l_S^2) - m_P \cdot \dot{v}_K \cdot l_S \cdot \cos \varphi - m_P \cdot g \cdot l_S \cdot \sin \varphi. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Der 5. Schritt:

Werden die beiden Funktionen nach den jeweiligen Beschleunigungen $\dot{v}_K$ bzw. $\dot{\omega}$ aufgelöst, ist ein zwar mehrfach nichtlineares, aber in seiner Struktur bekanntes Blockschaltbild daraus zu entwickeln (s. Blockschaltbilder von mechanischen Systemen z. B. in Kap. 4). Die Differenzialgleichungen lauten

- Masse der Laufkatze $m_K = 0,5 \text{ kg}$,
 - Erdbeschleunigung $g \approx 10 \text{ m/s}^2$,
 - Reibfaktor des Pendellagers $k_P = 10^{-3} \text{ Nm} \cdot \text{s}$,
 - Reibfaktor der Lagerung der Laufkatze $k_K = 1 \text{ N} \cdot \text{s/m}$.
- Simulationsparameter:
 - Das System befindet sich im Arbeitspunkt (alle Ausgangssignale der Integratoren sind null).
 - Auf die Laufkatze wird nach einer Sekunde ein Kraft-Impuls gegeben (Höhe 1 N , Breite $0,2 \text{ s}$).

Abb. 8.5 zeigt die Verläufe von $s_K(t)$, $\varphi(t)$ und der Rückwirkungskraft $F_{PK}(t)$.

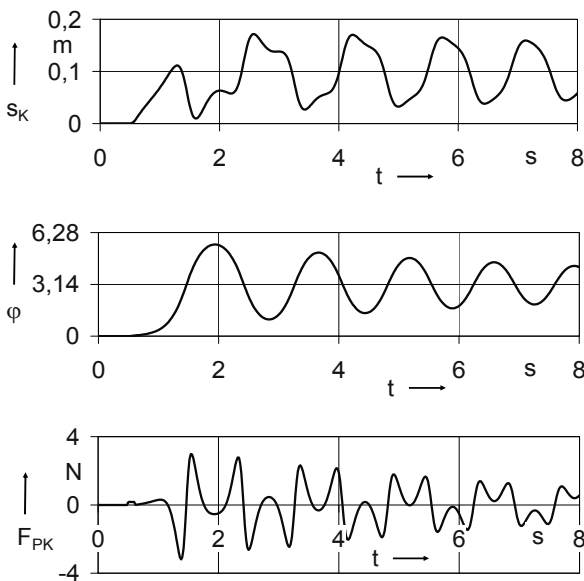


Abb. 8.5 Zeitverläufe der Signale $s_K(t)$, $\varphi(t)$ und $F_{PK}(t)$ im nicht mit dem Antrieb verbundenen Teilsystem Laufkatze-Pendel

Es können folgende Aussagen getroffen werden:

- Die gewählte Simulations-Schrittweite von $0,2 \text{ ms}$ ist um Größenordnungen kleiner als die sich einstellende kleinste Periodendauer der Signale, so dass das eingefügte Laufzeitglied die Ergebnisse nicht verfälscht.
- Der unmittelbar nach Wirksamwerden des Kraftimpulses entstehende Verlauf der Signale $s_K(t)$ und $\varphi(t)$ ist an Hand der Abb. 8.3 leicht nachzuvollziehen:
 - Die Laufkatze wird mit dem unteren Pendelende gering nach rechts beschleunigt.

- Damit gerät das Pendel aus seinem labilen Gleichgewicht und bewegt sich in mathematisch positiver Richtung nach unten. Dabei stützt es sich an der Laufkatze ab und beschleunigt sie noch weiter nach rechts.
 - Das Pendel schwingt sich um den Winkel $\varphi = \pi$ ein.
 - Die während dieses Schwingvorganges des Pendels entstehenden Rückwirkungskräfte F_{PK} führen zum Schwingen auch der Laufkatze.
 - Die Schnelligkeit der Abnahme beider Schwingungsamplituden mit der Zeit ist von den Reibungsverlusten sowohl der Laufkatze als auch des Pendels abhängig.
- Die Periodendauer der Grundswingungen entspricht den Ergebnissen in [8.8, 8.13]. Mit dem in diesem Abschnitt gefundenen Modell kann somit weitergearbeitet werden.

8.1.3 Das Modell des Wirkungskreises Antrieb-Laufkatze

Die Laufkatze besitzt eine Rückwirkung auf den Antrieb (s. Abb. 8.2 und Abb. 8.4), es besteht ein Wirkungskreis mit den Signalen F_K und v_K . Das Zusammenwirken von Antrieb und Laufkatze ist in Abb. 8.6 dargestellt. Die in Abschn. 8.1.1 beschriebene Ersatzmasse des Antriebs m_{ers} ist nunmehr den Massen von Laufkatze m_K und Pendel m_P zugeschlagen worden.

Das Blockschaltbild in Abb. 8.6 besteht aus linearen Blöcken und kann mit Hilfe der Kreisformel in eine Gesamtfunktion überführt werden:

$$v_K = G_1(s) \cdot u_{Stell} + G_2(s) \cdot F_{PK}.$$

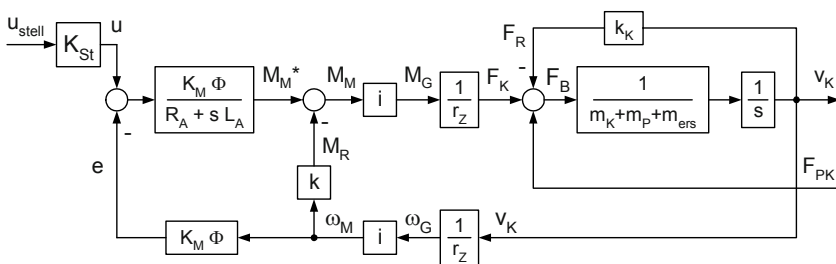


Abb. 8.6 Blockschaltbild des Wirkungskreises Antrieb-Laufkatze

Es kann angenommen werden, dass die Reibungsverluste im Antrieb vernachlässigbar gegenüber den Reibverlusten der Laufkatze (k_K) und den Verlusten im Ankerwiderstand R_A sind. Der Faktor der Antriebsreibung wird null gesetzt ($k = 0$), damit vereinfacht sich das Blockschaltbild.

Wenn zusätzlich der kleine Wirkungskreis in Abb. 8.6 aufgelöst wird, entsteht eine Struktur wie in Abb. 3.12. Damit kann der Ansatz für die Gesamtfunktion des Wirkungskreises Antrieb-Laufkatze m. H. der Kreisformel hingeschrieben werden:

Mit $m^* = m_K + m_P + m_{ers}$ entsteht über

$$\frac{v_K}{F_K + F_{PK}} = \frac{\frac{1}{m^* \cdot s}}{1 + \frac{1}{m^* \cdot s} \cdot k_K} = \frac{1}{m^* \cdot s + k_K} \quad (8.14)$$

der Ansatz für die Gesamtfunktion

$$\begin{aligned} v_K = & \frac{K_{St} \cdot \frac{K_M \cdot \Phi}{R_A + L_A \cdot s} \cdot \frac{i}{r_Z} \cdot \frac{1}{m^* \cdot s + k_K}}{1 + \frac{1}{m^* \cdot s + k_K} \cdot \left(\frac{i}{r_Z}\right)^2 \cdot \frac{(K_M \cdot \Phi)^2}{R_A + L_A \cdot s}} \cdot u_{stell} \\ & + \frac{\frac{1}{m^* \cdot s + k_K}}{1 + \frac{1}{m^* \cdot s + k_K} \cdot \left(\frac{i}{r_Z}\right)^2 \cdot \frac{(K_M \cdot \Phi)^2}{R_A + L_A \cdot s}} \cdot F_{PK} \end{aligned} \quad (8.15)$$

Die Normalform lautet (nach Beseitigen der Doppelbrüche, Ausmultiplizieren und Sortieren):

$$\begin{aligned} v_K = & G_1(s) \cdot u_{stell} + G_2(s) \cdot F_{PK} = \\ & K_{An} \cdot \frac{1}{1 + 2D_{An}T_{An} \cdot s + T_{An}^2 \cdot s^2} \cdot u_{stell} + K_{Rück} \cdot \frac{1 + T_A \cdot s}{1 + 2D_{An}T_{An} \cdot s + T_{An}^2 \cdot s^2} \cdot F_{PK} \end{aligned} \quad (8.16 \text{ a})$$

mit

$$K_{An} = \frac{K_{St} \cdot K_M \cdot \Phi \cdot \frac{i}{r_Z}}{\left(\frac{i}{r_Z}\right)^2 \cdot (K_M \cdot \Phi)^2 + k_K \cdot R_A}, \quad T_{An}^2 = \frac{m^* \cdot L_A}{\left(\frac{i}{r_Z}\right)^2 \cdot (K_M \cdot \Phi)^2 + k_K \cdot R_A}, \quad (8.16 \text{ b})$$

$$2D_{An}T_{An} = \frac{m^* \cdot R_A + k_K \cdot L_A}{\left(\frac{i}{r_Z}\right)^2 \cdot (K_M \cdot \Phi)^2 + k_K \cdot R_A}, \quad (8.16 \text{ c})$$

$$K_{Rück} = \frac{R_A}{\left(\frac{i}{r_Z}\right)^2 \cdot (K_M \cdot \Phi)^2 + k_K \cdot R_A}, \quad T_A = \frac{L_A}{R_A}. \quad (8.16 d)$$

8.1.4 Das Modell des Regelkreises

Die Regelstrecke hat nunmehr zwischen u_{stell} und φ das in Abb. 8.7 dargestellte Aussehen (die weiteren Komponenten des Regelkreises werden im Folgenden beschrieben).

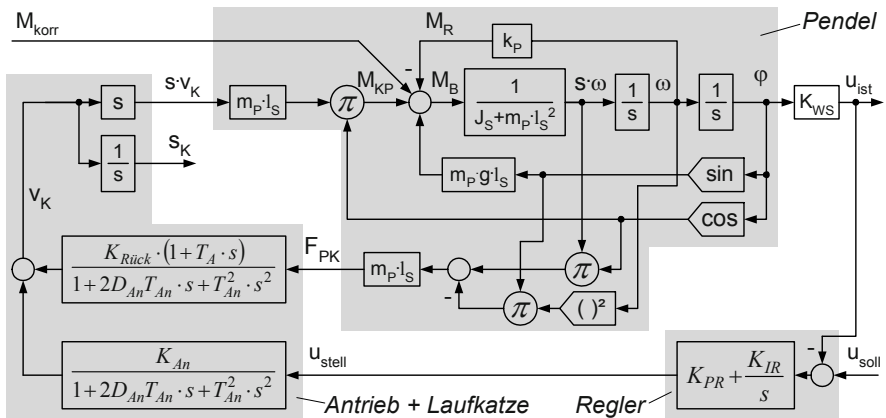


Abb. 8.7 Blockschaltbild der Regelkreises

Es muss beachtet werden, dass die Eingangsgröße des Pendelmodells die Beschleunigung $s \cdot v_K$ ist, die Geschwindigkeit v_K ist noch mit dem Differential-Operator s zu multiplizieren.

Anmerkung: Wenn die Strecke zwischen u_{stell} und φ jetzt ähnlich wie in Abschn. 8.1.2 simuliert und mit einem kleinen Eingangs-Impuls von u_{stell} angeregt wird, dann entstehen für φ und F_{PK} ähnliche Kurven wie in Abb. 8.5. Die Amplituden von s_K sind aber um zwei Größenordnungen kleiner, da der Motor mitbewegt wird. Damit sind die in der Laufkatze entstehenden Verluste kleiner und die Schwingung von φ ist schwächer gedämpft.

Die Strecke ist gemäß Abb. 8.1 noch zu komplettieren, da die vom Regler benutzte Eingangsgröße die Ausgangsgröße des Winkelsensors u_{ist} ist. Der Winkelsensor liefert für $\varphi = \pm \pi$ eine Ausgangsspannung von $\pm u_{ist0}$ und folgt damit der Funktion

$$u_{ist} = K_{WS} \cdot \varphi = \frac{u_{ist0}}{\pi} \cdot \varphi . \quad (8.17 \text{ a})$$

In diesem Beispiel-System wird nur der Winkel φ geregelt. Der Regler befindet sich zwischen u_{ist} und u_{stell} (s. Abb. 8.1 oben). In [8.8] wurde er als Fuzzy-Regler realisiert, in [8.13] als PI-Regler. Der PI-Regler ist im Gesamt-Blockschaltbild der Regelung in Abb. 8.7 dargestellt. Sein Modell lautet

$$u_{stell} = \left(K_{PR} + \frac{K_{IR}}{s} \right) \cdot (u_{soll} - u_{ist}) \quad (8.17 \text{ b})$$

(K_{PR} ... Proportionalanteil, K_{IR} ... integrierender Anteil).

Da die Position der Laufkatze nicht geregelt wird, ist die Gefahr des Driftens der Laufkatze gegeben. Dies wird mit einem externen Korrekturmoment auf das Pendel M_{korr} kompensiert (s. Abschn. 8.1.5).

8.1.5 Die Simulation des Regelkreisverhaltens

Zu den Parametern in Abschn. 8.1.2 kommen die folgenden Parameter der weiteren Komponenten der Regelung hinzu.

Aus [8.8] wurden für einen 125-W-Antrieb folgende Werte übernommen:

- vom Motor:
 - Drehmomentkonstante $K_M \cdot \Phi = 0,12 \text{ Vs} = 0,12 \text{ Nm/A}$,
 - Ankerwiderstand $R_A = 1,7 \text{ }\Omega = 1,7 \text{ V/A}$,
 - Ankerinduktivität $L_A = 5 \text{ mH} = 5 \text{ V.ms/A}$,
- von Steller, Getriebe und Laufkatze:
 - Übertragungsfaktor des Stellers $K_{St} = 5 \text{ V/V}$,
 - Übersetzungsverhältnis $i = 3$,
 - Übertragungsfaktor des Zahnriementriebes $1/r_Z = 0,05 \text{ mm}^{-1} = 50/\text{m}$ (r_Z ... Treibradradius),
 - Ersatzmasse $m_{ers} = 1,9 \text{ kg}$,
 - Gesamtmasse $m^* = m_K + m_P + m_{ers} = 0,5 + 0,13 + 1,9 \approx 2,5 \text{ kg}$.

Die Parameter der Übertragungsfunktionen $G_1(s)$ und $G_2(s)$ ermitteln sich aus den Gln. (8.16 a) bis (8.16 d).

- Die Eigenzeitkonstante T_{An} ergibt sich über

$$T_{An}^2 = \frac{m^* \cdot L_A}{\left(\frac{i}{r_Z}\right)^2 \cdot (K_M \cdot \Phi)^2 + k_K \cdot R_A} = \frac{2,5 \text{ kg} \cdot \frac{1 \text{ N s}^2}{1 \text{ kg m}} \cdot 0,005 \frac{\text{V s}}{\text{A}}}{\left(\frac{150}{\text{m}}\right)^2 \cdot (0,12 \text{ Vs})^2 \cdot \frac{1 \text{ Nm}}{1 \text{ VA} \cdot \text{s}} + 1 \text{ N s/m} \cdot 1,7 \text{ V/A}}$$

$$= \frac{0,0125}{324 + 1,7} \text{ s}^2 = 3,84 \cdot 10^{-5} \text{ s}^2$$

$$\text{zu } T_{An} = 6,2 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 6,2 \text{ ms.}$$

- Die Dämpfung D_{An} ergibt sich über

$$2D_{An}T_{An} = \frac{m^* \cdot R_A + k_K \cdot L_A}{\left(\frac{i}{r_Z}\right)^2 \cdot (K_M \cdot \Phi)^2 + k_K \cdot R_A}$$

$$= \frac{2,5 \text{ kg} \cdot \frac{1 \text{ N s}^2}{1 \text{ kg m}} \cdot 1,7 \text{ V/A} + 1 \text{ N s/m} \cdot 0,005 \frac{\text{V s}}{\text{A}}}{\left(\left(\frac{150}{\text{m}}\right)^2 \cdot (0,12 \text{ Vs})^2 \cdot \frac{1 \text{ Nm}}{1 \text{ VA} \cdot \text{s}} + 1 \text{ N s/m} \cdot 1,7 \text{ V/A}\right)} = \frac{4,255}{324 + 1,7} \text{ s} = 0,013 \text{ s} = 13 \text{ ms}$$

$$\text{zu } D_{An} = \frac{2D_{An}T_{An}}{2T_{An}} = \frac{13 \text{ ms}}{2 \cdot 6,2 \text{ ms}} = 1,05.$$

- Der Antriebs-Übertragungsfaktor K_{An} ist

$$K_{An} = \frac{K_{St} \cdot K_M \cdot \Phi \cdot \frac{i}{r_Z}}{\left(\frac{i}{r_Z}\right)^2 \cdot (K_M \cdot \Phi)^2 + k_K \cdot R_A}$$

$$= \frac{5 \cdot \frac{150}{\text{m}} \cdot 0,12 \text{ Vs}}{\left(\left(\frac{150}{\text{m}}\right)^2 \cdot (0,12 \text{ Vs})^2 + 1 \text{ N s/m} \cdot 1,7 \text{ V/A} \cdot \frac{1 \text{ VA s}}{1 \text{ Nm}}\right)} = \frac{90 \text{ V s/m}}{325,7 (\text{V s/m})^2} = 0,28 \frac{\text{m/s}}{\text{V}}.$$

- Der Übertragungsfaktor der Pendel-Rückwirkung $K_{Rück}$ ist

$$\begin{aligned}
 K_{Rück} &= \frac{R_A}{\left(\frac{i}{r_Z}\right)^2 \cdot (K_M \cdot \Phi)^2 + k_K \cdot R_A} \\
 &= \frac{1,7 \text{ V/A}}{\left(\left(\frac{150}{m}\right)^2 \cdot (0,12 \text{ Vs})^2 \cdot \frac{1 \text{ Nm}}{1 \text{ VA s}} + 1 \text{ N s/m} \cdot 1,7 \text{ V/A}\right)} \\
 &= \frac{1,7 \text{ V/A}}{325,7 \text{ (V/A)} \cdot \text{N s/m}} = 5,2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m/s}}{\text{N}}
 \end{aligned}$$

- und die Ankerzeitkonstante T_A beträgt

$$T_A = \frac{L_A}{R_A} = \frac{5 \text{ V} \cdot \text{ms/A}}{1,7 \text{ V/A}} \approx 3 \text{ ms}.$$

Der Winkelsensor liefert die Grenz-Ausgangsspannung $u_{ist0} = 5 \text{ V}$. Damit ist (s. Gl. (8.17 a))

$$K_{WS} = 1,59 \text{ V}.$$

Die Abschätzung günstiger Regler-Parameter auf der Basis eines linearen Grobmodells der Strecke wird nicht näher beschrieben. Verwendet wurden die Werte

$$K_{PR} = 50 \text{ und } K_{IR} = 5 \text{ s}^{-1}.$$

Um das Verhalten der Regelung bei der Simulation sofort zu sehen, wurde ein Anfangszustand hergestellt, der mit dem Einschalten der Regelung eine Regelwirkung erzwingt. Der gewählte Anfangswert des Winkels ist

$$\varphi(t=0) = -15^\circ = -0,262.$$

Abb. 8.8 zeigt den Übergangsvorgang der Regelgröße φ und der Zwischensignale s_K und M_{kor} .

In Abb. 8.3 ist zu erkennen, dass die Laufkatze sofort nach rechts beschleunigt werden muss, um mit dem Pendellager senkrecht unter den Pendelschwerpunkt zu gelangen. Dieser Vorgang vollzieht sich in der ersten Zehntelsekunde (s. Abb. 8.8).

Der weitere Verlauf zeigt, dass trotz des integralen Anteils im Regler ein bleibender Regelfehler entsteht (s. $\varphi(t)$ in Abb. 8.8). Ursache ist, dass sich die Laufkatze weiterbewegt. Ihre Position s_K wird hier nicht in einer überlagerten Regelung zurückgeführt.

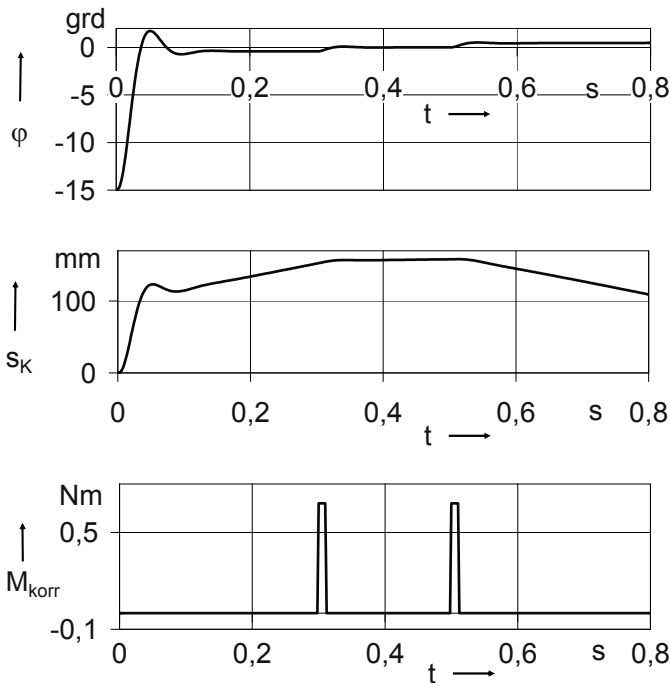


Abb. 8.8 Zeitverläufe der Signale φ , s_K , und M_{korr} während des Regelungsprozesses

Dieses Verhalten zeigt auch das Funktionsmodell in [8.13]. Die Bewegung der Laufkatze wird in praxi mit kleinen manuellen Kraftimpulsen auf das Pendel beeinflusst. Diese führen zu einem Korrekturmoment M_{korr} , das auch im Modell berücksichtigt worden ist (s. $M_{korr}(t)$ in Abb. 8.8).

Um sowohl den Winkel φ als auch die Position s_K der Laufkatze zu regeln, ist eine komplexere Regelungsstruktur erforderlich, z. B. eine Zustandsregelung. Das gefundene Streckenmodell wäre auch hier die Basis des Reglerentwurfs.

8.2 Lage geregelter elektrohydraulischer Antrieb mit Vierkantensteuerung

In Abb. 8.9 ist der Funktionsschaltplan eines lagegeregelten elektrohydraulischen Antriebs in konventioneller Struktur nach [8.11] abgebildet, ergänzt durch allgemeine Informationen zu Wegmessung, Regelung und Steuerung.

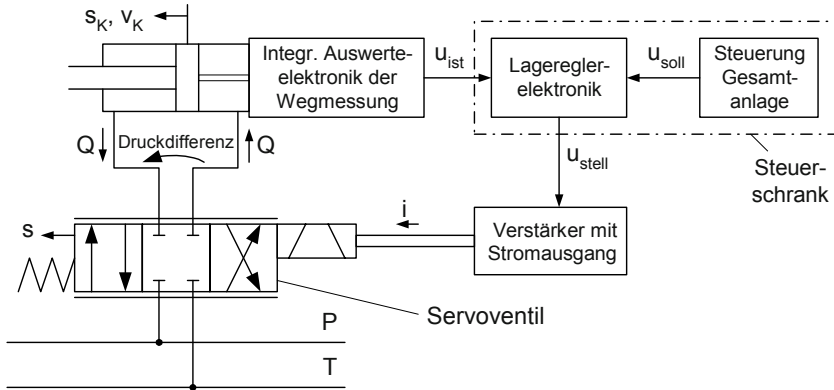


Abb. 8.9 Funktionsschaltplan eines lagegeregelten elektrohydraulischen Antriebs in konventioneller Struktur

Im Folgenden wird ein detailliertes Modell der Regelstrecke, die aus dem Servoventil und dem Arbeitszylinder besteht, zwischen den Signalen Strom i und Weg s_K erarbeitet. Dieses Modell wird danach mit einem relativ einfachen Modell der übrigen Komponenten des Regelkreises einschließlich des Lagereglers zum Gesamtmodell verbunden.

8.2.1 Modell der Regelstrecke

Der 1. Schritt:

Das Schema der Regelstrecke wird in zwei Detaillierungsstufen dargestellt (Abb. 8.10). Der Arbeitszylinder wird in der Weise wie in Abschn. 4.3 modelliert. Die Steuerspalte der Servoventil-Hauptsteuerstufe werden detailliert beschrieben, um die Auswirkungen der unterschiedlich großen Kolbenflächen A_1 und A_2 auf die Drücke p_1 und p_2 zeigen zu können.

Die Vorsteuerstufe enthält ein Magnetsystem (Torquemotor) und eine Brückenschaltung hydraulischer Strömungswiderstände. Im Torquemotor befindet sich ein von zwei Spulen umwickelter Weicheisenkern in einem von Dauermagneten gebildeten Magnetfeld. Werden die Spulen von einem Gleichstrom i durchflossen, wird die mit dem Weicheisenkern starr verbundene Prallplatte ausgelenkt und die Brückenschaltung aus Konstantdrosselventilen und Doppeldüse-Prallplatte verstimmt.

Diese Verstimmung der hydraulischen Brückenschaltung führt dazu, dass der als Verbraucher fungierende Steuerschieber verschoben wird und seine vier Steuerspalte (s. Abb. 8.10 b) entsprechend verändert.

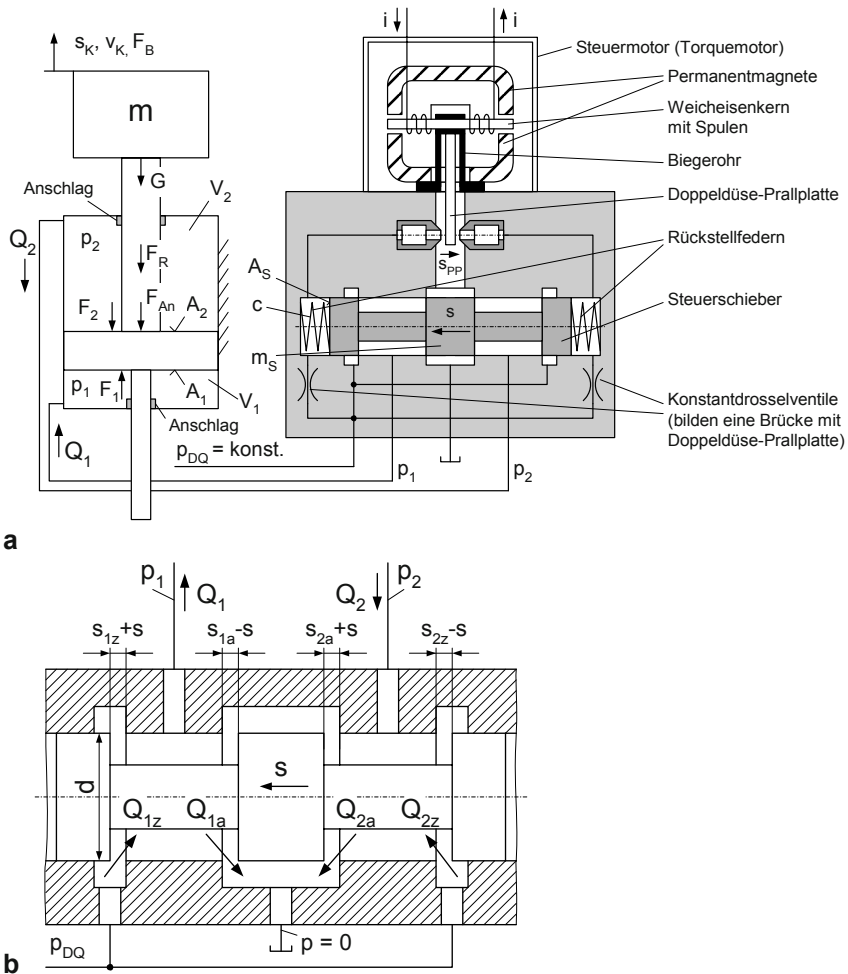


Abb. 8.10 Schema der Regelstrecke eines lagegeregelten elektrohydraulischen Antriebs. **a** Gesamtstrecke **b** die Servoventil-Hauptsteuerstufe Steuerschieber mit Bohrung und Ringnuten

In [8.11] ist ausführlich hergeleitet, wie die im Vorsteuersystem entstehende Druckdifferenz zur Verschiebung s des Steuerschiebers führt. Das Federmasse-System Steuerschieber/Rückstellfedern (mit der Masse m_s und den Federkonstanten c) und die Massen, Federwirkungen und Induktivitäten der elektromechanischen Eingangsstufe führen zu einem System höherer Ordnung. Da die Verzögerungseinflüsse jedoch im Vergleich zu denen des Arbeitszylinders in Verbindung mit der Hauptsteuerstufe klein sind, können sie vernachlässigt werden, so dass ein statischer Übertragungsfaktor das Verhalten der Vorsteuerstufe in ausreichendem Maße beschreibt.

Der 2. und 3. Schritt:

Damit reduzieren sich die bei der Modellierung zu berücksichtigenden Energiespeicher des Systems auf die Masse m und die beiden sich mit dem Weg s_K ändernden Volumina V_1 und V_2 . Die Teilmodelle des 2. und 3. Schrittes können aus Abb. 4.31 und Abb. 4.33 b entnommen werden und müssen nur geringfügig modifiziert werden (s. Abb. 8.11). Auch hier wird die Abhängigkeit der Größe der Volumina von der Kolbenposition s_K berücksichtigt. Die Anschlagkraft F_{An} entsteht, wenn die Anschläge in Abb. 8.10 a vom Arbeitskolben erreicht werden.

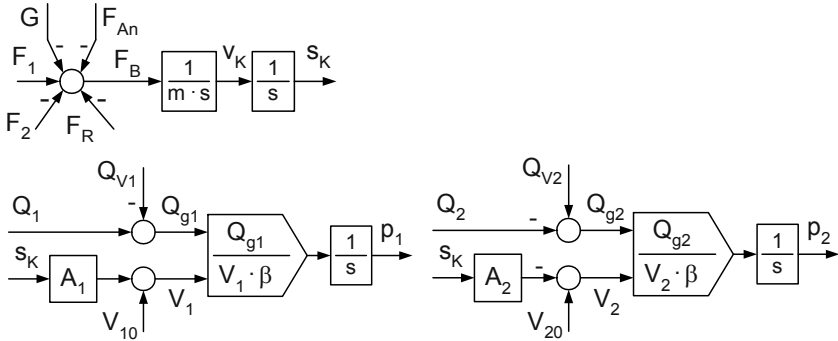


Abb. 8.11 Lagegeregelter elektrohydraulischer Antrieb, Blockschaltbilder des 2. und 3. Schrittes der Modellierung

Der 4. Schritt:

Als summarisches Verhalten der *Vorsteuerstufe* wird näherungsweise angesetzt:

$$s = K_{VS} \cdot i. \quad (8.18)$$

Arbeitszylinder.

