

Reinisch Kybernetische Grundlagen
und Beschreibung
kontinuierlicher Systeme

von Prof. Dr. sc. techn. Karl Reinisch

VEB VERLAG TECHNIK BERLIN

Theoretische Grundlagen
der
automatischen Steuerung

Kybernetische Grundlagen und Beschreibung kontinuierlicher Systeme

Von Prof. Dr. sc. techn. Karl Reinisch

- Der Gegenstand der Untersuchung wurde von dem „einfachen“ Regelkreis auf die Steuerung des stationären und dynamischen Verhaltens größerer Prozesse bis hin zu den hierarchischen Steuerungssystemen ausgedehnt.
- Die betrachteten Steuerungsmethoden reichen demzufolge von der Verdrängungs- über die Regelung bis zu den Verfahren der Selbstanpassung einschließlich von Lernmethoden und den Methoden der statischen und dynamischen Optimierung.
- Es wird der Versuch unternommen, die zahlreichen in der Steuerungstheorie benutzten und häufig unzureichend oder gar nicht definierten Begriffe, die zu einem großen Teil der Kybernetik zuzurechnen sind, zu präzisieren.
- Schließlich ist erstragt worden, die auf der Frequenzgangdarstellung und der Laplace-Transformation basierende klassische Behandlung von Regelungsproblemen mit der für die moderne Steuerungstheorie benötigten Zustandsbeschreibung im Zeitbereich einbettend zu entwickeln.

Hinsichtlich der Form ist der Autor bemüht gewesen, die Probleme möglichst voraussetzungslos und exakt auf einem mittleren Abstraktionsniveau darzustellen. Obwohl der Automatisierung industrieller Produktionsprozesse eine bevorzugte Beachtung eingeräumt worden ist, sind die dargestellten Methoden ebenso für Modellbildung, Steuerung und Optimierungsprobleme in anderen technischen und nichttechnischen Bereichen anwendbar, was besonders in zunehmendem Maß und mit großem Nutzen überall geschehen wird. Die vorliegenden Ausführungen dürfen deshalb als eine allgemeine Einführung in die Kybernetik unter dem Steuerungsaspekt angesehen werden.



VEB VERLAG TECHNIK BERLIN

Kybernetische Grundlagen und Beschreibung kognitiver Systeme

Von Prof. Dr. sc. techn. Karl Reinisch

1. Auflage

© VEB Verlag Technik, Berlin, 1974

Lizenz 201 · 370/76/74

DK 52-52 (075) · LSV 3044 · VT 6/5063-1

Lektor: Dipl.-Ing. Jürgen Reichenbach

Schutzumschlag: Kurt Beckert

Printed in the German Democratic Republic

Gesamtherstellung: Offizin Andersen Nexö, Graphischer Großbetrieb, Leipzig III/18/38-5

Bestellnummer: 552 143 2

Vorwort

Unter dem gemeinsamen Titel „Theoretische Grundlagen der automatischen Steuerung“ soll eine Folge von Lehr- und Übungsbüchern erscheinen. Entsprechend dem internationalen Sprachgebrauch wird hierbei unter Steuerung jegliche zielgerichtete Beeinflussung von Systemen einschließlich der hierzu erforderlichen Modellbildung verstanden.

Der vorliegende erste Band behandelt kybernetische Grundlagen und die Beschreibung kontinuierlicher Systeme. Er ging aus einführenden Vorlesungen in die Technische Kybernetik und Automatische Steuerung an der Technischen Hochschule Ilmenau hervor. Dieses Buch richtet sich daher vornehmlich an Studierende der Ingenieurwissenschaften, insbesondere der Technischen Kybernetik. Es soll jedoch auch den bereits mit der Automatisierung befaßten Ingenieuren eine umfassendere Darlegung der wissenschaftlichen Grundlagen ihres Arbeitsgebietes vermitteln. Zu diesem Zweck wurde eine zusammenfassende und vereinheitlichte Darstellung von Teilgebieten der Technischen Kybernetik erstrebt, die unter dem Steuerungsaspekt Bedeutung besitzen, aber bisher gewöhnlich mehr oder weniger isoliert voneinander abgehandelt wurden. Folgende Erweiterungen sind charakteristisch:

- Der Gegenstand der Untersuchung wurde von dem „einfachen“ Regelkreis auf die Steuerung des stationären und dynamischen Verhaltens größerer Prozesse bis hin zu den hierarchischen Steuerungssystemen ausgedehnt.
- Die betrachteten Steuerungsmethoden reichen demzufolge von der Vorwärtssteuerung über die Regelung bis zu den Verfahren der Selbstanpassung einschließlich von Lernmethoden und den Methoden der statischen und dynamischen Optimierung.
- Es wird der Versuch unternommen, die zahlreichen in der Steuerungstheorie benutzten und häufig unzureichend oder gar nicht definierten Begriffe, die zu einem großen Teil der Kybernetik zuzurechnen sind, zu präzisieren.
- Schließlich ist erstrebt worden, die auf der Frequenzgangdarstellung und der Laplace-transformation basierende klassische Behandlung von Regelungsproblemen mit der für die optimale Steuerungstheorie benötigten Zustandsbeschreibung im Zeitbereich einheitlich zu entwickeln.

Hinsichtlich der Form ist der Autor bemüht gewesen, die Probleme möglichst voraussetzungslos und exakt auf einem mittleren Abstraktionsniveau darzustellen.

Obwohl der Automatisierung industrieller Produktionsprozesse eine bevorzugte Beachtung eingeräumt worden ist, sind die dargelegten Methoden ebenso für Modellbildungs-, Steuerungs- und Optimierungsprobleme in anderen technischen und nichttechnischen Bereichen anwendbar, was gegenwärtig in zunehmendem Maß und mit großem Nutzen überall geschieht. Die vorgelegten Ausführungen dürfen deshalb als eine allgemeine Einführung in die Kybernetik unter dem Steuerungsaspekt angesehen werden.

Der vorliegende Band umfaßt die kybernetischen – begrifflichen und methodischen – Grundlagen sowie die zur Lösung des Steuerungsproblems bei kontinuierlichen Systemen verwendeten mathematischen Methoden, während die eigentliche Analyse, Identifikation und Synthese von Steuerungssystemen in einem folgenden Band vorgestellt werden sollen.

Eine Charakterisierung des Inhalts mit Empfehlungen für bestimmte Lesergruppen und Angabe der erwünschten Vorkenntnisse wird zusammen mit einer Erläuterung verschiedener

im Text vorgesehener pädagogischer Hilfen in den nachfolgenden Hinweisen zum Studium des Buches gegeben.

Insgesamt ist der Autor bemüht, den Beginnenden wie den Vorangeschrittenen und den Automatisierungsingenieuren wie anderen an systemtheoretischen Fragen interessierten Ingenieuren und Wissenschaftlern nützlich zu sein.

Schließlich möchte der Autor an dieser Stelle allen seinen Mitarbeitern danken, die mit ihm seinerzeit das Institut für Regelungstechnik und danach die Sektion für Technische und Biomedizinische Kybernetik an der Technischen Hochschule Ilmenau aufgebaut haben. Ohne den ständigen, anregenden und kritischen geistigen Austausch mit ihnen hätte dieses Buch in dieser Art nicht entstehen können. Herr Prof. Dr.-Ing. S. Pilz entlastete mich zeitweilig für die Fertigstellung des Manuskriptes.

Auf Grund der Durchsicht von Manuskriptteilen gaben dankenswerte Hinweise: Prof. Dr.-Ing. M. Günther, Dr.-Ing. M. Krapp, Dozent Dr. rer. nat. H.-J. Presia, Dr.-Ing. M. Radtke, Dr.-Ing. H.-P. Seidel und Prof. Dr.-Ing. H. Töpfer.

Herrn Dipl.-Ing. J. Reichenbach und dem VEB Verlag Technik gebührt Dank für ihre Bemühungen um eine ansprechende, den Lernprozeß fördernde Gestaltung dieses Buches. Nicht zuletzt sei meiner Frau für ihre verständnisvolle Unterstützung und Frau G. Puta für ihre unermüdliche Arbeit und Hilfe bei der Fertigstellung des Manuskripts gedankt.

Karl Reinisch

Hinweise zum Studium dieses Buches

Für ein wissenschaftliches Lehrbuch bieten sich verschiedene Vorgehensweisen an: Man kann anhand eines konkreten Beispiels zeigen, welche Probleme auftreten und wie sie gelöst werden. Dieser Weg hat den pädagogischen Vorzug, daß der Lernende aktiv in die Problemlösung eingeschaltet wird und auch alsbald erste Erfolge seiner Bemühungen erlebt. Wenn jedoch die dabei zu verwendenden Begriffe und mathematischen Methoden noch weitgehend fehlen, ergibt sich die Schwierigkeit, daß die Ausführungen unpräzisiert bleiben bzw. der Problemlösungsgang durch lange begriffliche und mathematische Ausführungen unterbrochen werden muß. Eine geschlossene, systematische Darstellung der begrifflichen und methodischen Grundlagen ist dabei kaum zu erreichen.

Bei der hier zu behandelnden Thematik wird ein eigener, der Kybernetik zugehöriger begrifflicher Apparat benötigt, der in entsprechenden Lehrbüchern meist nur unvollständig definiert ist. Außerdem existieren einige in der Grundkonzeption unterschiedliche mathematische Beschreibungs- und Lösungsmethoden für Steuerungsprobleme. Obwohl Beziehungen zwischen ihnen bestehen, so haben sie doch jeweils große spezifische Vorzüge. Deshalb kann für eine die konventionellen und modernen Steuerungsprobleme umfassende Abhandlung auf ihre Darlegung nicht verzichtet werden.

Der Autor hat vor der Frage gestanden, ob er zunächst den – auf der Behandlung im sog. Frequenzbereich basierenden – klassischen Weg der Regelungstechnik bis zur Anwendung beschreiten und erst danach die Grundlagen für die im Zeitbereich unter Verwendung vektorieller Gleichungen entwickelte moderne Steuerungstheorie vorstellen sollte. Er hat sich aus Gründen der dadurch ermöglichten Straffung, Vertiefung und Präzisierung der Darstellung um eine zusammenfassende Darstellung und Synthese beider Wege bemüht.

In einem Teil I werden die der Kybernetik zugehörigen begrifflichen und methodischen Grundlagen vorgestellt und eine Übersicht über die Vielfalt wichtiger Typen von Systemen der automatischen Steuerung bis hin zu den hierarchischen gegeben. Da dieser Teil einführende Vorlesungen in die technische Kybernetik stützen soll, die in der Grundstufe des Hochschulstudiums gehalten werden, mußte dabei die mathematische Durchdringung möglichst zurückgestellt werden. Erwünscht sind beim Lesen dieses Teiles Anfangskenntnisse der Lösung linearer Differentialgleichungen, der Vektor- und Matrizendarstellung, der Mengenlehre und der Rechnung mit komplexen Zahlen.

Der Teil II bringt dann grundsätzliche mathematische Methoden zur Beschreibung von Übertragungsgliedern und Systemen und deren gegenseitige Verflechtung sowie erste Anwendungen der Berechnung des Übertragungsverhaltens von wichtigen Gliedern und Typen von Steuerungssystemen. Dieser Teil bildet die mathematische Grundlage für die Untersuchung bestehender und den Entwurf neuer Systeme der automatischen Steuerung, die in einem weiteren Band abgehandelt werden sollen. Für diesen Teil II sind Kenntnisse der Theorie der linearen Differentialgleichungen, der Funktionentheorie und der Laplacetransformation erwünscht. Es wird jedoch versucht, die Darlegung auch für Leser ohne diese Vorkenntnisse verständlich zu machen. Hierzu werden wesentliche Ableitungen in die Darstellung einbezogen, axiomatische Begründungen aber zuweilen durch heuristische ersetzt. Diese gewähren dem Ingenieur häufig einen günstigeren Zugang und erleichtern ihm nicht selten die praktische Anwendung.

Der hier eingeschlagene Weg ermöglicht es, daß später die Untersuchung von Steuerungssystemen (deren sog. Analyse, Identifikation und Synthese) zügig und umfassend durchgeführt werden kann. Sie verlangt jedoch vom Leser in der ersten Phase etwas Geduld. Um ihm diesen Weg zu erleichtern und den unterschiedlichen Voraussetzungen und Absichten verschiedener Lesergruppen Rechnung zu tragen, sind folgende Maßnahmen vorgesehen worden:

- Wichtige Begriffe und Aussagen werden in Form von – blau unterlegten – Definitionen (D) und Sätzen (S) festgehalten. Dagegen sind Gleichungen, Bilder und Tafeln von allgemeiner Bedeutung gelb unterlegt. Damit hat der Studierende für die Wiederholung und Einprägung des Gelesenen einen komprimierten Wissensspeicher zur Verfügung. Wer zunächst auf Erläuterungen und Begründungen verzichten will, kann vielfach auch schon beim ersten Studium sich auf die farbig unterlegten Stellen konzentrieren und den zugehörigen Begleittext im Bedarfsfall nachlesen.
Die Zielstellung, immer wieder Zusammenfassungen einzufügen, bringt es dabei mit sich, daß manche Definitionen Zusatzerläuterungen einschließen und die Sätze häufig Zusammenfassungen und Verallgemeinerungen vorheriger Untersuchungen darstellen. Es handelt sich also überwiegend um Folgesätze (und nicht um Theoreme), wobei wegen des Charakters der Thematik und ihrer Darstellung auf eine vollständige Beweisführung zuweilen verzichtet wird.
- Zur Festigung und Einübung des Gelernten ist ein Übungsbuch vorgesehen. Es soll die Übungen für die ersetzen, die nicht im Direktstudium das Fach Automatische Steuerung hören. Dieses Übungsbuch soll Elemente der programmierten Unterweisung enthalten, insofern Lösungshilfen insbesondere durch Verweisung auf Stellen des Lehrbuchs (Gleichungen, Definitionen, Sätze u. a.) in den Lösungsweg eingebaut werden.
- Schließlich sollen – neben entsprechenden Verweisungen im Text – nachfolgend einige Empfehlungen für bestimmte Lesergruppen gegeben werden. Diese sollen ihnen ggf. helfen, die Reihenfolge der zu studierenden Kapitel ihren Voraussetzungen anpassen zu können, um gewünschte Teilziele schneller zu erreichen. Es sei jedoch vermerkt, daß nur die im Buch eingeschlagene Reihenfolge voraussetzungslos und umfassend konzipiert worden ist.

Wer bisher wenig Erfahrungen über die Aufgaben konkreter Steuerungssysteme besitzt, kann nach dem Studium des Abschnitts 1. und der Abschnitte 3.1. bis 3.2. zunächst den Abschn. 4. beginnen (Abschnitte 4.1. und insbesondere 4.2.) und danach mit Abschn. 3. fortfahren.

Der Abschn. 2. enthält eine Präzisierung grundlegender Begriffe der Kybernetik, insbesondere der Steuerungstheorie. Er kann zunächst übergangen werden, wenn man sich anfangs mit einem vorwissenschaftlichen Verständnis dieser Begriffe zufriedengibt. Ähnliches gilt für Abschn. 5. Der Abschn. 2. sollte jedoch vor dem Studium des Abschnitts 7. gelesen sein.

Die Abschnitte 4.3. bis 4.5. geben einen qualitativen Überblick über die große Vielfalt von komplizierten Typen automatischer Steuerungssysteme und deren Eigenschaften und Leistungsmöglichkeiten, bevor dann der längere Weg einer quantitativen Behandlung – mit den einfacheren Systemen, insbesondere dem Regelkreis, beginnend – angetreten wird.

Leser, die sich zunächst über die klassischen Regelungsverfahren orientieren wollen, können nach Durchsicht des Teiles I ihre Studien im Teil II auf die Abschnitte 6. und 9. bis 12. (ohne Abschn. 10.5.) beschränken. Das betrifft unter anderem bestimmte Studienrichtungen mit Technischer Kybernetik/Regelungstechnik im Nebenfach.

Dagegen werden die Grundlagen für die optimalen, aber aufwendigeren Methoden der modernen Steuerungstheorie in den Abschnitten 7. und 13. des Teiles II bereitgestellt. Im nächsten Band wird dann bei der Behandlung der Entwurfs-(Synthese-)Verfahren zunächst der klassische, dann der moderne Weg weitergeführt werden.

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Kybernetische Grundlagen

1. Einführung:	
Kybernetik und Technik	19
1.1. Vorläufige Charakterisierung der Kybernetik	19
1.2. Produktionstechnik	20
1.3. Informationstechnik	21
1.4. Automatisierungstechnik, automatische Steuerung	22
1.4.1. Automatisierter Prozeß, Steuerung	22
1.4.2. Strecke und Einrichtung	24
1.4.3. Bauglieder, Steuer-, Stör- und gesteuerte Signale	25
1.4.4. Technische und gesellschaftliche Bedeutung der Automatisierungstechnik	26
1.5. Kybernetischer Aspekt, Kybernetik	27
2. Kybernetisches System:	
Begriff, Bewegung, Zustand, Verhalten	30
2.1. Begriff des kybernetischen Systems	30
2.1.1. Prozeß, Element, System	30
2.1.2. Systemstruktur	31
2.1.3. Kybernetisches System	33
2.2. Zustand und Bewegung kybernetischer Systeme	34
2.2.1. System- und Bewegungsgleichungen analoger kontinuierlicher Systeme	34
2.2.1.1. Aufstellung skalarer Systemgleichungen für Systeme 1. Ordnung	34
2.2.1.2. Lösung der Zustandsgleichung: skalare Bewegungsgleichung	35
2.2.1.3. Beispiel: Verwendung der skalaren Bewegungsgleichung	36
2.2.1.4. Verallgemeinerung auf Mehrgrößensysteme n -ter Ordnung: vektorielle System- und Bewegungsgleichungen	37
2.2.1.5. Beispiel: Aufstellung einer vektoriellen Zustandsgleichung	39
2.2.1.6. Vektorielle Bewegungsgleichung für Mehrgrößensysteme	41
2.2.2. Systemzustand, Zustandsraum, Phasenraum	42
2.2.3. Analoge und diskrete Systeme	43
2.2.4. Kontinuierliche und diskontinuierliche Systeme	45
2.2.5. System- und Bewegungsgleichungen diskontinuierlicher und diskreter Systeme	47
2.3. Verhaltensweisen kybernetischer Systeme	50
2.3.1. Zustands- und Übertragungsverhalten	50
2.3.2. Lineares und nichtlineares, zeitinvariantes und zeitvariables Verhalten	53
2.3.3. Statisches und dynamisches, stationäres und Übergangsverhalten	56
2.3.4. Stabiles und instabiles Verhalten	58

3. Kybernetische Modellbildung, Kennfunktionen des statischen und dynamischen Übertragungsverhaltens	62
3.1. Technologisches Schema, Baugliedplan	62
3.1.1. Technologisches Schema, MSR-Schema	62
3.1.2. Baugliedplan, Übersichtsschaltplan	65
3.2. Übertragungsglied, Wirkungsschema	67
3.2.1. Bildung rückwirkungsfreier Übertragungsglieder	67
3.2.2. Wirkungsschema (Blockschaltbild)	69
3.3. Kennfunktionen des statischen Übertragungsverhaltens	69
3.3.1. Kennlinie, Abweichungen vom Arbeitspunkt, statisch lineare Übertragungsglieder	69
3.3.2. Bildung trägheitsfreier nichtlinearer Übertragungsglieder	72
3.3.3. Linearisierung nichtlinearer trägheitsfreier Übertragungsglieder	73
3.4. Kennfunktionen des dynamischen Übertragungsverhaltens	75
3.4.1. Beschreibung durch Differentialgleichung	75
3.4.2. Sprung- und Übergangsfunktion	76
3.4.3. Stoß-(Impuls-)Funktion und Gewichtsfunktion	78
3.4.4. Frequenzgang	80
3.4.5. Frequenzgangortskurve	84
3.4.6. Frequenzkennlinien	86
3.4.7. Übertragungsfunktion	92
3.4.8. Pol-Nullstellen-Bild	95
3.4.9. Berechnung der Übertragungsfunktion und des Frequenzgangs von elektrischen Netzwerken mittels Widerstandsoperatoren	98
3.5. Signalflußplan	100
3.5.1. Kennzeichnung des Übertragungsverhaltens der Übertragungsglieder	100
3.5.2. Signalflußplan: Darstellung als Blockdiagramm	101
3.5.3. Signalflußplan: Darstellung als Signalflußgraph	103
3.5.4. Systemdefinition auf der Basis der Darstellung als Signalflußgraph	105
4. Zielstellungen, Grobstrukturen und Eigenschaften von Systemen der automatischen Steuerung	107
4.1. Kybernetische Aufgabenstellungen in automatischen Steuerungssystemen	108
4.1.1. Steuerungsziel: statische und dynamische Optimierung	108
4.1.2. Hauptsteuerungsfunktionen	109
4.1.2.1. Direkte Steuerung von Prozeßgrößen	111
4.1.2.2. Bestimmung bzw. Anpassung der Führungsgrößen	111
4.1.2.3. Bestimmung bzw. Anpassung der Parameter	111
4.1.2.4. Bestimmung bzw. Anpassung der Struktur	112
4.1.3. Zeitliche Phasen der Synthese und Arbeit eines automatischen Systems	112
4.1.4. Vorangepaßte und selbstanpassende Systeme	114
4.2. Grundtypen vorangepaßter Systeme	115
4.2.1. Vorwärtssteuerung	116
4.2.1.1. Prinzip und Definition	116
4.2.1.2. Beispiele: Zeitplan-, Führungs- und Ablaufsteuerung	116
4.2.1.3. Charakteristische Eigenschaften von Vorwärtssteuerungen	117
4.2.2. Ein- und Mehrgrößenregelung	118
4.2.2.1. Prinzip und Definition	118
4.2.2.2. Beispiele: Festwert-, Zeitplan- und Führungsregelung	119
4.2.2.3. Vermaschte Eingrößenregelung: Hilfsregel- und Hilfsstellgröße	120
4.2.2.4. Mehrgrößenregelungen	122
4.2.2.5. Charakteristische Eigenschaften von Regelungen, Stabilitätsproblem	124

4.3. Grundtypen selbstanpassender Systeme für das statische stationäre Verhalten	126
4.3.1. Steuerungsaufgabe, Prozeßmodell und Zielfunktion bei der statischen Optimierung	126
4.3.2. Statische Vorwärtsanpassung (Vorwärtsoptimierung)	128
4.3.3. Statische Selbstanpassung durch Regelung	130
4.3.4. Statische Selbstanpassung mittels Suche am Prozeß (Rückwärtsoptimierung)	131
4.3.5. Statische Selbstanpassung mit nachgeführtem statischem Prozeßmodell	135
4.3.6. Statische Selbstanpassung mit nachgeführtem Führungsgrößenzuordner	136
4.3.7. Eigenschaften automatischer lernender Systeme	138
4.4. Selbstanpassende Systeme bezüglich des dynamischen Verhaltens	141
4.4.1. Steuerungsaufgabe und Zielfunktional bei der dynamischen Optimierung	141
4.4.1.1. Steuerungsaufgabe	141
4.4.1.2. Zielfunktionale	142
4.4.1.3. Optimierungsvariable	143
4.4.2. Typen dynamisch selbstanpassender Systeme	144
4.4.2.1. Dynamische Vorwärtsanpassung (Vorwärtsoptimierung)	144
4.4.2.2. Dynamische Selbstoptimierung mittels Suche am Prozeß (Rückwärtsoptimierung)	145
4.5. Hierarchische (große) Steuerungssysteme	146
4.5.1. Charakteristische Eigenschaften großer Systeme	146
4.5.1.1. Zur Definition großer Systeme	146
4.5.1.2. Teilsysteme	147
4.5.1.3. Teilziele	148
4.5.1.4. Hierarchische Steuerungsstruktur	148
4.5.2. Systeme mit hierarchischer Struktur der Steuerungsfunktionen: Mehrschichtsysteme	149
4.5.3. Systeme mit Hierarchie von Koordinierungsebenen: Mehrebenensysteme	151
4.5.3.1. Zentralisierte und dezentralisierte Einebenensysteme	151
4.5.3.2. Mehrebenensysteme	152
4.5.3.3. Koordinierung der statischen Optimierung direkt steuerbar gekoppelter Teilsysteme	154
4.5.3.4. Koordinierung bei der statischen Optimierung abhängig gekoppelter Teilsysteme	155
4.5.3.5. Verallgemeinerung des Koordinationsbegriffs	158
4.5.3.6. Klassifizierung hierarchischer Steuerungssysteme	159
4.6. Zur gerätetechnischen Realisierung von Steuereinrichtungen	160
4.6.1. Fest programmierte Gerätesysteme der MSR-Technik	160
4.6.2. Einbeziehung programmgesteuerter Prozeßrechner in die Steuereinrichtung	162
5. Information und Informationsverarbeitung	165
5.1. Information, Signal, Informationsgehalt	165
5.1.1. Information	165
5.1.2. Signale	166
5.1.3. Determinierte und stochastische Signale und Systeme	169
5.1.4. Informationsübertragung, Kodierung	170
5.1.5. Entscheidungs- und Informationsgehalt	171
5.2. Prinzipien der analogen Informationsverarbeitung	174
5.2.1. Bedeutung der Informationsverarbeitung für die automatische Steuerung	174
5.2.2. Analogrechner, Rechenverstärker	175
5.2.3. Zur Analogprogrammierung linearer analoger Systeme	178
5.2.4. Analoge Modelle	181
5.2.4.1. Analoges Modell	181

5.2.4.2. Iso- und homomorphe Verhaltensmodelle	184
5.3. Prinzipien der digitalen Informationsverarbeitung	185
5.3.1. Digitale Signaldarstellung	186
5.3.2. Informationsverarbeitung in kombinatorischen Schaltsystemen	188
5.3.2.1. Begriff des kombinatorischen Schaltsystems und der Schaltfunktion	188
5.3.2.2. Grundtypen von Schaltfunktionen	189
5.3.2.3. Darstellbarkeit einer Schaltfunktion als disjunktive Normalform	190
5.3.2.4. Realisierung von Schaltfunktionen	192
5.3.3. Informationsverarbeitung in sequentiellen Schaltsystemen	195
5.3.3.1. Begriff und Gleichungen des sequentiellen Schaltsystems	195
5.3.3.2. Beschreibung sequentieller Schaltsysteme mittels Automatentabellen und Zustandsgraphen	197
5.3.3.3. Elementarspeicherglied	198
5.3.4. Numerische digitale Informationsverarbeitung, Digitalrechner	200
5.3.4.1. Rückführung numerischer Aufgaben auf Additionen	200
5.3.4.2. Binäre Addierschaltung	201
5.3.4.3. Programmgesteuerter Digitalrechner	202
5.3.5. Zur Programmierung von Digitalrechnern	205
5.3.5.1. Aufstellung eines Lösungsalgorithmus	206
5.3.5.2. Programmablaufplan	206
5.3.5.3. Programmformulierung in problemorientierter Sprache und Übersetzung in Maschinensprache	210
5.3.6. Prozeßrechner, Analog-Digital-Umsetzung	210
5.3.6.1. Prozeßrechner: Eigenschaften und Betriebsarten	210
5.3.6.2. Prozeßperipherie, Analog-Digital-Umsetzung	212

Teil II

Beschreibung von Signalübertragung und Zustandsverhalten in linearisierten kontinuierlichen Systemen

6. Grundaufgabe bei der Analyse, Identifikation und Synthese von Steuerungssystemen; Lösungswege	217
6.1. Analyse, Identifikation und Synthese von Steuerungssystemen	217
6.2. Beschreibung der Signalübertragung bzw. des Zustandsverhaltens als Grundaufgabe der Behandlung von Steuerungssystemen	218
6.3. Lösungswege zur Beschreibung der Signalübertragung in analogen linearen Systemen	220
6.3.1. Direkte Methoden	220
6.3.2. Indirekte Methoden mit Zerlegung der Eingangssignale	221
7. Beschreibung von Zustandsverhalten und Signalübertragung mittels Vektordifferentialgleichung und Lösungsverfahren	224
7.1. Aufstellung der Systemgleichungen in Matrixform	224
7.2. Lösung der Zustands-Vektordifferentialgleichung für allgemeine Eingangssignale ..	229
7.3. Eigenschaften der Übergangsmatrix $\Phi(t)$	231
7.4. Eigenwerte und Eigenvektoren	232
7.5. Transformation der Zustands- und Bewegungsgleichung auf kanonische Normalform	235
7.5.1. Transformation der Systemgleichungen auf Normalform	235
7.5.2. Transformation der Bewegungsgleichung auf Normalform	239