Die Volumenstrombilanz im Volumen V_1 enthält die Volumenströme Q_1 und Q_{V1} . Der Verschiebe-Volumenstrom Q_{V1} ist analog Gl. (3.22)

$$Q_{V1} = A_1 \cdot v_K. \quad (8.19 a)$$

Entsprechend gilt im Volumen V_2

$$Q_{V2} = A_2 \cdot v_K. \quad (8.19 b)$$

Die Druckkraft-Funktionen und die Reibkraftfunktion (gewählter Ansatz: geschwindigkeitsproportionale Reibkraft) werden ebenfalls aus Abschn. 3.4.1 übernommen:

$$F_1 = A_1 \cdot p_1, \quad F_2 = A_2 \cdot p_2, \quad F_R = k \cdot v_K. \quad (8.20)$$

Das Modell der Anschlagkraft F_{An} ist aus Abb. 4.34 übernommen worden, die Positionen, in denen die Anschläge wirksam werden, sind s_{K1} und $-s_{K2}$.

Die weiteren Zusammenhänge führen auf ähnliche nichtlineare Funktionen wie in Abschn. 4.3.1. Die dort gegebenen Erläuterungen zur Kavitation und zu Drosselstellen werden auf die folgenden Beziehungen angewendet.

In den Zylindern und Leitungen kann Kavitation auftreten, vor allem während Übergangsvorgängen. Damit gilt für die beiden Drücke p_1 und p_2

$$p_1 = \begin{cases} p_1^* & \text{für } p_1^* \geq 0 \\ 0 & \text{für } p_1^* < 0 \end{cases}, \quad (8.21 \text{ a})$$

$$p_2 = \begin{cases} p_2^* & \text{für } p_2^* \geq 0 \\ 0 & \text{für } p_2^* < 0 \end{cases}. \quad (8.21 \text{ b})$$

Hauptsteuerstufe.

Die vier Drosselstellen in der Ventil-Hauptsteuerstufe besitzen abrupte Querschnittsänderungen, die zu turbulenter Strömung führen. Ihr Verhalten wird in der Form der Gln. (4.33 a) und (4.33 b) beschrieben. Dass sowohl Druckabfall als auch Spaltquerschnitt Einfluss auf den Volumenstrom haben, ist typisch für alle derartigen Steuerprinzipien.

Unter Vernachlässigung von Radialspiel und Kantenrundung sind die Drosselflächen die Mantelflächen eines Zylinders mit dem Durchmesser d . Es ist unbedingt zu beachten, dass die Drosselquerschnitte keine negativen Werte annehmen können. Die Ansätze sind

$$A_{1z} = \begin{cases} d \cdot \pi \cdot (s_{1z} + s) & \text{für } s > -s_{1z} \\ 0 & \text{für } s \leq -s_{1z} \end{cases}, \quad (8.22 \text{ a})$$

$$A_{1a} = \begin{cases} d \cdot \pi \cdot (s_{1a} - s) & \text{für } s < s_{1a} \\ 0 & \text{für } s \geq s_{1a} \end{cases}, \quad (8.22 \text{ b})$$

$$A_{2a} = \begin{cases} d \cdot \pi \cdot (s_{2a} + s) & \text{für } s > -s_{2a} \\ 0 & \text{für } s \leq -s_{2a} \end{cases}, \quad (8.22 \text{ c})$$

$$A_{2z} = \begin{cases} d \cdot \pi \cdot (s_{2z} - s) & \text{für } s < s_{2z} \\ 0 & \text{für } s \geq s_{2z} \end{cases}. \quad (8.22 \text{ d})$$

Die Berechnung der Abhängigkeiten in diesen Steuerspalten ergibt nach Gl. (4.33 a):

$$Q_{1z} = k_{Dr} \cdot A_{1z} \cdot \sqrt{|p_{DQ} - p_1|} \cdot \text{sign}(p_{DQ} - p_1), \quad (8.23 \text{ a})$$

$$Q_{1a} = k_{Dr} \cdot A_{1a} \cdot \sqrt{p_1}, \quad (8.23 \text{ b})$$

$$Q_{2a} = k_{Dr} \cdot A_{2a} \cdot \sqrt{p_2}, \quad (8.23 \text{ c})$$

$$Q_{2z} = k_{Dr} \cdot A_{2z} \cdot \sqrt{|p_{DQ} - p_2|} \cdot \text{sign}(p_{DQ} - p_2), \quad (8.23 \text{ d})$$

$$Q_1 = Q_{1z} - Q_{1a}, \quad (8.24 \text{ a})$$

$$Q_2 = Q_{2a} - Q_{2z}. \quad (8.24 \text{ b})$$

Der 5. Schritt:

Es ergibt sich das Blockschaltbild der Regelstrecke in Abb. 8.12 a.

8.2.2 Wegsensor, Regler, Verstärker

Der Regelkreis wird gemäß Abb. 8.9 über Wegsensor, Regler und Verstärker geschlossen. Das Blockschaltbild dieses Teiles der Regelung ist in Abb. 8.12 b dargestellt. Es sollen in ausreichender Näherung folgende Funktionen gelten:

- für den Wegsensor

$$u_{ist} = K_{WS} \cdot s_K, \quad (8.25)$$

- für den Verstärker mit Stromausgang

$$i = \begin{cases} -20 \text{ mA} & \text{für } u_{stell} < -10 \text{ V} \\ K_V \cdot u_{stell} & \text{für } -10 \text{ V} < u_{stell} < +10 \text{ V} \\ +20 \text{ mA} & \text{für } u_{stell} > +10 \text{ V} \end{cases} \quad (8.26)$$

Die Strombegrenzung im Verstärker schützt die Vorsteuerstufe des Servoventils vor Überlastung.

Als Regler wird ein P-Regler mit Verzögerung 1. Ordnung eingesetzt. Diese Reglervariante ist in diesen meist sehr schwach gedämpften Antrieben stark verbreitet [8.11, 8.12]. In modernen Anlagen wird er oft durch Zustandsregler ersetzt.

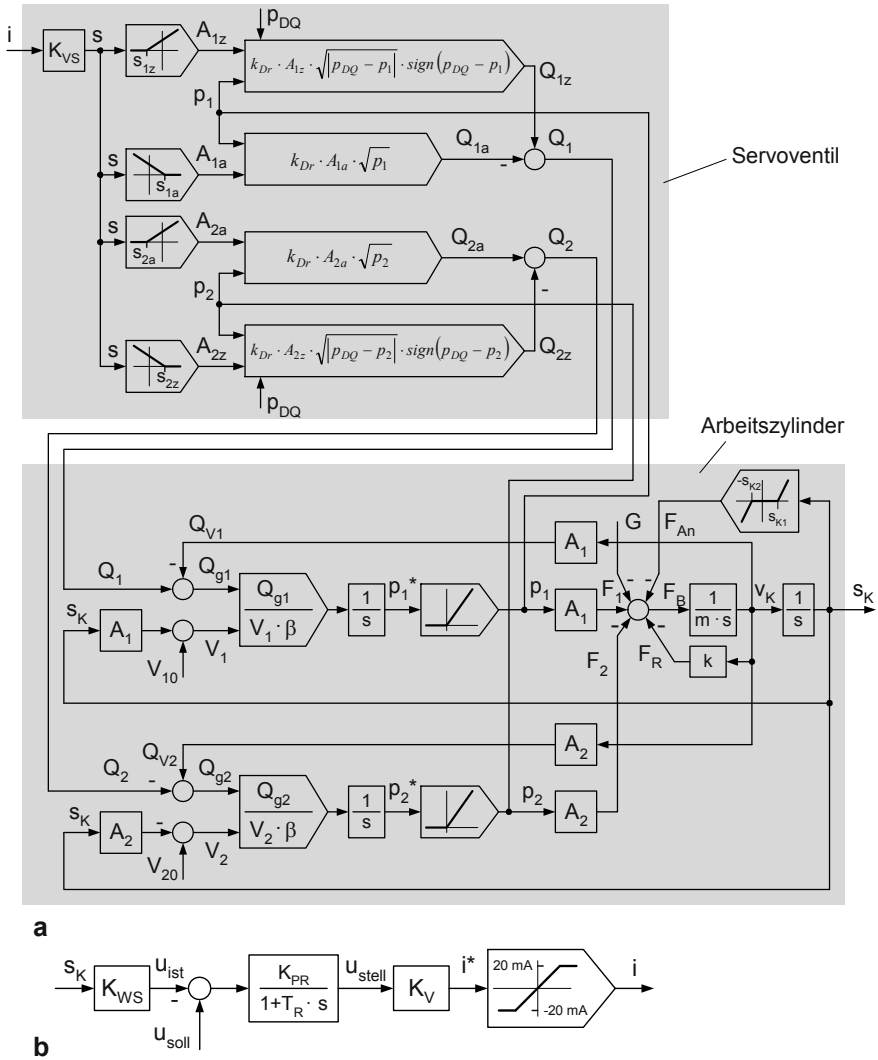


Abb. 8.12 Lage geregelter elektrohydraulischer Antrieb. **a** Blockschaltbild der Regelstrecke **b** Blockschaltbild des Teiles Wegsensor, Regler und Verstärker

Auf die Vorteile und Grenzen des PT1-Reglers wird in [8.11] ausführlich eingegangen. Die Funktion des verwendeten Reglers lautet

$$u_{stell} = \frac{K_{PR}}{1 + T_R \cdot s} \cdot (u_{soll} - u_{ist}). \quad (8.27)$$

8.2.3 Das Verhalten des Regelkreises

Das Blockschaltbild des Regelkreises entsteht aus Abb. 8.12 a und Abb. 8.12 b, indem die beiden Ausgangsgrößen auf die beiden gleichnamigen Eingangsgrößen geführt werden. Da dies einfach zu erkennen ist, wird dieser Schritt nicht gesondert dargestellt. (Das Simulationsmodell enthält das komplette Regelkreismodell.)

Es wird die Reaktion des Systems auf einen Sollwertimpuls untersucht. Die meisten Parameter für den Simulationslauf werden aus [8.11] übernommen, um das Verhalten des Modells im Sinne der Verifizierung einfach einschätzen zu können. Teilweise wurden sie während der Simulation optimiert, um die entstehenden Zeitverläufe anschaulich darzustellen.

Folgende Parameter sind der Simulation zugrunde gelegt worden:

- Servoventil
 - $p_{DQ} = 200 \text{ bar} = 20 \text{ MPa} = 20 \text{ N/mm}^2$,
 - $K_{VS} = 0,02 \text{ mm/mA}$,
 - $s_{1z} = s_{1a} = s_{2a} = s_{2z} = s_0 = 0,02 \text{ mm}$,
 - $d = 5 \text{ mm}$,
 - $k_{Dr} = 4 \cdot 10^4 \text{ mm}^2 / (s\sqrt{N})$ (s. Gl. (4.33 b)).
- Arbeitszylinder (Die Wegposition $s_K = 0$ wird an der in Abb. 8.9 a gezeichneten Stelle angenommen, das hat auf die Anfangsvolumina V_{10} und V_{20} Auswirkungen. Die beiden Anschläge an den Positionen s_{K1} und s_{K2} werden bei der Simulation nicht wirksam.)
 - $A_1 = 12 \text{ cm}^2 = 1200 \text{ mm}^2$,
 - $A_2 = 8 \text{ cm}^2 = 800 \text{ mm}^2$,
 - $m = 200 \text{ kg} = 0,2 \text{ N s}^2/\text{mm}$,
 - $G = m \cdot g \approx 2000 \text{ N}$,
 - $\beta = 8 \cdot 10^{-5} \text{ bar}^{-1} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^2/\text{N}$,
 - $k = 10 \text{ N s/mm}$,
 - Hub $H = 200 \text{ mm}$,
 - $V_{10} = 45 \text{ cm}^3 = 45000 \text{ mm}^3$,
 - $V_{20} = 150 \text{ cm}^3 = 150000 \text{ mm}^3$.
- Wegsensor, Regler, Verstärker
 - $K_{WS} = 0,05 \text{ V/mm}$,
 - $K_{PR} = 20 \text{ V/V}$,
 - $T_R = 12 \text{ ms}$,
 - $K_V = 2 \text{ mA/V}$.

Die Anfangswerte der Integratoren und Verzögerungsglieder sind teilweise nicht einfach zu wählen, da die Gewichtskraft auch bei $v_K = 0$ eine Druckdifferenz her-

vorruft, welche infolge der ungleich großen Kolbenflächen nur mit Aufwand vorausberechnet werden kann. Deshalb wird bei der Simulation zunächst abgewartet, welche Anfangswerte der Drücke sich bei konstantem Sollwert einstellen. (Dies ist ein weiterer Vorteil der Modellierung und Simulation eines Systems.) Erst danach wird ein Sollwertimpuls aufgeschaltet.

Die Funktion $u_{soll}(t)$ lautet

$$u_{soll} = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0,1 \text{ s} \\ 2 \text{ V} & \text{für } 0,1 \text{ s} \leq t \leq 0,3 \text{ s} \\ 0 & \text{für } t > 0,3 \text{ s} \end{cases} \quad (8.28)$$

Der Faktor $K_{WS}=0,05 \text{ V/mm}$ führt damit in dem mittleren Zeitabschnitt zu einem Sollwert der Kolbenposition von 40 mm .

Als Anfangswerte der Integratoren und Verzögerungsglieder sind gewählt worden:

- $p_1(0) = p_2(0) = 100 \text{ bar} = 10 \text{ MPa} = 10 \text{ N/mm}^2$,
- $s_K = 0$,
- $v_K = 0$.

Die Simulationsergebnisse sind in den Abb. 8.13 bis 8.15 dargestellt worden.

Der Geschwindigkeitsverlauf $v_K(t)$ zeigt, dass infolge der beiden Sollwertsprünge die Begrenzungen des Stromes i wirksam werden (Abb. 8.13 a).

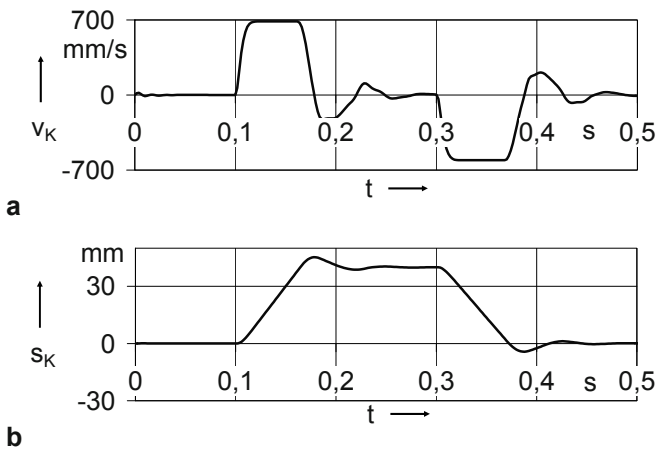


Abb. 8.13 Zeitverläufe der Signale v_K und s_K

Der Wegverlauf $s_K(t)$ besitzt deshalb Phasen des linearen Anstieges (Abb. 8.13 b). Der Antrieb besitzt eine bleibende Regelabweichung, hervorgerufen durch die Gewichtskraft und die ungleich großen Kolbenflächen. Dies ist aus dem Dia-

gramm nicht erkennbar, da sie im Hundertstel-Millimeter-Bereich liegt (etwa $0,025\text{ mm}$). Da in der Praxis selten sprungförmige Sollwert-Änderungen vorgenommen werden, sondern meist sog. Fahrkurven verwendet werden, ist das relativ hohe Überspringen meist kein Problem.

Die hohe Dynamik des Systems zeigen die Druckverläufe (Abb. 8.14). Den infolge der Regelung entstehenden Schwingungen (s. z. B. $s_K(t)$ in Abb. 8.13 b) überlagert sind höherfrequente Schwingungen, hervorgerufen vom Ölvolumina-Masse-System. Diese sind besonders in der ersten Zehntelsekunde gut zu erkennen.

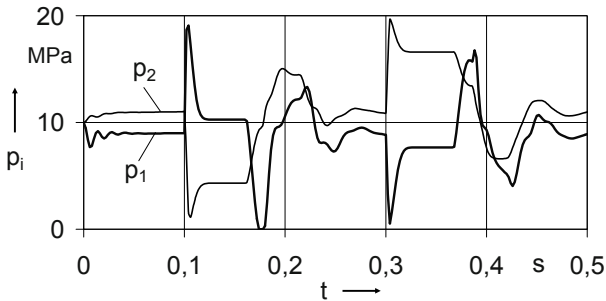


Abb. 8.14 Zeitverläufe der Drücke p_1 und p_2

Das relativ genaue Modell der Hauptsteuerstufe des Servoventils ermöglicht die detaillierte Analyse seiner sechs Volumenströme (Abb. 8.15).

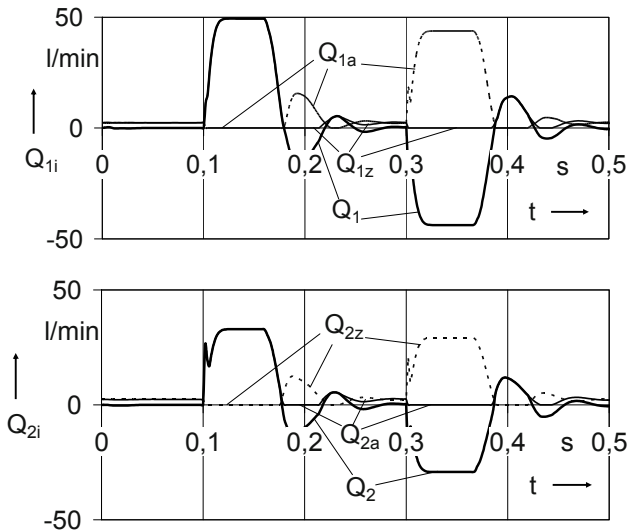


Abb. 8.15 Zeitverläufe der Volumenströme in der Hauptsteuerstufe des Servoventils

In Systemen, in denen andere Teilsysteme als die Antriebe im Vordergrund der Untersuchung stehen, ist oft ein größeres Modell als das in diesem Abschnitt ermittelte ausreichend. Vor allem bei Verwendung sog. Gleichlaufzylinder ($A_1 = A_2$) kann das Antriebsmodell vereinfacht werden. Das wird im folgenden Abschnitt demonstriert.

8.3 Bahnsteuerung eines elektrohydraulisch angetriebenen Rundtisches

Der Rundtisch mit zwei elektrohydraulischen Antrieben werde für das Herstellen von kreisrunden Durchbrüchen durch eine Platte verwendet. Ein Antrieb realisiert eine Drehbewegung und ein Antrieb, der Radialantrieb, eine translatorische Bewegung. (Ähnliche Strukturen können auch Roboter besitzen [8.10].)

Eine Kraftrückwirkung des Werkstückes auf das Werkzeug kann vernachlässigt werden, da keine mechanische, sondern eine Strahlbearbeitung durchgeführt wird. Das Grobschema zeigt Abb. 8.16.

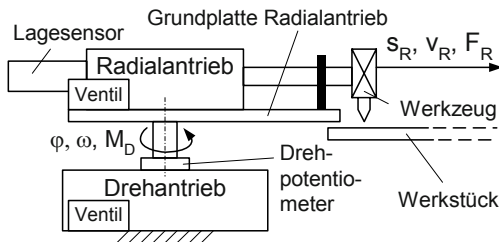


Abb. 8.16 Grobschema eines Rundtisches mit zwei elektrohydraulischen Antrieben

Die Draufsicht auf den Rundtisch (Abb. 8.17 a) zeigt Details des Radialantriebs und seine Polarkoordinaten (s_R, φ) sowie die kartesischen Koordinaten des zu realisierenden kreisförmigen Durchbruchs am Werkstück (x_W, y_W).

Der elektrohydraulische Antrieb für die Drehbewegung befindet sich im unteren Teil des Rundtisches (s. Abb. 8.17 b). Er besitzt eine Ritzel-Zahnrad-Paarung zur Umsetzung einer Kolbenbewegung in die Drehbewegung um einen ortsfesten Mittelpunkt M (s. Abb. 8.17 a und b). Im oberen Teil des Rundtisches befindet sich der mit dem Ritzel verbundene Antrieb für die Radialbewegung. Das Werkzeug ist an der Kolbenstange des Radialantriebs befestigt. Die Winkelposition wird mit einem Drehpotenziometer gemessen, die Kolbenposition des Radialantriebs über einen integrierten Lagesensor mit Spannungsausgang.

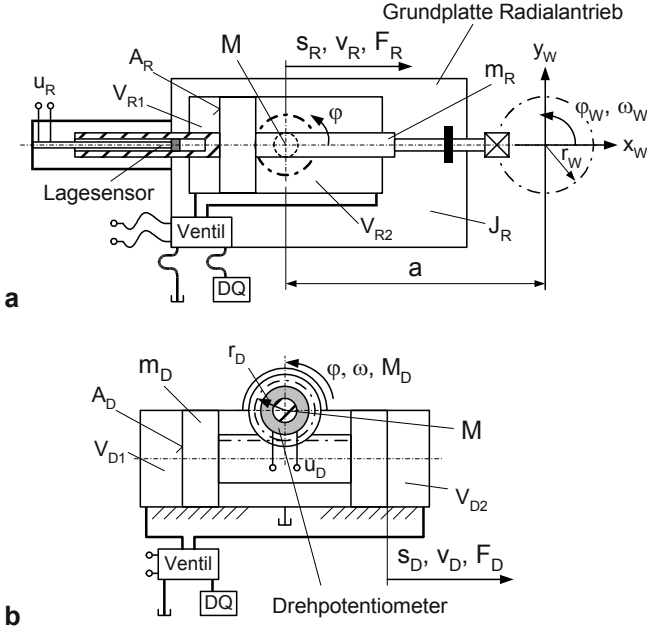


Abb. 8.17 Detaildarstellungen des Rundtisches. **a** Draufsicht auf den Radialantrieb **b** Draufsicht auf den darunter befindlichen Drehantrieb

8.3.1 Modell des Mehrmassensystems

Für dieses mehrgliedrige mechanische System werden wiederum, wie in Abschn. 8.1, die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen 2. Art aufgestellt, um zu den Bewegungsgleichungen des Systems zu gelangen. Sie lauten (s. Gln. (8.4) und (8.5))

$$L = E_{kin} - E_{pot}$$

$$\sum_j P_{ij} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

Da sich die potenzielle Energie des Systems nicht ändert, kann gesetzt werden:

$$E_{pot} = 0.$$

Die kinetische Energie des Systems setzt sich aus translatorischen und rotatorischen Komponenten zusammen.

Das Mehrmassensystem aus m_R , J_R und m_D , wird zu einem Zwei-Massensystem mit den Parametern. m_R und J vereinfacht, indem auf identischem Weg wie in Abschn. 4.1.4.2 eine Gesamtträgheit J aus J_R und m_D geschaffen wird. Über

$$\frac{J}{2} \cdot \omega^2 = \frac{J_R}{2} \cdot \omega^2 + \frac{m_D}{2} \cdot v_D^2 \quad (8.29 \text{ a})$$

und die Bindungsgleichung

$$v_D = r_D \cdot \omega \quad (8.29 \text{ b})$$

ergibt sich

$$J = J_R + m_D \cdot r_D^2. \quad (8.29 \text{ c})$$

Damit sind alle mit der Drehbewegung starr gekoppelten Komponenten des Rundtisches in dem Massenträgheitsmoment J zusammengefasst worden. Neben der Masse m_D sind das die fest mit der Grundplatte des Radialantriebs verbundenen Komponenten des Systems.

Die zweite Bindungsgleichung ist bei diesem Ansatz

$$M_D = r_D \cdot F_D. \quad (8.29 \text{ d})$$

Die Masse m_R wird aus dem Kolben des Radialantriebs und allen starr mit ihm verbundenen Komponenten wie Kolbenstange, Werkzeug und Werkzeugträger gebildet.

Der 1. Schritt:

Das Schema dieses Systems, das alle relevanten Parameter und Signale enthält, ist in Abb. 8.18 dargestellt.

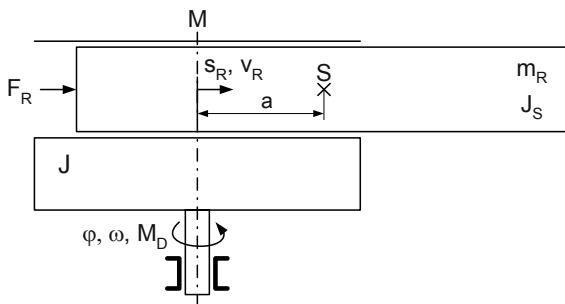


Abb. 8.18 Das Zwei-Massen-System des Rundtisches

Der 2. bis 4. Schritt:

Es ist zu beachten, dass das Massenträgheitsmoment J nur eine rotatorische Komponente der kinetischen Energie besitzt und dass die Masse m_R sowohl eine translatorische als auch eine rotatorische Komponente der kinetischen Energie besitzt. Infolge ihrer Ausdehnung besitzt sie auch ein Massenträgheitsmoment. In die Berechnungen geht das Massenträgheitsmoment J_S in Bezug auf den Schwerpunkt der Masse m_R ein.

Der Ansatz für die kinetische Energie ist gemäß Abb. 8.18:

$$E_{kin} = \frac{J}{2} \cdot \omega^2 + \frac{m_R}{2} \cdot v_R^2 + \frac{J_S}{2} \cdot \omega^2 + \frac{m_R \cdot (a + s_R)^2}{2} \cdot \omega^2. \quad (8.30)$$

Die beiden Koordinaten und ihre Ableitungen nach der Zeit, nach denen die Lagrangesche Funktion L (hier gilt: $L = E_{kin}$) abgeleitet werden muss, sind φ bzw. ω und s_R bzw. v_R . Es sind

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \omega} = \omega \cdot (J + J_S + m_R \cdot (a + s_R)^2),$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_R} = (a + s_R) \cdot m_R \cdot \omega^2,$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_R} = v_R \cdot m_R.$$

Die noch fehlenden Ableitungen nach der Zeit lauten

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \omega} = \dot{\omega} \cdot (J + J_S + m_R \cdot (a + s_R)^2) + \omega \cdot m_R \cdot 2 \cdot (a + s_R) \cdot v_R,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_R} = \dot{v}_R \cdot m_R.$$

Bevor diese Funktionen in Gl. (8.5) eingesetzt werden, ist noch zu ermitteln, welche äußeren Kräfte auf den Radialantrieb und welche äußeren Momente auf den Drehantrieb wirken. In beiden Fällen sind es die Antriebskräfte und –momente bzw. die Reibkräfte und –momente. Die Antriebe sind noch zu analysieren, die Reibung wird wiederum geschwindigkeitsproportional angenommen:

$$F_{R\text{Reib}} = k_R \cdot v_R, \quad (8.31 \text{ a})$$

$$M_{D\text{Reib}} = k_D \cdot \omega. \quad (8.31 \text{ b})$$

Für den Radialantrieb entsteht die Funktion

$$F_R - F_{R\text{Reib}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_R} - \frac{\partial L}{\partial s_R} = \underbrace{\dot{v}_R \cdot m_R}_{=F_B} - \underbrace{(a + s_R) \cdot m_R \cdot \omega^2}_{=F_{Fl}}, \quad (8.31 \text{ c})$$

Auf der rechten Seite der Gleichung stehen die Beschleunigungskraft F_B und die Fliehkraft F_{Fl} .

Für den Drehantrieb entsteht die Funktion

$$\begin{aligned} M_D - M_{D\text{Reib}} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \omega} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} \\ &= \underbrace{\dot{\omega} \cdot (J + J_S + m_R \cdot (a + s_R)^2)}_{=M_B} + \underbrace{m_R \cdot 2 \cdot (a + s_R) \cdot \omega \cdot v_R}_{=M_{Co}}. \end{aligned} \quad (8.31 \text{ d})$$

Auf der rechten Seite der Gleichung stehen das Beschleunigungsmoment M_B und das Coriolismoment M_{Co} .

Der 5. Schritt:

Werden die beiden Funktionen nach den Beschleunigungen $\dot{v}_R$ bzw. $\dot{\omega}$ aufgelöst und die Funktionen für die Reibung eingetragen, entsteht ein in seiner Struktur bekanntes Blockschaltbild (in welchem die Signale wieder in den Bildbereich transformiert worden sind). Aus den Beziehungen

$$\dot{v}_R = \frac{1}{m_R} \cdot (F_R - k_R \cdot v_R + (a + s_R) \cdot m_R \cdot \omega^2), \quad (8.32)$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{J + J_S + m_R \cdot (a + s_R)^2} \cdot (M_D - k_D \cdot \omega - m_R \cdot 2 \cdot (a + s_R) \cdot \omega \cdot v_R) \quad (8.33)$$

ergibt sich das Blockschaltbild in Abb. 8.19.

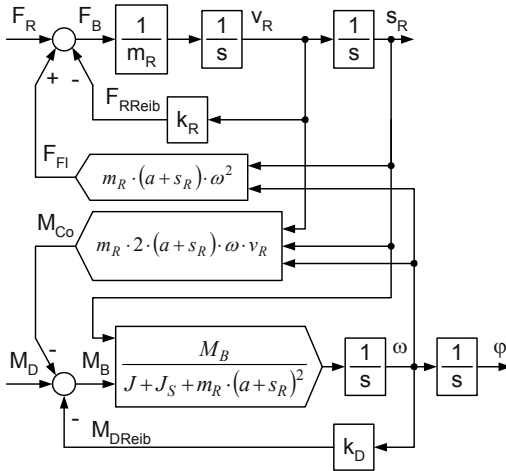


Abb. 8.19 Blockschaltbild des Zwei-Massen-Systems des Rundtisches

8.3.2 Modelle der Antriebe

Die Antriebe des Rundtisches sind lagegeregelte elektrohydraulische Antriebe wie in Abschn. 8.2, so dass auch hier die fünf Modellierungsschritte nicht detailliert gegangen werden müssen. Die Arbeitszylinder besitzen Gleichlaufverhalten, d.h., ihre Kolbenflächen sind auf beiden Seiten gleichgroß. Das ermöglicht die Beschreibung des Verhaltens mit einem einfacheren Modell als in Abschn. 8.2. In Abb. 8.20 ist das Schema des Radialantriebs dargestellt.

Wenn das Servoventil ebenfalls symmetrisch mit $s_{1z} = s_{1a} = s_{2a} = s_{2z} = s_0$ (s. Abschn. 8.2) beschrieben wird, kann es im Bereich des Arbeitspunktes $s_{RAP} = 0$ und $p_{1AP} = p_{2AP} = p_{DQ}/2$ linearisiert werden (ausführliche Herleitung s. [8.11]). Infolge der Symmetrie von Arbeitszylinder und Servoventil sind

$$Q_R = Q_1 = Q_2, \quad p_1 = \frac{p_{DQ}}{2} + \frac{\Delta p}{2} \quad \text{und} \quad p_2 = \frac{p_{DQ}}{2} - \frac{\Delta p}{2}. \quad (8.34 \text{ a})$$

In der Umgebung des Arbeitspunktes führt das analog den Gln. (8.22 a) bis (8.24 b) zu der (noch nichtlinearen) Funktion

$$Q_R = \frac{k_{Dr} \cdot d \cdot \pi}{\sqrt{2}} \cdot \left((s_0 + s_R) \cdot \sqrt{p_{DQ} - \Delta p} - (s_0 - s_R) \cdot \sqrt{p_{DQ} + \Delta p} \right). \quad (8.34 \text{ b})$$

Für Leerlauf ($Q_R = 0$) und Kurzschluss ($\Delta p = 0$) ergeben sich aus Gl. (8.34 b) die Kurven in Abb. 8.21.

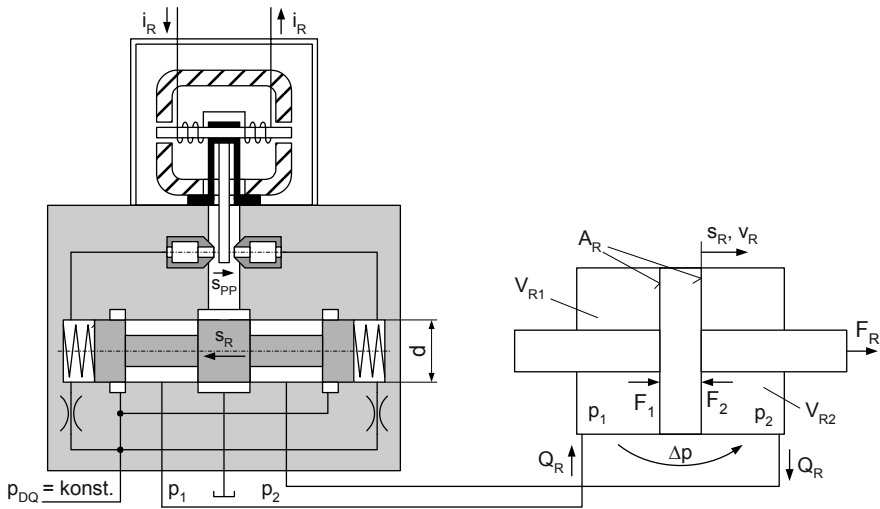


Abb. 8.20 Schema des mit dem Strom i gesteuerten elektrohydraulischen Radialantriebs mit beidseitig gleichgroßen Kolbenflächen des Arbeitszylinders (Details zum Servoventil s. Abb. 8.10)

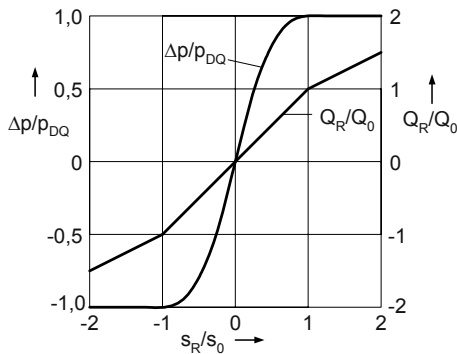


Abb. 8.21 Kurzschluss- und Leerlaufkennlinie des Servoventils in Abb. 8.20

Der Bezugs-Volumenstrom Q_0 ist

$$Q_0 = k_{Dr} \cdot d \cdot \pi \cdot s_0 \cdot \sqrt{2 \cdot p_{DQ}} \quad (8.34 \text{ c})$$

Der Volumenstrom Q_0 entsteht für $s = 0$ als Grundbelastung der Druckquelle DQ .

Aus den Kurven in Abb. 8.21 bzw. aus den Gln. (8.34 a) und (8.34 c) können die Anstiege am o. g. Arbeitspunkt $s_{RAP} = 0$ ermittelt werden (ausführlich s. ebenfalls [8.11]):

- die Druckverstärkung $E_{0R} = \Delta p / s_R$:

$$\left. \frac{d\Delta p}{ds_R} \right|_{Q_R=0} = E_{0R} = 2 \cdot \frac{p_{DQ}}{s_0}, \quad (8.35 \text{ a})$$

- die Volumenstrom-Verstärkung $C_{0R} = Q_R / s_R$:

$$\left. \frac{dQ_R}{ds_R} \right|_{\Delta p=0} = C_{0R} = k_{Dr} \cdot d \cdot \pi \cdot \sqrt{2 \cdot p_{DQ}}. \quad (8.35 \text{ b})$$

Diese beiden jetzt linearen Wirkungen des Weges s_R überlagern sich im allgemeinen Fall. Das führt zu der Funktion

$$s_R = \frac{\Delta p}{E_{0R}} + \frac{Q_R}{C_{0R}}$$

und, nach Q_R aufgelöst, zu dem einfachen Modell des Servoventils:

$$Q_R = C_{0R} \cdot \left(s_R - \frac{1}{E_{0R}} \cdot \Delta p \right). \quad (8.35 \text{ c})$$

Das Blockschaltbild des noch nicht an das Zwei-Massen-System angekoppelten Radialantriebs zeigt Abb. 8.22 a.

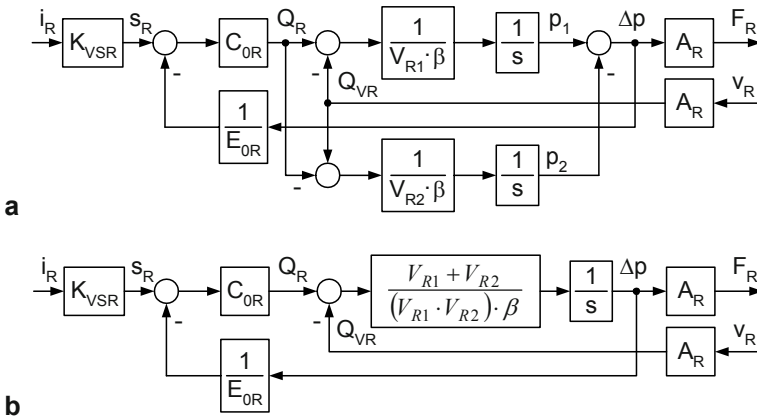


Abb. 8.22 Blockschaltbild des Radialantriebs des Rundtisches. **a** detailliert **b** parallel wirkende Volumina zusammengefasst

Folgendes ist zu beachten:

- Das Modell des Antriebs gilt unter der Voraussetzung gleichgroßer Kolbenflächen auf beiden Seiten des Arbeitszylinders.
- Die Vorsteuerstufe des Servoventils wurde wie in Abschn. 8.2 beschrieben (s. Gl. 8.18).
- Die Abhängigkeit der Ölvolumina von der Kolbenposition ist vernachlässigt worden.
- Die Reibkräfte im Zylinder wurden bereits im Zwei-Massen-System summarisch berücksichtigt (s. Abb. 8.19: k_R).
- Die Geschwindigkeit v_R wirkt auf den Arbeitszylinder zurück, sie führt zum Verschiebevolumenstrom Q_{VR}

$$Q_{VR} = A_R \cdot v_R . \quad (8.35 \text{ d})$$

Die parallel liegenden Zweige

$$\frac{1}{V_{R1} \cdot \beta} \cdot \frac{1}{s} \quad \text{und} \quad \frac{1}{V_{R2} \cdot \beta} \cdot \frac{1}{s}$$

können zusammengefasst werden. Das führt zu dem Bockschaltbild in Abb. 8.22 b, welches relativ einfach in eine Gesamtfunktion überführt werden kann („Kreisformel“). Bei diesen Berechnungen wird gesetzt:

$$\frac{1}{V_R^*} = \frac{1}{V_{R1}} + \frac{1}{V_{R2}} = \frac{V_{R1} + V_{R2}}{V_{R1} \cdot V_{R2}} . \quad (8.36 \text{ a})$$

Das führt zu dem Ansatz

$$F_R = \frac{K_{VSR} \cdot C_{0R} \cdot \frac{1}{V_R^* \cdot \beta \cdot s} \cdot A_R \cdot i_R - \frac{1}{V_R^* \cdot \beta \cdot s} \cdot A_R^2 \cdot v_R}{1 + \frac{C_{0R}}{E_{0R}} \cdot \frac{1}{V_R^* \cdot \beta \cdot s}}$$

und zu der Gesamtfunktion in Normalform

$$F_R = \frac{K_{iR}}{1 + T_R \cdot s} \cdot i_R - \frac{K_{vR}}{1 + T_R \cdot s} \cdot v_R \quad (8.36 \text{ b})$$

mit

$$K_{iR} = K_{VSR} \cdot E_{0R} \cdot A_R , \quad (8.36 \text{ c})$$

$$K_{vR} = \frac{E_{0R}}{C_{0R}} \cdot A_R^2, \quad (8.36 \text{ d})$$

$$T_R = V_R \cdot \beta \cdot \frac{E_{0R}}{C_{0R}}. \quad (8.36 \text{ e})$$

Der Drehantrieb besitzt die gleiche Struktur (s. Abb. 8.17), weshalb auf die ausführliche Herleitung seines Modells verzichtet werden kann. Analog zu den Gln. (8.34) bis (8.36 d) kann für diesen Antrieb geschrieben werden:

$$\frac{1}{V_D} = \frac{V_{D1} + V_{D2}}{V_{D1} \cdot V_{D2}} \quad (8.37 \text{ a})$$

$$\text{und } F_D = \frac{K_{iD}}{1 + T_D \cdot s} \cdot i_D - \frac{K_{vD}}{1 + T_D \cdot s} \cdot v_D \quad (8.37 \text{ b})$$

$$\text{mit } K_{iD} = K_{vSD} \cdot E_{0D} \cdot A_D, \quad (8.37 \text{ c})$$

$$K_{vD} = \frac{E_{0D}}{C_{0D}} \cdot A_D^2, \quad (8.37 \text{ d})$$

$$T_D = V_D \cdot \beta \cdot \frac{E_{0D}}{C_{0D}}. \quad (8.37 \text{ e})$$

Hinzu kommt beim Drehantrieb die Umsetzung der Translation in die Rotation (s. Abb. 8.17 b):

$$M_D = r_D \cdot F_D \text{ und } v_D = r_D \cdot \omega. \quad (8.37 \text{ f})$$

8.3.3 Das Gesamt-Modell des Rundtisches

Die Bahnsteuerung des Rundtisches wird auf der Basis der Werkzeugpositionen im x_W - y_W -Koordinatensystem vorgenommen (s. Abb. 8.17).

Es wird angenommen, dass das Werkzeug die Kreisbahn relativ schnell, dafür aber mehrfach, durchfahren muss, ehe der kreisförmige Durchbruch realisiert ist. Die Geschwindigkeit des Werkzeuges auf der Kreisbahn soll, bei null beginnend, zunächst stetig bis zu einer stationären Geschwindigkeit anwachsen. Diese stationäre Geschwindigkeit soll so gewählt werden, dass das Werkstück die Kreisbahn

in einer einzustellenden Zeit t_A einmal durchläuft. Das verlangt eine Winkelgeschwindigkeit $\omega_W = 2\pi/t_A$.

Da diese stetig anwachsen soll, wird ein Verzögerungsglied 1. Ordnung (PT1-Glied) nachgeschaltet mit dem Übertragungsfaktor eins und einer Zeitkonstante im Bereich von einer Sekunde. Über die Integration wird der Winkel $\varphi_W(t)$ berechnet.

Die kartesischen Koordinaten des Werkzeuges sind dann (s. Abb. 8.17)

$$x_W(t) = r_W \cdot \cos \varphi_W(t), \quad (8.38 \text{ a})$$

$$y_W(t) = r_W \cdot \sin \varphi_W(t). \quad (8.38 \text{ b})$$

In Abb. 8.23 a sind die Relationen zwischen den Maschinenkoordinaten und dem x_W - y_W -Koordinatensystem dargestellt (s. Abb. 8.17 a). Aus dem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse $a + s_R$ können die Führungsgrößen (Sollwerte) der Antriebe als Funktion der x_W - y_W -Koordinaten errechnet werden:

$$s_{\text{sollR}} = \sqrt{(x_W + a)^2 + y_W^2} - a, \quad (8.39 \text{ a})$$

$$\varphi_{\text{soll}} = \arctan\left(\frac{y_W}{x_W + a}\right). \quad (8.39 \text{ b})$$

Das Blockschaltbild der Führungsgrößenaufbereitung ist in Abb. 8.23 b dargestellt.

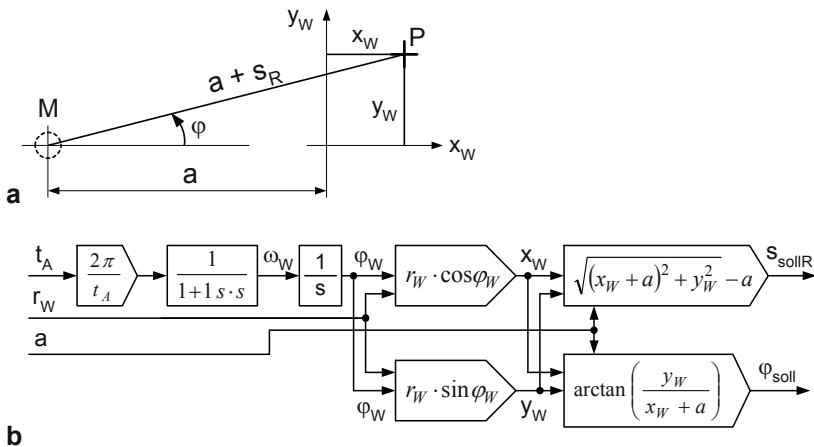


Abb. 8.23 Führungsgrößenaufbereitung. **a** Koordinatentransformation zwischen Werkstückkoordinaten und Maschinenkoordinaten (s. Abb. 8.17 a) **b** Blockschaltbild der Führungsgrößenaufbereitung

Um diesen Führungsgrößen folgen zu können, müssen beide Antriebe lagege-regelt werden. Die Struktur der Teile Weg- bzw. Winkelsensor, Regler und Ver-stärker wird ähnlich einfach gewählt wie in Abb. 8.12. Verändert wird Folgendes:

- Um als Führungsgrößen die Signale $s_{R\text{soll}}$ und φ_{soll} verwenden zu können, muss der Übertragungsfaktor des Weg- bzw. Winkelsensors in die Sollgrößenbe-rechnung mit einbezogen werden.
- Als Regler werden einfache P-Regler ohne Verzögerung eingesetzt. (In diesem Buch liegt das Gewicht auf der Modellierung der Regelstrecken, so dass meist einfache Regler zum Einsatz kommen. Zudem ist wegen des integrierenden Verhaltens der beiden Regelstrecken ein I-Anteil in den Reglern zu vermeiden.)

Die Verstärker besitzen wiederum eine Strombegrenzung:

$$i_R = \begin{cases} -20 \text{ mA} & \text{für } u_{\text{stellR}} < -10 \text{ V} \\ K_{VR} \cdot u_{\text{stellR}} & \text{für } -10 \text{ V} < u_{\text{stellR}} < +10 \text{ V} , \\ +20 \text{ mA} & \text{für } u_{\text{stellR}} > +10 \text{ V} \end{cases} \quad (8.40 \text{ a})$$

$$i_D = \begin{cases} -20 \text{ mA} & \text{für } u_{\text{stellD}} < -10 \text{ V} \\ K_{VD} \cdot u_{\text{stellD}} & \text{für } -10 \text{ V} < u_{\text{stellD}} < +10 \text{ V} . \\ +20 \text{ mA} & \text{für } u_{\text{stellD}} > +10 \text{ V} \end{cases} \quad (8.40 \text{ b})$$

Die Blockschaltbilder der Teile Weg- bzw. Winkelsensor, Regler und Verstärker zeigt Abb. 8.24.

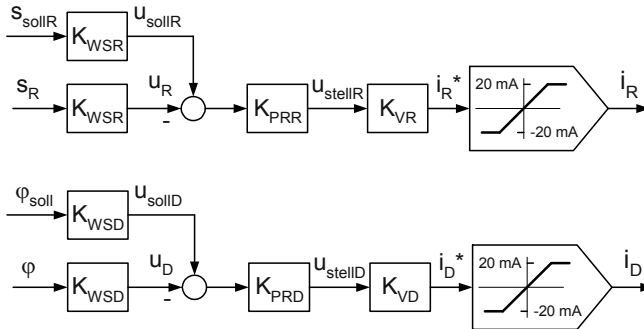


Abb. 8.24 Blockschaltbilder der Teile Weg- bzw. Winkelsensor, Regler und Verstärker beider Antriebe

Aufgrund der vielen zusammenzuführenden Komponenten des Systems wird in Abb. 8.25 das Gesamtschaltbild angegeben, ehe eine Umsetzung in das Simulationsblockschaltbild vorgenommen wird.

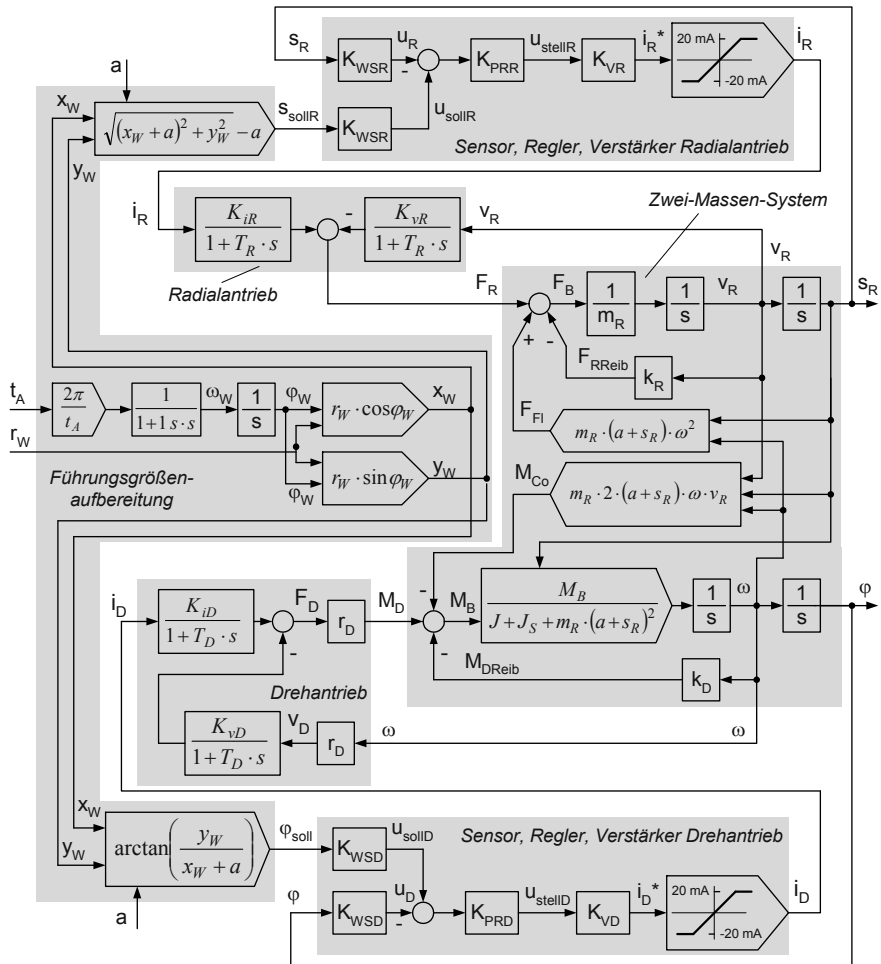


Abb. 8.25 Blockschaltbild des elektrohydraulisch angetriebenen Rundtisches in Abb. 8.16 und Abb. 8.17

8.3.4 Das Verhalten des Gesamtsystems

Basis der Simulation des Verhaltens des Gesamtsystems ist das Blockschaltbild in Abb. 8.25. Die dort enthaltenen Parameter verlangen vor allem für die Antriebe eine Vorausberechnung.

- Die beiden Servoventile besitzen gleiche Parameter. Aus

- $p_{DQ} = 200 \text{ bar} = 20 \text{ MPa} = 20 \text{ N/mm}^2$,
- $s_{1z} = s_{1a} = s_{2a} = s_{2z} = s_0 = 0,02 \text{ mm}$,
- $d = 5 \text{ mm}$,
- $k_{Dr} = 4 \cdot 10^4 \text{ mm}^2/(s\sqrt{N})$ (s. Gl. (4.33 b)).

ergeben sich gemäß Gln. (8.35 a) und (8.35 b)

$$E_{0R} = E_{0D} = 2 \cdot \frac{p_{DQ}}{s_0} = 2 \cdot \frac{20 \text{ N/mm}^2}{0,02 \text{ mm}} = 2000 \text{ N/mm}^3,$$

$$C_{0R} = C_{0R} = k_{Dr} \cdot d \cdot \pi \cdot \sqrt{2 \cdot p_{DQ}} = \frac{4 \cdot 10^4 \text{ mm}^2}{s \sqrt{N}} \cdot 5 \text{ mm} \cdot \pi \cdot \sqrt{2 \cdot 20 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} = 1,265 \cdot 10^6 \text{ mm}^2 / s.$$

- Weitere Parameter der Servoventile sind:

- $K_{VSR} = 0,02 \text{ mm/mA}$,
- $K_{VSD} = 0,02 \text{ mm/mA}$.

- Weitere Parameter des Radialantriebs sind:

- $A_R = 8 \text{ cm}^2 = 800 \text{ mm}^2$,
- $V_{R1} = V_{R2} = 60 \text{ cm}^3 = 60000 \text{ mm}^3$,
- $\beta = 8 \cdot 10^{-5} \text{ bar}^{-1} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^2/\text{N}$.

Das führt nach Gln. (8.36 a) bis (8.36 e) zu

$$V_R^* = \frac{V_{R1} \cdot V_{R2}}{V_{R1} + V_{R2}} = \frac{60000 \text{ mm}^3 \cdot 60000 \text{ mm}^3}{60000 \text{ mm}^3 + 60000 \text{ mm}^3} = 30000 \text{ mm}^3,$$

$$K_{iR} = K_{VSR} \cdot E_{0R} \cdot A_R = 0,02 \text{ mm/mA} \cdot 2000 \text{ N/mm}^3 \cdot 800 \text{ mm}^2 = 32000 \text{ N/mA},$$

$$K_{vR} = \frac{E_{0R}}{C_{0R}} \cdot A_R^2 = \frac{2000 \text{ N/mm}^3}{1,265 \cdot 10^6 \text{ mm}^2/s} \cdot (800 \text{ mm}^2)^2 = 1020 \frac{\text{N}}{\text{mm/s}},$$

$$T_R = V_R^* \cdot \beta \cdot \frac{E_{0R}}{C_{0R}} =$$

$$30000 \text{ mm}^3 \cdot 8 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^2/\text{N} \cdot \frac{2000 \text{ N/mm}^3}{1,265 \cdot 10^6 \text{ mm}^2/s} = 0,038 \text{ s} = 38 \text{ ms}.$$

- Weitere Parameter des Drehantriebs sind:

$$\begin{aligned}
 - A_D &= 12 \text{ cm}^2 = 1200 \text{ mm}^2, \\
 - V_{D1} &= V_{D2} = 40 \text{ cm}^3 = 40000 \text{ mm}^3, \\
 - \beta &= 8 \cdot 10^{-5} \text{ bar}^{-1} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^2/\text{N}.
 \end{aligned}$$

Das führt nach Gln. (8.37 a) bis (8.37 e) zu

$$V_D^* = \frac{V_{D1} \cdot V_{D2}}{V_{D1} + V_{D2}} = \frac{40000 \text{ mm}^3 \cdot 40000 \text{ mm}^3}{40000 \text{ mm}^3 + 40000 \text{ mm}^3} = 20000 \text{ mm}^3,$$

$$\begin{aligned}
 K_{iD} &= K_{VSD} \cdot E_{0D} \cdot A_D = \\
 &0,02 \text{ mm} / \text{mA} \cdot 2000 \text{ N} / \text{mm}^3 \cdot 1200 \text{ mm}^2 = 48000 \text{ N} / \text{mA},
 \end{aligned}$$

$$K_{vD} = \frac{E_{0D}}{C_{0D}} \cdot A_D^2 = \frac{2000 \text{ N} / \text{mm}^3}{1,265 \cdot 10^6 \text{ mm}^2 / \text{s}} \cdot (1200 \text{ mm}^2)^2 \approx 2300 \frac{\text{N}}{\text{mm} / \text{s}},$$

$$\begin{aligned}
 T_R &= V_R^* \cdot \beta \cdot \frac{E_{0R}}{C_{0R}} = \\
 &20000 \text{ mm}^3 \cdot 8 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^2 / \text{N} \cdot \frac{2000 \text{ N} / \text{mm}^3}{1,265 \cdot 10^6 \text{ mm}^2 / \text{s}} = 0,025 \text{ s} = 25 \text{ ms}.
 \end{aligned}$$

- Die Parameter des Zwei-Massen-Systems sind

$$\begin{aligned}
 - m_R &= 50 \text{ kg} = 50 \text{ N s}^2/\text{m} = 0,05 \text{ N s}^2/\text{mm}, \\
 - m_D &= 20 \text{ kg} = 20 \text{ N s}^2/\text{m} = 0,02 \text{ N s}^2/\text{mm}, \\
 - J_R &= 4 \text{ kg m}^2 = 4 \text{ N m s}^2 = 4000 \text{ N mm s}^2, \\
 - J_S &= 2 \text{ kg m}^2 = 2 \text{ N m s}^2 = 2000 \text{ N mm s}^2, \\
 - a &= 400 \text{ mm}, \\
 - k_R &= 10 \text{ N s/mm}, \\
 - k_D &= 10^5 \text{ N mm s}, \\
 - r_D &= 2 \text{ cm} = 20 \text{ mm}.
 \end{aligned}$$

Gemäß Gl. (8.28 c) ergibt sich

$$\begin{aligned}
 J &= J_R + m_D \cdot r_D^2 = \\
 &4000 \text{ N mm s}^2 + 0,02 \text{ N s}^2 / \text{mm} \cdot (40 \text{ mm})^2 = 4032 \text{ N mm s}^2.
 \end{aligned}$$

- Die Parameter von Wegsensor, Regler und Verstärker beider Regelkreise sind
 - $K_{WSR}=0,05 \text{ V/mm}$,
 - $K_{WSD}=0,5 \text{ V/rad}$,
 - $K_{PRR}=10 \text{ V/V}$,
 - $K_{PRD}=20 \text{ V/V}$,
 - $K_{VR}=K_{VD}=2 \text{ mA/V}$.
- Als Parameter für die Werkstückbearbeitung sind gewählt worden:
 - $r_W=150 \text{ mm}$,
 - $t_A=2 \text{ s}$.

Die Anfangswerte der vier Integratoren des Systems werden wie folgt eingestellt (s. Abb. 8.17):

$$v_R(0) = \omega(0) = 0, \quad s_R(0) = r_W, \quad \varphi(0) = 0.$$

Die Anfangswerte der vier PT1-Glieder der Antriebe werden auf null eingestellt.

Damit befindet sich das Werkzeug zu Beginn der Simulation über dem Punkt des Werkstück-Koordinatensystems

$$x_W = r_W \text{ und } y_W = 0.$$

Um die Kreisform des Werkzeugweges im Werkstück-Koordinatensystem während der Simulation kontrollieren zu können, wird der Verlauf der Regelgrößen s_R und φ in die Istwerte dieser Koordinaten x_{istW} und y_{istW} umgerechnet. Mit Hilfe der Abb. 8.23 a ergibt sich

$$x_{istW} = (s_R + a) \cdot \cos \varphi - a \quad (8.41 \text{ a})$$

und

$$y_{istW} = (s_R + a) \cdot \sin \varphi. \quad (8.41 \text{ b})$$

Die folgenden Abbildungen zeigen die Simulationsergebnisse, zunächst die Verläufe der Soll- und der Regelgrößen sowie der Regelabweichungen (Abb. 8.26).

Die Regelabweichungen sind wie folgt definiert:

$$\Delta s_R = s_{sollR} - s_R \text{ und } \Delta \varphi = \varphi_{soll} - \varphi.$$

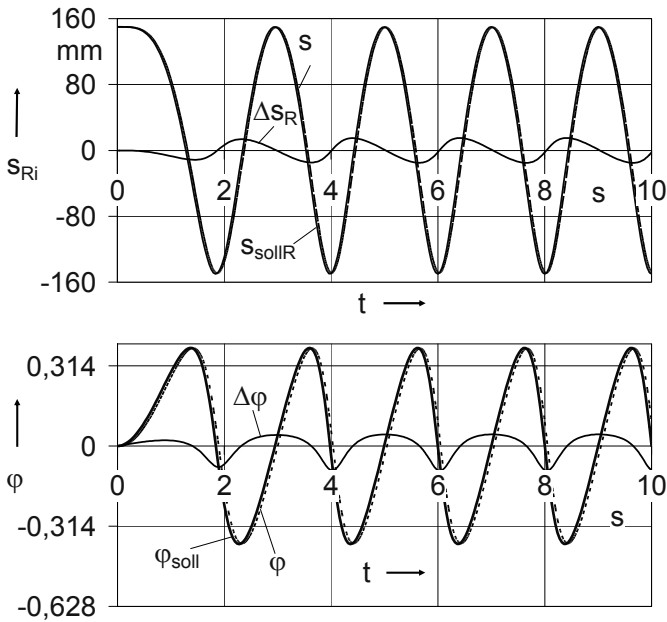


Abb. 8.26 Verläufe der Sollgrößen, der Regelgrößen und der Regelabweichungen

An den Regelabweichungen ist zu erkennen, dass infolge des sehr einfachen Regelungskonzepts (zwei P-Regler) sichtbare Regelfehler entstehen. Werden die Regelgrößen in die Koordinaten x_W und y_W (Gln. (8.41 a) und (8.41 b)) umgerechnet und ebenfalls als Diagramm dargestellt, ist auch die Abweichung von der Kreisbahn zu erkennen (Abb. 8.27).

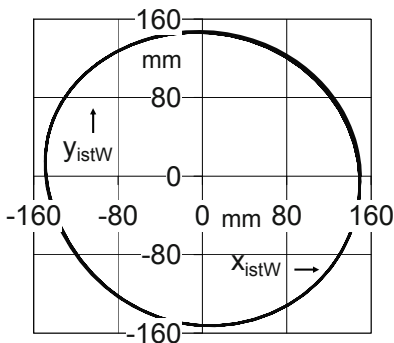


Abb. 8.27 Die Ist-Bahn des Werkzeuges in der x_W - y_W -Ebene

Die Fehler werden bei geschwindigkeitsproportionaler Reibung immer kleiner, je größer die Zeit t_A für eine Durchföhrung der Kreisbahn gewöhlt wird.

Die beiden folgenden Abbildungen zeigen die Verläufe der Fliehkraft F_{Fl} und des Coriolismomentes M_{Co} jeweils gemeinsam mit den Antriebskräften bzw. Antriebsmomenten.