7.6. Berechnung der Übergangsmatrix $\Phi(t)$	240
7.7. Linearisierung der Zustandsgleichung nichtlinearer Systeme um den Arbeitspunkt	242
7.8. Zusammenfassung des Lösungswegs und Anwendungsbeispiel	244
7.8.1. Zusammenfassung des Lösungswegs	244
7.8.2. Anwendungsbeispiel, Aufgabenstellung und Systemgleichungen	244
7.8.3. Berechnung über Bewegungsgleichung ohne Zustandstransformation	246
7.8.3.1. Bestimmung der Eigenwerte der Systemmatrix A	246
7.8.3.2. Ermittlung der Übergangsmatrix $\Phi(t)$	246
7.8.3.3. Berechnung der freien Bewegung	247
7.8.3.4. Erzwungene Bewegung	247
7.8.4. Berechnung mittels kanonischer Transformation der Systemgleichungen ..	249
7.8.4.1. Bestimmung der Eigenvektoren	249
7.8.4.2. Diagonalisierung der Systemmatrix	249
7.8.4.3. Ermittlung der Übergangsmatrix $\Phi(t)$ aus e^{At} (zum Vergleich)	250
7.8.4.4. Freie Bewegung mit Anfangsdrehzahl 25 U/s	250
7.8.4.5. Erzwungene Bewegung bei Anlegen einer Ankerspannung von 200 V	251
 8. Beschreibung von Signalübertragungen mittels Zerlegung in Impulse:	
Faltungsintegral	252
8.1. Zerlegung des Eingangssignals in impulsförmige Elementarsignale: Faltungsintegral	252
8.2. Regeln für das Rechnen mit δ -Funktionen	253
8.3. Ermittlung der elementaren Ausgangssignale: Gewichtsfunktion	257
8.4. Überlagerung der elementaren Ausgangssignale mittels Faltungsintegral	258
8.5. Zusammenfassung des Lösungswegs und Beispiel	260
 9. Beschreibung von Signalübertragungen mittels Zerlegung in Sinusschwingungen:	
Fouriertransformation	262
9.1. Zerlegung periodischer Signale in sinusförmige Elementarsignale mittels Fourier- reihe	262
9.2. Zerlegung nichtperiodischer Signale in sinusförmige Elementarsignale mittels Fourierintegrals	265
9.2.1. Einführung des Fourier- und Fourierumkehrintegrals und Zerlegung des Eingangssignals	265
9.2.2. Beispiele	268
9.3. Bestimmung der elementaren Ausgangssignale mittels Frequenzgangs	269
9.4. Überlagerung der elementaren Ausgangssignale mittels Fourierumkehrintegrals ..	270
9.5. Zusammenfassung der Berechnung von Signalübertragungen mittels Spektralzer- legung	270
 10. Beschreibung von Signalübertragungen mittels Zerlegung in Exponentialsignale:	
Laplace transformation	272
10.1. Zerlegung des Eingangssignals in exponentielle Elementarsignale: Laplacetrans- formation	272
10.1.1. Einführung des Laplaceintegrals und Laplaceumkehrintegrals und Zer- legung des Eingangssignals	272
10.1.2. Verallgemeinerung des Laplaceumkehrintegrals	275
10.1.3. Verallgemeinerte Betrachtung als Transformation einer Zeit- in eine Bildfunktion	276
10.1.4. Beispiele	277

10.2. Einige Regeln und Korrespondenzen der Laplacetransformation	277
10.3. Ermittlung der elementaren exponentiellen Ausgangssignale: Übertragungsfunktion	284
10.3.1. Ermittlung der Amplituden der elementaren exponentiellen Ausgangssignale mittels Übertragungsfunktion	284
10.3.2. Ermittlung der Bildfunktion des Ausgangssignals durch Transformation der Differentialgleichung; erweiterte Definition der Übertragungsfunktion	284
10.3.3. Übertragungsfunktion und Gewichtsfunktion	286
10.3.4. Beispiele zur Ermittlung von Übertragungsfunktionen aus Differentialgleichungen	287
10.3.4.1. Übertragungsfunktion eines RC-Gliedes	287
10.3.4.2. Übertragungsfunktion eines Gleichstrommotors	287
10.4. Überlagerung der elementaren Ausgangssignale, Rücktransformation mittels $\mathcal{L}^{-1}$ -Integrals	288
10.4.1. Überlagerung der elementaren Ausgangssignale mittels Umkehrintegrals	288
10.4.2. Zusammenfassung des Lösungswegs zur Berechnung von Signalübertragungen mittels Laplacetransformation	289
10.4.3. Verfahren zur Rücktransformation von Bildfunktionen	290
10.4.3.1. Analytisch-grafisches Verfahren zur Rücktransformation rationaler Bildfunktionen mit Einfachpolen	291
10.4.3.2. Beispiel zur Rücktransformation	294
10.4.3.3. Rücktransformation von rationalen Bildfunktionen mit Mehrfachpolen	296
10.5. Ermittlung von Übergangsmatrix und Übertragungsfunktion mittels Laplacetransformation aus den Systemgleichungen	297
10.5.1. System- und Bewegungsgleichungen im Bildbereich	297
10.5.2. Berechnung der Übergangsmatrix mittels Laplacetransformation	299
10.5.2.1. Bildfunktion der Übergangsmatrix	299
10.5.2.2. Verfahren von Faddejew zur Berechnung der transformierten Übergangsmatrix	300
10.5.2.3. Beispiel: Übergangsmatrix des Gleichstrommotors	301
10.5.3. Berechnung der Übertragungsfunktionen aus den Systemgleichungen	302
10.5.3.1. Berechnung aus den allgemeinen Systemgleichungen	302
10.5.3.2. Berechnung aus den kanonischen Gleichungen	302
10.5.3.3. Pole der Übertragungsfunktion und Eigenwerte	303
10.5.3.4. Beispiele	304
11. Grundtypen von Übertragungsgliedern:	
Klassifizierung nach Übertragungsfunktion, Übergangsfunktion und Kennlinie	306
11.1. Klassifizierung linearer Übertragungsglieder bezüglich des stationären Verhaltens auf Grund der Übertragungsfunktion	307
11.1.1. Polynomform, Pol-Nullstellen-Form und Zeitkonstantenform einer rationalen Übertragungsfunktion	307
11.1.2. Ermittlung des für das stationäre Verhalten maßgebenden Teiles der Übertragungsfunktion	308
11.1.3. Klasse der Proportionalglieder (P-Glieder)	309
11.1.4. Klasse der Differentialglieder (D-Glieder)	310
11.1.5. Klasse der Integralglieder (I-Glieder)	310
11.1.6. P_1 -, D_1 - und I_1 -Glieder	311
11.2. Verfeinerte Klassifizierung linearer Glieder auf Grund der Übertragungsfunktion durch Einbeziehung des Übergangsverhaltens, zugehörige Übergangsfunktionen	313
11.2.1. Trägheits-(Verzögerungs-) Glied 1. Ordnung	313
11.2.2. Trägheitsglieder 2. und höherer Ordnung	314

11.2.3.	Schwingungsglied	317
11.2.4.	Vorhaltglied 1. und höherer Ordnung	319
11.2.5.	Totzeitglied	319
11.2.6.	Beschreibung komplizierterer Glieder als Kombinationsglieder	320
11.3.	Kennzeichnung analoger Glieder auf Grund der grafisch vorliegenden Übergangsfunktion	322
11.3.1.	Kennzeichnung auf Grund des stationären Verlaufs der Übergangsfunktion	322
11.3.2.	Kennzeichnung auf Grund des Übergangsverlaufs der Übergangsfunktion	322
11.4.	Kennzeichnung statischer nichtlinearer Glieder anhand der Kennlinie	323
11.4.1.	Nichtlineare analoge Glieder mit eindeutigen Kennlinien	325
11.4.2.	Nichtlineare analoge Glieder mit mehrdeutigen Kennlinien	325
11.4.3.	Nichtlineare diskrete Übertragungsglieder: Mehrpunktglieder	325
12.	Berechnung der Signalübertragung elementarer Verknüpfungen von Übertragungsgliedern mittels Übertragungsfunktionen und Kennlinien	327
12.1.	Übertragungsfunktion von Kettenschaltungen	327
12.2.	Übertragungsfunktion von Parallelschaltungen	329
12.3.	Übertragungsfunktion von Gegenparallelschaltungen (Schaltungen mit Rückführung)	329
12.4.	Übertragungsfunktionen und Kennlinien linearer Regler: Darstellung als Parallelschaltung	332
12.4.1.	P- und I-Regler	333
12.4.2.	PI-Regler	333
12.4.3.	PD-Regler	334
12.4.4.	PID-Regler	335
12.4.5.	Beschreibung nichtlinearer Kennlinien von Reglern	337
12.4.5.1.	Regler ohne I-Anteil	337
12.4.5.2.	Regler mit I-Anteil	338
12.5.	Aufbau linearer analoger Regler mittels Rückführung	339
12.5.1.	Wichtige Rückführglieder	339
12.5.2.	P-Regler auf Grund starrer Rückführung	340
12.5.3.	I-Regler auf Grund differenzierender Rückführung	342
12.5.4.	PI-Regler auf Grund nachgebender Rückführung	343
12.5.5.	PD-Regler auf Grund verzögerter Rückführung	344
12.5.6.	PID-Regler auf Grund nachgebender und verzögerter Rückführung	345
12.5.7.	Beispiele für Regler mit Rückführungen	346
12.6.	Übertragungsfunktionen und Zeitverhalten des Regelkreises	348
12.6.1.	Signalflußbild des Regelkreises	348
12.6.2.	Übertragungsfunktion der offenen Schleife	349
12.6.3.	Übertragungsfunktionen des geschlossenen Kreises	349
12.6.4.	Übergangsfunktion eines Regelkreises (Beispiel)	351
12.6.5.	Bleibende Regelabweichung, Regelfaktor	353
12.7.	Übertragungsfunktion und Zeitverhalten von Regelkreisen mit Totzeit	355
12.7.1.	Übertragungsfunktion von Regelkreisen mit Totzeitstrecken	355
12.7.2.	Approximation von $\exp \{-pT_i\}$ durch rationale Funktionen	356
12.7.3.	Berechnung der Übergangsfunktion von Totzeitregelkreisen für kleine Zeiten	356
12.8.	Konstruktion der statischen Signalübertragung (der Kennlinien) von Grundschaltungen nichtlinearer Übertragungsglieder	359
12.8.1.	Kennlinie einer Parallelschaltung nichtlinearer Übertragungsglieder	359
12.8.2.	Kennlinie einer Kettenschaltung nichtlinearer Übertragungsglieder	360

12.8.3. Kennlinie eines Regelkreises mit nichtlinearer Strecke und nichtlinearem Regler	361
12.8.3.1. Konstruktion der Führungskennlinie	361
12.8.3.2. Konstruktion der Lastkennlinien	362
13. Aufstellung von Zustandsgleichungen aus den Übertragungsfunktionen und Vektordifferentialgleichungen von Übertragungsgliedern in elementaren Verknüpfungen ...	363
13.1. Problematik der Aufstellung von Zustandsgleichungen aus Übertragungsfunktionen	363
13.2. Direkte Aufstellung der Zustandsgleichung aus der in Polynomform gegebenen Übertragungsfunktion	365
13.2.1. Übertragungsfunktionen ohne endliche Nullstellen	365
13.2.2. Übertragungsfunktionen mit endlichen Nullstellen	367
13.3. Aufstellung von Zustandsgleichungen bei Kettenschaltung von Übertragungsgliedern bzw. bei Produktdarstellung von Übertragungsfunktionen	369
13.3.1. Zustandsgleichung in Kette geschalteter T_1 -Glieder	369
13.3.2. Zustandsgleichung der Kettenschaltung von Gliedern mit komplexen Polen (von Schwingungsgliedern)	371
13.3.3. Zustandsgleichung von Kettenschaltungen mit T_1 - T_{D1} -Gliedern bzw. von Übertragungsfunktionen in Pol-Nullstellen-Darstellung	371
13.4. Aufstellung von Zustandsgleichungen bei Parallelschaltung von Übertragungsgliedern bzw. bei Summendarstellung von Übertragungsfunktionen	373
13.4.1. Zustandsgleichung parallelgeschalteter T_1 -Glieder	373
13.4.2. Aufstellung von Zustandsgleichungen durch Partialbruchzerlegung der Übertragungsfunktion	375
13.4.2.1. Übertragungsfunktionen mit Einfachpolen	375
13.4.2.2. Übertragungsfunktionen mit Mehrfachpolen	375
13.5. Zustandsgleichungen bei Gegenparallelschaltung von Übertragungsgliedern	379
13.5.1. Zustandsgleichung eines Übertragungsglieds mit starrer Rückführung ..	379
13.5.2. Regelkreis mit I-Regler	380
Sachwörterverzeichnis	382

Teil I Einführung

Kybernetische Grundlagen

1.1. Vorläufige Charakterisierung der Kybernetik

Von den technischen Errungenschaften, die die gegenwärtig sich vollziehende wissenschaftlich-technische Revolution maßgebend bestimmen, haben sich Kerntechnik und Raumfahrt mit großem Aufsehen eingeführt. Für die Anfänge der Automatisierungstechnik trifft das nicht in gleichem Maß zu. Mit ein wenig Aufmerksamkeit kann man jedoch beobachten, daß die Automatisierung sich inzwischen nicht nur unsere Technik und Volkswirtschaft, sondern auch viele wissenschaftliche Disziplinen und unsere persönliche Lebenssphäre für absehbare Zeit am nachhaltigsten zu beeinflussen.

Die Automatisierung unterscheidet sich von den genannten anderen modernen technischen Errungenschaften der Kerntechnik und Raumfahrt auch in anderer Beziehung. Während sich letztere – wie viele andere moderne Wissenschaftszweige – durch neue physikalische Entdeckungen und durch konsequente technische Nutzung bekannter physikalischer Gesetzmäßigkeiten als neue *spezielle* Disziplinen von Wissenschaft und Technik entwickelt haben, stößt man beim Studium der grundsätzlichen Methoden der Automatisierung auf eine Wissenschaft so *allgemeinen* Charakters, daß man geneigt ist, dieser eine ähnlich grundlegende Bedeutung wie der Physik und der Mathematik zuzuerkennen. Diese *Theorie der Automatisierung* kann in einer vorläufigen Begriffsbestimmung als *Kybernetik* bezeichnet werden. Eine solche Begriffsbestimmung ist jedoch noch unvollkommen.

Die Kybernetik hatte zwar in der Technik, insbesondere in der Regelsystem-, Nachrichten- und maschinellen Rechentechnik, ihren Ursprung genommen, wobei Methoden verschiedener mathematischer Disziplinen, insbesondere der Funktionen-Theorie, der Wahrscheinlichkeitslehre und Statistik und der mathematischen Logik, Verwendung fanden. Die neue und – man kann wohl sagen – revolutionisierende Erkenntnis bestand jedoch darin, daß diese ursprünglich in der Technik benutzten Verfahren und mathematischen Methoden auch erfolgreich zur Analyse bestimmter Phänomene und zur Erreichung gewisser Ziele in nichttechnischen Systemen, insbesondere in der Biologie und Physiologie, in der Ökonomie und den Gesellschaftswissenschaften sowie in der Psychologie, der Pädagogik und den Sprachwissenschaften, angewendet werden konnten. Auf diese Weise wuchsen – entgegen der gewöhnlich beobachteten Tendenz zur Spezialisierung der Einzelwissenschaften – zahlreiche Gebiete der Natur-, Gesellschafts- und Geisteswissenschaften und der Technik unter „kybernetischem Aspekt“ zu einer neuen Einheit zusammen.