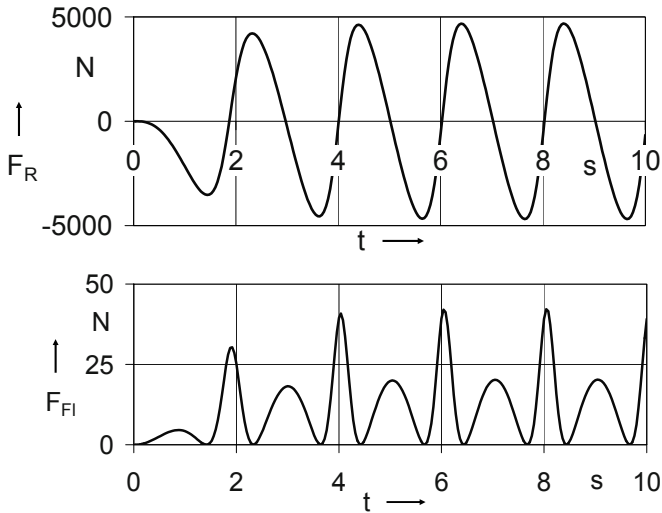


Abb. 8.28 Verläufe der Antriebskraft F_R und der Fliehkraft F_{Fl}

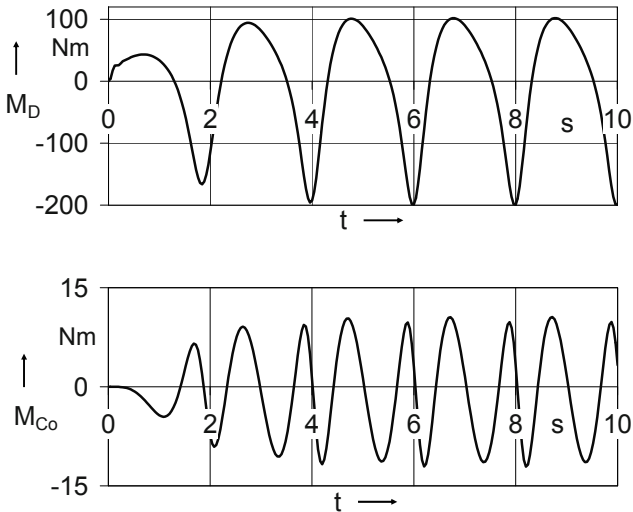


Abb. 8.29 Verläufe des Antriebsmomentes M_D und des Coriolismomentes M_{Co}

Es ist zu erkennen, dass der Einfluss sowohl der Fliehkraft F_{Fl} als auch des Coriolismomentes M_{Co} auf das Verhalten des Systems gering ist. Ihr Einfluss nimmt mit wachsender Dynamik des technologischen Prozesses zu. Da ihre Funktionen (s. Gl. (8.31 c) und (8.31 d)) Multiplikationen zweier Signale enthalten ($\omega \cdot \omega$ bzw. $\omega \cdot v_R$), welche selbst sinusförmige Grundwellen besitzen, schwingen sie mit der doppelten Frequenz der anderen Signale.

Auf ein Problem einer derartigen Struktur sei noch hingewiesen: Die Ritzel-Zahnstange-Paarung im Drehantrieb neigt oft zu Stick-slip-Verhalten (s. Abschn. 4.1.2, vor allem Abb. 4.11).

Stick-slip-Verhalten zeigt das System, wenn die im Modell des Rundtisches bisher verwendete Gleichung (8.30 b) ersetzt wird durch die der Gl. (4.4 c) adäquate Gl. (8.42)

$$M_{DReib} = k_D \cdot \omega + \left(M_{Dir0} + M_{DSr0} \cdot e^{-|K_{D0} \cdot \omega|} \right) \cdot \text{sign}(\omega). \quad (8.42)$$

Die verwendeten Parameter sind

- $k_D = 10^5 \text{ N mm s}$,
- $M_{Dir0} = 0$,
- $M_{DSr0} = 6 \cdot 10^5 \text{ N mm}$,
- $K_{D0} = 2 \text{ s}$.

Abb. 8.30 zeigt die Verläufe von φ_{soll} , φ und $\Delta\varphi$ bei Auftreten von Stick-slip-Verhalten des Drehantriebs.

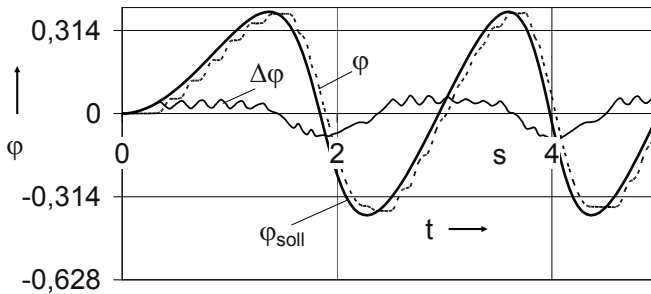


Abb. 8.30 Verläufe von φ_{soll} , φ und $\Delta\varphi$ beim Auftreten von Stick-slip-Verhalten des Drehantriebs

Die Auswirkungen des Stick-slip-Verhaltens des Drehantriebs auf die Ist-Bahn des Werkzeuges in der x_W - y_W -Ebene zeigt Abb. 8.31. Dem Auftreten von Stick-slip-Verhalten kann nur begrenzt mit der Optimierung des Reglers entgegengewirkt werden. Hier sind meist konstruktive Maßnahmen erforderlich (anderes Getriebeprinzip, andere Getriebeübersetzungen u. a.). Auf diese Fragen wird hier nicht eingegangen.

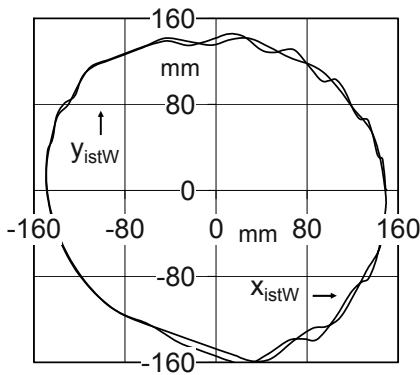


Abb. 8.31 Die Ist-Bahn des Werkzeuges in der x_W - y_W -Ebene beim Auftreten von Stick-slip-Verhalten des Drehantriebs

Im Beispiel-System dieses Abschnittes wurden keine Anschläge in das Modell aufgenommen. In Kap. 4 wurde darauf hingewiesen, dass in lagegeregelten hydraulischen Antrieben Anschläge i. Allg. nicht wirksam werden, wenn die Sollgrößen entsprechend begrenzt und die Regler richtig dimensioniert werden. Soll das Verhalten in der Nähe von Anschlägen jedoch untersucht werden, kann das Modell entsprechend modifiziert werden.

8.4 Punkt-zu-Punkt-Steuerung eines Luftschiffes

Seit einigen Jahren werden Experimente mit mobilen Robotern und Messeinrichtungen durchgeführt, die teilweise von kleinen Luftschiffen transportiert werden [8.7, 8.9]. Die Bahnführung und Orientierung dieser Luftschiffe im Raum ist wegen der vielen Freiheitsgrade schwieriger als bei am Boden agierenden Systemen. (Die Probleme sind denen von Schiffen und auch von luftbereiften Fahrzeugen ähnlich.)

8.4.1 Ermittlung des Blockschaltbildes eines ferngesteuerten Luftschiffes

Der 1. Schritt der Modellierung:

Abb. 8.32 zeigt das Schema eines derartigen Luftschiffes, für welches in [8.5] konstruktive und experimentell ermittelte Parameter genannt werden.

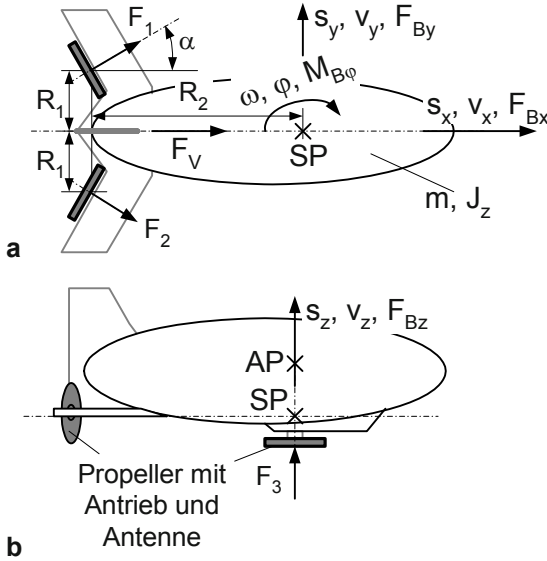


Abb. 8.32 Ein Luftschiff zum Transport leichter Messeinrichtungen. **a** Draufsicht **b** Seitenansicht

Für die mathematische Beschreibung sind vier der sechs Freiheitsgrade relevant. Wenn der Schwerpunkt SP des Luftschiffes weit unterhalb des Auftriebspunktes AP liegt und die Propellerkraft F_3 annähernd durch den Schwerpunkt des Luftschiffes geht, können Drehbewegungen um die Achsen x und y , das sog. Rollen und Neigen, vernachlässigt werden. Die zu berücksichtigenden vier Freiheitsgrade sind damit die translatorischen Bewegungen entlang der drei Achsen und die Rotation um die Achse z .

Der 2. und 3. Schritt:

Die Höhe des Luftschiffes über dem Boden wird nur von einer der drei Propellerkräfte, von F_3 , aktiv beeinflusst. Wenn die Gewichtskraft G und die Auftriebskraft A etwa gleichgroß sind, behält das Luftschiff seine z -Position auch bei $F_3 = 0$. Die Modellierung des Verhaltens in der z -Achse ist relativ einfach. Es können die bekannten Ansätze des 2. und 3. Schrittes aus **Anhang A, Tabelle A.1**, übernommen werden.

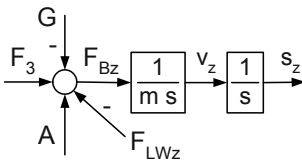


Abb. 8.33 Luftschiff, Blockschaltbild des 2. und 3. Schrittes der z -Achsen-Modellierung

Schwieriger ist die Modellierung des Verhaltens in der x - y -Ebene, da die übrigen drei Freiheitsgrade beachtet werden müssen. Ein günstiger Weg ist, die beiden Propellerkräfte F_1 und F_2 umzurechnen in ihren Anteil am Vorschub (Kraft F_V) und dessen Komponenten in x - und y -Richtung sowie am Drehmoment M um den Schwerpunkt SP. Dann können die bekannten Ansätze des 2. und 3. Schrittes aus **Anhang A, Tabelle A.1**, übernommen werden.

Die Kräfte und das Moment ergeben sich gemäß Abb. 8.32 zu:

$$F_V = (F_1 + F_2) \cdot \cos \alpha, \quad (8.43)$$

$$M = (F_1 - F_2) \cdot (R_1 \cdot \cos \alpha + R_2 \cdot \sin \alpha), \quad (8.44)$$

$$F_x = F_V \cdot \cos \varphi, \quad (8.45)$$

$$F_y = F_V \cdot \sin \varphi. \quad (8.46)$$

Dies ist im Blockschaltbild in Abb. 8.34 dargestellt.

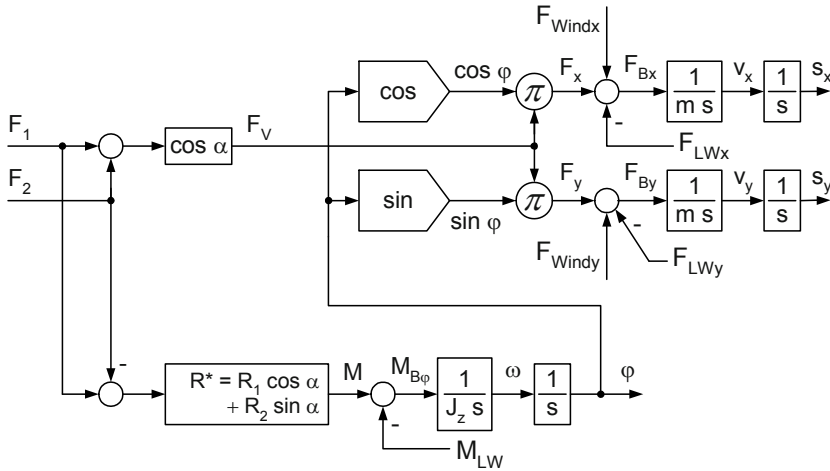


Abb. 8.34 Luftschiff, Blockschaltbild des 2. und 3. Schrittes der Modellierung der x - y -Ebene

Die Propeller werden von kleinen Elektromotoren angetrieben, wie sie in Abschn. 3.3 modelliert worden sind. Ihre Energiespeicher (Induktivität und Massträgheitsmoment) sind im Vergleich zu denen des Luftschiffes so klein, dass sie vernachlässigt werden können. Das Modell der Propellerantriebe kann damit im 4. Schritt der Modellierung beschrieben werden. Die weiteren Kräfte und Momente sind

- die Luftwiderstandskräfte F_{LWx} und F_{LWy} ,
- das Luftwiderstandsmoment M_{LW} sowie
- die Windkräfte F_{Windx} und F_{Windy} aus den Richtungen x und y .

4. Schritt der Modellierung (Ermittlung der noch fehlenden Zusammenhänge aus statischen Grundbeziehungen):

- Propellerkräfte:

Ein mit drei Hebeln ausgestattetes Fernsteuergerät (FSG) sorgt für eine stetige Ansteuerung der drei Motorsteller. Die Eingangsspannungen der Steller u_{PAi} sind proportional den Winkeln dieser Hebel, die zwischen $-\gamma_{Grenz}$ und $+\gamma_{Grenz}$ eingestellt werden können. Der Motor realisiert eine dieser Spannung proportionale Winkelgeschwindigkeit. Es wird in erster Annäherung angenommen, dass die Schubkräfte, die die Propeller auf das Luftschiff übertragen, proportional ihrer Winkelgeschwindigkeit sind. Das führt zu folgenden Beziehungen:

$$F_1 = K_{PA1} \cdot u_{PA1}, \quad (8.47 \text{ a})$$

$$F_2 = K_{PA2} \cdot u_{PA2}, \quad (8.47 \text{ b})$$

$$F_3 = K_{PA3} \cdot u_{PA3} \quad (8.47 \text{ c})$$

sowie

$$u_{PA1} = \begin{cases} K_{FSG1} \cdot \gamma_{Grenz} & \text{für } \gamma_1 \geq \gamma_{Grenz} \\ K_{FSG1} \cdot \gamma_1 & \text{für } -\gamma_{Grenz} < \gamma_1 < \gamma_{Grenz} \\ K_{FSG1} \cdot (-\gamma_{Grenz}) & \text{für } \gamma_1 \leq -\gamma_{Grenz} \end{cases}, \quad (8.47 \text{ d})$$

$$u_{PA2} = \begin{cases} K_{FSG2} \cdot \gamma_{Grenz} & \text{für } \gamma_2 \geq \gamma_{Grenz} \\ K_{FSG2} \cdot \gamma_2 & \text{für } -\gamma_{Grenz} < \gamma_2 < \gamma_{Grenz} \\ K_{FSG2} \cdot (-\gamma_{Grenz}) & \text{für } \gamma_2 \leq -\gamma_{Grenz} \end{cases}, \quad (8.47 \text{ e})$$

$$u_{PA3} = \begin{cases} K_{FSG3} \cdot \gamma_{Grenz} & \text{für } \gamma_3 \geq \gamma_{Grenz} \\ K_{FSG3} \cdot \gamma_3 & \text{für } -\gamma_{Grenz} < \gamma_3 < \gamma_{Grenz} \\ K_{FSG3} \cdot (-\gamma_{Grenz}) & \text{für } \gamma_3 \leq -\gamma_{Grenz} \end{cases}. \quad (8.47 \text{ f})$$

- Luftwiderstandskräfte sowie Luftwiderstandsmoment:

Sie wurden aus Flugversuchen ermittelt. In den relevanten Geschwindigkeitsbereichen konnten die Luftwiderstandskräfte und das Luftwiderstandsmoment ausreichend genau als der Geschwindigkeit bzw. Winkelgeschwindigkeit proportional beschrieben werden. (Wenn dies messtechnisch nicht belegt werden kann, sollte

die in Abschn. 4.1 angegebene nichtlineare Beziehung (Gl. (4.2)) verwendet werden.) Die Beziehungen lauten hier:

$$F_{LWx} = k_{Tx} \cdot v_x, \quad (8.48 \text{ a})$$

$$F_{LWy} = k_{Ty} \cdot v_y, \quad (8.48 \text{ b})$$

$$F_{LWz} = k_{Tz} \cdot v_z, \quad (8.48 \text{ c})$$

$$M_{LW} = k_R \cdot \omega. \quad (8.48 \text{ d})$$

- Windkräfte F_{Windx} und F_{Windy} :

Sie werden als Eingangsgrößen beschrieben. D. h., der Wind hat im Modell von allen Seiten dieselbe Wirkung auf das Luftschiff, das Luftschiff wird also näherungsweise als ein Rotationsellipsoid beschrieben. Die eigentlich vorhandene Abhängigkeit von φ (Angriffsfläche für Seitenwind größer als für Gegen- oder Rückenwind) wird hier vernachlässigt.

Der 5. Schritt:

Das Gesamtmodell ist trotz der Linearisierungen des Verhaltens zahlreicher Übertragungsglieder und weiterer vereinfachender Annahmen noch relativ komplex. Aus Abb. 8.35 ist zu ersehen, dass das System acht Zustandsgrößen enthält (acht Integrationen) und mehrfach nichtlinear ist.

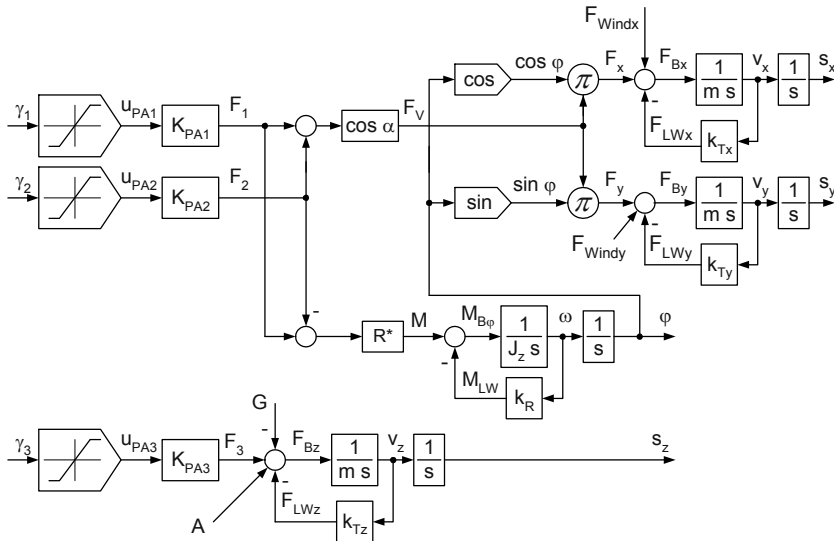


Abb. 8.35 Blockschaltbild eines ferngesteuerten Luftschiffes

8.4.2 Verhalten eines ferngesteuerten Luftschiffes

Einfach ist die Steuerung der Flughöhe, da sie keine Wirkungsverbindungen zu den anderen Teilen der Regelstrecke besitzt (s. Abb. 8.35). Abhängig von der Differenz zwischen dem aktuellen Wert von s_z und dem gewünschten Wert $s_{z\text{soll}}$ könnte der Antrieb für F_3 auf volle Kraft in die eine oder die andere Richtung geschaltet werden. (Diese Aufgabe könnte einfach von einer selbsttätigen Zweipunkt-Regelung übernommen werden. Voraussetzung ist ein Sensor, der den Abstand des Luftschiffes zum Boden misst.)

Die Realisierung eines vorgegebenen Kurses in der x - y -Ebene ist für den Bediener des Fernsteuergerätes eine sehr komplexe Regelungsaufgabe. Soll er beispielsweise das Luftschiff schnell von einer Ausgangsposition x_0, y_0, z_0 und einer Ausgangsorientierung φ_0 über eine zu überfliegende Zwischenposition x_1, y_1, z_1 zur Endposition x_2, y_2, z_2 und Endorientierung φ_2 steuern, dann sind sehr viele Beobachtungen der Weg- und Winkelwerte und ihrer Vergleiche mit Zielwerten über eine Auge-Hand-Koordination in effiziente Winkelpositionen γ_1 und γ_2 am Steuergerät zu übersetzen.

Die erste Aufgabe wird sein, das Luftschiff in die dem nächsten Ziel entsprechende Orientierung zu bringen, erst danach wird mit maximalem Vorschub beschleunigt werden können. Beim Überfliegen der Zwischenposition kann es günstig sein, das Ziel früh anzuvisieren, da sonst ein weites Abdriften vom Kurs entstehen kann.

- Die Parameter des Luftschiffes sind
 - $\alpha \approx 30^\circ$ und damit $\cos \alpha = 0,866$,
 - $R_1 \approx 0,21 \text{ m}$, $R_2 \approx 2,10 \text{ m}$ und $R^* = 0,21 \text{ m} \cdot 0,866 + 2,1 \text{ m} \cdot 0,5 = 1,23 \text{ m}$ (s. Abb. 8.34),
 - $m = 1 \text{ kg} = 1 \text{ N s}^2/\text{m}$,
 - $J_z = 0,44 \text{ Nm s}^2$,
 - $k_{Tx} = k_{Ty} = 0,175 \text{ N s/m}$,
 - $k_{Tz} = 1 \text{ N s/m}$ (spielt in den folgenden Beispielen keine Rolle, da die Flughöhensteuerung bzw. -regelung nicht näher untersucht wird),
 - $k_R = 0,88 \text{ Nm s}$,
 - $K_{PA1} = K_{PA2} = K_{PA3} = 0,02 \text{ N/V}$,
 - $\varphi_{\text{Grenz}} = 20^\circ$,
 - $K_{FSG1} = K_{FSG2} = K_{FSG3} = 0,25 \text{ V/}^\circ$.
- Die angreifenden Kräfte sind (zunächst)
 - $G = 10 \text{ N}$, $A = 9,95 \text{ N}$ (Differenz beider mit Federwaage gemessen),
 - $F_{\text{Windx}} = F_{\text{Windy}} = 0$.

- Die Positionen und Orientierungen in der Ebene sind
 - $x_0 = y_0 = 0, \varphi_0 = 0,$
 - $x_1 = 5 \text{ m}, y_0 = 0,$
 - $x_2 = 5 \text{ m}, y_0 = 5 \text{ m}, \varphi_0 = -90^\circ.$
- Die Höhenwerte seien jeweils $z_0 = z_1 = z_2 = 2 \text{ m}$. Um diesen Zustand zu halten, muss $\gamma_3 = +10^\circ = \text{konst.}$ sein. Dann ist im Modell $F_3 = 0,05 \text{ N}$, eine Simulation ist nicht erforderlich.

In einer Simulation soll gezeigt werden, wie diese Positionen in der x - y -Ebene mit relativ einfachen Verläufen der Kräfte annähernd erreicht werden. Abb. 8.36 zeigt die durch Probieren gefundenen Zeitverläufe der Kräfte F_1 und F_2 . Sie entstehen, wenn die entsprechenden Hebel des Fernsteuergerätes γ_1 und γ_2 jeweils auf die Grenzwerte $-\gamma_{\text{Grenz}}$ oder $+\gamma_{\text{Grenz}}$ eingestellt sind.

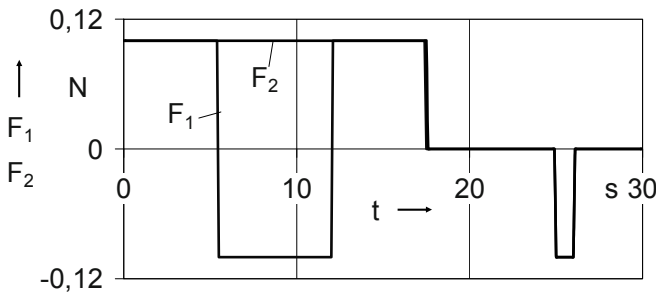


Abb. 8.36 Verläufe der Propeller-Kräfte F_1 und F_2

In Abb. 8.37 sind die sich aus den Kraftverläufen F_1 und F_2 ergebenden Zeitverläufe der Signale s_x , s_y und φ dargestellt.

Die Zwischenposition $x_1 = 5 \text{ m}, y_0 = 0$ wird überflogen: Bei $s_x = 5 \text{ m}$ ist s_y noch etwa null.

Zu erkennen ist in Abb. 8.37 b, dass die Orientierung von $\varphi_0 = 0$ auf $\varphi_0 = -90^\circ$ sehr früh beginnen muss, da sonst große Umwege geflogen werden müssen.

Da in dem Zeitbereich der Drehung um die x -Achse die Summe beider Heck-Propeller-Kräfte null ist und damit auch die Vorschubkraft F_V null ist, bewegt sich der Schwerpunkt des Luftschiffes zunächst weiterhin auf der x -Achse. Die Trägheit des Luftschiffes führt dazu, dass der Flug von der Zwischenposition zur Endposition in einem Bogen erfolgt. Dies ist in Abb. 8.38 in einigen Phasen dargestellt.

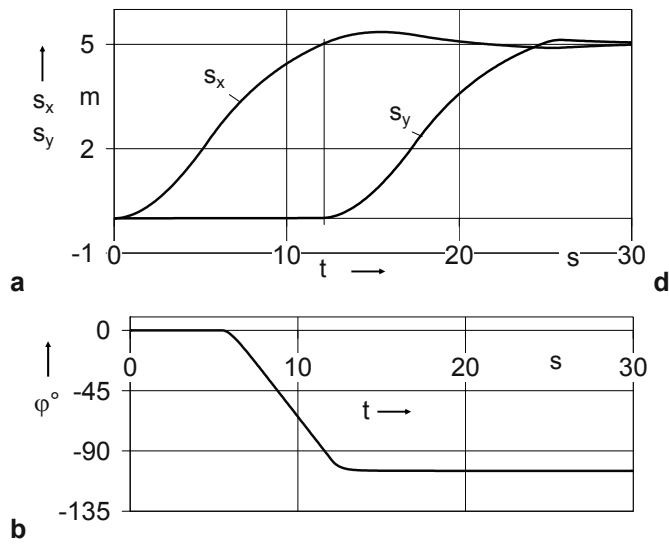


Abb. 8.37 Verläufe der die Positionierung und der Orientierung bestimmenden Größen. **a** Weg s_x und s_y , **b** Orientierung φ

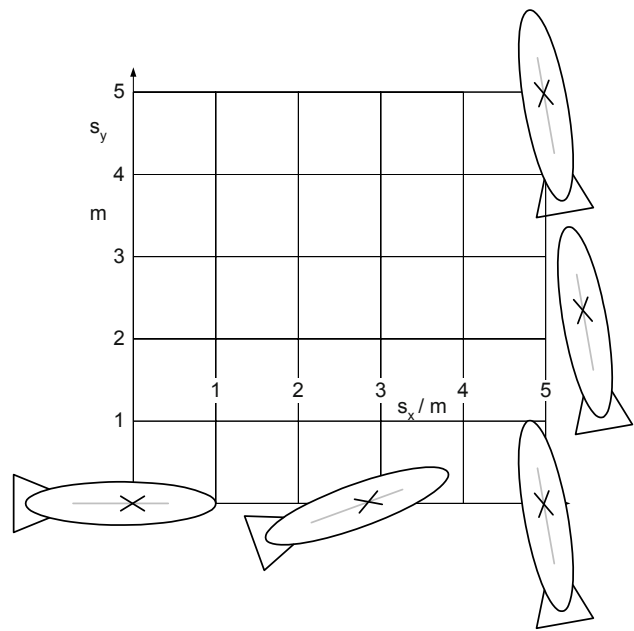


Abb. 8.38 Fünf Phasen des simulierten Fluges

Es ist offensichtlich, dass Windeinflüsse oder von $\varphi_0 = 0$ abweichende Startorientierungen andere Steuerstrategien erfordern.

Wird ein Luftschiff als Träger eines mobilen Messsystems eingesetzt, dann müssen seine Position und Orientierung in der x - y -Ebene geregelt werden.

8.4.3 Die Regelung des Luftschiffes in der x - y -Ebene

Zu Beginn des Abschnittes 8.4.2 wurde schon auf die einfache Realisierung der Flughöhenregelung hingewiesen. Auf sie wird im Folgenden nicht näher eingegangen. In diesem Abschnitt liegt der Schwerpunkt auf der Regelung der Position und der Orientierung in der x - y -Ebene.

Eine in einem solchen System komplizierte Aufgabe ist die Realisierung der Sensoren für die drei Regelgrößen s_x , s_y und φ . Denkbar sind Abstandssensoren zu festen Punkten und Berechnungen der Koordinaten aus diesen Abständen in der Regeleinrichtung oder auch spezielle Navigationssysteme. Die Orientierung, also der Istwert von φ , kann mit Hilfe eines Gyroskops ermittelt werden. Hier soll angenommen werden, dass die Sensorik realisiert ist und folgende einfache Beziehungen ihr Verhalten beschreiben:

$$u_x = K_x \cdot s_x, \quad (8.49 \text{ a})$$

$$u_y = K_y \cdot s_y, \quad (8.49 \text{ b})$$

$$u_\varphi = K_\varphi \cdot \varphi. \quad (8.49 \text{ c})$$

Aus Abb. 8.35 ist zu erkennen, dass für die drei Regelgrößen s_x , s_y und φ nur zwei Stellgrößen zur Verfügung stehen: u_{PA1} und u_{PA2} . (Das Fernsteuergerät entfällt, die beiden Spannungen werden später von den Reglern bereitgestellt.)

Der Grundgedanke der Regelung besteht darin, die beiden Propellerantriebe 1 und 2 so anzusteuern, dass einerseits die Summe beider Antriebskräfte den Abstand zur Sollposition minimiert und andererseits die Kräftedifferenz dazu führt, das Luftschiff so auszurichten, dass es stets auf die Sollposition zeigt. Insbesondere der zweite Vorgang muss sehr schnell erfolgen, damit beide Antriebskräfte möglichst schnell den Abstand verringernd wirken. Voraussetzung ist, dass der Abstand und auch der Sollwert des Winkels φ aus verfügbaren geometrischen Größen berechnet werden können. Die Sensorfaktoren K_x , K_y , K_φ müssen in die Berechnung dieser Größen mit eingehen.

Die Umsetzung dieser Überlegungen in die Struktur der Regeleinrichtung zeigt Abb. 8.39. Auf die Herleitung des mathematischen Modells der Regeleinrichtung wird nicht ausführlich eingegangen.

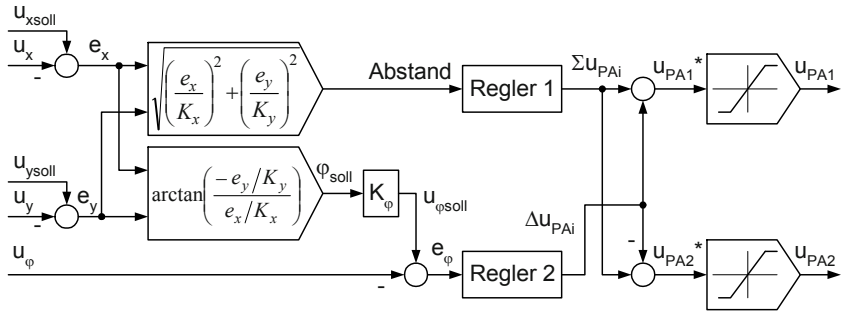


Abb. 8.39 Struktur der Lageregeleinrichtung eines Luftschiffes in der x - y -Ebene

Die Funktionen zur Überführung von drei Regelgrößen in zwei Stellgrößen lauten:

$$Abstand = \sqrt{\frac{e_x^2}{K_x^2} + \frac{e_y^2}{K_y^2}}, \quad (8.50 \text{ a})$$

$$\varphi_{soll} = \arctan\left(\frac{-e_y/K_y}{e_x/K_x}\right), \quad (8.50 \text{ b})$$

$$\Sigma u_{PAi} = G_{R1}(s) \cdot Abstand, \quad (8.50 \text{ c})$$

$$\Delta u_{PAi} = G_{R2}(s) \cdot e_\varphi. \quad (8.50 \text{ d})$$

Auch in diesem Beispiel werden einfache P-Regler eingesetzt:

$$G_{R1}(s) = K_{PR1}, \quad (8.51 \text{ a})$$

$$G_{R2}(s) = K_{PR2}. \quad (8.51 \text{ b})$$

Es ist zu beachten, dass dies zu bleibenden Regelfehlern führt, wenn äußere Störkräfte, z. B. Windkräfte, auftreten. Für das Simulationsbeispiel ist die Wahl einfacher Regler günstig, da ihr Verhalten gut nachempfunden werden kann.

Um die Propellerantriebe 1 und 2 nicht zu überlasten, müssen die Stellgrößen u_{PA1} und u_{PA2} auch im Rahmen der Regelung begrenzt werden:

$$u_{PA1} = \begin{cases} 5 \text{ V} & \text{für } u_{PA1}^* \geq 5 \text{ V} \\ K_{PR1} \cdot u_{PA1}^* & \text{für } -5 \text{ V} < u_{PA1}^* < 5 \text{ V} , \\ -5 \text{ V} & \text{für } u_{PA1}^* \leq -5 \text{ V} \end{cases} \quad (8.52 \text{ a})$$

$$u_{PA2} = \begin{cases} 5 \text{ V} & \text{für } u_{PA2}^* \geq 5 \text{ V} \\ K_{PR2} \cdot u_{PA2}^* & \text{für } -5 \text{ V} < u_{PA2}^* < 5 \text{ V} . \\ -5 \text{ V} & \text{für } u_{PA2}^* \leq -5 \text{ V} \end{cases} \quad (8.52 \text{ b})$$

Das führt, gemeinsam mit Abb. 8.35, zu dem Gesamt-Blockschaltbild der Regelung in der x - y -Ebene in Abb. 8.40.

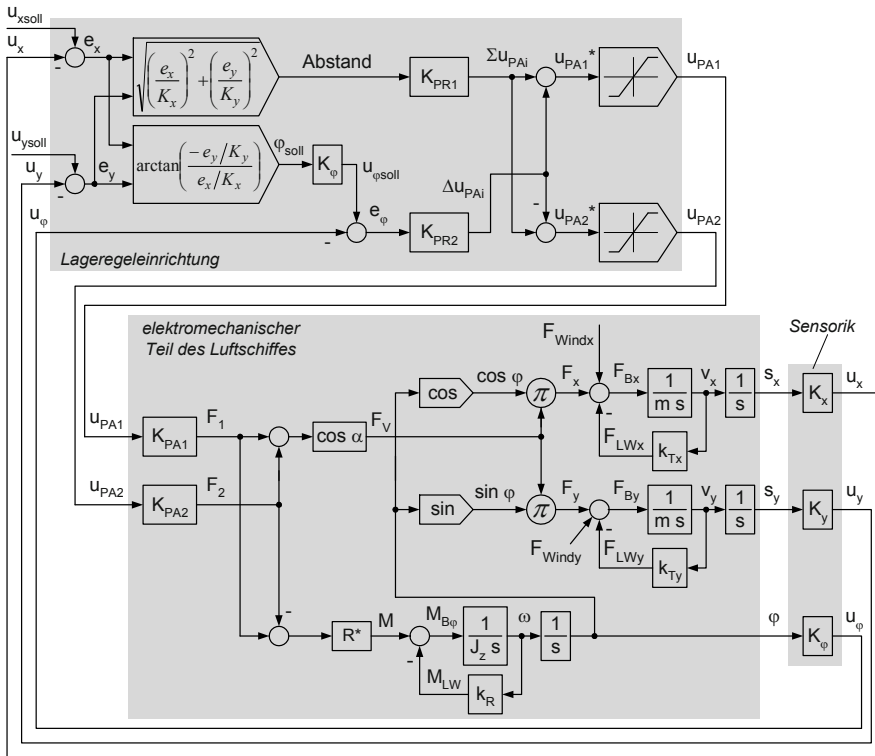


Abb. 8.40 Blockschaltbild eines in der x - y -Ebene lagegeregelten Luftschiffes

Folgende Parameter waren noch festzulegen:

- Sensoren:
 - $K_x = 1 \text{ V/m}$,

- $K_y = 1 \text{ V/m}$,
- $K_\varphi = 1 \text{ V/rad}$,
- Regler 1 und 2:
 - $K_{PR1} = 1 \text{ V/m}$,
 - $K_{PR2} = 20 \text{ V/V}$,
- Sollgrößen (analog Abschn. 8.4.2):
 - $u_{xsoll} = 5 \text{ V}$,
 - $u_{ysoll} = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 12 \text{ s} \\ 5 \text{ V} & \text{für } t \geq 12 \text{ s} \end{cases}$.

Die Simulationsergebnisse sind ähnlich denen in Abschn. 8.4.2, wenn ebenfalls kein Wind herrscht und die Anfangsorientierung des Luftschiffes $\varphi_0 = 0$ ist.

Im Folgenden wird das Verhalten simuliert, wenn die Anfangsorientierung des Luftschiffes $\varphi_0 = 1 \text{ rad}$ ist und eine Windkraft $F_{Windy} = -0,03 \text{ N}$ auf das Luftschiff wirkt (F_{Windy} bleibt null). Die folgenden Abbildungen (Abb. 8.41 bis Abb. 8.43) zeigen für die drei Sensorsignale der Regelgrößen jeweils die Verläufe der Soll- und der Ist-Größen.

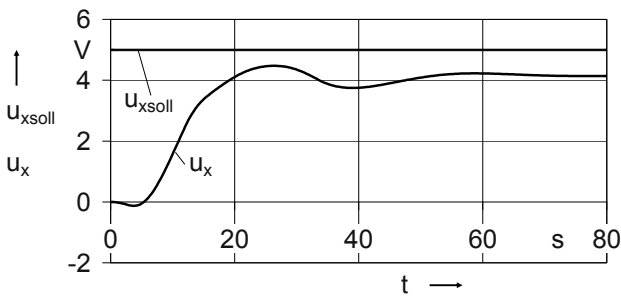


Abb. 8.41 Verläufe der Größen u_{xsoll} und u_x

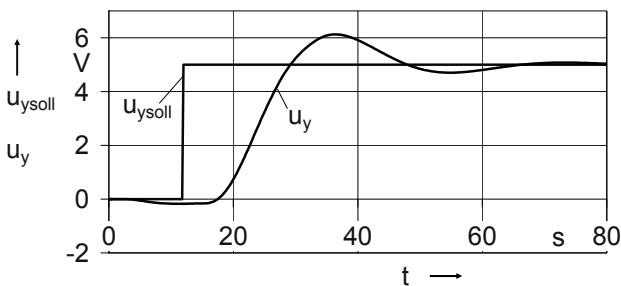


Abb. 8.42 Verläufe der Größen u_{ysoll} und u_y

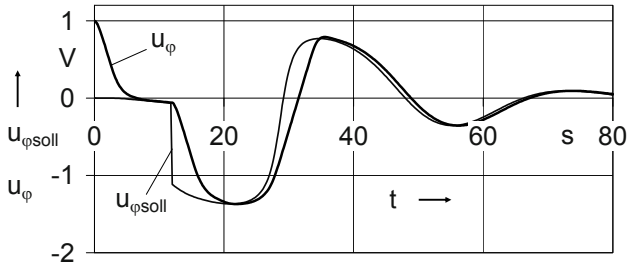


Abb. 8.43 Verläufe der Größen $u_{\varphi\text{soll}}$ und u_{φ}

Die Differenzen zwischen Soll- und Ist-Signalen, die Regelabweichungen, werden in der Regeleinrichtung zu den Stellgrößen verarbeitet. Das führt zu den Kraftverläufen in Abb. 8.44.

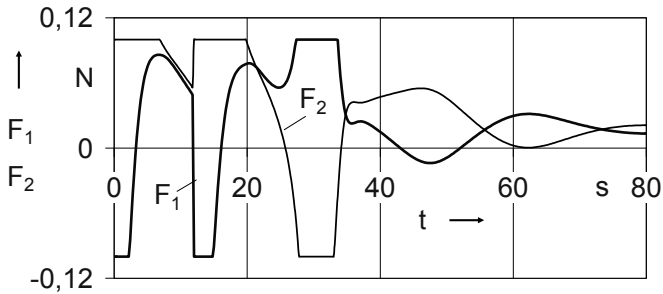


Abb. 8.44 Verläufe der Propeller-Kräfte F_1 und F_2

Diese Kraftverläufe unterscheiden sich, wie zu erwarten war, stark von denen in Abschn. 8.4.2. Das beginnt bereits in den ersten Sekunden des Eindrehens in die richtige Orientierung.

In Abb. 8.45 ist der Kurs mit der jeweiligen Orientierung des Luftschiffes in fünf Phasen dargestellt.

Infolge der Windkraft und des verzögerten Fluges in x -Richtung wird der Überflugpunkt verfehlt, der Endpunkt wird nur annähernd erreicht. Die Signalverläufe sind relativ schwach gedämpft.

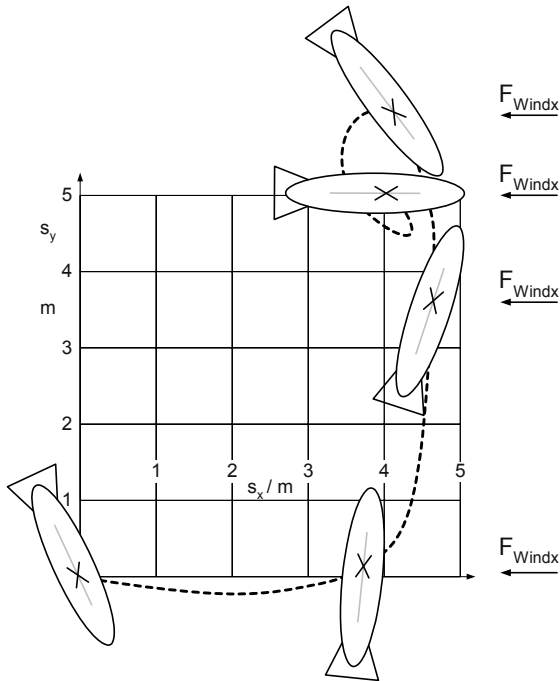


Abb. 8.45 Kurs des lagegeregelten Luftschiffes mit der Orientierung in fünf Phasen

Das Verhalten dieser Regelung soll nicht ausführlich diskutiert werden. Auf zwei Schwachpunkte des Reglers soll jedoch kurz eingegangen werden:

- Eine wichtige Aufgabe der Regeleinrichtung ist die Berechnung des Orientierungs-Sollwertes φ_{soll} . Der Tangens dieses Winkels ist nur im Bereich $-\pi/2 < \varphi_{soll} < \pi/2$ eindeutig. Im Simulationsbeispiel ist das ausreichend. Werden aber andere Reglerparameter eingestellt, wird dieser Bereich bereits verlassen. Mit Hilfe des Vorzeichens von e_x kann die Eindeutigkeit auf $-3\pi/2 < \varphi_{soll} < \pi/2$ erweitert werden:

$$u_{\varphi_{soll}} = \arctan\left(\frac{-e_y/K_y}{e_x/K_x}\right) - \frac{\pi}{2} \cdot (1 - \text{sign}(e_x)). \quad (8.53)$$

- Die bleibende Regelabweichung in x -Richtung entsteht infolge der Windkraft in x -Richtung. Da der Regler proportionales Verhalten besitzt, kann das System nur dann eine Gegenkraft aufbauen, wenn die Eingangsgröße in den Regler 1, der errechnete Abstand zum Zielpunkt, einen endlich großen Wert besitzt. Ein

integrierender Anteil im Regler hilft hier nicht, da die Strecken bereits integrierendes Verhalten haben.

In der Praxis sind sehr komplexe Regeleinrichtungen im Einsatz. Sie enthalten z. B. interne Modelle des Luftschiffverhaltens, um mit Hilfe von Filtern bei zeitweiligem Ausfall von Sensorsignalen auf deren Signale umzuschalten, damit die Regelung aufrecht gehalten werden kann. Darauf kann im Rahmen dieses Buches nicht eingegangen werden.

8.5 Temperaturregelung eines Trockenschrankes

Ein Trockenschrank besitzt eine Temperaturregelung. Die Temperatur wird mit Hilfe eines Sensors gemessen. Der Temperatursollwert wird vom Nutzer so eingestellt, dass das zu trocknende Material nicht geschädigt wird. Die Differenz beider Temperaturwerte verarbeitet ein Regler. Dessen Ausgangsgröße wird, i. Allg. leistungsverstärkt, dem Heizer des Schrankes zugeführt. Damit folgt die Temperatur dem Temperatursollwert immer nach. In Materialien wie Sand kann der Sollwert hoch sein, um einen kurzen Trocknungsprozess zu erreichen. Er muss bei empfindlichen Materialien, die verkrusten oder verbrennen können, relativ niedrig gewählt werden. Ein Problem dieser Regelung besteht darin, dass sich der Sensor meist nicht in der zu trocknenden Probe befindet, sondern, um Verschmutzung zu vermeiden, außerhalb des die Probe aufnehmenden Gefäßes. (In [8.3] wurde ein ähnliches Problem untersucht.)

Die für die Optimierung des Trocknungsprozesses wichtige Größe ist aber die Temperatur der Probe, die damit nicht direkt gemessen werden kann.

8.5.1 Ermittlung von Blockschaltbildern der Regelstrecke

Der 1. Schritt der Modellierung:

Das Grobschema (Abb. 8.46) der Strecke enthält vier Körper, die Wärme speichern können, den Heizer, die Probe, den Sensor und die Ummantelung. Die Versorgungsspannung u_V ist die Ausgangsspannung eines Verstärkers.

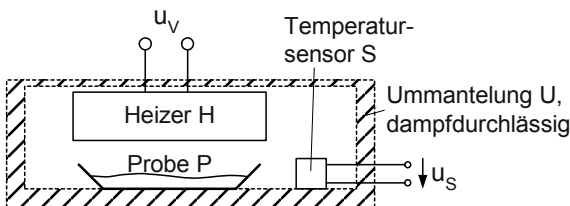


Abb. 8.46 Grobschema eines Trockenschrankes

Die Speicherkapazität des Dampf-Luft-Gemisches zwischen den Körpern wird vernachlässigt.

Zwischen diesen vier Wärmespeichern befinden sich sechs Wärmebrücken. Dies ist in Abb. 8.47 dargestellt. (Auf die Beziehung $P_{el} = f(u_T)$ und die Funktion des Temperatursensors mit seiner Ausgangsspannung u_S wird im 4. Schritt eingegangen.)

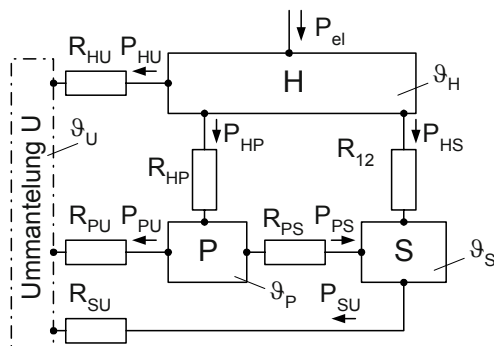


Abb. 8.47 Das allgemeine Wärmeleistungs-Temperatur-Schema eines Trockenschrankes auf der Basis der Bausteine in Abb. 3.18 b. H Heizer, P Probe, S Sensor

Der 2. und 3. Schritt:

Es wird angenommen, dass die Speicherfähigkeit der Ummantelung U so groß ist, dass sich ihre Temperatur während des Trocknungsvorganges nicht wesentlich verändert, so dass nur drei Speicher in das Modell eingehen. Die Temperatur ϑ_U ist damit eine Eingangsgröße. Gemäß Abb. 3.19 ergeben sich die Blockschaltbilder nach Abb. 8.48 (P_{gX} sind die im Speicher X mit der Wärmekapazität C_X gespeicherten Wärmeleistungen).

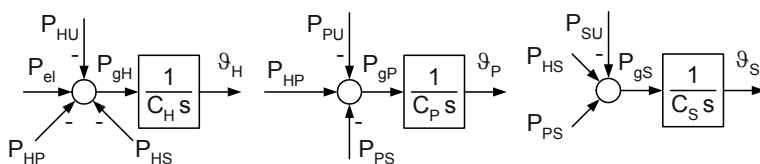


Abb. 8.48 Wärmespeicher des Trockenofens, Blockschaltbilder des 2. und 3. Schrittes

4. Schritt:

Die durch Leitung, Konvektion und Strahlung entstehenden Wärmetransporte werden wiederum wie in Abschn. 3.5 beschrieben:

Dem Transport einer Wärmeleistung P_{mn} von Körper m zu Körper n wird ein Widerstand R_{mn} entgegengesetzt. Der Widerstand R_{mn} wird auch in diesem Beispiel als konstant angenommen:

$$P_{mn} = \frac{1}{R_{mn}} \cdot \Delta \vartheta_{mn} . \quad (8.54 \text{ a})$$

Die Heizwendel besitzt einen konstanten ohmschen Widerstand R_{oH} . (Der Index o wurde verwendet, um den Unterschied zwischen ohmschem Widerstand und Widerständen gegen den Transport von Wärmeleistung deutlich zu machen.) Das führt zu der nichtlinearen Beziehung

$$P_{el} = \frac{u_V^2}{R_{oH}} . \quad (8.54 \text{ b})$$

Der Temperatursensor liefert eine der Temperatur ϑ_S in Grad Celsius proportionale Spannung u_S . In diesem Beispiel-System könnte mit der Dimension $^{\circ}\text{C}$ gearbeitet werden, da nur Temperatur-Differenzen eine Rolle spielen. Im Folgenden werden aber alle Temperaturen in der Dimension K angegeben. Die Funktion des Sensors lautet damit

$$u_S = K_{Sens} \cdot (\vartheta_S - 273 \text{ K}) . \quad (8.54 \text{ c})$$

Der Faktor K_{Sens} hat die Dimension V/K .

Der 5. Schritt:

Es entsteht das allgemeine Blockschaltbild der Regelstrecke in Abb. 8.49.

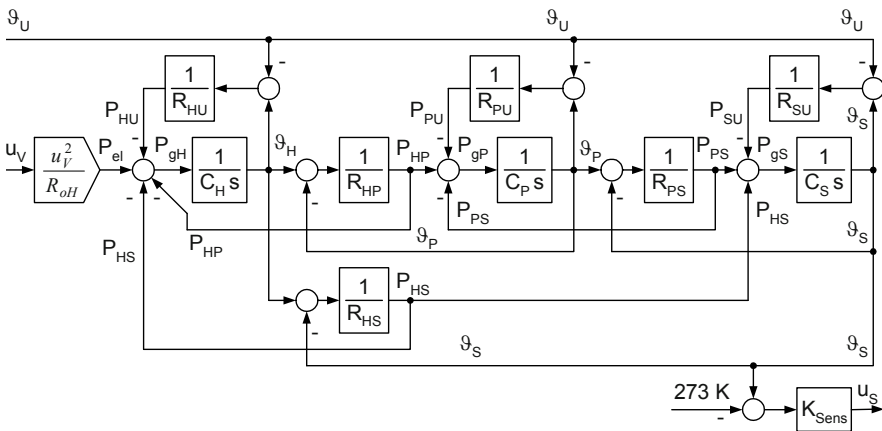


Abb. 8.49 Das allgemeine Blockschaltbild der Temperatur-Regelstrecke eines Trockenofens

Dieses komplexe Modell aus drei Kapazitäten, sechs Widerständen und den Funktionen des Heizers und des Sensors wird Basis der Simulation des Verhaltens der Regelstrecke sein.

Vorher wird abgeschätzt, welche Korrektur-Funktion zu erwarten ist, wenn aus der messbaren Größe ϑ_S auf die eigentlich relevante Größe ϑ_P geschlossen werden soll. Folgende Annahmen und Festlegungen werden getroffen, um diese Funktion abschätzen zu können:

- Die Rückwirkungen P_{HP} und P_{HS} sind klein gegenüber P_{HU} .
- Der Widerstand R_{PS} geht gegen unendlich.
- Die Temperaturen werden als Differenz zu ϑ_U angegeben:

$$\Delta\vartheta_H = \vartheta_H - \vartheta_U,$$

$$\Delta\vartheta_P = \vartheta_P - \vartheta_U,$$

$$\Delta\vartheta_S = \vartheta_S - \vartheta_U.$$

Aus Abb. 8.49 entsteht für den thermodynamischen Teil zunächst das Blockschaltbild in Abb. 8.50.

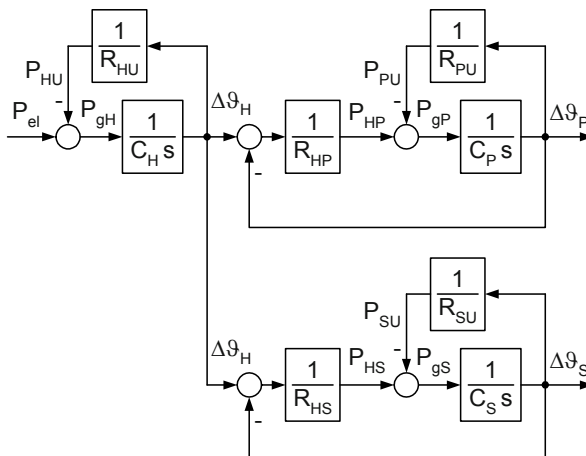


Abb. 8.50 Vereinfachtes Blockschaltbild für den thermodynamischen Teil der Temperatur-Regelstrecke eines Trockenofens

Nach entsprechenden Zusammenfassungen linearer Übertragungsglieder mit Hilfe der Kreisformel entsteht das Blockschaltbild in Abb. 8.51.

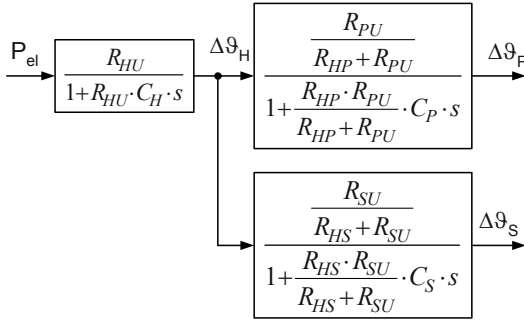


Abb. 8.51 Vereinfachtes Blockschaltbild für den thermodynamischen Teil der Temperatur-Regelstrecke eines Trockenschrankes nach weiteren Zusammenfassungen

Werden die Übertragungsfunktionen der Probe P und des Sensors S wie folgt geschrieben

$$\Delta \vartheta_P = \frac{K_{HP}}{1 + T_P \cdot s} \cdot \Delta \vartheta_H \quad (8.55 \text{ a})$$

$$\text{mit } K_{HP} = \frac{R_{PU}}{R_{HP} + R_{PU}} \text{ und } T_P = \frac{R_{HP} \cdot R_{PU}}{R_{HP} + R_{PU}} \cdot C_P, \quad (8.55 \text{ b})$$

$$\Delta \vartheta_S = \frac{K_{HS}}{1 + T_S \cdot s} \cdot \Delta \vartheta_H \quad (8.56 \text{ a})$$

$$\text{mit } K_{HS} = \frac{R_{SU}}{R_{HS} + R_{SU}} \text{ und } T_S = \frac{R_{HS} \cdot R_{SU}}{R_{HS} + R_{SU}} \cdot C_S, \quad (8.56 \text{ b})$$

dann kann aus der Messgröße $\Delta \vartheta_S$ der Verlauf der Proben temperatur abgeschätzt werden:

$$\Delta \vartheta_{P_{\text{gesch}}} = K_{\text{kor}} \cdot \frac{1 + T_S \cdot s}{1 + T_P \cdot s} \cdot \Delta \vartheta_S \text{ mit } K_{\text{kor}} = \frac{K_{HP}}{K_{HS}}. \quad (8.57)$$

Die Gültigkeit dieser Aussage soll zunächst mit Hilfe der Simulation des Streckenverhaltens nachgeprüft werden.

8.5.2 Simulation des Streckenverhaltens

Basis der Simulation ist das Blockschaltbild in Abb. 8.49, ergänzt durch die Funktion in Gl. (8.57), um die Aussage zu dieser Funktion bestätigen zu können oder verwerfen bzw. modifizieren zu müssen. Dabei ist zu beachten, dass

$$\Delta \vartheta_{P_{gesch}} = \vartheta_{P_{gesch}} - \vartheta_U \quad \text{und} \quad \Delta \vartheta_S = \vartheta_S - \vartheta_U$$

sind und damit in das Modell eingefügt werden muss:

$$\vartheta_{P_{gesch}} = K_{korrr} \cdot \frac{1 + T_S \cdot s}{1 + T_P \cdot s} \cdot (\vartheta_S - \vartheta_U) + \vartheta_U. \quad (8.58)$$

Folgende Parameter wurden gewählt:

- Ein- und Ausgangsblöcke der Strecke:
 - $K_{Sens} = 0,05 \text{ V/K}$,
 - $R_{oH} = 0,05 \Omega = 0,05 \text{ V/A}$,
- Wärmekapazitäten:
 - $C_H = 50 \text{ J/K} = 50 \text{ Nm/K}$,
 - $C_P = 200 \text{ J/K} = 200 \text{ Nm/K}$,
 - $C_S = 10 \text{ J/K} = 10 \text{ Nm/K}$,
- Widerstände gegen den Transport von Wärmeleistung:
 - $R_{HU} = 1 \text{ K s/J} = 1 \text{ K s/Nm}$,
 - $R_{HP} = R_{PU} = 1 \text{ K s/J} = 1 \text{ K s/Nm}$,
 - $R_{HS} = 8 \text{ K s/J} = 8 \text{ K s/Nm}$,
 - $R_{SU} = 2 \text{ K s/J} = 2 \text{ K s/Nm}$,
 - $R_{PS} = 50 \text{ K s/J} = 50 \text{ K s/Nm}$.

Als Anfangswerte der Zustandsgrößen und als Eingangsgrößen werden festgelegt:

- $\vartheta_H = \vartheta_P = \vartheta_S = 293 \text{ K}$,
- $\vartheta_U = 293 \text{ K}$,
- $u_V = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 50 \text{ s} \\ 4 \text{ V} & \text{für } t > 50 \text{ s} \end{cases}$.

Die ersten 50 Sekunden dienen der Kontrolle der Eingabe: Die Signale des Modells müssen ihre Anfangswerte behalten.

Nach Gl. (8.55 b) bis (8.57) ergeben sich weitere Konstanten:

$$K_{HP} = \frac{R_{PU}}{R_{HP} + R_{PU}} = \frac{1}{1+1} = 0,5,$$

$$T_P = \frac{R_{HP} \cdot R_{PU}}{R_{HP} + R_{PU}} \cdot C_P = \frac{1 \text{ K s / Nm} \cdot 1 \text{ K s / Nm}}{(1+1) \text{ K s / Nm}} \cdot 200 \text{ Nm / K} = 100 \text{ s},$$

$$K_{HS} = \frac{R_{SU}}{R_{HS} + R_{SU}} = \frac{2}{1+2} = 0,2,$$

$$T_S = \frac{R_{HS} \cdot R_{SU}}{R_{HS} + R_{SU}} \cdot C_S = \frac{8 \text{ K s / Nm} \cdot 2 \text{ K s / Nm}}{(8+2) \text{ K s / Nm}} \cdot 10 \text{ Nm / K} = 16 \text{ s},$$

$$K_{\text{kor}} = \frac{K_{HP}}{K_{HS}} = \frac{0,5}{0,2} = 2,5.$$

Diese Konstanten sind für das Korrekturglied in Gl. (8.57) erforderlich.

Mit ihnen können aber auch bestimmte Abschätzungen an Hand des **Anhangs B, Tabelle B.1**, durchgeführt werden, wenn die Zeitkonstante des Heizers T_H einbezogen wird:

$$T_H = R_{HU} \cdot C_H = 1 \text{ K s / Nm} \cdot 50 \text{ Nm / K} = 50 \text{ s}.$$

Darauf kann jedoch verzichtet werden, wenn die Verläufe von ϑ_P und $\vartheta_{P_{\text{gesch}}}$ nur wenig voneinander abweichen, die obigen Abschätzungen zulässig sind.

Die Simulationsergebnisse sind in den folgenden Abbildungen dargestellt, die Verläufe der zugeführten (P_{el}) und abgeführten Leistungen in Abb. 8.52.

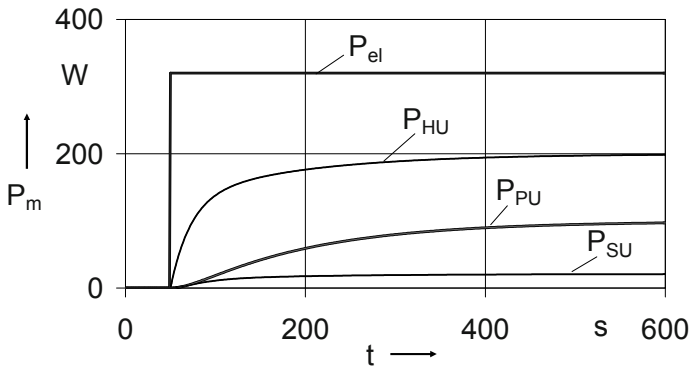


Abb. 8.52 Verläufe der zugeführten (P_{el}) und abgeführten Leistungen

Die Summe aus den Leistungen P_{PU} und P_{SU} entspricht der Differenz zwischen P_{el} und P_{HU} . In Abb. 8.53 ist der Verlauf der um Größenordnungen kleineren Leistung, die zwischen Probe und Sensor bewegt wird, dargestellt.