Darüber hinaus den amerikanischen Mathematiker Norbert Wiener († 1964), der den wesentlichen Anstoß zu dieser Entwicklung gab, einen besonderen Begriff einzuführen. Das aus dem Griechischen stammende Wort *kybernetes* bedeutet die Kunst der

12.5.3. Kennlinie eines Regelkreises mit nichtlinearer Strecke und nichtlinearer Regel	363
12.5.3.1. Konstruktion der Führungsgrößen	363
12.5.3.2. Konstruktion der Stellgrößen	363
13. Aufstellung von Zustandsgleichungen aus den Übertragungsfunktionen und Vektordarstellung von Übertragungsgliedern in kanonischen Verbindungen	363
13.1. Problematik der Aufstellung von Zustandsgleichungen aus Übertragungsfunktionen	363
13.2. Direkte Aufstellung der Zustandsgleichung aus der in Polynomform gegestenen Übertragungsfunktion	363
13.2.1. Übertragungsfunktionen ohne endliche Nullstellen	363
13.2.2. Übertragungsfunktionen mit endlichen Nullstellen	367
13.3. Aufstellung von Zustandsgleichungen bei Ketenschaltung von Übertragungsgliedern bzw. bei Produktdarstellung von Übertragungsfunktionen	369
13.3.1. Zustandsgleichung in Kette geschalteter T_n -Glieder	369
13.3.2. Zustandsgleichung der Ketenschaltung von Gliedern mit komplexen Polen (von Schwingungsgliedern)	371
13.3.3. Zustandsgleichung von Ketenschaltungen mit T_n - T_0 -Gliedern bzw. von Übertragungsfunktionen in Pol-Nullstellen-Darstellung	371
13.4. Aufstellung von Zustandsgleichungen bei Parallelschaltung von Übertragungsgliedern bzw. bei Summendarstellung von Übertragungsfunktionen	373
13.4.1. Zustandsgleichung parallelschalteter T_n -Glieder	373
13.4.2. Aufstellung von Zustandsgleichungen durch Partialbruchzerlegung der Übertragungsfunktion	375
13.4.2.1. Übertragungsfunktionen mit Einfachpolen	375
13.4.2.2. Übertragungsfunktionen mit Mehrfachpolen	375
13.5. Zustandsgleichungen bei Gegenparallelschaltung von Übertragungsgliedern	379
13.5.1. Zustandsgleichung eines Übertragungsglieds mit starrer Rückführung	379
13.5.2. Regelkreis mit I-Regler	380
Sachwörterverzeichnis	382

1. Einführung: Kybernetik und Technik

1.1. Vorläufige Charakterisierung der Kybernetik

Von den technischen Errungenschaften, die die gegenwärtig sich vollziehende wissenschaftlich-technische Revolution maßgebend bestimmen, haben sich Kerntechnik und Raumfahrt mit großem Aufsehen eingeführt. Für die Anfänge der Automatisierungstechnik trifft das nicht in gleichem Maß zu. Mit ein wenig Aufmerksamkeit kann man jedoch beobachten, daß die Automatisierung sich anschickt, nicht nur unsere Technik und Volkswirtschaft, sondern auch viele wissenschaftliche Disziplinen und unsere persönliche Lebenssphäre für absehbare Zeit am nachhaltigsten zu beeinflussen.

Die Automatisierung unterscheidet sich von den genannten anderen modernen technischen Errungenschaften der Kerntechnik und Raumfahrt auch in anderer Beziehung. Während sich letztere – wie viele andere moderne Wissenschaftszweige – durch neue physikalische Entdeckungen und durch konsequente technische Nutzung bekannter physikalischer Gesetzmäßigkeiten als neue *spezielle* Disziplinen von Wissenschaft und Technik entwickelt haben, stößt man beim Studium der grundsätzlichen Methoden der Automatisierung auf eine Wissenschaft so *allgemeinen* Charakters, daß man geneigt ist, dieser eine ähnlich grundlegende Bedeutung wie der Physik und der Mathematik zuzuerkennen. Diese *Theorie der Automatisierung* kann in einer vorläufigen Begriffsbestimmung als *Kybernetik* bezeichnet werden. Eine solche Begriffsbestimmung ist jedoch noch unvollkommen.

Die Kybernetik hatte zwar in der Technik, insbesondere in der Regelungs-, Nachrichten- und maschinellen Rechentechnik, ihren Ursprung genommen, wobei Methoden verschiedener mathematischer Disziplinen, insbesondere der Funktionentheorie, der Wahrscheinlichkeitslehre und Statistik und der mathematischen Logik, Verwendung fanden. Die neue und – man kann wohl sagen – revolutionisierende Erkenntnis bestand jedoch darin, daß diese ursprünglich in der Technik benutzten Verfahren und mathematischen Methoden auch erfolgreich zur Analyse bestimmter Phänomene und zur Erreichung gewisser Ziele in nichttechnischen Systemen, insbesondere in der Biologie und Physiologie, in der Ökonomie und den Gesellschaftswissenschaften sowie in der Psychologie, der Pädagogik und den Sprachwissenschaften, angewendet werden konnten. Auf diese Weise wuchsen – entgegen der gewöhnlich beobachteten Tendenz zur Spezialisierung der Einzelwissenschaften – zahlreiche Gebiete der Natur-, Gesellschafts- und Geisteswissenschaften und der Technik unter „kybernetischem Aspekt“ zu einer neuen Einheit zusammen.

Das bewog auch den amerikanischen Mathematiker *Norbert Wiener* († 1964), der den wesentlichen Anstoß zu dieser Entwicklung gab, einen besonderen Begriff einzuführen. Das aus dem Griechischen stammende Wort *κυβερνητική* bedeutet die Kunst des

Steuermanns eines Schiffes und findet sich schon bei *Plato* (400 v. d. Z.). *Ampère* (1830) verstand unter „cybernétique“ die Wissenschaft von der Staatsleitung. *N. Wiener* betitelte sein 1948 erschienenes berühmt gewordenes Buch: *Cybernetic, or control and communication in the animal and the machine*.

Unter Verwendung und Erweiterung des Untertitels soll die folgende vorläufige Definition gegeben werden:

D 1.1

Kybernetik ist die Lehre von den Steuerungen und der Informationsübertragung und -verarbeitung in technischen und nichttechnischen Systemen (in Lebewesen u. a.).

Vermerkt sei, daß *Felix Linke* (1840–1917), Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt, vermutlich der erste gewesen ist, der das gleichartige Prinzip von Regelungsvorgängen in Maschinen und Lebewesen erkannt und gelehrt hat.

Um ein vertieftes Verständnis des Wesens der Kybernetik und ihrer Anwendungen in der Technik zu erlangen, wollen wir zunächst einen kurzen Blick zurück in die Geschichte der Technik werfen. In der Technik kann man in der Vergangenheit zwei ihrer Natur nach grundsätzlich verschiedene Aufgabengebiete unterscheiden, die mit *Produktions-* und *Informationstechnik* bezeichnet werden sollen.

1.2. Produktionstechnik

Zur *Produktionstechnik* zählt man die Energie-, Verfahrens- und Fertigungstechnik. Betrachten wir als Beispiel der *Energietechnik* ein Kraftwerk: Durch Feuerung von Kohle, Heizöl oder Kernbrennstoffen wird Wasser verdampft und der überhitzte und damit auf hohen Druck gebrachte Dampf über eine Turbine entspannt. Dadurch wird ein mit der Turbine gekoppelter elektrischer Generator angetrieben, dessen elektrische Leistung über das elektrische Netz schließlich an die zahlreichen Verbraucher in Industrie und Haushalt gelangt. Wir beobachten dabei, wie die in den Brennstoffen enthaltene chemische oder Kernenergie zunächst in Wärme-, dann in mechanische und danach in elektrische Energie gewandelt wird, um schließlich bei den Verbrauchern als mechanische, Wärme- oder Strahlungsenergie (Licht) genutzt zu werden. Den für unsere Betrachtungen wesentlichen Vorgang zeigt Bild 1.1.

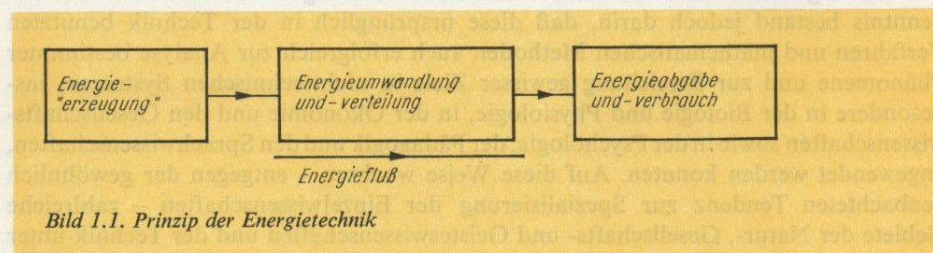


Bild 1.1. Prinzip der Energietechnik

Während bei der Energietechnik eine Umwandlung von Energien in Formen erfolgt, die für die Verteilung geeignet sind bzw. der Verbraucher benötigt, findet man in der Verfahrens- und Fertigungstechnik eine Verarbeitung von Stoffen. Bei der *Fertigungs-*

technik handelt es sich hierbei um die Herstellung geometrisch bestimmter Körper, was i. allg. in einem diskontinuierlichen Stückgutprozeß vor sich geht. Dagegen vollzieht sich in der *Verfahrenstechnik* eine Umwandlung von Stoffen ohne geometrisch bestimmte Form. Sie erfolgt vorzugsweise kontinuierlich in einem Fließprozeß. Als Beispiel diene ein chemischer Reaktor, in den verschiedene Stoffe eingegeben werden. Unter bestimmten Temperaturen und Drücken läuft eine chemische Reaktion ab, bei der sich ein oder mehrere neue Komponenten bilden, die als Ausgangsprodukte abgezogen werden. Ein weiteres Beispiel für die Verfahrenstechnik ist eine Kolonne zur Destillation von Rohöl; ein Beispiel für die Fertigungstechnik ist eine Werkzeugmaschine, auf der aus Rundstahl Bolzen gedreht werden.

Beide, Verfahrens- und Fertigungstechnik, können wegen der ihnen gemeinsamen Umwandlung bzw. Umformung von Stoffen als *Stofftechnik* bezeichnet werden, deren Prinzip im Bild 1.2 erläutert ist.



Bild 1.2. Prinzip der Stofftechnik (Verfahrens- und Fertigungstechnik)

Natürlich werden zur Stoffumwandlung und -umformung auch Energien benötigt, die jedoch für unsere Betrachtung nicht wesentlich sind, sondern die Bedeutung von Hilfsenergien haben.

Ziel der Produktionstechnik ist es somit, den Verbrauchern die gewünschten Energien und Produkte zur Verfügung zu stellen, und zwar so, daß deren Wert – bezogen auf die eingesetzten Rohstoffe und Energien – möglichst groß ist. Gesellschaftlich gesehen ermöglicht die Produktionstechnik eine Entlastung des Menschen von körperlicher Arbeit. Unter Mechanisierung wird häufig dieser Vorgang verstanden.

1.3. Informationstechnik

Seit etwa 100 Jahren tritt neben die Produktionstechnik eine weitere Technik, in der keine Stoffe umgewandelt werden und die umgesetzten Energien so gering sind, daß energetische Überlegungen keine entscheidende Rolle spielen. Das ist die *Informationstechnik*.

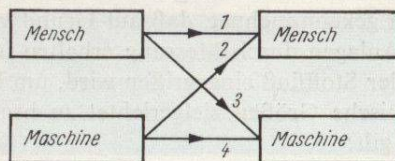
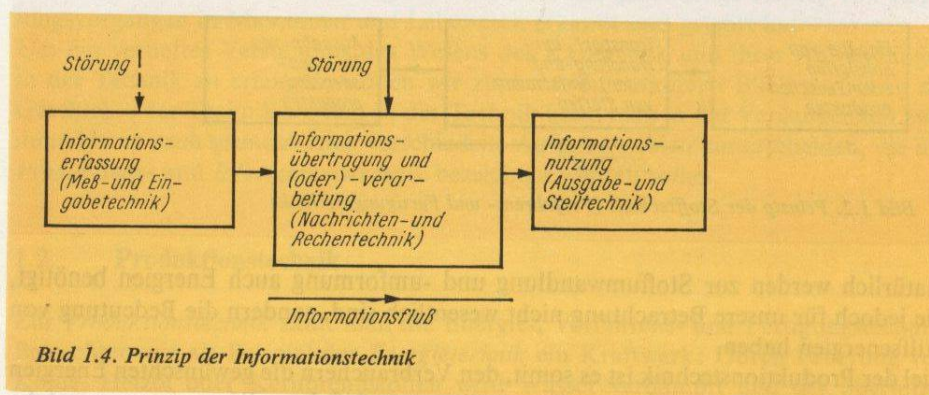


Bild 1.3. Informationsübertragung

Ihre ursprüngliche Aufgabe als Nachrichtentechnik besteht darin, Informationen von Mensch zu Mensch zu übertragen. Bild 1.3 zeigt jedoch, daß Informationen auch zwischen Menschen und Maschinen ausgetauscht werden können.

Beim Ablesen eines Meßgeräts gelangt eine Information über die Meßgröße, z. B. die Temperatur in einem Ofen, an den Bedienungsmann (Weg 2). Bei Programmierung eines Rechners wird über die Eingabeeinrichtungen eine Information vom Benutzer an den Rechner gegeben (Weg 3).

Schließlich tritt auch der Fall auf, daß Informationen aus einer technischen Anlage durch Messung erhalten werden und daß unter Ausschluß des Menschen auf Grund dieser Informationen wieder in dieselbe oder eine andere Anlage eingegriffen wird (Weg 4). Gerade das ist der Fall, der uns in automatisierten technischen Einrichtungen begegnen wird. Dabei erfolgt dieser Eingriff stets nach einer vorausgegangenen Informationsverarbeitung. Diese umfaßt die Durchführung von algebraischen, analytischen und logischen Operationen und geschieht mit den Methoden und Mitteln der maschinellen Rechentechnik. Das vollständige Schema der Informationstechnik, wie es Bild 1.4 zeigt, schließt also die Informationserfassung, die Informationsübertragung und -verarbeitung und die Informationsausgabe ein.



Entlang dieser Informationskette vollzieht sich ein Informationsfluß. Ziel der Informationstechnik ist es, die Informationen trotz äußerer Störungen (Bild 1.4) fehlerfrei zu erfassen, zu übertragen und zu verarbeiten.