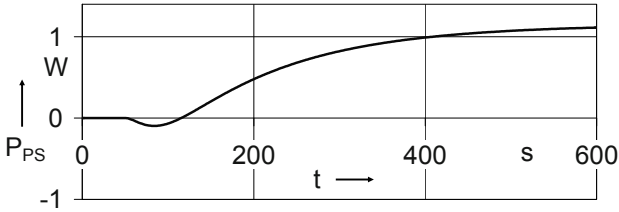


Abb. 8.53 Verlauf der Leistung P_{PS}

Damit gilt für $t \rightarrow \infty$ in guter Näherung

$$P_{PU} \approx P_{HP} \text{ sowie } P_{SU} \approx P_{HS}$$

und die Annahme, dass aus dem Verlauf von ϑ_S der Verlauf von ϑ_P abgeschätzt werden kann. In Abb. 8.54 sind zunächst die vier Temperaturverläufe ϑ_H , ϑ_P , ϑ_S und ϑ_U dargestellt worden und in Abb. 8.55 die zu vergleichenden Verläufe von ϑ_P und $\vartheta_{P_{gesch}}$.

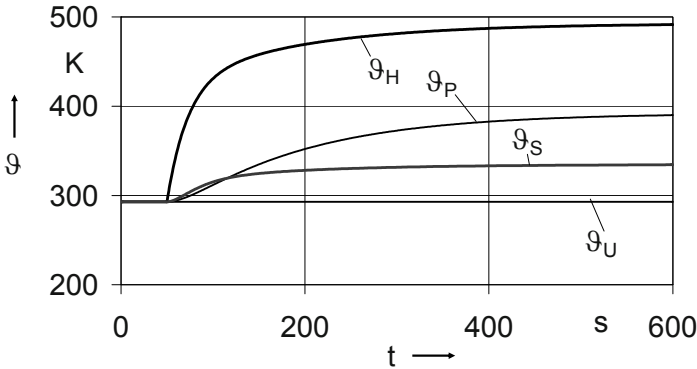


Abb. 8.54 Temperaturverläufe von ϑ_H , ϑ_P , ϑ_S und ϑ_U

Die unterschiedlichen Zeitkonstanten und statischen Übertragungsfaktoren von Probe und Sensor sind an den Verläufen von ϑ_P und ϑ_S deutlich zu erkennen. Dass zunächst ϑ_S größer ist und später ϑ_P , wirkt sich auf die Vorzeichen der Leistung P_{PS} aus (s. Abb. 8.53).

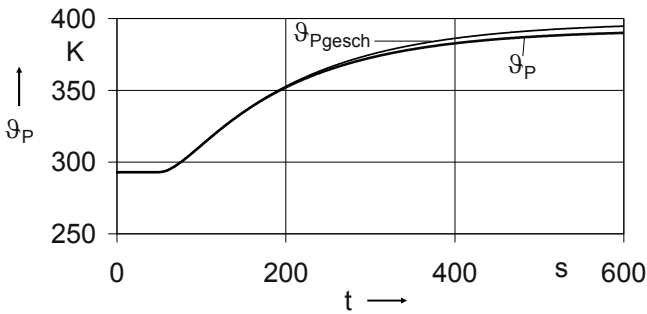


Abb. 8.55 Die zu vergleichenden Verläufe ϑ_P und $\vartheta_{P_{gesch}}$

Die geringe Differenz der statischen Endwerte beider Kurven ist auf die von null verschiedene Leistung P_{PS} zurückzuführen. Dies wird mit einer geringfügigen Verringerung des Faktors K_{kor} in Gl. (8.58) innerhalb der noch zu behandelnden Regelung berücksichtigt werden.

Auch der bisher noch nicht in die Simulation einbezogene Temperatur-Sensor wird im Rahmen der Regelung berücksichtigt.

8.5.3 Das Modell und das Verhalten der Regelung

Das Modell der Regelstrecke ist in Abb. 8.49 dargestellt. Die Abschätzung des Verhaltens nach Gl. (8.58) spielt jetzt in einer anderen Form eine Rolle. Es ist nicht mehr das Ziel, die Berechtigung der Anwendung dieser Funktion zu untersuchen (diese konnte in Abschn. 8.5.2 nachgewiesen werden), sondern die Sollgröße der Temperatur unter Anwendung dieser Funktion so zu modifizieren, dass die Temperatur der Probe sich auf die richtige Temperatur einstellt, obwohl eine andere Temperatur gemessen wird. Die Grobstruktur dieser „indirekten“ Regelung zeigt Abb. 8.56.

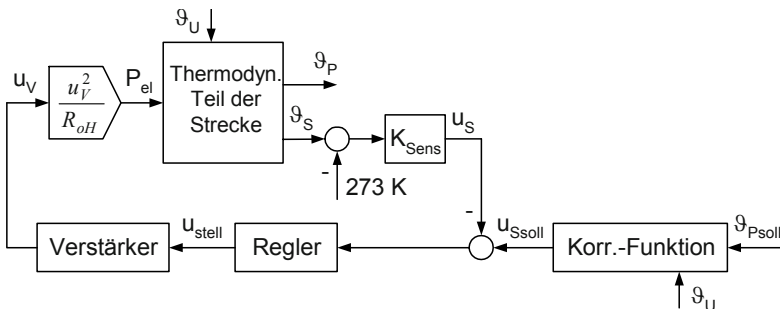


Abb. 8.56 Die Grobstruktur der „indirekten“ Temperatur-Regelung eines Trockenofens

Folgende Funktionen müssen festgelegt bzw. ermittelt werden:

- Sollwert-Korrekturfunktion,
- Regler-Übertragungsfunktion,
- Verstärkerfunktion.

Zur Sollwert-Korrekturfunktion:

Ausgehend von Gl. (8.58) muss aus dem geforderten Sollwert der Proben-Temperatur ϑ_{Psoll} die Sollspannung u_{Soll} berechnet werden, mit der die Sensorspannung u_S verglichen werden muss. Es ergibt sich die folgende Funktion:

$$\begin{aligned} u_{Soll} &= K_{sens} \cdot (\vartheta_{Soll} - 273 \text{ K}) \\ &= K_{sens} \cdot \left(\vartheta_u + \frac{1}{K_{korr}} \cdot (\vartheta_{Psoll} - \vartheta_u) - 273 \text{ K} \right). \end{aligned} \quad (8.59)$$

Zu Regler und Verstärker:

Als Regler wird ein PI-Regler eingesetzt. Er hat die Übertragungsfunktion

$$u_{stell}^* = \left(K_{PR} + \frac{K_{IR}}{s} \right) \cdot (u_{Soll} - u_S). \quad (8.60 \text{ a})$$

Er wird begrenzt bei Ausgangsspannungen von 0 und +5 V. Die Funktion lautet:

$$u_{stell} = \begin{cases} 0 & \text{für } u_{stell}^* \leq 0 \\ u_{stell}^* & \text{für } 0 < u_{stell}^* < 5 \text{ V} \\ 5 \text{ V} & \text{für } u_{stell}^* \geq 5 \text{ V} \end{cases} \quad (8.60 \text{ b})$$

Der Verstärker ist ein Leistungsverstärker mit dem Spannungs-Übertragungsfaktor eins.

$$u_V = u_{stell}. \quad (8.61)$$

Die Simulation des Regelkreisverhaltens wurde mit folgenden zusätzlichen Parametern und Anfangswerten durchgeführt:

- Regler:
 - $K_{PR} = 10$,
 - $K_{IR} = 0,0125 \text{ s}^{-1}$,
- Korrekturfunktion:
 - $K_{korr} = 2,37$ (gegenüber Abschn. 8.5.2 geringfügig verringert),
 - $K_{sens} = 0,05 \text{ V/K}$,

- Sollfunktion:

$$\vartheta_{P_{soll}} = \begin{cases} 293 \text{ K} & \text{für } t \leq 50 \text{ s} \\ (293 + 70) \text{ K} & \text{für } t > 50 \text{ s} \end{cases}$$

Die Parameter und Anfangswerte der Strecke bleiben wie in Abschn. 8.5.2. Der Korrekturfaktor K_{kor} ist kein Parameter der Strecke, er geht in die Gl. (8.59) zur Sollgrößenaufbereitung ein.

Die Simulationsergebnisse des Regelkreisverhaltens sind in den folgenden Abbildungen dargestellt. Die Verläufe der indirekten Soll- und der Regelgröße zeigt Abb. 8.57.

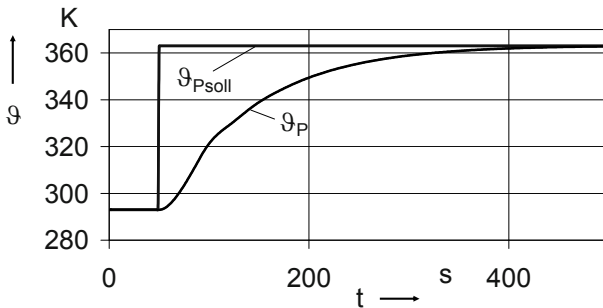


Abb. 8.57 Die Verläufe der indirekten Sollgröße $\vartheta_{P_{soll}}$ und der indirekten Regelgröße ϑ_P

Die eigentliche Regelung besitzt höhere Dynamik als die Kurven in Abb. 8.57 vermuten lassen, da der Sensor eine kleinere Zeitkonstante besitzt als die Probe (s. Gln. (8.56 b) und (8.55 b)). Das ist aus den Verläufen der elektrischen Leistung P_{el} (Abb. 8.58) und der Temperaturen ϑ_H und ϑ_S (Abb. 8.59) zu erkennen.

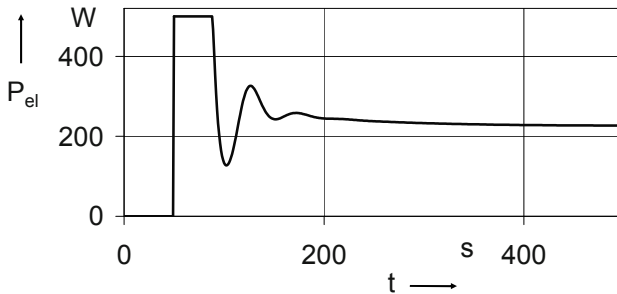


Abb. 8.58 Die elektrische Leistung P_{el}

In Abb. 8.59 sind die Temperaturverläufe aller drei Wärmespeicher dargestellt.

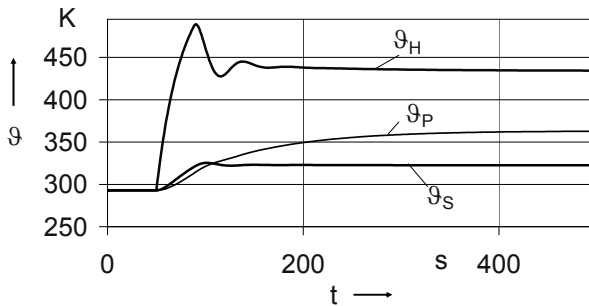


Abb. 8.59 Die Temperaturverläufe in den drei Wärmespeichern bei Regelung

8.6 Mooringregelung

Mit Hilfe einer Mooringregelung ist es möglich, die Zugkraft einer Winde annähernd konstant zu halten, unabhängig davon, in welche Richtung und wie schnell (in Grenzen) sich das vom Seil gehaltene Objekt bewegt. Sehr verbreitet ist diese Regelung in Schiffswinden, mit deren Hilfe Schiffe geholt oder gefiert werden. Auch in Fahrzeugen zur Schneepistenpräparierung sind diese Regelungen anzutreffen. In den letzten Jahren ist der Einsatz in der Forsttechnik hinzugekommen, vor allem in radgetriebenen Maschinen, die mit Hilfe einer Mooringregelung in der Lage sind, in Hanglagen tätig zu werden [8.1, 8.2]. Aus diesem Bereich ist das zu modellierende und danach zu simulierende Beispiel entnommen.

Die Grundidee ist, dass die Seilkraft F_S die Hangabtriebskraft F_H der Forstmaschine annähernd kompensiert und dass damit die Antriebskraft $F_{Antrieb}$, die die Räder auf den Untergrund bringen müssen, etwa der in der Ebene entspricht (s. Abb. 8.60). Eine Besonderheit ist, dass die Winde mit der Holzerntemaschine mitbewegt wird und das Seil an einem sog. Ankerbaum fixiert ist.

Gegenstand dieses Modellierungsbeispiels ist nicht die Optimierung dieser Kräfte Relationen, sondern das System, das dafür sorgt, dass die Seilkraft F_S annähernd konstant bleibt, unabhängig davon, wie schnell und in welche Richtung sich die vom Seil gehaltene Holzerntemaschine bewegt.

Dies kann mit Hilfe einer Kraftregelung geschehen, indem die mit einem Kraftsensor gemessene Seilkraft mit der Sollgröße verglichen wird und das Ergebnis des Vergleichs mit Hilfe eines Reglers vorzeichenrichtig das Ausgangsmoment des Windenantriebes steuert. Verbreiteter als eine Kraftregelung ist die Ansteuerung eines elektrohydraulischen Windenantriebes mit Hilfe eines geregelten Druckes vor dem Hydromotor. Die Seilkraft ist dann diesem Druck annähernd proportional.

Der Sollwert des Druckes wird i. Allg. vom Fahrer der Holzernemaschine in Abhängigkeit von der mittleren Hangneigung eingestellt und nur verändert, wenn sich diese deutlich verändert.

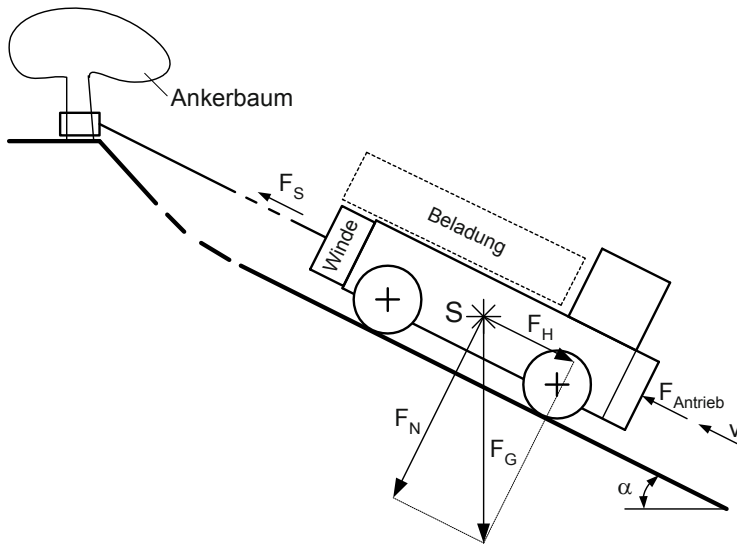


Abb. 8.60 Kräfte an einer Holzernemaschine bei der Arbeit am Hang

8.6.1 Ermittlung von Blockschaltbildern

Der 1. Schritt:

In Abb. 8.61 ist das Schema dieser sog. Mooringregelung dargestellt.

Die Geschwindigkeit v der Holzernemaschine wird von den Rad-Antrieben vorgegeben. Damit das Seil immer seine annähernd konstante Spannung behält, muss die Umfangsgeschwindigkeit der Winde v_U sich im Rahmen einer Regelung auf diese Geschwindigkeit einstellen. Somit ist die Geschwindigkeit v die Störgröße der Regelung und gleichzeitig die Haupteingangsgröße des Systems, da die Sollspannung u_{soll} während des Arbeitens der Maschine nur selten verändert werden muss.

Damit das Druckbegrenzungsventil $VD1$ (Druckregler) seine Funktion erfüllen kann, muss ein Mindestvolumenstrom $Q_{VD1mind}$ fließen.

Für $v \rightarrow v_{max}$ (Bergauffahrt, $v > 0$) müsste der Pumpenförderstrom Q_P die Größe haben:

$$Q_{Pmax} = Q_{VD1mind} + Q_{Mmax} \cdot$$

Für $v \rightarrow v_{\min}$ (Bergabfahrt, $v < 0$) wird der minimale Pumpenförderstrom $Q_{P\min}$ negativ, da der Hydromotor dann als Pumpe arbeitet ($Q_M = Q_{M\min} < 0$). Der Pumpenförderstrom $Q_{P\min}$ ist dann

$$Q_{P\min} = Q_{VD1\min} + Q_{M\min}.$$

Die Pumpe saugt dann aus dem System ab und fördert in den Behälter.

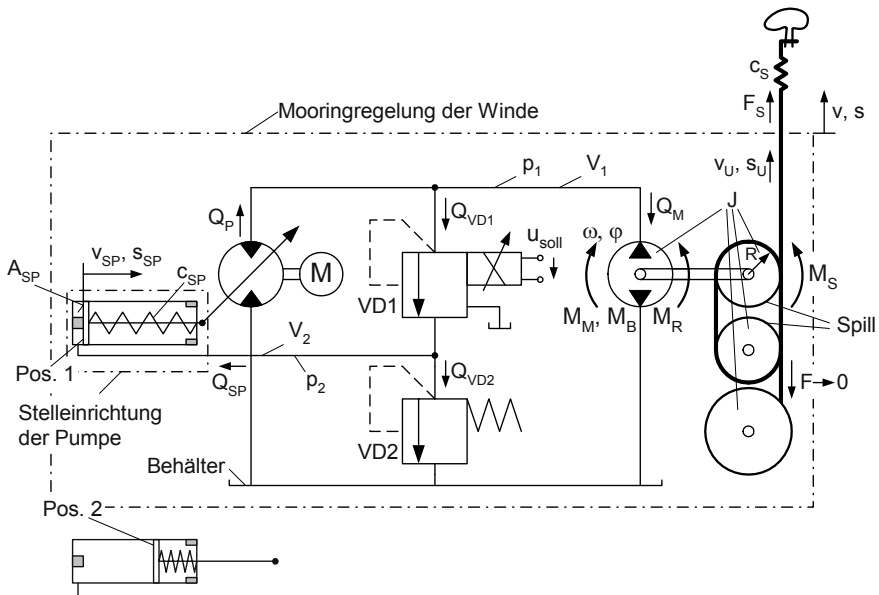


Abb. 8.61 Schema der Mooringregelung einer Holzernemaschine. Kolben der Pumpenstelleinrichtung in Pos. 1: $Q_P > 0$, maximale Fördermenge; in Pos. 2: $Q_P < 0$, maximale Fördermenge bei Volumenstromrichtung vom Motor zur Pumpe

Das bedeutet, dass die Pumpe eine über null stellbare Pumpe sein sollte. Bei Verwendung einer Konstantpumpe, die mindestens $Q_{P\max}$ realisieren muss, ergäben sich bei Bergabfahrt sehr große Verlustleistungen im Druckbegrenzungsventil $VD1$, da dann die Volumenströme sowohl der Pumpe als auch des Hydromotors über dieses geleitet werden. In der Mooringregelung wird eine Verstellpumpe verwendet, die sich selbsttätig so einstellt, dass der Volumenstrom durch das Druckbegrenzungsventil $VD1$ in allen Arbeitspunkten relativ klein ist. Die Stellkraft für die Pumpe wird vom Druck p_2 abgeleitet, der sich zwischen den Druckbegrenzungsventilen $VD1$ und $VD2$ einstellt (in Abb. 8.61 ist links unten die Position 2 der Stelleinrichtung für $Q_P = < 0$ dargestellt).

In diesem System ist nicht der Druckregler die zuletzt festzulegende Komponente, sondern die Stelleinrichtung der Pumpe. Die Modellermittlung wird für das Gesamtsystem durchgeführt.

Der 2. und 3. Schritt:

Die Verzögerungen entstehen vor allem durch das Feder-Masse-System Winde/Hydromotor (Gesamtträgheitsmoment J der drehenden Teile) und Seil (die Federkonstante c_s ist von seiner Ausfahrlänge abhängig). Die Verzögerungen durch die Feder-Masse-Systeme der Druckbegrenzungsventile können im Vergleich dazu vernachlässigt werden. Ihr Verhalten wird durch statische Zusammenhänge beschrieben.

Als weitere Speicher werden im Blockschaltbild die der kompressiblen Ölvolamina V_1 und V_2 vor bzw. zwischen den Druckbegrenzungsventilen berücksichtigt, obwohl ihre verzögernde Wirkung voraussichtlich nicht wirksam wird. Die größte Verzögerung liegt im Eingangssignal $v(t)$ selbst. Bedingt durch die sehr große Eigenmasse der Holzerntemaschine entstehen nur sehr kleine Beschleunigungen dv/dt . Alle Signale der Mooringregelung folgen quasi ohne Verzögerung den langsamen Änderungen von $v(t)$. Da in den Rückwirkungen der Drücke auf die Volumenstrombilanzen jedoch relevante Nichtlinearitäten vor allem der Druckbegrenzungsventile enthalten sind, wurde die Speicherfähigkeit der Ölvolamina in das Modell aufgenommen.

Aus **Anhang A, Tabellen A.1 und A.3**, und aus Abb. 4.31 rechts wurden die Blockschaltbilder des 2. und 3. Schrittes in Abb. 8.62 übernommen.

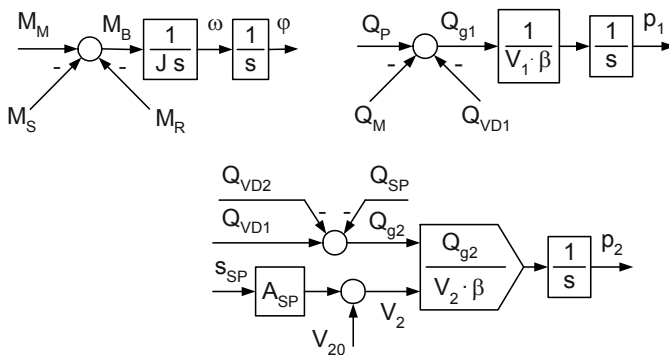


Abb. 8.62 Mooringregelung, Blockschaltbilder des 2. und 3. Schrittes

Zu beachten ist, dass das Volumen V_1 in sehr guter Näherung konstant ist, während sich die Größe des Volumens V_2 bei Bewegung des Kolbens der Pumpenstelleinrichtung verändert.

Der 4. Schritt:

Die noch fehlenden Teile des Modells werden mit Hilfe statischer Zusammenhänge beschrieben.

Das Druckbegrenzungsventil VD1. In Abb. 8.63 ist das Schema dargestellt, Details werden in [8.11] ausführlich beschrieben.

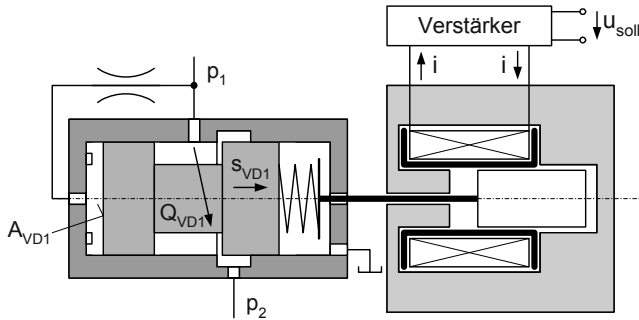


Abb. 8.63 Das Schema des Proportional-Druckbegrenzungsventils $VD1$

Auf Grund der sehr kleinen Verzögerungen (im Vergleich zu denen der Winde und des ganzen Fahrzeuges) soll nur sein statisches Verhalten in das Gesamtmodell eingehen.

Mit Hilfe eines Proportionalmagneten (in Abb. 8.63 rechts) wird der Druck p_{10} vorgegeben, bei dem das Ventil seinen Steuerspalt öffnet. Folgende Beziehungen beschreiben das Verhalten:

$$p_{10} = \frac{K_{VM}}{A_{VD1}} \cdot u_{soll}, \quad (8.62 \text{ a})$$

$$G_{VD1} = \begin{cases} 0 & \text{für } p_1 < p_{10} \\ K_{VD1} \cdot (p_1 - p_{10}) & \text{für } p_1 \geq p_{10} \end{cases}, \quad (8.62 \text{ b})$$

$$Q_{VD1} = G_{VD1} \cdot \sqrt{|p_1 - p_2|} \cdot \text{sign}(p_1 - p_2). \quad (8.62 \text{ c})$$

K_{VM} ist der Gesamtübertragungsfaktor von Verstärker und Magnet. Abb. 8.64 zeigt das entsprechende Blockschaltbild.

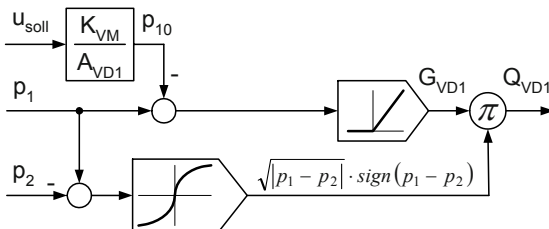


Abb. 8.64 Das Blockschaltbild des statischen Verhaltens des Proportional-Druckbegrenzungsventils $VD1$

Wenn der Druck p_1 den von der Sollspannung u_{soll} gesteuerten Druckwert p_{10} , übersteigt, beginnt sich der Spalt für den Volumenstrom Q_{VD1} zu öffnen. Der Übertragungsfaktor ergibt sich aus den Eigenschaften des Verstärkers und des Magneten sowie aus der Größe der Fläche A_{VD1} . Der Anstieg des Leitwertes G_{VD1} hängt von der Ventil-Federkonstante und dem Kolbenumfang ab. Auf eine ausführliche Berechnung dieser Werte wird verzichtet, sie werden vor den Simulationsläufen festgelegt.

Das Druckbegrenzungsventil VD2. In Abb. 8.65 sind das Schema und das Blockschaltbild dieses einfacheren, mechanisch einstellbaren Druckbegrenzungsventils dargestellt.

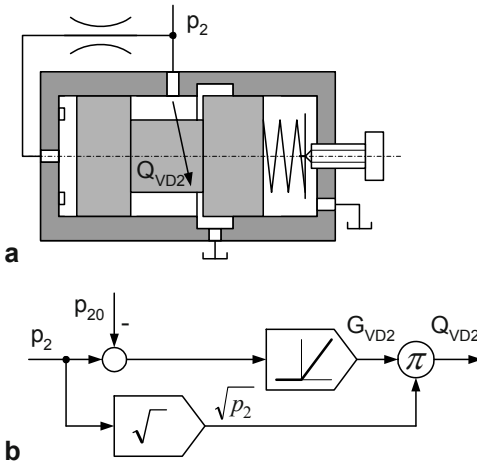


Abb. 8.65 Das Proportional-Druckbegrenzungsventils VD2. **a** Schema **b** Blockschaltbild des statischen Verhaltens

Der von der Stellschraube und der Feder vorgebbare Druck p_{20} ist analog dem Druckbegrenzungsventil VD1 der Druckwert, den p_2 erreichen und übertreffen muss, um den Steuerspalt des Ventils zu öffnen. Die Beziehungen lauten:

$$G_{VD2} = \begin{cases} 0 & \text{für } p_2 < p_{20} \\ K_{VD2} \cdot (p_2 - p_{20}) & \text{für } p_2 \geq p_{20} \end{cases}, \quad (8.63 \text{ a})$$

$$Q_{VD2} = G_{VD2} \cdot \sqrt{p_2}. \quad (8.63 \text{ b})$$

Die Stellanrichtung der Pumpe. Die über null stellbare Pumpe arbeite mit konstanter Drehzahl und sie besitze in beide Förderrichtungen einen maximalen Förderstrom Q_{Pmax} , d. h., $Q_{Pmin} = -Q_{Pmax}$. Diese Grenzwerte werden bei folgenden Po-

sitionen der Stelleinrichtung (s. Abb. 8.61), die durch Anschläge bestimmt werden, erreicht:

- Q_{Pmax} bei $s_{SP} = 0$ und
- $Q_{Pmin} = -Q_{Pmax}$ bei $s_{SP} = s_{SPmax}$.

Die Federkonstante c_{SP} , die Fläche A_{SP} , der Federvorspannweg s_{SP0} und der Maximalweg s_{SPmax} der Stelleinrichtung müssen so dimensioniert werden, dass bei den unterschiedlichen Geschwindigkeiten v der Holzerntemaschine die Regelung zuverlässig und mit geringen Verlustleistungen arbeitet. Diese Parameter können erst im Zusammenhang mit dem Verlauf des Druckes p_2 festgelegt werden.

Das Schema der Stelleinrichtung der Pumpe ist in Abb. 8.61 ausreichend detailliert dargestellt, Abb. 8.66 zeigt das Blockschaltbild.

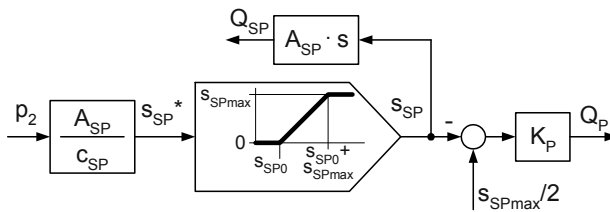


Abb. 8.66 Das Blockschaltbild der Stelleinrichtung der Pumpe

Die Rückwirkung des Volumenstromes Q_{SP} wird, analog z. B. zu Abb. 6.45, m. H. einer Differenziation aus dem Signal s_{SP} gewonnen:

$$Q_{SP} = A_{SP} \cdot v_{SP} = A_{SP} \cdot s \cdot s_{SP}. \quad (8.64)$$

Da die Eingangsgröße p_2 in das Modell der Stelleinrichtung der Pumpe eine Zustandsgröße ist, die sich nicht sprunghaft ändern kann, entsteht bei dieser Differenzierung kein relevanter Fehler.

Hydromotor, Winde mit Spill, Seil. Ein Hydromotor ist durch sein Verdrängungsvolumen V_M charakterisiert. Die dem Arbeitszylinder analogen Beziehungen lauten:

$$M_M = V_M \cdot p_1 \text{ und } Q_M = V_M \cdot \omega. \quad (8.65)$$

Beide Funktionen sind in **Anhang A, Tabelle A.4**, aufgenommen worden. (Der Druck p_1 ist hier die Druckdifferenz Δp über dem Motor.)

In Abb. 8.61 ist dargestellt, dass eine Winde mit Spill verwendet wird, d. h., die Umwandlung des Motormoments M_M in die Seilkraft F_S erfolgt nicht in der Winde. Diese dient nur dem Aufwickeln des Seiles mit geringem (vernachlässigtem) Moment. Der Radius R des mehrfach umwickelten Spills bestimmt die Relation

zwischen Kraft F_S und Moment M_S und damit auch zwischen Winkel φ und Umfangsweg s_U :

$$M_S = R \cdot F_S, \quad s_U = R \cdot \varphi. \quad (8.66)$$

Die Seilkraft F_S ändert sich, wenn zwischen Maschinenweg s und die Umfangsweg des Seiles s_U eine Differenz Δs entsteht. Die Seilkraft F_S wird der Wegdifferenz Δs proportional angesetzt, Proportionalitätsfaktor ist die Federkonstante c_S des Seiles (die sich mit der Länge des Seiles ändert, was im Modell aber vernachlässigt worden ist).

$$F_S = c_S \cdot \Delta s. \quad (8.67)$$

Das Reibmoment wird summarisch als das des Motors beschrieben und berücksichtigt alle im Motor, in der Winde und in der Lagerung des Seiles auftretenden Reibeinflüsse, es wird in erster Näherung proportional der Winkelgeschwindigkeit des Motors und des Spills angenommen. Die Beziehung lautet:

$$M_R = k \cdot \omega. \quad (8.68)$$

Auftreten von Kavitation. In Abschn. 4.3 wurde im Modell die Möglichkeit der Kavitation berücksichtigt (Bildung von Hohlräumen in Flüssigkeiten, wenn der Druck in der Flüssigkeit unter den Dampfdruck absinkt). Da die Drücke p_1 und p_2 dieses Systems Arbeitsbereiche deutlich oberhalb von null haben, kann dieser Fall nicht auftreten und wurde im Modell auch nicht berücksichtigt.

Der 5. Schritt:

Aus den Teilmodellen in den Abb. 8.62 bis Abb. 8.66 und den Gln. (8.65) bis (8.68) ist das Gesamt-Blockschaltbild in Abb. 8.67 entwickelt worden.

Es sei an das am Anfang dieses Abschnittes Gesagte erinnert: Die Störgröße der Regelung ist die Geschwindigkeit v der Holzerntemaschine selbst, die Sollgröße u_{soll} wird manuell so eingestellt, dass ein Druck p_1 entsteht, der über Hydromotor und Winde die Seilkraft F_S erzeugt. Die Regelung sorgt dafür, dass das Seil immer in der geforderten Spannung bleibt. Die Stelleinrichtung der Pumpe wird so ausgelegt, dass der Volumenstrom Q_{VD1} in allen Arbeitsbereichen der Mooringregelung nur wenige Liter pro Minute beträgt.

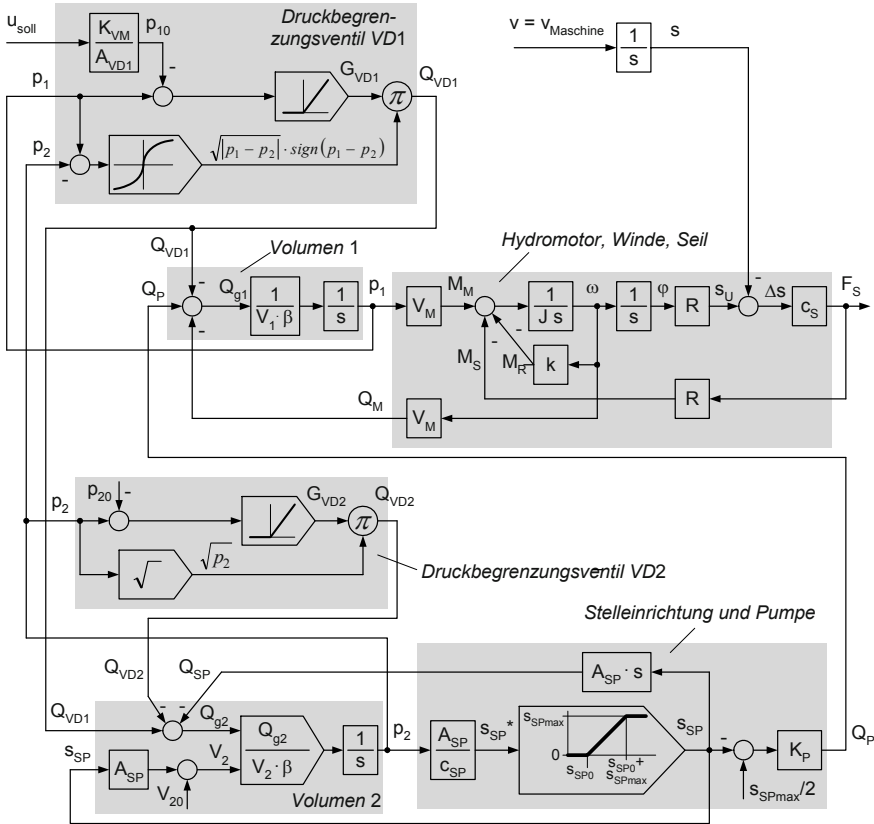


Abb. 8.67 Das Blockschaltbild der Mooringregelung (Störgröße der Regelung ist die Geschwindigkeit v der Holzerntemaschine, die Sollgröße u_{soll} wird manuell so eingestellt, dass ein Druck p_1 entsteht, der über Hydromotor und Winde die Seilkraft F_S erzeugt)

8.6.2 Simulation des Regelverhaltens

Die Simulation wird auf der Grundlage des Blockschaltbildes in Abb. 8.66 und der herausgearbeiteten Beziehungen durchgeführt. Die Parameter wurden auf der Basis folgender Abschätzungen gewählt. Für Winde und Hydromotor werden angesetzt:

- $V_M = 1000 \text{ cm}^3/U \approx 1,6 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$ (Beachte: $1 U = 2 \pi \text{ (rad)}$),
- $p_{1max} = 300 \text{ bar} = 30 \text{ N/mm}^2$,
- Radius $R = 0,1 \text{ m} = 100 \text{ mm}$.

Das führt auf die Maximalwerte:

$$M_{M \max} = V_M \cdot p_{l \max} = 1,6 \cdot 10^5 \text{ mm}^3 \cdot 30 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 48 \cdot 10^5 \text{ Nmm} = 4800 \text{ Nm} ,$$

$$F_{S \max} = \frac{M_{M \max}}{R} = \frac{4800 \text{ Nm}}{0,1 \text{ m}} = 48000 \text{ N} = 48 \text{ kN} .$$

Zum Vergleich: Für ein Fahrzeug von 10 t ist die Hangabtriebskraft bei $\alpha = 20^\circ$ (s. Abb. 8.59): $F_H = F_G \cdot \sin(\alpha) = 100000 \text{ N} \cdot 0,342 \approx 34000 \text{ N} = 34 \text{ kN}$. Die Neigung beträgt bei $\alpha = 20^\circ$ etwa 36 %.

Die maximalen Geschwindigkeiten v am Hang werden mit $\pm 100 \text{ m/min}$ (das entspricht etwa $1700 \text{ mm/s} = 1,7 \text{ m/s}$) angenommen. Damit ergeben sich maximale Volumenströme im Motor von

$$\begin{aligned} |Q_{M \max}| &= V_M \cdot \omega_{\max} = V_M \cdot \frac{v_{\max}}{R} \\ &= 1,6 \cdot 10^5 \text{ mm}^3 \cdot \frac{1700 \text{ mm/s}}{100 \text{ mm}} \approx 2,7 \cdot 10^6 \text{ mm}^3 / \text{s} \approx 160 \text{ dm}^3 / \text{min} = 160 \text{ l/min} . \end{aligned}$$

(Die maximale Winkelgeschwindigkeit des Motors ist dann

$$\omega_{\max} = \frac{v_{\max}}{R} \approx \frac{1700 \text{ mm/s}}{100 \text{ mm}} = 17 \text{ s}^{-1} \text{ und seine maximale Drehzahl}$$

$$n_{M \max} = 162 \text{ U/min.})$$

Da die Pumpe zusätzlich zum Motor das Druckbegrenzungsventil $VD1$ versorgt, muss sie im Grenzfall ($v = +v_{\max}$) einen größeren Volumenstrom liefern. Um eine gewisse Reserve zu besitzen, wird für die Pumpe gewählt:

$$Q_{P \max} = 200 \text{ dm}^3 / \text{min} \approx 3,3 \cdot 10^6 \text{ mm}^3 / \text{s} .$$

Weitere Parameter sind

- Hydromotor, Winde, Seil:

$$- J = 0,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 = 500 \text{ N mm s}^2 ,$$

(Angenommen wurde, dass die Gesamtträgheit auf einen Zylinder der Masse 100 kg und des Radius $R = 100 \text{ mm}$ (R wurde schon festgelegt) reduziert werden kann.)

$$\begin{aligned} - c_S &= 100 \text{ N/mm} , \\ - k &= 5 \cdot 10^4 \text{ N mm/s} , \end{aligned}$$

- Druckbegrenzungsventil $VD1$ und Leitung davor:

$$\begin{aligned} - u_{\text{soll}} &= 5 \text{ V} , \\ - K_{VM}/A_{VD1} &= 60 \text{ bar/V} = 6 \text{ N/(mm}^2 \text{ V)} , \end{aligned}$$

(Das führt auf $p_{10} = 30 \text{ N/mm}^2 = 300 \text{ bar}$.)

$$- K_{VD1} = 1 \frac{\text{dm}^3 / \text{min}}{\text{bar}^{1,5}} = 5,3 \cdot 10^5 \frac{\text{mm}^3 / \text{s}}{(\text{N} / \text{mm}^2)^{1,5}},$$

$$- V_1 = 5 \text{ dm}^3 = 5 \cdot 10^6 \text{ mm}^3,$$

$$- \beta = 10^{-3} \text{ mm}^2/\text{N},$$

- Druckbegrenzungsventil $VD2$ und Leitung davor:

$$- p_{20} = 20 \text{ bar} = 2 \text{ N/mm}^2,$$

$$- K_{VD2} = 0,1 \frac{\text{dm}^3 / \text{min}}{\text{bar}^{1,5}} = 5,3 \cdot 10^4 \frac{\text{mm}^3 / \text{s}}{(\text{N} / \text{mm}^2)^{1,5}} \text{ (ein Zehntel von } K_{DV1}\text{),}$$

$$- V_{20} = 1 \text{ dm}^3 = 1 \cdot 10^6 \text{ mm}^3,$$

$$- V_2 \approx V_{20} = 1 \text{ dm}^3 = 1 \cdot 10^6 \text{ mm}^3 \text{ (} A_{SP} \cdot s_{SP} \text{ wird vernachlässigt).}$$

- Der Volumenstrom Q_{SP} ist im Vergleich zu den Volumenströmen Q_{VD1} , Q_{VD2} so klein, dass er bei der Simulation vernachlässigt werden kann.

Die erste Simulationsberechnung wird für eine Konstantpumpe mit

$$Q_P = 200 \text{ dm}^3 / \text{min} \approx 3,3 \cdot 10^6 \text{ mm}^3 / \text{s} = \text{konst.}$$

durchgeführt. Damit kann die Richtigkeit der bisherigen Parametrierung überprüft werden, ohne die Rückwirkungen der Stelleinrichtung der Pumpe in die Überlegungen zur Verifizierung mit einbeziehen zu müssen.

Die Simulationsrechnungen werden für Parameterwerte, die die Dimensionen N , mm und s und V enthalten, durchgeführt. Damit haben auch die Signale adäquate Dimensionen. Das erfordert Umrechnungen auf die in den folgenden Diagrammen verwendeten Dimensionen außerhalb des Simulationsmodells.

Den Verlauf der Geschwindigkeit v , mit der sich die Maschine selbst bewegt, ist in Abb. 8.68 dargestellt. Realisiert werden die stationären Werte $v = 0$ und $v = \pm 1700 \text{ mm/s} = \pm 1,7 \text{ m/s}$.

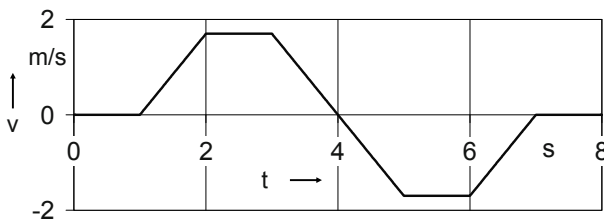


Abb. 8.68 Verlauf der Maschinengeschwindigkeit als Störgröße der Mooringregelung

In den folgenden Abbildungen sind die sich bei Verwendung einer Konstantpumpe ergebenden Verläufe der relevanten Volumenströme Q_P , Q_M und Q_{VD1} , der Drücke p_1 und Q_2 , der Seilkraft F_S sowie der in den Druckbegrenzungsventilen in Wärme umgesetzten Druck-Volumenleistung P_{VD}

$$P_{VD} = p_1 \cdot Q_{VD1} \quad (8.69)$$

dargestellt. Die Zustandsgrößen ω , Δs , p_1 und p_2 haben jeweils den Anfangswert null erhalten, so dass sich in der ersten halben Sekunde erst der der Geschwindigkeit $v = 0$ entsprechende Zustand einstellt.

Abb. 8.69 zeigt, dass der Volumenstrom Q_{VD1} sehr groß wird, wenn bei Bergabfahrt der Hydromotor als zusätzliche Pumpe wirkt.

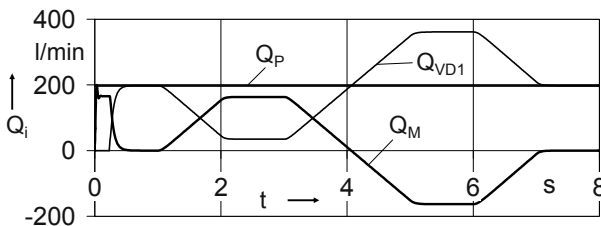


Abb. 8.69 Verläufe der relevanten Volumenströme Q_P , Q_M und Q_{VD1}

Auf Grund der großen Schwankung des Volumenstromes Q_{VD1} ergeben sich auch relativ starke Schwankungen der m. H. der Druckbegrenzungsventile geregelten Drücke (Abb. 8.70).

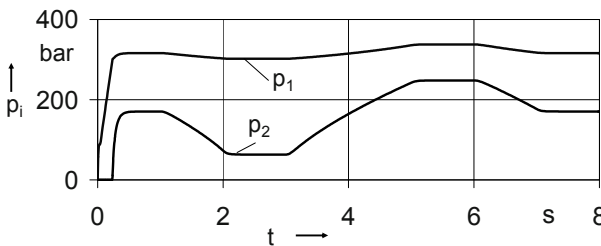


Abb. 8.70 Verläufe der Drücke p_1 und p_2 (Konstantpumpe)

Das Motormoment M_M ist proportional dem Druck p_1 . Dass die Seilkraft F_S noch stärker schwankt als dieser, liegt an dem relativ großen angenommenen Reibmoment M_R (Abb. 8.71).

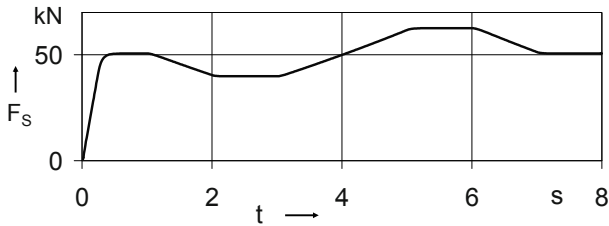


Abb. 8.71 Verlauf der Seilkraft F_s (Konstantpumpe)

Am Verlauf der in den Druckbegrenzungsventilen in Wärme umgesetzten Druck-Volumenleistung P_{VD} (s. Abb. 8.72) ist zu erkennen, dass der Einsatz einer Konstantpumpe keine Alternative zu einer Verstellpumpe sein kann, da Wärmeleistung bis zu etwa 200 kW entstehen würde.

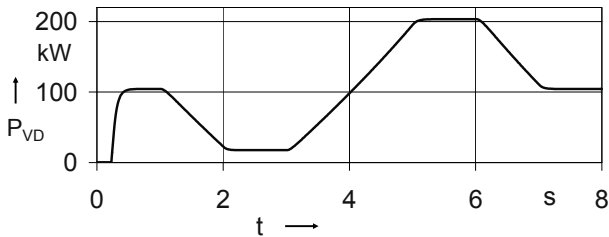


Abb. 8.72 Verlauf der in den Druckbegrenzungsventilen in Wärme umgesetzten Druck-Volumenleistung P_{VD} (Konstantpumpe)

Mit Hilfe einer Verstellpumpe und einer günstig strukturierten und dimensionierten Stelleinrichtung kann diese Verlustleistung um mehr als eine Größenordnung gesenkt werden. Folgende Parameter wurden für diese zweite Simulationsrechnung zusätzlich verwendet:

- Stelleinrichtung:
 - $A_{SP} = 90 \text{ mm}^2$,
 - $c_{SP} = 5 \text{ N/mm}$,
 - $s_{SP0} = 40 \text{ mm}$,
 - $s_{SP\max} = 40 \text{ mm}$,
- Pumpe: $K_p = 10 \frac{\text{dm}^3 / \text{min}}{\text{mm}} = 1,67 \cdot 10^5 \text{ mm}^2 / \text{s}$.

Um einen längeren Einschwingvorgang der Stelleinrichtung der Pumpe während der Simulation zu vermeiden, wurden folgenden Integratoren von null abweichende Anfangswerte zugewiesen (die Maschinenposition sei $s(0) = 0$):

$$p_1(0) = 300 \text{ bar} = 30 \text{ N/mm}^2, p_2(0) = 35 \text{ bar} = 3,5 \text{ N/mm}^2, s_U(0) = 481 \text{ mm}.$$

Der Verlauf der Geschwindigkeit v ist identisch dem in Abb. 8.66. In Abb. 8.73 a sind die Volumenströme Q_P , Q_M und Q_{VD1} , dargestellt, der des Motors ist dem in Abb. 8.69 identisch. Auf Grund der nur noch geringen Schwankung des Volumenstromes Q_{VD1} ergeben sich auch geringe Schwankungen der geregelten Drücke (Abb. 8.73 b).

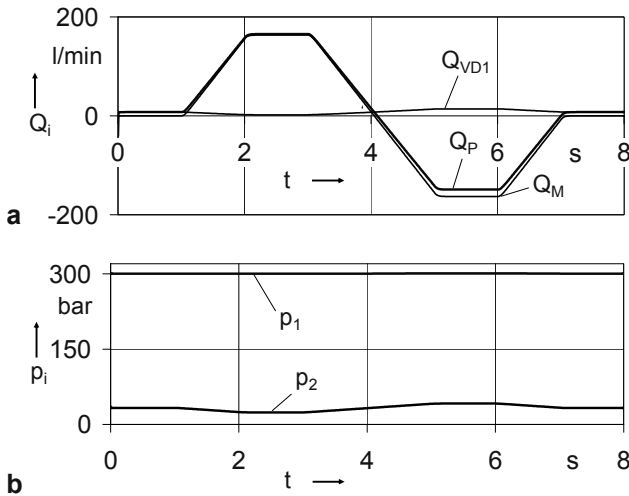


Abb. 8.73 Verläufe der Volumenströme Q_P , Q_M und Q_{VD1} (a) und der Drücke p_1 und p_2 (b) (Verstellpumpe)

Das Motormoment M_M ist proportional dem Druck p_1 und damit fast konstant. Dass die Seilkraft F_S trotzdem relativ stark schwankt, liegt an dem großen geschwindigkeitsproportionalen Reibmoment M_R . (Abb. 8.74)

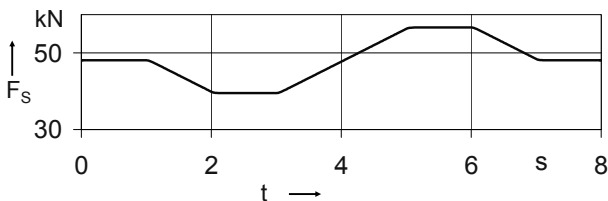


Abb. 8.74 Verlauf der Seilkraft F_S (Verstellpumpe)

Die in den Druckbegrenzungsventilen in Wärme umgesetzte Druck-Volumen-Leistung P_{VD} steigt nur noch auf maximal 7 kW an (vgl. Abb. 8.75 mit Abb. 8.72).

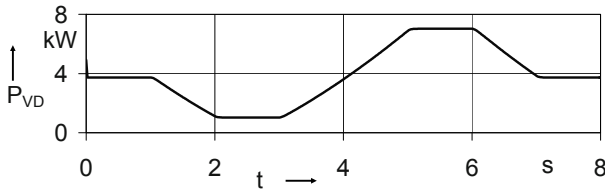


Abb. 8.75 Verlauf der in den Druckbegrenzungsventilen in Wärme umgesetzten Druck-Volumen-Leistung P_{VD} (Verstellpumpe)

Wird anstelle der Mooringregelung eine Seilkraftregelung eingesetzt, können die immer noch großen Verlustleistungen P_{VD} vermieden werden. Außerdem wirkt sich die Reibung wesentlich weniger auf die Seilkraft aus, sie kann dann fast konstant gehalten werden. Die Seilkraft-Schwankung hat in der Praxis eine ähnliche Wirkung auf die Belastung der Antriebe wie eine (moderate) Änderung der Geländeneigung.

8.7 Zusammenfassung

Im Kap. 8 wurden Regelungen, die Komponenten aus den Bereichen Elektrotechnik, Technische Mechanik, Fluidtechnik und Thermodynamik enthalten, untersucht. Der Schwerpunkt lag auf der Modellermittlung der Regelstrecken.

- Vier der Beispiel-Systeme waren Lageregelungen:
 - stehendes Pendel,
 - elektrohydraulischer Antrieb mit Servoventil (Vierkantensteuerung),
 - Bahnsteuerung eines Rundtisches,
 - Punkt-zu-Punkt-Steuerung eines Luftschiffes.
- Die Besonderheit des Beispiels Temperaturregelung eines Trockenschrankes ist die Messstelle der Temperatur. Mit Hilfe der Simulation wurde eine Korrekturfunktion gefunden, mit der von der gemessenen Temperatur auf die des Trockengutes geschlossen werden kann.
- Die Mooringregelung ist eine Druckregelung. Mit Hilfe der geregelten und damit annähernd konstanten Druckdifferenz über einem Hydromotor gelingt es, die Seilkraft einer Winde ebenfalls annähernd konstant zu halten, obwohl sich die Winde bewegt.

Die meisten Bausteine der Modelle der Regelstrecken konnten aus **Anhang A, Tabellen A.1 bis A.5**, entnommen werden. Die Regelstrecken des stehenden Pendels und des Rundtisches enthalten Mehrmassensysteme, deren Modelle ausführlich m. H. des Lagrangeschen Formalismus hergeleitet worden sind.

Anhang

Anhang A: Bausteine der Modellierung

Tabelle A.1 Bilanzgleichungen der E-Technik und Mechanik und Blockschaltbild der Funktionen der Zustandsgrößen (Langnamen der Kürzel s. Tabelle 2.4).

(In der Spalte „Prozess (Abschn.)“ ist der Abschnitt genannt, in dem die Modelle hergeleitet worden sind.)

Prozess (Abschn.)	Zust.- Größe	Bilanz- raum:	Bilanzgleichungen allg.:	Schema und Blockschaltbild:
Elekt- risch (3.1)	u	Knotenpunkt eines elektri- schen Netz- werkes	Σ aller zufließenden Ströme = Σ aller abfließenden Strö- me, (auflösen nach i_C , dem Strom zu einer Kapazität C).	
	i	Masche ein- es elektri- schen Netz- werkes	Σ aller angelegten Spannun- gen = Σ aller Spannungsab- fälle, (auflösen nach u_L , dem Span- nungsabfall über eine Induk- tivität L).	
Mecha- nisch, translato- risch (3.2)	s, v	Translato- risch beweg- te Masse m	Beschleunigungskraft $F_B = \Sigma$ aller angreifenden Kräfte.	
Mecha- nisch, rotato- risch (3.3)	φ, ω	Rotatorisch bew. Masse mit dem Massenträg- heitsmoment J	Beschleunigungsmoment $M_B = \Sigma$ aller angreifenden Momente.	

Tabelle A.2 Lineare **Grundbeziehungen** in der E-Technik, Mechanik und Elektromechanik

(In der Spalte „Prozess (Abschn.)“ ist der Abschnitt genannt, in dem die Modelle hergeleitet worden sind.)

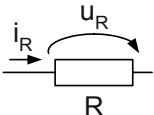
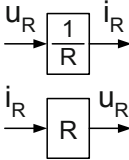
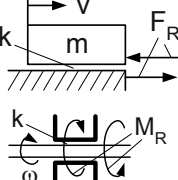
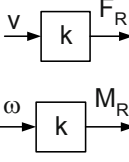
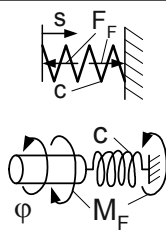
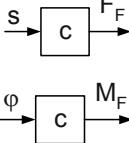
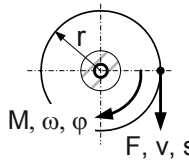
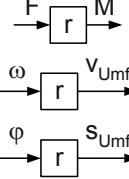
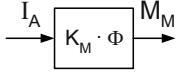
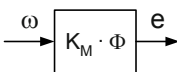
Prozess (Abschn.)	Komponente	Funktion	Schema	Blockschaltbild:
Elektrisch (3.1)	Ohmscher Widerstand R	$i_R = \frac{1}{R} u_R$ $u_R = i_R \cdot R$		
Mechanisch (3.2), (3.3), (4.1)	Faktor der geschwindig- keits- proportionalen Reibung k	$F_R = k \cdot v$ $M_R = k \cdot \omega$		
	Federwirkung c	$F_F = c \cdot s$ $M_F = c \cdot \varphi$		
	Umrechnung translatorisch – rotatorisch über Radius r	$M = r \cdot F$ $v_{Umf} = r \cdot \omega$ $s_{Umf} = r \cdot \varphi$		
Elektro- mecha- nisch (3.3)	Kraftwirkungs- Gesetz (Gleich- strommotor)	$M_M = K_M \cdot \Phi \cdot I_A$	-	
	Induktionsge- setz (Gleich- strommotor)	$e = K_M \cdot \Phi \cdot \omega_M$	-	

Tabelle A.3 Bilanzgleichungen der Fluid-Technik und Wärmelehre sowie Blockschaltbild mit den Funktionen der Zustandsgrößen (Langnamen der Kürzel s. Tabelle 2.4).

(In der Spalte „Prozess (Abschn.)“ ist der Abschnitt genannt, in dem die Modelle hergeleitet worden sind.)

Prozess (Abschn.)	Zust.- Größe	Bilanzraum:	Bilanzgleichungen allg.:	Schema und Blockschaltbild:
Fluidisch (3.4), (3.6)	p	Geschlossener Behälter für kompressible Flüssigkeit	Gespeicherter Volumenstrom = Σ aller zu- minus Σ aller abfließenden Volumenströme	
		Offener Behälter für inkompressible Flüssigkeit	Gespeicherter Volumenstrom = Σ aller zu- minus Σ aller abfließenden Volumenströme	
Thermisch (3.5)	ϑ	Wärmespeicher	Gespeicherte Wärmeleistung = Σ aller zu- minus Σ aller abgeführten Wärmeleistungen	

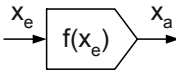
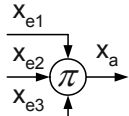
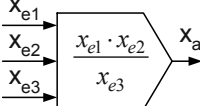
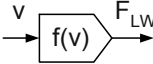
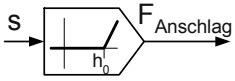
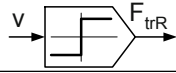
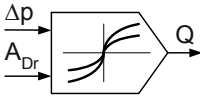
Tabelle A.4 Beispiele linearer Grundbeziehungen in der Fluid-Technik und Wärmelehre

(In der Spalte „Prozess (Abschn.)“ ist der Abschnitt genannt, in dem die Modelle hergeleitet worden sind.)

Prozess	Komponente	Funktion	Blockschaltbild:
Fluidisch (3.4), (8.6)	Druckkraft in einem Arbeitszylinder	$F = A_1 \cdot p_1$	
	Drehmoment eines Hydromotors	$M_M = V_M \cdot \Delta p$	
	Verschiebe-Volumenstrom	$Q_V = A_1 \cdot v$	
	Volumenstrom eines Hydromotors	$Q_M = V_M \cdot \omega$	
	Strömungswiderstand	$Q_i = \frac{1}{R_{hi}} \cdot \Delta p_{ij}$	
Thermisch (3.5)	Wärmetransport von Körper m zu Körper n (linearisiert)	$P_{mn} = \frac{1}{R_{mn}} \Delta \vartheta_{mn}$	

Tabelle A.5 Nichtlinearitäten in technischen Systemen

(In der Spalte „Prozess (Abschn.)“ ist der Abschnitt genannt, in dem die Modelle hergeleitet worden sind.)