1.4. Automatisierungstechnik, automatische Steuerung

1.4.1. Automatisierter Prozeß, Steuerung

Bei den automatisierten Prozessen, die man bei der Automatisierung von Anlagen der Produktionstechnik erhält, findet man nun eine Verflechtung von Produktions- und Informationstechnik vor. Sie sind dadurch gekennzeichnet, daß auf Grund von Informationen, die aus diesen oder anderen Anlagen durch Messung erhalten und danach verarbeitet werden, in den Energie- oder Stofffluß eingegriffen wird, um bestimmte physikalische oder technisch-ökonomische Größen zielgerichtet zu beeinflussen. Dieser Vorgang heißt Steuern, und es gilt:

D 1.2

Steuern ist die zielgerichtete Beeinflussung gegebener Größen bzw. von Systemen und deren Verhalten. Die Steuerung heißt (a) *Handsteuerung*, (b) *automatisierte*

Steuerung oder (c) automatische Steuerung, wenn sie durch den Menschen (a) bzw. durch eine technische Steuereinrichtung mit (b) bzw. ohne (c) unmittelbare Beteiligung des Menschen erfolgt.

Auch bei der automatischen Steuerung bleibt dem Menschen die Zielvorgabe und die Aufsicht über deren Arbeit vorbehalten.

Bei einer Steuerung liegt also immer ein bestimmtes Ziel, eine bestimmte Aufgabenstellung vor, deren Vorgabe nicht Sache der Kybernetik ist. Mit vorstehender Definition können wir den automatisierten Prozeß als einen selbsttätig gesteuerten erklären.

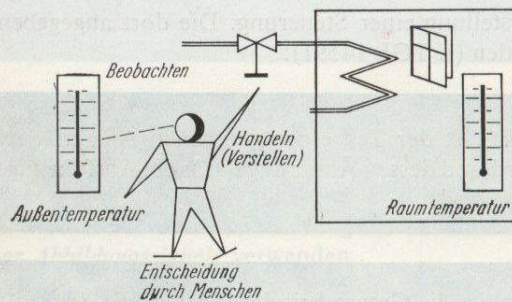


Bild 1.5. Handsteuerung der Temperatur eines Raumes

Betrachten wir hierzu als Beispiel die Beeinflussung der Temperatur eines Raumes, und zwar zunächst auf Grund der gemessenen Außentemperatur (Bild 1.5). Öffnet man auf Grund der morgens abgelesenen Außentemperatur nach Überlegung das Stellventil der Heizung um einen der Erfahrung entsprechenden Betrag, so liegt eine Informationserfassung und -verarbeitung durch den Menschen vor. Man spricht dann von einer Handsteuerung. Bei der im Bild 1.6 dargestellten automatischen Steuerung erfolgt diese Informationserfassung und -verarbeitung und die anschließende Verstellung selbsttätig dadurch, daß bei Ansteigen der Außentemperatur der Quecksilberspiegel steigt und einen Stromkreis schließt, wodurch über ein Ventil die Warmwasserzufuhr unterbrochen wird. Entsprechendes gilt für das Ausschalten der Heizung.

Für jede Steuerung existiert gemäß Definition 1.2 eine Zielstellung. Im vorstehenden Beispiel besteht sie darin, die Raumtemperatur auf einen vorgegebenen Wert zu bringen. Zielgrößen wie diese werden der Steuereinrichtung als sog. Führungsgrößen mitgeteilt:

Führungsgrößen sind solche Größen, denen die durch die Steuerung beeinflussten Größen angeglichen bzw. (bei veränderlichen Führungsgrößen) nachgeführt werden sollen. Die Werte konstanter Führungsgrößen heißen *Sollwerte*.

D 1.3

In vorstehenden Beispielen hat die Hausfrau die gewünschte Raumtemperatur sich selbst vorgegeben. Bei der automatischen Steuerung von Bild 1.6 ist der Sollwert durch die Eintauchtiefe des Kontaktthermometers in das mit Quecksilber gefüllte Glasrohr gegeben.

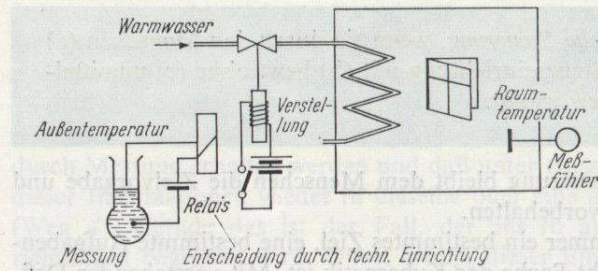


Bild 1.6. Automatische Steuerung der Temperatur

1.4.2. Strecke und Einrichtung

Bild 1.7 zeigt die schematische Darstellung einer Steuerung. Die dort angegebenen Teile können wie folgt definiert werden (s. TGL 14591):

- D 1.4** Die *Strecke* (*Steuerstrecke*, *Objekt*) ist der Teil einer gegebenen Anlage, der durch die Steuerung beeinflusst wird und dessen Änderungen für die Ausführung der Steuerungsaufgabe maßgebend sind.
- D 1.5** Die *Einrichtung* (*Steuereinrichtung*) ist die Gesamtheit der Glieder, die der aufgabenmäßigen Beeinflussung der Strecke über das Stellglied dienen.
- D 1.6** Als *Stellglied* wird ein Glied bezeichnet, das dem unmittelbaren zielgerichteten Eingriff in einen Stoff- oder Energiefluß dient; es wird gewöhnlich der Strecke zugerechnet.

Die Strecke wird also durch die Aufgabenstellung bestimmt. Sie reicht vom Eingriffsort in den Massen- oder Energiestrom bis zu der Stelle, an der die aufgabenmäßig

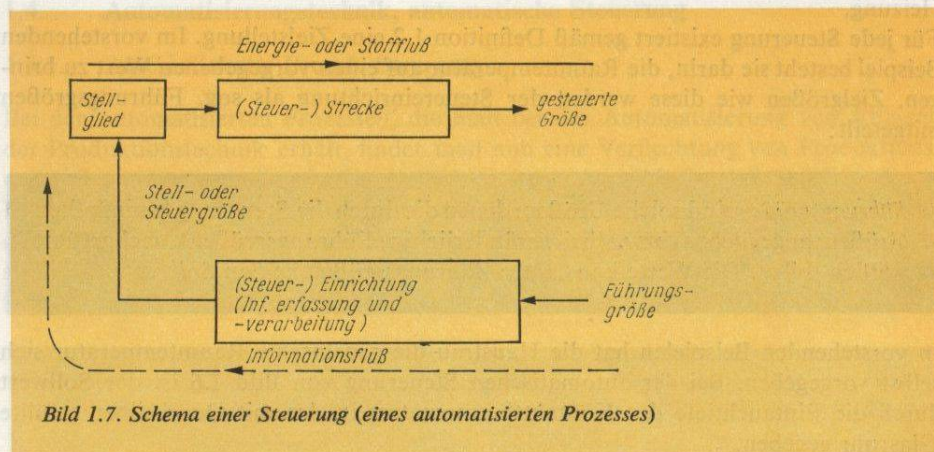


Bild 1.7. Schema einer Steuerung (eines automatisierten Prozesses)

zu beeinflussende Größe, die *gesteuerte Größe*, gemessen wird, für das Beispiel von Bild 1.6 vom Stellventil bis zur Meßstelle für die Raumtemperatur. In einer größeren Anlage können mehrere Strecken existieren, wenn nämlich mehrere Größen beeinflusst werden sollen und hierzu mehrere Stelleingriffe vorgenommen werden. Die Steuereinrichtung umfaßt die Glieder zur Informationserfassung, Informationsverarbeitung und zum Antrieb des Stellglieds.

1.4.3. Bauglieder, Steuer-, Stör- und gesteuerte Signale

Die gerätetechnischen Glieder von Strecke und Einrichtung heißen *Bauglieder*. Die Zeitverläufe der Ein- und Ausgangsgrößen dieser Glieder werden *Ein- und Ausgangssignale* genannt.

D 1.7

Da für kybernetische Untersuchungen eben diese Zeitverläufe interessieren, wird im folgenden gewöhnlich von Signalen statt von Größen gesprochen. In engerem Sinn werden manchmal nur gemessene Zeitverläufe Signale genannt, da diese die Werte der Originalgrößen „signalisieren“.

Wir wollen zur Charakterisierung dieses Tatbestands die Bezeichnungen *Meßsignale* oder *Abbildungssignale* verwenden.

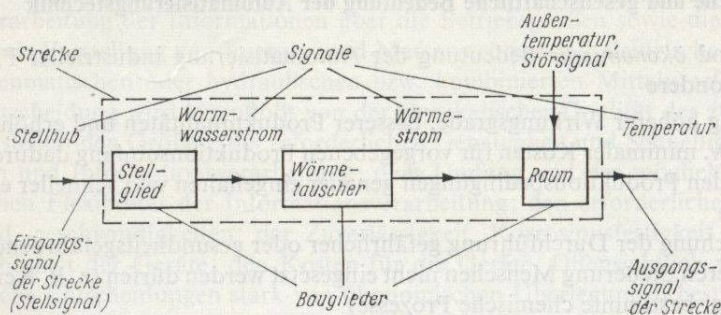


Bild 1.8. Bauglieder und Signale der Strecke von Bild 1.6

Die Strecke von Bild 1.6 hat die im Bild 1.8 gezeichneten Glieder und Signale: das Stellventil mit dem Eingangssignal Stellhub und dem Ausgangssignal Wasserstrom; der Heizungskörper mit dem Eingangssignal Wasserstrom und dem Ausgangssignal Wärmestrom; der beheizte Raum mit dem Eingangssignal Wärmestrom und dem Ausgangssignal Raumtemperatur. Letztere ist gleichzeitig das Ausgangssignal der Strecke. Von außen wirkt auf die Strecke die Außentemperatur über die Zimmerwand bzw. die Fenster. Diese Größe ist nicht beeinflussbar und heißt deshalb Störsignal. Dagegen ist das zweite auf die Strecke von außen wirkende Signal, der Stellhub des Ventils, in beabsichtigter Weise beeinflussbar, d. h. steuerbar. Es heißt deshalb Stell-signal.

Wir merken uns deshalb (Bild 1.9):

D 1.8

Die auf eine Strecke wirkenden Eingangssignale heißen *Störsignale*, wenn sie nicht steuerbar, und *Stellsignale* (*Steuersignale*)¹⁾, wenn sie steuerbar sind. Die Störsignale können meßbar oder auch nicht meßbar sein. Die Ausgangssignale heißen *gesteuerte Signale*.

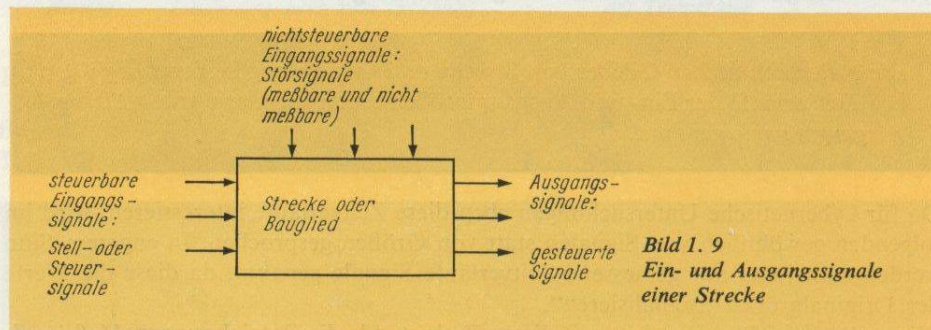


Bild 1. 9
Ein- und Ausgangssignale
einer Strecke

1.4.4. Technische und gesellschaftliche Bedeutung der Automatisierungstechnik

Die *technische* und *ökonomische* Bedeutung der Automatisierung industrieller Prozesse liegt insbesondere

- in der Erzielung höherer Wirkungsgrade, besserer Produktqualitäten und erhöhter Durchsätze bzw. minimaler Kosten für vorgegebenen Produktionsumfang dadurch, daß die optimalen Produktionsbedingungen genauer eingehalten und schneller eingestellt werden
- in der Ermöglichung der Durchführung gefährlicher oder gesundheitsgefährdender Prozesse, für deren Steuerung Menschen nicht eingesetzt werden dürfen (z. B. Kernreaktorregelung, bestimmte chemische Prozesse)
- in der Ermöglichung der Durchführung sehr schneller Prozesse und neuartiger, ökonomisch günstigerer Prozeßführungen, die ohne automatische Steuerung evtl. instabil verlaufen würden, die der Mensch auf Grund seiner begrenzten Reaktionsgeschwindigkeit nicht mehr beherrschen kann (z. B. Stabilisierung elektrischer Spannungen oder schneller Flugkörper, neue Verfahren der chemischen Technologie).

Gesellschaftlich gesehen bringt die Automatisierung eine Entlastung des Menschen von sich wiederholenden geistigen Funktionen, vor allem des Gedächtnisses, der Kontrolle und der logischen und numerischen Verarbeitung von Informationen. Insbesondere erlaubt sie dem Produktionsarbeiter, sich von den bekannten harten Bindungen an den Ablauf nichtautomatisierter technologischer Prozesse zu lösen und sich zum Kontrolleur und Gestalter automatisierter Prozesse zu erheben. Demgegenüber werden Ingenieure, Ökonomen, Ärzte, Lehrer und Wissenschaftler der unterschiedlichsten Disziplinen sich in zunehmendem Maß maschineller Mittel bedienen. Trotz unter-

¹⁾ Eine Unterscheidung zwischen Stell- und Steuersignalen wird später vorgenommen werden (s. Abschn. 4.6.1.).

schiedlicher Aufgabenstellungen werden somit die Formen der Arbeit sich immer stärker angleichen. Von allen Werktätigen wird deshalb in zunehmendem Maß eine umfassende Bildung einschließlich kybernetischer Kenntnisse gefordert. Das bedingt ein hohes Ausbildungsniveau und eine laufende Weiterbildung. Dieser erhöhte Aufwand für Bildung und Automatisierung wird durch die Herausbildung eines neuen Arbeitsinhalts gerechtfertigt, nämlich durch solche Aufgaben, für die die Menschen auf Grund ihrer schöpferischen Fähigkeiten vornehmlich berufen und die ihrer besonderen Stellung angemessen sind.

1.5. Kybernetischer Aspekt, Kybernetik

Ein mit Geräten und Verfahren der Produktions- und Informationstechnik aufgebauter automatisierter Produktionsprozeß kann nun wie jede andere automatische technische Einrichtung unter verschiedenen Aspekten betrachtet werden:

Unter *ökonomischem Aspekt* fragen wir nach der Effektivität, mit der die dem Prozeß zugeführten Energien und Rohstoffe in nützliche Arbeit und Produkte umgesetzt werden.

Unter *technologischem Aspekt* untersuchen wir die für die vorgegebene Aufgabe günstigsten technologischen Verfahren und die hierfür technisch-ökonomisch zweckmäßigste Instrumentierung. Hierzu gehört die Entscheidung, ob die Messung und Verarbeitung der Informationen über die Betriebsgrößen sowie die daraufhin erfolgende Verstellung von Energie- und Massenströmen mit elektrischen, mechanischen, pneumatischen oder hydraulischen bzw. kombinierten Mitteln erfolgen soll. Diese Entscheidung wird beeinflusst von der physikalischen Qualität der zu messenden und zu steuernden Größen; der erforderlichen Genauigkeit und Schnelligkeit der Messungen und Informationsverarbeitung; dem Umfang und der möglicherweise erforderlichen Flexibilität der Informationsverarbeitung; den erforderlichen Verstellkräften und -geschwindigkeiten; der Zuverlässigkeit, Korrosionsfestigkeit und Explosions-sicherheit der Geräte; den Kosten für die Geräte. Offensichtlich werden technologische Entscheidungen stark von ökonomischen Überlegungen bestimmt.

Die Aufgabe von Automatisierungseinrichtungen ist die automatische Steuerung, d. h. die selbsttätige zielgerichtete Beeinflussung von bestimmten physikalischen, technischen oder ökonomischen Größen und Verhaltensweisen vorgegebener Objekte. Ein und dieselbe Steuerungsaufgabe kann mit einer Vielzahl unterschiedlicher Instrumentierungen gelöst werden.

Ein Beispiel gibt Bild 1.10. Zur Aufrechterhaltung eines gewünschten Flüssigkeitsstands trotz der dort eingezeichneten drei Verbraucher (Störgrößen) wird im Bild 1.10a über einen Schwimmer und ein Gestänge der Zufluß gesperrt, sobald der gewünschte Stand erreicht ist. Im Bild 1.10b geschieht das gleiche dadurch, daß ein Motor in Rechts- oder Linkslauf versetzt und durch diesen eine Zahnstange verstellt wird. Bild 1.10c zeigt eine pneumatische Steuereinrichtung mit einem sog. Steuerdüse-Prallplatten-System. Mit Erhöhung des Flüssigkeitsstands erschwert die Prallplatte *P* zunehmend den Austritt der Luft aus der Steuerdüse *StD*. Damit steigt der Druck in der Leitung zum Membranantrieb *MA*. Durch Auslenkung der Membran wird der Zufluß gesperrt.

Im Bild 1.10d wird eine hydraulische Einrichtung zur Lösung dieser Steuerungsaufgabe gezeigt. Bei Annäherung an den Sollstand gibt der Doppelkolben-Steuer-

schieber StS den oberen Kanal zum Stellantrieb StA frei. Damit gelangt das unter Druck befindliche Öl in die obere Kammer und bewirkt, daß der Kolben mit dem Schieber nach unten gleitet.

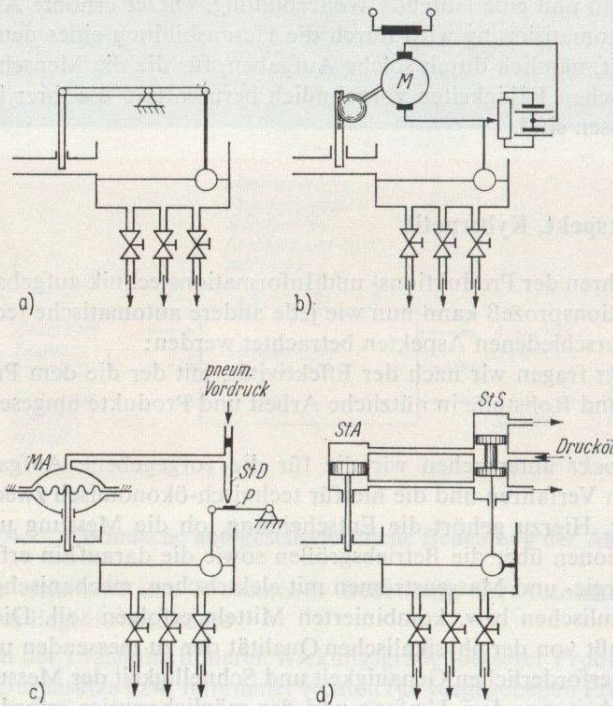


Bild 1.10
Ausführung einer
Automatisierungsaufgabe
mit unterschiedlich
instrumentierten Einrichtungen

- a) mechanisch
- b) elektromechanisch
- c) pneumatisch
- d) hydraulisch

Für die Beurteilung, wie gut, d. h. in erster Linie wie genau und schnell, die eigentliche Aufgabe der Steuerung erfüllt wird oder wie sie verbessert werden kann, sind jedoch energetische und technologische und damit auch ökonomische Aspekte nicht unmittelbar maßgebend. Für die Prüfung dieser Frage ist ausreichend, das automatisierte Objekt unter kybernetischem Aspekt zu betrachten:

D 1.9

Unter *kybernetischem Aspekt* wird von der konkreten Realisierung eines Prozesses (Systems) abstrahiert und ein kybernetisches Modell dieses Prozesses gebildet, das nur noch die für die Steuerung maßgebenden Informationen enthält:

- a) die Umformung bzw. Verarbeitung der Eingangssignale der einzelnen Glieder des Systems in die entsprechenden Ausgangssignale
- b) die strukturelle Anordnung der Einzelglieder, d. h. ihre Kopplung zum Gesamtsystem.

Diese Kenntnisse, die durch mathematische Funktionen und äquivalente andere Darstellungen repräsentiert werden, sind für die Untersuchung der Güte einer gegebenen Steuerung bzw. für die Lösung des eigentlichen Steuerungsproblems ausreichend. Konkrete technische und nichttechnische (z. B. biologische oder ökonomische) Systeme können grundsätzlich unter kybernetischem Aspekt äquivalent sein, d. h.

das gleiche kybernetische Modell ergeben. Sie können dann an einem Analogrechner durch die gleiche Rechenschaltung, an einem Digitalrechner durch das gleiche Programm simuliert werden, und die entsprechenden Größen in den verschiedenen Systemen werden bei gleichen entsprechenden Störungen den gleichen zeitlichen Verlauf aufweisen.

Nach diesen Vorbetrachtungen wollen wir das Wesen der Kybernetik – für die in der Literatur eine große Zahl von Definitionen vorgeschlagen wird – noch einmal schärfer charakterisieren:

Kybernetik ist die Wissenschaft von der Steuerung, d. h. der zielgerichteten Beeinflussung von Systemen, sowie der (geistigen) Informationsverarbeitungsprozesse und deren Automatisierung, die das wesentliche der Steuerungsvorgänge ausmachen.

Sie ist auf beliebige Systeme anwendbar und dient dazu, die Gesetzmäßigkeiten von Steuerungsvorgängen und Informationsverarbeitungsprozessen in Natur, Technik und Gesellschaft zu erkennen und diese dann bewußt zur Synthese technischer bzw. zur Verbesserung natürlicher Systeme einzusetzen.

Die Anwendung kybernetischer Methoden wird

- zur Analyse und zum Entwurf technischer (automatisierter) Systeme als *technische Kybernetik*
- zur Untersuchung biologischer Systeme als *Biokybernetik*
- zur Untersuchung und Verbesserung ökonomischer Systeme als *ökonomische Kybernetik* bezeichnet.

D 1.10

Werden Prozesse der Informationserfassung und -verarbeitung und der Steuerung in der Technik nach biologischem Vorbild – i. allg. mit technischen Mitteln – verwirklicht, so entspricht diese Verfahrensweise der der *Bionik*, deren Prinzip darin besteht, Strukturen und Funktionsprinzipien biologischer Organismen in die Technik zu übertragen.

Mit Planung und Leitung der sozialistischen Produktion beschäftigen sich die sozialistischen *Leitungswissenschaften*. Auch hierzu hat die Kybernetik einen Beitrag zu liefern.

Insgesamt hat die Kybernetik den einzelnen (Natur-) Wissenschaften und deren technischen Anwendungen gegenüber einen grundlegenden Charakter, während sie der Philosophie gegenüber den Charakter einer Spezialwissenschaft annimmt. Bei dieser Sicht der Kybernetik bietet sich eine grobe Zweiteilung der modernen technischen Wissenschaften in *Geräte-* und *Systemwissenschaften* an. Während die ersteren insbesondere auf Physik und Technologie basieren und die Entwicklung, Konstruktion und Fertigung von Bauelementen, Geräten und Anlagenteilen zum Ziel haben, nehmen die letzteren ihren Ausgang vorzugsweise von Mathematik und Kybernetik und befassen sich mit der Algorithmisierung der Steuerungs- und Informationsverarbeitungsprozesse und deren Programmierung auf Rechenmaschinen. (Diese Unterscheidung deckt sich näherungsweise mit der in Hardware und Software.) Für letztere ist charakteristisch, daß der Bereich der technischen Systeme in wachsendem Maß in Richtung auf biologische Systeme, Umweltprobleme und verschiedenartigste Planungs- und Leitungsprozesse überschritten wird.

2. Kybernetisches System: Begriff, Bewegung, Zustand, Verhalten

In unseren einführenden Überlegungen haben wir die Kybernetik als die Wissenschaft von der Steuerung von Systemen und der in diesen ablaufenden Prozesse erklärt. Wir wollen nun diese und einige weitere wichtige Grundbegriffe der Kybernetik präzisieren.

2.1. Begriff des kybernetischen Systems

2.1.1. Prozeß, Element, System

Ein grundlegender Begriff, von dem wir unseren Ausgang nehmen können, ist der des *Prozesses*. Wir wollen darunter folgendes verstehen:

D 2.1 Ein *Prozeß* ist eine quantitative oder qualitative Veränderung in Abhängigkeit von der Zeit.

Der Begriff Veränderung ist dabei sehr allgemein zu nehmen. Er schließt z. B. ein: die Änderung der Ortskoordinaten eines Objekts; die Änderung der Temperatur eines Körpers; die Änderung des Druckes eines Gases; die Änderung der Spannung an einem Kondensator; das Wachstum einer Pflanze; die Veränderung der Verhaltensweise eines Menschen oder einer Gruppe von Menschen usw. Im Sinn der Dialektik können wir dafür auch den Begriff *Bewegung* einsetzen. Typen industrieller Prozesse sind Produktions-, Fertigungs-, Montage-, Verteilungs- und Lagerungsprozesse.

Ein solcher Prozeß läuft stets in einem *System* ab: beispielsweise die Umsetzung von chemischer in Wärmeenergie in einem Ofen; der radioaktive Zerfall in einem Isotop; die Destillation in einer Destillationskolonne; der Vererbungsprozeß in den Genen; der Denkprozeß im menschlichen Gehirn.

Ein solches System ist aus Gliedern oder Elementen zusammengesetzt.

D 2.2 Ein *Element* (Glieder) ist ein Objekt, von dem für die vorliegenden (Steuerungs-) Aufgaben nicht die Kenntnis der inneren Größen und Abhängigkeiten, sondern nur die des durch die Ein- und Ausgangsgrößen beschriebenen äußeren Verhaltens erforderlich ist.

Ein System entsteht durch eine Menge von Gliedern, die dadurch verknüpft sind, daß die Ausgangssignale dieser Glieder gleichzeitig Eingangssignale anderer Glieder dieses Systems sind. Strenggenommen stehen, entsprechend der These von der Einheit der

Welt, alle Elemente der uns umgebenden Welt im Zusammenhang. Ein solches System ist aber wegen seiner Kompliziertheit nicht behandelbar. Somit ist es notwendig, ein System abzugrenzen und nur die Elemente aufzunehmen, deren Kopplungen für die vorliegende Untersuchung oder Aufgabe wesentlich sind.

Für den Entwickler von Transistoren ist der Transistor das System, die Elemente sind die Si- und Fremdatome sowie die beweglichen Elektronen und Defektelektronen. Für den Entwickler eines elektronischen Reglerverstärkers sind die Transistoren, die Widerstände und Kondensatoren Elemente; der Verstärker ist sein System. Der Regelungstechniker betrachtet Meßglied, Reglerverstärker, Stellantrieb, Stellglied und Strecke als Elemente. Sein System ist der Regelkreis.

Der Zellphysiologe betrachtet die Zellen als System und die diese bildenden Moleküle als Elemente. Das System eines Botanikers ist eine Pflanze, dessen Elemente sind die Zellen. Der Förster erachtet die Pflanzen und Bäume als Elemente, den Wald als sein System.

Durch diese Abgrenzung wird das betrachtete System von der umgebenden Welt, der Umwelt, getrennt. Dabei treten äußere Ein- und Ausgangsgrößen auf, über die die Umwelt auf das System bzw. das System auf die Umwelt wirkt (Bild 2.1).

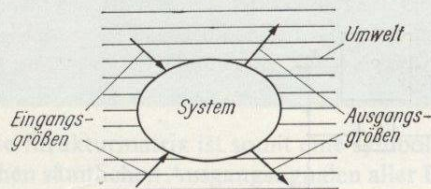


Bild 2.1. System und Umwelt

Auf Grund dieser Überlegung soll eine erste Systemdefinition A gegeben werden:

Ein *System* ist eine Menge von Elementen (Gliedern), die durch gegenseitige Kopplungen miteinander verbunden sind, sowie die Menge dieser Kopplungen. Durch Abgrenzung können Ein- und Ausgangsgrößen von bzw. zur Umwelt auftreten. Je nachdem, ob keine, wenige oder viele solche Wechselwirkungen mit der Umwelt bestehen, wird zwischen *autonomen (abgeschlossenen)*, *relativ isolierten* und *offenen* Systemen unterschieden.

D 2.3

Für die folgenden Betrachtungen haben jene relativ isolierten Systeme besondere Bedeutung, von denen sich die beiden anderen Typen als Grenzfälle ergeben.

2.1.2. Systemstruktur

Wir wollen die m_i Eingangs- und die r_i Ausgangssignale des Elements E_i zu einem Eingangsvektor $\mathbf{u}_i$ bzw. Ausgangsvektor $\mathbf{x}_i$ zusammenfassen:

$$\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ \vdots \\ u_{im_i} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{ir_i} \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Der durch das Element E_i vermittelte Zusammenhang zwischen u_i und x_i wird in den Abschnitten 2.2. und 3.4. näher bestimmt werden. Die Kopplung zwischen zwei Elementen E_i und E_j kommt dadurch zustande, daß wenigstens ein Ausgangssignal $x_{i\mu}$ von E_i mit einem Eingangssignal $u_{j\mu}$ von E_j verbunden ist, d. h. übereinstimmt (Bild 2.2a).