Prozess (Abschn.)	Funktion	Darstellg. als Blockschaltbild (Bsp.):
Allgemein (4)	$x_a = \cos(x_e), \quad x_a = x_e ,$ $x_a = x_e^2, \quad x_a = \sqrt{x_e}, \quad x_a = \arctan(x_e),$ $x_a = \frac{1}{1 + e^{-x_e}}$	
	Multiplikation: $x_a = x_{e1} \cdot x_{e2} \cdot x_{e3}$	
	Multiplikation und Division: $x_a = \frac{x_{e1} \cdot x_{e2}}{x_{e3}}$	
Mechanisch (4.1)	Luftwiderstand als Funktion der Geschwindigkeit v: $F_{LW} \approx k \cdot v^2 \cdot \text{sign}(v)$	
	Anschlagkraft: $F_{\text{Anschlag}} = \begin{cases} 0 & \text{für } s < h_0 \\ c \cdot (s - h_0) & \text{für } s \geq h_0 \end{cases}$	
	Trockene Reibung $F_{trR} = F_{trR} \cdot \text{sign}(v)$	
	Striebeck-Reibung: $F_{StR} = k \cdot v + (F_{trR0} + F_{StR0} \cdot e^{- K \cdot v }) \cdot \text{sign}(v)$	
Hydraulisch, (4.3)	Drosselstelle, Steuerspalt: $Q = k_{Dr} \cdot A_{Dr} \cdot \sqrt{ \Delta p } \cdot \text{sign}(\Delta p)$	
	Kavitation: $p_2 = \begin{cases} p^* & \text{für } p^* \geq 0 \\ 0 & \text{für } p^* < 0 \end{cases}$	

Anhang B: PT2-Glied und DT2-Glied

Tabelle B.1 Das PT2-Glied

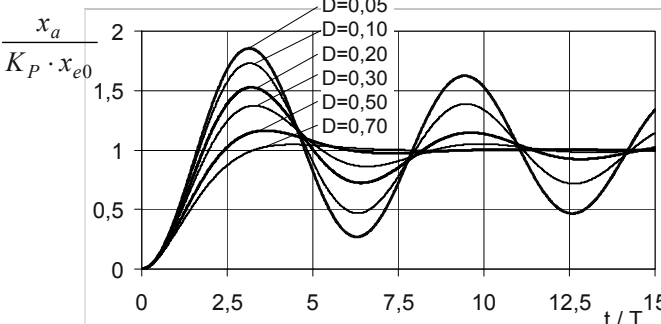
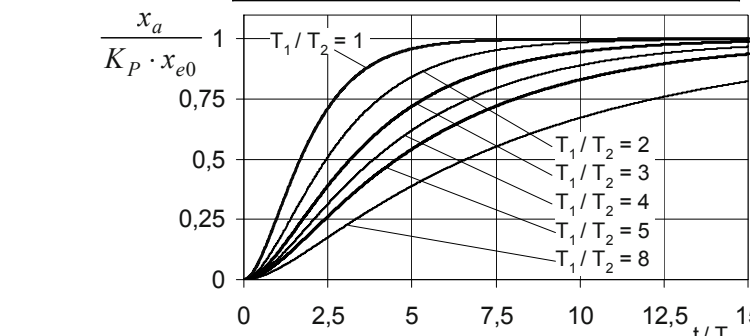
Zeitbereich:	Dgl.: $T^2 \ddot{x}_a + 2 DT \dot{x}_a + x_a = K_P \cdot x_e$ (T ... Eigenzeitkonst., D ... Dämpfung)	
	Unterschiedliche Lösungsansätze für $D < 1$, $D = 1$ und $D > 1$:	
	$D < 1$:	$T_1 \neq T_2$ (T_1, T_2 konjugiert komplex)
	$D = 1$:	$T_1 = T_2 = T$ (T reell)
	$D > 1$:	$T_1 \neq T_2$ (T_1, T_2 reell)
Operatorbereich:	ÜTF: $G(p) = \frac{x_a}{x_e} = \frac{K_P}{1 + 2 DT p + T^2 \cdot p^2} = \frac{K_P}{(1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p)}$	
Sprungantworten:		
Für $0 < D < 1$:	$x_a(t) = K_P \cdot x_{e0} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - D^2}} \cdot e^{-\frac{Dt}{T}} \cdot \sin\left(\sqrt{1 - D^2} \cdot \frac{t}{T} + \arccos D\right) \right)$	
	Periodendauer: $\frac{T_P}{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - D^2}}$	
		Zeitpunkt 1. Maximum: $\frac{t_m}{T} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - D^2}}$
		Maximalwert: $\frac{x_{am}}{K_P \cdot x_{e0}} = 1 + e^{\frac{-D \cdot \pi}{\sqrt{1 - D^2}}}$
Für $D = 1$ (Kurve $T_1/T_2 = 1$):	$x_a(t) = K_P \cdot x_{e0} \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{t}{T}\right) \cdot e^{-t/T} \right)$	
Für $D > 1$ (Kurven $T_1/T_2 > 1$) mit $T_1 = T \cdot (D + \sqrt{D^2 - 1})$, $T_2 = T \cdot (D - \sqrt{D^2 - 1})$:	$x_a(t) = K_P \cdot x_{e0} \cdot \left(1 + \frac{1}{T_1 - T_2} \cdot \left(T_2 \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} - T_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \right) \right)$	
		

Tabelle B.2 Das DT2-Glied

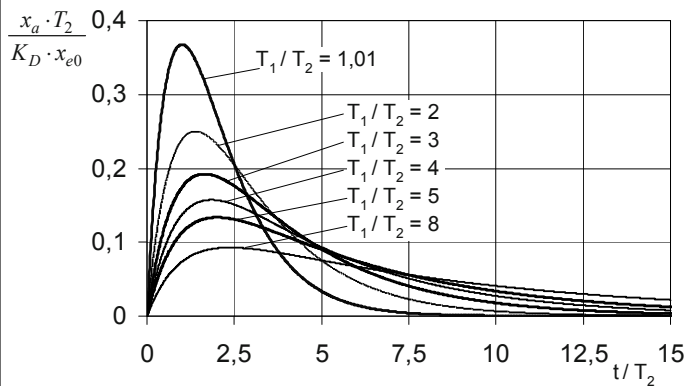
Zeitbereich: Dgl.: $T^2 \ddot{x}_a + 2DT \dot{x}_a + x_a = K_D \cdot \dot{x}_e$ T ... Eigenzeitkonstante, D ... Dämpfung <u>Beachte:</u> Unterschiedliche Lösungsansätze für $D < 1$, $D = 1$ und $D > 1$: $D < 1$: $T_1 \neq T_2$ (T_1, T_2 konjugiert komplex) $D = 1$: $T_1 = T_2 = T$ (T reell) $D > 1$: $T_1 \neq T_2$ (T_1, T_2 reell)	
Operatorbereich: ÜTF: $G(p) = \frac{K_D \cdot p}{1 + 2DTp + T^2 \cdot p^2} = \frac{K_D \cdot p}{(1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p)}$	
Sprungantworten: Für $0 < D < 1$: $x_a(t) = \frac{K_D \cdot x_{e0}}{T} \cdot \frac{e^{-\frac{Dt}{T}}}{\sqrt{1-D^2}} \cdot \sin\left(\sqrt{1-D^2} \cdot \frac{t}{T}\right)$ Periodendauer: $\frac{T_P}{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-D^2}}$ Zeitpunkt 1. Maximum: $\frac{t_m}{T} = \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{1-D^2}}{D}\right)}{\sqrt{1-D^2}}$	
Für $D = 1$ mit $T_1 = T_2 = T$: $x_a(t) = K_D \cdot x_{e0} \cdot \frac{t}{T^2} \cdot e^{-t/T}$ Zeitpunkt Maximum: $\frac{t_m}{T} = 1$	

Tabelle B.2 Das DT2–Glied (Fortsetzung)

Für $D > 1$ mit $T_1 = T \cdot (D + \sqrt{D^2 - 1})$, $T_2 = T \cdot (D - \sqrt{D^2 - 1})$:

Allg.:
$$x_a(t) = \frac{K_D \cdot x_{e0}}{T_1 - T_2} \cdot \left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$$

Kurven:
$$x_a(t) = \frac{K_D \cdot x_{e0}}{T_2} \cdot \frac{1}{T_1/T_2 - 1} \cdot \left(e^{-\frac{1}{T_1/T_2} \frac{t}{T_2}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$$



Zeitpunkt
Maximum:

$$\frac{t_m}{T_2} = \frac{\frac{T_1}{T_2} \cdot \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)}{\frac{T_1}{T_2} - 1}$$

Literaturverzeichnis

- 2.1 Angermann A, Beuschel M, Rau M, Wohlfahrt U (2005) Matlab – Simulink – Stateflow. 4. Aufl Oldenbourg, München Wien
- 2.2 Anke D (2000) Leistungselektronik. Oldenbourg, München Wien
- 2.3 Bode H (1998) MATLAB in der Regelungstechnik. Teubner, Stuttgart Leipzig
- 2.4 Bronstein IN Semendjajew KA (1991) Taschenbuch der Mathematik. 25. Aufl Nauka, Moskau Teubner, Stuttgart Leipzig
- 2.5 Cellier F, Kofman E (2006) Continuous System Simulation. Springer, Berlin Heidelberg
- 2.6 Feser K (2004) Elektromagnetische Verträglichkeit. 12. Internationale Fachmesse und Kongress für elektromagnetische Verträglichkeit, Düsseldorf
- 2.7 Föllinger O (2008) Regelungstechnik. 10. Aufl Hüthig, Heidelberg
- 2.8 Göldner K (1982) Mathematische Grundlagen der Systemanalyse. Fachbuch, Leipzig
- 2.9 Kahlert J (2007) WinFACT 7. Ingenieurbüro Dr. Kahlert, Hamm
- 2.10 Lechmann A (2008) Simulation und Aufladung von Verbrennungsmotoren. Springer, Berlin Heidelberg
- 2.11 Lunze J (2008) Regelungstechnik 1. 7. Aufl Springer, Berlin Heidelberg
- 2.12 Otter M, Schweiger C (2008) Modellierung mechatronischer Systeme mit Modelica. <http://www.robotic.de/fileadmin/control/schweiger/otter04.pdf>, 20.12.08
- 2.13 Reinisch K (1992) Analyse und Synthese kontinuierlicher Steuerungs- und Regelungssysteme. Technik, Berlin
- 2.14 Reuter M, Zacher S (2008) Regelungstechnik für Ingenieure. 12. Aufl Vieweg + Teubner, Braunschweig Wiesbaden Stuttgart
- 2.15 Scherf HE (2007) Modellbildung und Simulation dynamischer Systeme. 3. Aufl Oldenbourg, München Wien
- 2.16 Schulz G (2007) Regelungstechnik 1. 3. Aufl Oldenbourg, München Wien
- 2.17 Tröster F (2005) Steuerungs- und Regelungstechnik für Ingenieure. 2. Aufl Oldenbourg, München Wien
- 2.18 Unbehauen H. (2007) Regelungstechnik I. 14. Aufl Vieweg, Wiesbaden
- 2.19 Will D Gebhardt N (2008) Hydraulik. 4. Aufl Springer, Berlin Heidelberg

- 3.1 Bronstein IN Semendjajew KA (1991) Taschenbuch der Mathematik. 25. Aufl Nauka, Moskau Teubner, Stuttgart Leipzig
- 3.2 Föllinger O (2008) Regelungstechnik. 10. Aufl Hüthig, Heidelberg
- 3.3 Göldner K (1982) Mathematische Grundlagen der Systemanalyse. Fachbuch, Leipzig
- 3.4 Janocha H (1992) Aktoren – Grundlagen und Anwendungen. Springer, Berlin Heidelberg
- 3.5 Kahlert J (2007) WinFACT 7. Ingenieurbüro Dr. Kahlert, Hamm
- 3.6 Lunze J (2008) Regelungstechnik 1. 7. Aufl Springer, Berlin Heidelberg
- 3.7 Reinisch K (1992) Analyse und Synthese kontinuierlicher Steuerungs- und Regelungssysteme. Technik, Berlin

- 3.8 Reuter M, Zacher S (2008) Regelungstechnik für Ingenieure. 12. Aufl Vieweg + Teubner, Braunschweig Wiesbaden Stuttgart
- 3.9 Schulz G (2007) Regelungstechnik 1. 3. Aufl Oldenbourg, München Wien
- 3.10 Unbehauen H. (2007) Regelungstechnik I. 14. Aufl Vieweg, Wiesbaden
- 3.11 Will D, Gebhardt N (2008) Hydraulik. 4. Aufl Springer, Berlin Heidelberg

- 4.1 Bronstein IN, Semendjajew KA (1991) Taschenbuch der Mathematik. 25. Aufl Nauka, Moskau Teubner, Stuttgart Leipzig
- 4.2 Cellier F, Kofman E (2006) Continuous System Simulation. Springer, Berlin Heidelberg
- 4.3 Fischer R (2001) Elektrische Maschinen. 8. Aufl Hanser, München Wien
- 4.4 Grote K-H, Feldhusen J (2007) Dubbel: Taschenbuch für den Maschinenbau. 22. Aufl Springer, Berlin Heidelberg
- 4.5 Isermann R (2008) Mechatronische Systeme. 2. Aufl Springer, Berlin Heidelberg
- 4.6 Kallenbach E, Bögelsack G (1991) Gerätetechnische Antriebe. Hanser, München Wien
- 4.7 Popov VL (2009) Kontaktmechanik und Reibung. Springer, Berlin Heidelberg
- 4.8 Schröder D (2007) Elektrische Antriebe – Grundlagen. 3. Aufl Springer, Berlin Heidelberg
- 4.9 Will D, Gebhardt N (2008) Hydraulik. 4. Aufl Springer, Berlin Heidelberg

- 5.1 Tietze U, Schenk C (2002) Halbleiter-Schaltungstechnik. 12. Aufl Springer, Berlin Heidelberg

- 6.1 Ashby K, Jones D (1986) Ingenieurwerkstoffe. Springer, Berlin Heidelberg New York Tokyo
- 6.2 Fette P (2008) Stirlingmotor Forschung und Programmentwicklung.
<http://www.stirling-fette.de/fette.htm>, 28.1.09
- 6.3 Grote K-H, Feldhusen J (2007) Dubbel: Taschenbuch für den Maschinenbau. 22. Aufl Springer, Berlin Heidelberg
- 6.4 Hüning K (2006) Der Stirling-Motor. SunWatch, Essen
- 6.5 Langeheinecke K, Jany P, Thielecke G (2008) Thermodynamik für Ingenieure. 7. Aufl Vieweg + Teubner, Braunschweig Wiesbaden Stuttgart
- 6.6 Ostemann C (2008) SUNMACHINE – Ihr perfektes Heizsystem.
<http://www.sunma-chine.com/produkte.htm>, 28.1.09
- 6.7 Reick M, Palecki S (1999): Auszug aus den Tabellen und Formeln der DIN EN ISO 6946. Institut für Bauphysik und Materialwissenschaft, Universität GH Essen
- 6.8 Richter T, Winkelmann-Fouad S (2005) Anwendung des U-Wertes als Kenngröße für Wärmetransportvorgänge. Bauphysikkalender 2005 Ernst & Sohn, Berlin
- 6.9 Viebach D (2008) Der Stirlingmotor ST 05 G 350 – 500 Watt.
<http://www.geocities.com/viebachstirling/>, 25.1.09
- 6.10 Will D, Ströhl H (1981) Einführung in die Hydraulik und Pneumatik. 2. Aufl Technik Berlin

- 7.1 Beyer M, Boeck W, Möller K, Zaengl W (1986) Hochspannungstechnik. Springer, Berlin Heidelberg New York
- 7.2 Küchler A (2005) Hochspannungstechnik. 2. Aufl Springer, Berlin Heidelberg
- 7.3 Nollau R (1984) Dynamisches Verhalten von Hydraulikanlagen mit zentraler Druckquelle. Habilitation, TU Dresden
- 7.4 Nollau R (1990) Hydraulikanlagen mit zentraler Druckquelle. Technik, Berlin
- 7.5 Röhrig M (2005) Modellierung und Simulation des Volumenstrom- und Druckverlaufs im magnetisch-induktiven Durchflussmesser einer Abfülleinrichtung. Diplomarbeit, HAWK, Göttingen
- 7.6 Welsch A (2008) Wanderwellen auf Leitungen und in Wicklungen. Praktikum Hochspannungstechnik, FH Regensburg
- 7.7 Will D, Gebhardt N (2008) Hydraulik. 4. Aufl Springer, Berlin
- 8.1 Bombosch F, Sohns D, Kanzler H, Nollau R (2003) Forwarder-Einsatz über 70 %. Forst und Technik 9 (15) 22-23
- 8.2 Bombosch F, Sohns D, Nollau R, Kanzler H (2003) Are forest operations on steep terrain with wheel mounted forwarders without slippage possible? Vortrag Austroforma 5.-9.10.2003
- 8.3 Dudda O (1997) Entwicklung der Temperaturregelung eines Materialfeuchte-Schnellbestimmers. Diplomarbeit, HAWK Göttingen
- 8.4 Grote K-H, Feldhusen J (2007) Dubbel: Taschenbuch für den Maschinenbau. 22. Aufl Springer, Berlin Heidelberg
- 8.5 Ibold M (2008) Flugmodellierung und –regelung eines autonomen Luftschiffes auf der Basis eines Embedded Systems. Diplomarbeit, HAWK Göttingen
- 8.6 Isermann R (2008) Mechatronische Systeme. 2. Aufl Springer, Berlin Heidelberg
- 8.7 Kämpf BG (2004) Flugmechanik und Flugregelung von Luftschiffen. Dissertation Universität Stuttgart
- 8.8 Kovacevic K (1997) Aufbau und Untersuchung eines Fuzzy-Regelungsmodells für mehrere Regelgrößen. Diplomarbeit, HAWK Göttingen
- 8.9 Krause T, Lima P, Protzel P (2003) Flugregler für ein autonomes Luftschiff. In: Dillmann R, Wörn H, Gockel T Autonome mobile Systeme 2003. Springer, Berlin Heidelberg
- 8.10 Schwarz W, Zecha M, Meyer G (1985) Industrierobotersteuerungen. Technik, Berlin
- 8.11 Will D, Gebhardt N (2008) Hydraulik. 4. Aufl Springer, Berlin
- 8.12 Zacharias L (1992) Applikation und Implementation neuartiger Algorithmen zur digitalen Lagesteuerung elektrohydraulischer Antriebssysteme. Dissertation, TU Chemnitz
- 8.13 Zwickert B (1999) Konventionelle Steuerung und Regelung eines inversen Pendels. Diplomarbeit, HAWK Göttingen

Sachverzeichnis

A

Abdriften 236
Abschlusswiderstand 178
absolute Temperatur 126
Abstandssensor 239
adiabatisches Verhalten 133
algebraische Schleife 110, 194
Algorithmus der Modellermittlung 17
Aluminiumstab 82
Amplitude 61, 87, 123, 178
Analog-Elektronik 109
Anfangsgeschwindigkeit 59
Anfangsorientierung 242
Anfangszustand 90, 98, 129, 155, 168
Ankerbaum 256
Ankerinduktivität 31, 199
Ankerzeitkonstante 201
Anschlag 58, 82, 90, 140, 231
Anschlagkraft 59, 206
Arbeitsdruck 159
Arbeitskolben 21, 90, 143, 151, 205
Arbeitspunkt 8, 21, 54, 103, 218
Arbeitszylinder 18, 90, 203
Arbeitszylinder der Pneumatik 134
Astabiler Multivibrator 119
Asynchronität 99
Asynchronmotor 98
Atmosphärendruck 138
Auftriebskraft 232
Auftriebspunkt 232
Auge-Hand-Koordination 236
Ausgangswiderstand 109

B

Bahnführung 231
Bahnsteuerung 212
Bausteine 3, 20, 38, 80, 186
Bausteine der Modellierung 271
Begrenzung 118
Behältergrundfläche 56
Behältersystem 52
Beispielsysteme 18, 56
Bergabfahrt 258
Bergauffahrt 257
Beschleunigungskraft 16, 38, 216
Bilanz 7, 28, 91, 126
Bilanzgleichung 17, 271

Bindungsgleichung 79, 214
Blasenspeicher 130
Blitzentladung 175
Block 5, 10, 42
Blockschaltbild 4, 57, 68
Blockschaltbildmethode 7, 30, 74, 80
Boden 146
Brückenschaltung 203
bürstenloser Gleichstrommotor 98

C

Coriolismoment 216, 229

D

Dämpfung 11, 22, 55, 123, 200
Deckel 148
Dichtspalt 148
Dgl. 6, 79
Differenzialgleichung 1, 4, 74, 175
Differenzierer 115
Differenzverstärker 117
Dimension 70
Division 57
Doppeldüse-Prallplatte 203
Drehantrieb 213, 221
Drehfelddrehzahl 101
Drehfeldmotor 98
Drehpotenziometer 212
Drehschwinger 82
Drehzahlsteuerung 101
Drosselstelle 134, 206
Drosselventil 90, 95
Druck 4, 38, 92, 125, 154, 269
Druckbegrenzungsventil 257
Druckflüssigkeitsspeicher 18, 129, 173
Druckkraft 38, 68, 92, 136, 205
Druckluftbehälter 134
Druckquelle 38, 90, 179, 218
Druckregelung 131, 270
Druck-Volumen-Leistung 126, 173
DT1-Glied 5
DT2-Glied 35, 277
dynamisches Verhalten 2

E

Eigenzeitkonstante 22, 56, 200
Eindringtiefe 61
Eingabefehler 19
Eingangswiderstand 109

Einmassenschwinger 72
 elektrischer Reihenschwingkreis 22
 elektrohydraulischer Antrieb 18, 202, 270
 Elektromagnet 82
 elektromagnetisches Kraftwirkungsgesetz 31
 Elektromotor 51, 233
 Elektronisch kommutierter Motor 104
 Elektrotechnik (ET) 17
 Endlagendämpfung 91
 Energieaustausch 125
 Energiesatz 79
 Energiespeicher 2, 4, 14, 16, 38
 Erdbeschleunigung 58
 Ersatzmasse 81, 190
 Ersatzschaltung 175
 Ersatzträgheitsmoment 79

F

Fallende Kugel 58
 Feder 27, 67
 Feder-Dämpfungs-Kopplung 74
 Federkonstante 28, 61
 Feder-Masse-System 27, 58, 82, 259
 ferngesteuert 231
 Fernsteuergerät 234
 Festkörper-, trockene oder coulombsche Reibung 62
 Finite-Elemente-Methode 175
 Fliehkraft 216, 229
 Flughöhe 236
 Fluidbehälter 38
 Fluidtechnik (FT) 17
 Flüssigkeits- oder hydrodynamische Reibung 62
 Flüssigkeitsbehälter 50
 Fortpflanzungsgeschwindigkeit 186
 Freiheitsgrad 79, 231
 Freileitung 177
 Frequenz 88, 101, 157, 230
 Führungsgrößenaufbereitung 222
 Funktionsmodell 142

G

Gasdruck 130, 168
 Gasmasse 125, 132, 162
 Gasmassestrom 127, 143, 170
 Gastemperatur 132
 Gegenkopplung 112
 gerade Rohrleitung 181
 Geregelte Systeme 187
 Gesamt-Übertragungsfunktion 12, 25
 geschlossenes thermodynamisches System 125

Gesetz der ungestörten Superposition 41
 Getränkeabfülleinrichtung 179
 Getriebe 188, 199, 230
 Getriebeprinzip 230
 Gewichtskraft 193, 209, 232
 Gleichlaufverhalten 217
 Grundbeziehung 17, 24, 48, 68, 234, 272
 Gyroskop 239

H

Hallsonden 105
 Hangabtriebskraft 256
 Hangneigung 257
 Hebelarm 86
 Heißluft-Motor 141
 Heizer 146, 162, 245
 Heizplatte 46
 Heizspirale 47
 Heizwendel 247
 Hochspannungsnetze 175
 Hochtemperaturseite 162
 Holzerntemaschine 256, 262
 Hub 90, 167, 209
 Hubgrenze 95
 Hydraulikanlage 129, 179
 Hydraulikantrieb 38, 90
 Hydraulikleitung 38, 179
 Hydrauliköl 92, 131
 Hydraulikzylinder 38
 hydraulische Induktivität 182
 hydraulische Kapazität 182
 Hydromotor 256

I

Induktionsgesetz 33
 Induktivität 22, 82, 100, 233
 inneren Energie 126
 integrales Verhalten 187
 Integrationsverfahren 70
 Integrierer 115
 interne thermische Energiequelle 125
 invertierender Eingang 109
 invertierender Verstärker 116
 isothermes Verhalten 133

K

Kammer 143
 Kapazität 16, 22, 175
 Kavitation 92, 263
 Kennlinienfeld 8
 Kettenschaltung 9
 kinematische Viskosität 181
 kinetische Energie 190, 214
 Kippmoment 100
 Kippschlupf 100

Kloss'schen Gleichung 99
 Knotenpunktsatz 23
 Kolben 90, 135
 Kolbenfläche 38, 136, 203, 218
 Kolbenstange 38
 Kompressibilität 39, 92, 179, 259
 Konstantpumpe 258
 Kontinuum 20, 175
 Konvektion 246
 konzentrierte Parameter 20, 175
 Korrekturfunktion 254
 Korrekturglied 251
 Kräftebilanz 28, 58, 91
 Kreisbahn 221
 Kreisformel 10, 30, 42, 65, 196, 248
 kubische Parabel 76
 Kurs 243
 Kurzschlussläufer 99

L

Lageregelung 187, 270
 Lagesensor 212
 Lagrangescher Formalismus 190
 Lagrangesche Funktion 192
 Lagrangesche Bewegungsgleichungen 2.
 Art 213
 Laplace-Hin- und Rücktransformation 6
 Laplace-Operator s 37, 45
 Lastkraft 38, 138
 Laufkatze 187, 190
 Laufzeit 177
 Leitung 4, 20, 175, 246, 265
 Leitungsabschnitt 178
 Lenzsche Regel 28
 lineare Feder 59
 Linearisierung 8, 21, 237
 Linearität 21
 Luftdruck 39, 93, 134, 154, 168
 Luftreibung 62
 Luftschiff 231
 Luftspalthöhe 83
 Luftwiderstand 58, 233

M

magnetischer Widerstand 83
 Magnetkraft 82
 Maschensatz 23
 Maschinenkoordinaten 222
 Maschinenweg 263
 Masse 3, 16, 27, 38, 63, 96, 179
 Massenträgheitsmoment 31
 Massestrom 128, 136, 172
 Materialdämpfung 59

Mechanikteil 143, 160
 mechanisches Teilsystem 135
 mehrdimensional 187
 Mehrmassensystem 187, 189, 213
 Mineralöl 38
 Mitkopplung 112, 119
 mobiles Messsystem 239
 mobiler Roboter 231
 Modellbaustein 80, 175
 Momentenbilanz 32, 103
 Mooringregelung 256
 Motorverhalten 156, 170
 Motorverluste 36
 Multiplikation 57

N

Navigationssystem 239
 Nennerfunktion $N(s)$ 19
 nicht invertierender Eingang 110
 Nichtlinearität 4, 13, 52, 57, 90, 132, 259
 Normalform 11, 25, 34, 54, 197, 220
 Normalkraft 63

O

obere Grenzfrequenz 110
 Oberwellen 107, 157, 179
 offenes thermodynamisches System 127
 ohmscher Widerstand 102, 177
 Operationsverstärker 109
 Operator s 6
 OPV 109
 Ordnung der Modelle 22
 Orientierung 187, 231

P

Parameter 11, 19, 38, 70, 118, 236
 Pendellager 195
 Periodendauer 63, 87, 178
 Permanentmagnet 104
 permanentmagnetenerregter
 Gleichstrommotor 30, 188
 Permeabilität 83
 P-Glied 7, 10
 PI-Regler 199, 254
 polytrope Zustandsänderung 133
 Positionierung 187, 238
 potenzielle Energie 190, 213
 P-Regler 207, 223, 240
 Probe 245
 Propellerantrieb 233
 Propeller-Kräfte 243
 Proportional-Druckbegrenzungsventil
 260
 Proportionalmagnet 260
 PT1-Glied 7, 10, 113, 156, 227
 PT1-Regler 208

PT2-Glied 11, 30, 65, 276
 PT2-Verhalten 11, 54
 Pumpe 50, 258
 Punkt-zu-Punkt-Steuerung 231
 pV -Diagramm 141, 173

R

Radialantrieb 212
 Regelstrecke 20, 187, 198, 223, 247, 270
 Regenerator 146, 162
 Regenerator mit Dichtspalt 147
 Regler 14, 187, 207, 228
 Reglermodell 187
 Reibkraft 38
 Reibkraftmodelle 61, 63
 Reibmoment 33
 Reibung 61, 101, 141, 229
 Reibungskopplung 74
 Reihenschwingkreis 175
 Resonanzfrequenz 88
 Ritzel-Zahnrad-Paarung 212
 Ritzel-Zahnstange-Kopplung 74
 Rollen und Neigen 232
 Rotation 142, 232
 Rotor 16, 31, 76, 99, 160
 Rundtisch 212, 224

S

Schema 17, 22, 31, 90, 214
 Schlankankermotor 36
 Schlupf 99
 Schneepistenpräparierung 256
 Schwerpunkt 194, 232
 Schwungscheibe 151
 Segment 180
 Seilkraft 256
 Sensor 51, 105, 187, 207, 245, 256
 Sensorsignal 242
 Servoventil 203, 204, 218, 225
 SI-Einheiten 70
 Signum-Funktion *sign* 63
 Simulation 4, 13, 18
 Simulationsmodell 13
 Simulationsschrittweite 70
 slew rate 111
 Sollgröße 223, 242, 255, 264
 Sollwert 187, 209, 239, 254
 Spannungsteilerregel 111, 118
 Spannungs-Wanderwelle 178
 Speicherkapazität 39, 50, 246
 spezifische Gaskonstante 126
 spezifische Wärmekapazität 126
 Spill 263
 Sprungantwort 14, 22, 55, 37, 65, 276

Sprungfunktion 65, 77, 111
 statische Grundbeziehung 17
 Stator 99, 105
 Stehendes Pendel 187
 Stelleinrichtung 258
 Stellgröße 188, 239, 243
 Stellschraube 261
 Steuerspalt 206, 261
 Stick-Slip-Effekt 67, 230
 Stickstoff 130
 Stirlingmotor mit Arbeitszylinder und
 Kompressionszylinder 159
 Stirlingmotor mit Verdränger 141
 Stoffaustausch 125, 127
 Störgröße 257, 264
 Strahlbearbeitung 212
 Strahlung 246
 Streuinduktivität 100
 stribecksche Reibung 62
 Strom 3, 16, 22, 84, 178, 218
 Strombegrenzung 223
 Strömungsquerschnitt 92, 183
 Strömungswiderstand 38, 182
 Stromwendung 104
 Symbol 19, 110
 Symbolische Methode 5
 System höherer Ordnung 175

T

Technische Mechanik (TM) 17, 108, 270
 Teilsystem 77, 86
 Temperatur 46, 125, 245
 Temperaturbereich 159
 Temperaturregelung 245
 Temperatursensor 246
 Temperatursollwert 245
 Thermodynamik (TM) 17, 48
 thermodynamisches System 135, 146,
 162
 Tiefpass 115
 Tieftemperaturseite 162
 Torquemotor 203
 Transformation 39
 Trocknungsprozess 245
 turbulente Strömung 90

U

über null stellbare Pumpe 261
 Übertragungsfunktion 1, 4, 16, 20, 120
 Übertragungsglied 5, 26, 57, 121, 248
 Umfangsweg des Seiles 263
 Umgebungstemperatur 49
 Ummantelung 245
 unabhängige Koordinate 79
 ÜTF 6

V

Ventilschieber 181
 verallgemeinerte Koordinate 190
 Verdrängerbewegung 143
 Verifizierung 60, 80, 132, 209, 266
 Verschiebevolumenstrom 94, 220
 Versorgungsspannung 110, 118
 Verstärker 18, 109, 207, 245
 Verstärkung des OPV 109
 Vierkantensteuerung 202
 Volumen 40, 91, 125, 259
 Volumenstrom 16, 38, 91, 184

W

Wanderwellen in Leitungen 175
 Wärmedurchgangswert 126, 153
 Wärmekapazität 4, 46, 153, 246
 Wärmeleistung 46, 126, 246
 Wärmespeicher 14, 155, 246
 Weg 78
 Wegeventil 135, 180
 Wegsensor 207, 208
 Wellenwiderstand 186
 Werkstück 212
 Werkstückbearbeitung 227
 Werkstück-Koordinatensystem 227

Werkzeug 4, 212
 Widerstand 3, 21, 38, 58, 84, 177, 250
 Wien-Oszillator 121
 Winde 256
 Windkraft 234, 244
 Windungszahl 83
 Winkel 16, 31, 78, 222
 Winkelgeschwindigkeit 31, 76, 103, 151
 Winkelsensor 187
 Wirkungskreis 9, 41, 196
 Wirkungsumkehr 29, 41, 69, 137, 176

X

x_W - y_W -Koordinatensystem 222
 x - y -Ebene 233

Z

Zahnnachgiebigkeit 74
 Zahnradgetriebe 189
 Zahnreibung 74
 Zahnriementrieb 188
 Zeitkonstante 6, 22, 27, 106, 222, 255
 zentrale Druckversorgung 179
 Zugkraft 68, 256
 Zusammenschaltung linearer Blöcke 9
 Zustandsgröße 15, 17, 125
 Zustandsregler 207