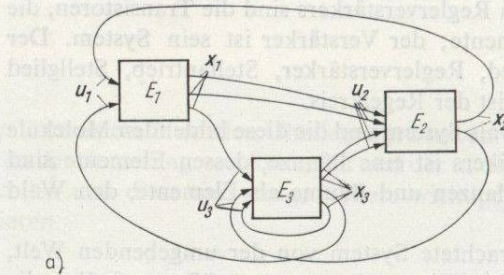
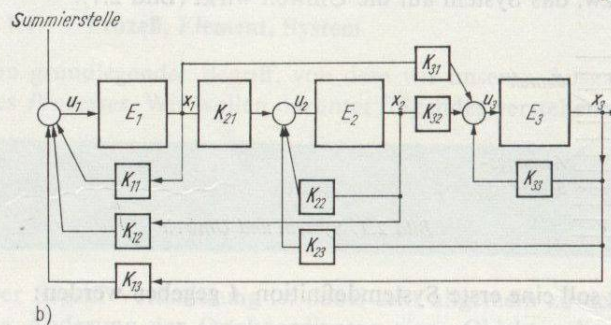


Bild 2.2. Kopplung der Elemente im System

- a) Kopplung der einzelnen Ein- und Ausgangssignale
b) mathematische Darstellung der Kopplung der Ein- und Ausgangsvektoren durch Kopplungsmatrizen K_{ij}



Diese Kopplungen zwischen den einzelnen Elementen können wie im Bild 2.2b mathematisch mit Hilfe von Kopplungsnetzwerken K_{ij} dargestellt werden, wobei für n Elemente gilt

$$u_i = \sum_{j=1}^n K_{ij} x_j; \quad i = 1(1)n. \quad (2.2)$$

Die Kopplungsmatrizen K_{ij} haben als Elemente nur 1 oder 0, je nachdem, ob die den Spalten zugeordneten Ausgangssignale $x_{j\mu}$ des Elements E_j mit den den Zeilen zugeordneten Eingangssignalen $u_{i\mu}$ des Elements E_i verbunden sind oder nicht. Für Bild 2.2a gilt beispielsweise, wenn die Signale dort von oben nach unten durchnummeriert werden:

$$K_{21} = \begin{array}{ccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \rightarrow u_{21} \\ \rightarrow u_{22} \\ \rightarrow u_{23} \\ \rightarrow u_{24} \end{array} \end{array} \quad (2.3)$$

Durch Ergänzung von Zeilen mit Nullelementen müssen dabei die Kopplungsmatrizen die Zeilenzahl erhalten, die der Gesamtzahl der Signale des Eingangs des angekoppelten Elements entspricht. Ist zwischen zwei Elementen E_k und E_i keine Kopplung vorhanden, so ist $K_{ik} = 0$. Mit diesen Vereinbarungen kann das Netz der Kopplungen zwischen den n Elementen eines Systems durch eine *Strukturmatrix* K gekennzeichnet werden, die von den Kopplungsmatrizen gebildet wird.

$$K = \begin{bmatrix} \begin{matrix} x_1^T \\ \downarrow \\ K_{11} \\ K_{21} \\ \vdots \\ K_{n1} \end{matrix} & \begin{matrix} x_2^T \\ \downarrow \\ K_{12} \\ \dots \\ \dots \\ K_{n2} \end{matrix} & \dots & \begin{matrix} x_n^T \\ \downarrow \\ K_{1n} \\ \dots \\ \dots \\ K_{nn} \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow u_1 \\ \rightarrow u_2 \\ \dots \\ \rightarrow u_n \end{matrix} \quad (2.4)$$

Hierbei sind die x_i^T transponierte Spaltenvektoren, also Zeilenvektoren. Damit gilt:

Die Matrix K , die entsprechend Gl. (2.4) aus den die Kopplungen zwischen den Elementen beschreibenden Kopplungsmatrizen K_{ij} gebildet wird, soll *Strukturmatrix* des Systems genannt werden.

D 2.4

Die Strukturmatrix ist somit eine symbolische Darstellung der Kopplungen, die zwischen sämtlichen Ausgangssignalen aller Elemente dieses Systems und allen Eingangssignalen eben dieser Elemente bestehen. Sie enthält nur Eins- und Nullelemente, je nachdem, ob die entsprechenden Kopplungen existieren oder nicht.

Mit diesen Formalisierungen wird deutlicher, was wir unter Struktur eines Systems verstehen wollen:

Die *Struktur* eines Systems ist die Menge der Kopplungen zwischen den Elementen dieses Systems (anschaulich: das Kopplungsnetz). Sie kann durch die Strukturmatrix dargestellt werden.

D 2.5

Eine andere Interpretation von Elementen und Struktur eines Systems wird später im Abschn. 3.5.4. gegeben werden.

2.1.3. Kybernetisches System

Nicht jedes System ist ein kybernetisches System, sondern nur solche, die folgende zwei Eigenschaften haben:

Kybernetische Systeme sind Systeme, die

- a) ihren Zustand ändern können
- b) deren Zustand steuerbar, d. h. von außen in beabsichtigter Weise beeinflussbar ist.

D 2.6

Die Bedingung b) schließt die Bedingung a) ein. Eine Sitzbank ändert normalerweise ihren Zustand nicht. Ein Isotop verändert zwar seinen Zustand, der radioaktive Zerfall ist aber von außen nicht steuerbar (sondern kann nur durch Abschirmung gedämpft werden).

Insoweit in den Systemen Energien und Massen gebunden sind, die sich ohne unendliche Leistungszufuhr nicht sprunghaft verändern können, ändert sich der Zustand eines Systems auch nicht sprunghaft. Die Bewegung eines Systems von einem Anfangszustand in einen anderen (Ruhe-) Zustand erfolgt dann vielmehr durch einen *Übergangsvorgang*.

Systeme, die ihren Zustand nicht sprunghaft, sondern nur in Form eines Übergangsvorgangs verändern können, heißen *trägheitsbehaftete Systeme*. Systeme mit der Fähigkeit zur sprunghaftigen Zustandsänderung heißen *trägheitsfreie*. Zuweilen werden trägheitsbehaftete Systeme auch als dynamische und trägheitsfreie als statische bezeichnet.

Nach vorangegangenen Ausführungen sind strenggenommen alle Systeme trägheitsbehaftet. Ist die Dauer des Übergangsvorgangs aber vernachlässigbar klein gegenüber den betrachteten Änderungen der Eingangssignale, so daß der Zustand und die Ausgangssignale praktisch ohne Verzögerung den Eingangssignalen zu folgen vermögen, dann kann man die Trägheitseigenschaften des Systems außer acht lassen und es als ein trägheitsfreies ansehen.

Das gleiche trifft zu, wenn man nur das Verhalten des Systems im Ruhezustand, d. h. nach Abklingen der Übergangsvorgänge, untersucht. Wir werden deshalb den Begriff des statischen/dynamischen Systems durch Bezugnahme auf die Untersuchung des statischen/dynamischen Verhaltens eines Systems definieren (s. Abschn. 2.3.3.).

2.2. Zustand und Bewegung kybernetischer Systeme

2.2.1. System- und Bewegungsgleichungen analoger kontinuierlicher Systeme

2.2.1.1. Aufstellung skalarer Systemgleichungen für Systeme 1. Ordnung

Zum besseren Verständnis müssen wir präzisieren, was unter dem *Zustand* eines Systems verstanden wird.

Für die uns in erster Linie interessierenden analogen kontinuierlichen Systeme (Begriffsbestimmung s. Abschnitte 2.2.3. und 2.2.4.) wird die Bewegung durch eine Differentialgleichung beschrieben. Wir wollen diese für ein einfaches elektrisches Glied (Bild 2.3) aufstellen und lösen und dann eine allgemeine Lösung angeben, die die Bedeutung des Zustands erkennen läßt.

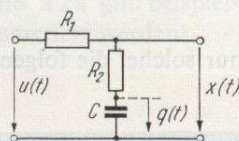


Bild 2.3. RC-Glied

Das Eingangssignal sei die Spannung $u(t)$, das Ausgangssignal die Spannung $x(t)$. Der Eingangswiderstand eines evtl. angekoppelten Gliedes sei so hoch, daß er auf $x(t)$ keine Rückwirkung hat. Offensichtlich hängt die Ausgangsspannung außer von der Eingangsspannung auch von der Spannung ab, die der Kondensator zu Beginn

des Experiments besitzt. Wir führen deshalb die Kondensatorspannung $q(t)$ als Hilfsgröße ein und bezeichnen sie, da sie den Anfangszustand unseres RC-Gliedes charakterisiert, als *Zustandsvariable*. Der Maschensatz liefert

$$i(R_1 + R_2) + q = u. \quad (2.5)$$

Mit

$$i = C\dot{q}, \quad T = C(R_1 + R_2) \quad (2.6)$$

folgt daraus

$$\dot{q}T + q = u. \quad (2.7)$$

Für das Ausgangssignal findet man

$$x = q + (u - q)d, \quad d = R_2/(R_1 + R_2). \quad (2.8)$$

Setzt man

$$a = -1/T, \quad b = 1/T, \quad c = 1 - d, \quad (2.9)$$

so erhält man (in Standardform) die skalaren

Systemgleichungen eines Systems 1. Ordnung:

Zustandsgleichung

$$\dot{q}(t) = aq(t) + bu(t) \quad (2.10)$$

Ausgabegleichung

$$x(t) = cq(t) + du(t). \quad (2.11)$$

Sie zeigen, daß die Zustandsvariable $q(t)$ durch eine Differentialgleichung 1. Ordnung, die sog. Zustandsgleichung, und das Ausgangssignal aus der Zustandsvariablen und dem Eingangssignal durch eine algebraische Gleichung, die Ausgabegleichung, bestimmt werden können.

2.2.1.2. Lösung der Zustandsgleichung: skalare Bewegungsgleichung

Zur Lösung der Zustandsgleichung betrachten wir in dem für die homogene Gleichung

$$\dot{q} = aq \quad (2.12)$$

geeigneten Lösungsansatz

$$q = k e^{at} \quad (2.13)$$

die Konstante k entsprechend der Methode der Variation der Konstanten als variabel

$$k = k(t) \quad (2.14)$$

und erhalten durch Einsetzen von Gln. (2.13), (2.14) in Gl. (2.10)

$$a e^{at} k(t) + e^{at} \dot{k}(t) = a e^{at} k(t) + bu(t) \quad (2.15)$$

$$\dot{k}(t) = e^{-at} bu(t). \quad (2.16)$$

Nach Integration in den Grenzen 0, t

$$\int_0^t \dot{k}(\tau) d\tau = k(t) - k(0) = \int_0^t e^{-a\tau} b u(\tau) d\tau \quad (2.17)$$

findet man durch Einsetzen in Gl. (2.13)

$$q(t) = k(0) e^{at} + \int_0^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau. \quad (2.18)$$

Für $t = 0$ ergibt sich daraus

$$k(0) = q(0). \quad (2.19)$$

Setzt man noch

$$e^{at} = \Phi(t), \quad (2.20)$$

so erhält man die gesuchte Lösung, die

Bewegungsgleichung eines Systems 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} q(t) &= \Phi(t) q(0) + \int_0^t \Phi(t - \tau) b u(\tau) d\tau \\ &= q_{fr}(t) + q_{erzw}(t). \end{aligned} \quad (2.21)$$

In dieser Gleichung bestimmt der erste Summand $q_{fr}(t)$ die nur vom Anfangszustand $q(0)$ abhängige *freie*, der zweite $q_{erzw}(t)$ die nur vom Eingangssignal $u(t)$ hervorgerufene *erzwungene* Bewegung der Zustandsvariablen $q(t)$.

2.2.1.3. Beispiel: Verwendung der skalaren Bewegungsgleichung

Zur Übung der Anwendung vorstehender Bewegungsgleichung untersuchen wir die Reaktion des mit Bild 2.3 gegebenen RC-Gliedes auf eine sprungartige Änderung der Eingangsspannung $u(t)$:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 \quad \text{in } t \geq 0 \\ &= 0 \quad \text{in } t < 0, \end{aligned} \quad (2.22)$$

bei vorliegendem Anfangswert

$$q(0) = u_0/2. \quad (2.23)$$

Zunächst betrachten wir nur die freie Bewegung $q_{fr}(t)$. Mit den Gln. (2.21), (2.20), (2.9) erhalten wir

$$q_{fr}(t) = e^{at} q(0) = e^{-t/T} u_0/2. \quad (2.24)$$

Dessen Anteil am Ausgangssignal ist nach den Gln. (2.11), (2.9) mit $d = 1/2$ [s. Gl. (2.8)]

$$x_{fr}(t) = (1 - d) q_{fr}(t) = \frac{u_0}{4} e^{-t/T}. \quad (2.25)$$

Für die erzwungene Bewegung $q_{\text{erzw}}(t)$ findet man mit den Gln. (2.21), (2.9)

$$q_{\text{erzw}}(t) = \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau = \frac{u_0}{T} e^{-\frac{t}{T}} \int_0^t e^{\tau/T} d\tau$$

$$= u_0(1 - e^{-t/T}) \quad \text{in } t \geq 0$$

$$q_{\text{erzw}}(t) = 0 \quad \text{in } t < 0.$$
(2.26)

Für dessen Anteil am Ausgangssignal $x_{\text{erzw}}(t)$ erhält man mit den Gln. (2.11), (2.9) und $d = 1/2$ für $t \geq 0$

$$x_{\text{erzw}}(t) = (1 - d) q_{\text{erzw}}(t) + du_0 = u_0(1 - 1/2 e^{-t/T}).$$
(2.27)

Die Anteile q_{fr} , q_{erzw} der Zustandsvariablen q sowie die Anteile x_{fr} , x_{erzw} des Ausgangssignals x , die vom Anfangszustand bzw. vom Eingangssignal herrühren, zeigt zusammen mit der Zustandsvariablen

$$q(t) = q_{\text{fr}}(t) + q_{\text{erzw}}(t)$$
(2.28)

und dem Ausgangssignal

$$x(t) = x_{\text{fr}}(t) + x_{\text{erzw}}(t)$$
(2.29)

das Bild 2.4.

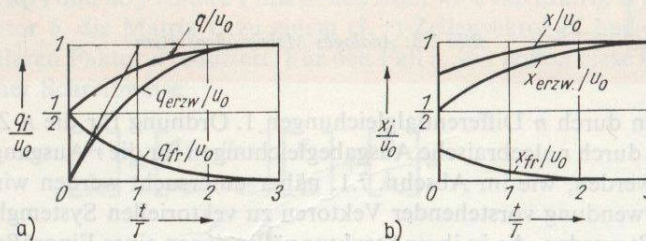


Bild 2.4. Reaktion des RC-Gliedes (s. Bild 2.3) auf Anfangswert und Sprungerregung

- a) Verlauf der Zustandsvariablen
b) Verlauf der Ausgangsgröße

2.2.1.4. Verallgemeinerung auf Mehrgrößensysteme n -ter Ordnung: vektorielle System- und Bewegungsgleichungen

Wir wollen nun zu einem komplizierteren System übergehen, das m Eingangs- und r Ausgangssignale hat.

Ein System mit $m \geq 2$ Eingangs- und/oder $r \geq 2$ Ausgangsgrößen heißt **Mehrgrößensystem**.

D 2.7

Außerdem sollen die Beziehungen zwischen den Aus- und Eingangssignalen durch Differentialgleichungen höherer Ordnung beschrieben sein. In den Abschnitten 7.1. und 7.2. wird gezeigt werden, daß für die eindeutige Bestimmung der Ausgangssignale dann die Anfangswerte einer größeren Zahl von Zustandsvariablen q_i bekannt sein müssen. Diese Zahl sei n .

Zur Beschreibung eines solchen Systems führen wir ein (T kennzeichnet hierbei den transponierten Vektor; u , x und q sind also Spaltenvektoren):

den *Eingangsvektor* (den Vektor der Eingangssignale)

$$u = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m]^T \quad (2.30a)$$

den *Ausgangsvektor* (den Vektor der Ausgangssignale)

$$x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_r]^T \quad (2.30b)$$

den *Zustandsvektor* (den Vektor der Zustandssignale)

$$q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T \quad (2.30c)$$

und dessen Ableitung

$$\dot{q} = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dots \ \dot{q}_n]^T. \quad (2.30d)$$

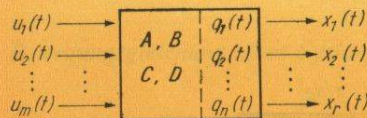


Bild 2.5. Analoges Mehrgrößensystem

Ein solches System kann durch n Differentialgleichungen 1. Ordnung für die n Zustandsvariablen q_i sowie durch r algebraische Ausgabegleichungen für die r Ausgangsgrößen x_j beschrieben werden, wie im Abschn. 7.1. näher untersucht werden wird. Diese können unter Verwendung vorstehender Vektoren zu vektoriellen Systemgleichungen zusammengefaßt werden, die in ihrer Struktur völlig denen eines Eingrößensystems 1. Ordnung gemäß den Gln. (2.10), (2.11) entsprechen. Die

Systemgleichungen eines Mehrgrößensystems lauten nämlich:

Zustandsgleichung (Vektordifferentialgleichung)

$$\dot{q}(t) = Aq(t) + Bu(t) \quad (2.31a)$$

Ausabegleichung (vektorielle algebraische Gleichung)

$$x(t) = Cq(t) + Du(t). \quad (2.31b)$$

An die Stelle der skalaren Koeffizienten a , b , c , d der Gln. (2.10), (2.11) treten hier die Matrizen A , B , C , D , die folgende Bezeichnungen erhalten haben:

(n, n) -Systemmatrix $A = [a_{ij}]$, die die Bewegung des ungestörten Systems, d. h. bei $u(t) \equiv 0$, allein bestimmt

(n, m) -Steuermatrix (Eingangsmatrix) $B = [b_{ij}]$, die die Einwirkung des Steuervektors auf den Zustandsvektor beschreibt

(r, n) -Beobachtungsmatrix (Ausgangsmatrix) $C = [c_{ij}]$, die die Beobachtung des inneren Zustands durch den (gemessenen) Ausgangsvektor kennzeichnet
 (r, m) -Durchgangsmatrix $D = [d_{ij}]$, die die unmittelbare, unverzögerte Wirkung des Eingangs- auf den Ausgangsvektor bestimmt; sie ist in physikalischen Systemen häufig Null.

Für den Fall je einer Ein- und Ausgangsgröße vereinfachen sich diese Gleichungen zu den

Systemgleichungen eines Eingrößensystems n -ter Ordnung:
 Zustandsgleichung

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{b}u(t) \quad (2.32a)$$

Ausgabegleichung

$$x(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{q}(t) + du(t). \quad (2.32b)$$

Da $x(t)$ und $u(t)$ skalare Funktionen sind, wird die Matrix $\mathbf{B}$ zu einem $(n, 1)$ -Spaltenvektor $\mathbf{b}$, die Matrix $\mathbf{C}$ zu einem $(1, r)$ -Zeilenvektor $\mathbf{c}^T$ und die Matrix $\mathbf{D}$ zu einem skalaren Faktor d reduziert. Für den Fall $n = 2$ lauten diese Gleichungen in ausführlicher Schreibweise

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \quad (2.33)$$

$$x = [c_1 \ c_2] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + du. \quad (2.34)$$

Die Vektordifferentialgleichung (2.32a) ist somit eine kompakte Beschreibungsform zur Zusammenfassung von n skalaren Differentialgleichungen 1. Ordnung, im vorstehenden Fall der Gleichungen

$$\dot{q}_1 = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + b_1u \quad (2.35a)$$

$$\dot{q}_2 = a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + b_2u. \quad (2.35b)$$

Die Ausgabegleichung ist für Eingrößensysteme eine skalare algebraische Gleichung:

$$x = c_1q_1 + c_2q_2 + du. \quad (2.36)$$

2.2.1.5. Beispiel: Aufstellung einer vektoriellen Zustandsgleichung

Um einige Vertrautheit mit der hier vorgestellten Beschreibungsweise zu gewinnen und wenigstens an einem Beispiel zu demonstrieren, daß die ein konkretes System beschreibenden Gleichungen auf die Form von Gl. (2.31) bzw. Gl. (2.32) gebracht werden können, wollen wir die Systemgleichungen für das im Bild 2.6 dargestellte elektrische Glied aufstellen.

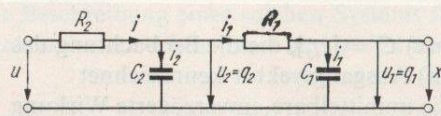


Bild 2.6. Elektrisches Übertragungsglied

Führen wir die Spannungen über den Kondensatoren u_1 und u_2 als Zustandsvariable q_1 und q_2 ein und beachten wir, daß

$$\begin{aligned} i_1 &= C_1 \dot{u}_1 = C_1 \dot{q}_1 \\ i_2 &= C_2 \dot{u}_2 = C_2 \dot{q}_2 \\ i &= i_1 + i_2, \end{aligned} \quad (2.37)$$

so lauten die beiden Maschengleichungen:

$$q_2 = i_1 R_1 + q_1 = T_1 \dot{q}_1 + q_1 \quad (2.38a)$$

$$u = (i_1 + i_2) R_2 + q_2 = T_{21} \dot{q}_1 + T_2 \dot{q}_2 + q_2. \quad (2.38b)$$

Hierbei wurde substituiert:

$$T_1 = R_1 C_1, \quad T_2 = R_2 C_2, \quad T_{21} = R_2 C_1. \quad (2.39)$$

Zur Gewinnung der Form der Gln. (2.32), (2.33) müssen wir die vorstehenden Gleichungen so ordnen und evtl. Substitutionen vornehmen, daß wir Ausdrücke der Form

$$\dot{q}_{1,2} = f(q_1, q_2, u) \quad (2.40)$$

erhalten. Hierzu lösen wir Gl. (2.38a) nach $\dot{q}_1$ und ebenso Gl. (2.38b) nach $\dot{q}_2$ auf, wobei wir dort $\dot{q}_1$ unter Verwendung der ersten Gleichung eliminieren:

$$\dot{q}_1 = -\frac{1}{T_1} q_1 + \frac{1}{T_1} q_2 \quad (2.41a)$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_2 &= -\frac{T_{21}}{T_2} \left(-\frac{1}{T_1} q_1 + \frac{1}{T_1} q_2 \right) - \frac{1}{T_2} q_2 + \frac{1}{T_2} u \\ &= \frac{T_{21}}{T_1 T_2} q_1 - \frac{T_1 + T_{21}}{T_1 T_2} q_2 + \frac{1}{T_2} u. \end{aligned} \quad (2.41b)$$

Durch Vergleich mit Gl. (2.33) findet man

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & \frac{1}{T_1} \\ \frac{T_{21}}{T_1 T_2} & -\frac{T_1 + T_{21}}{T_1 T_2} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{T_2} \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

Die Ausgangsgleichung lautet, da das Ausgangssignal mit der ersten Zustandsvariablen identisch ist:

$$x = q_1. \quad (2.43a)$$

Somit ist nach Gl. (2.32b) bzw. Gl. (2.34)

$$c^T = [1 \ 0], \quad d = 0. \quad (2.43b)$$

Die Wahl der Zustandsvariablen ist nicht eindeutig. Beispielsweise können auch das Ausgangssignal und dessen erste Ableitung als Zustandsvariable eingeführt werden:

$$q_1 = x, \quad q_2 = \dot{x}.$$

Es sei dem Leser überlassen, sich davon zu überzeugen.

2.2.1.6. Vektorielle Bewegungsgleichung für Mehrgrößensysteme

So wie die Systemgleichungen eines Mehrgrößensystems aus denen eines Eingrößensystems durch Übergang von der skalaren zur vektoriellen Schreibweise unter Beibehaltung der Gleichungsform erhalten werden, so auch die Bewegungsgleichung eines Mehrgrößensystems. Ersetzen wir in der Bewegungsgleichung eines Eingrößensystems gemäß Gl. (2.21) die skalaren Ein-, Ausgangs- und Zustandssignale durch die Vektoren Gl. (2.30) und ebenso die skalaren Koeffizienten a und b durch die Matrizen A und B , so erhalten wir

die Bewegungsgleichung eines Mehrgrößensystems:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &= \Phi(t) \mathbf{q}(0) + \int_0^t \Phi(t - \tau) B \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ &= \mathbf{q}_{\text{fr}}(t) + \mathbf{q}_{\text{erzw}}(t). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Hierbei ist beachtet worden, daß $\Phi(t)$ aus Gl. (2.20) durch eine Matrix zu ersetzen ist, die sog.

(n, n) -Übergangsmatrix (Fundamentalmatrix)

$$\Phi(t) \triangleq e^{At} = [\Phi_{ij}(t)].^1 \quad (2.45)$$

In ausführlicher Schreibweise lautet die Bewegungsgleichung für $n = 2, m = 1$

$$q_1(t) = \Phi_{11}(t) q_1(0) + \Phi_{12}(t) q_2(0) \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} &+ \int_0^t [\Phi_{11}(t - \tau) b_1 + \Phi_{12}(t - \tau) b_2] u(\tau) d\tau \\ &= q_{1\text{fr}}(t) + q_{1\text{erzw}}(t) \end{aligned}$$

$$q_2(t) = \Phi_{21}(t) q_1(0) + \Phi_{22}(t) q_2(0) \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} &+ \int_0^t [\Phi_{21}(t - \tau) b_1 + \Phi_{22}(t - \tau) b_2] u(\tau) d\tau \\ &= q_{2\text{fr}}(t) + q_{2\text{erzw}}(t). \end{aligned}$$

Die Herleitung und Anwendung der Bewegungsgleichung sowie die Eigenschaften und Berechnungsverfahren für die Übergangsmatrix werden im Abschn. 7. noch ausführlich betrachtet werden. Hier möge die Erkenntnis genügen, daß auch für ein allgemeines Mehrgrößensystem höherer Ordnung bei Kenntnis der (aus der Aufstellung der Systemgleichungen erhaltenen) Matrizen A und B und bekanntem Anfangszustand $\mathbf{q}(0)$ und Eingangssignal $u(\tau)$ in $0 \leq \tau \leq t$ der Zustandsverlauf für alle $t > 0$ berech-

¹⁾ $\triangleq$ zu lesen: ist nach Definition

net werden kann. Dabei ergeben sich stets zwei Summanden, von denen der erste die nur vom Anfangszustand herrührende *freie Bewegung* $q_{fr}(t)$, der zweite die allein vom Eingangssignal *erzwungene Bewegung* $q_{erzw}(t)$ bestimmt. Über die Ausgangsgleichung (2.31 b) kann aus dem Zustands- und Eingangssignalverlauf dann leicht der des Ausgangsvektors gefunden werden.

2.2.2. Systemzustand, Zustandsraum, Phasenraum

Beachtet man, daß der Zeitpunkt $t = 0$ in Gl. (2.36) beliebig festgesetzt werden kann, so besagt diese Gleichung, daß der Zustand des Systems $q(t)$ zum Zeitpunkt $t > 0$ gefunden werden kann, wenn dessen Zustand für einen davorliegenden, sonst beliebigen Zeitpunkt $t = 0$ bekannt und außerdem der Verlauf des Eingangssignals u im Intervall $[0, t]$ gegeben ist. Die Wirkung des Eingangssignals $u(t)$ in $t < 0$ (der Vergangenheit) auf den Systemzustand $q(t)$ in $t > 0$ ist durch die Kenntnis von $q(0)$ vollständig erfaßt. Aus $q(t)$ kann dann über die algebraische Ausgabegleichung (2.31 b) in einfacher Weise der Ausgangsvektor $x(t)$ gefunden werden. Wegen dieser Zusammenhänge kann der Zustandsvektor wie folgt definiert werden:

D 2.8

Ein Zustandsvektor $q(t)$ wird von jeder Zahl von Variablen $q_i(t)$ gebildet, deren Werte zum (beliebigen) Zeitpunkt $t = 0$ zusammen mit dem Verlauf des Eingangsvektors $u(\tau)$ in $\tau \in [0, t]$ den Ausgangsvektor $x(t)$ für jedes $t \geq 0$ eindeutig bestimmen. Die $q_i(t)$ heißen *Zustandsvariable*.

Verschiedene Größen sind als Zustandsvariable geeignet. In elektrischen Schaltungen eignen sich hierzu die Spannungen über den Kondensatoren und Ströme durch die Induktivitäten. Allgemein können die Ausgangsgröße und ihre Ableitungen [bis zur $(n - 1)$ -ten Ableitung] als Zustandsvariable dienen. In mechanischen Systemen sind das die Auslenkung, Geschwindigkeit, Beschleunigung usw.

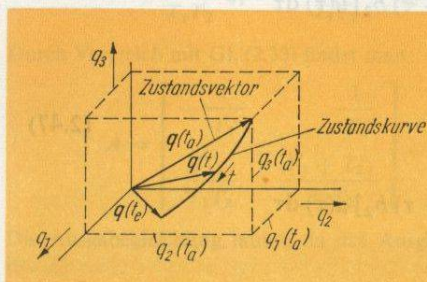


Bild 2.7. Zustandsraum, Zustandskurve (analoges System)

Geometrisch kann ein von n Zustandsvariablen $q_i(t)$ gebildeter Zustandsvektor $q(t)$ in einem n -dimensionalen Raum, dem sog. *Zustandsraum*, dargestellt werden (Bild 2.7).

D 2.9.

Der Zustandsraum eines Systems ist ein von dessen n Zustandsvariablen $q_i(t)$ aufgespannter n -dimensionaler Raum R^n .

In diesem Zustandsraum kann der Zustandsvektor $q(t_a)$ für ein festes $t = t_a$ durch seinen Endpunkt, für ein laufendes $t \in [t_a, t_e]$ durch eine Bahnkurve (Trajektorie) dargestellt werden, die sich aus der Folge der Endpunkte von $q(t)$ in diesem Zeitintervall ergibt (Bild 2.7). Diese Bahnkurve heißt Zustandskurve. Somit gilt:

Die *Zustandskurve* eines Systems im Zeitintervall $t \in [t_a, t_e]$ ist die geometrische Ortslinie aller Endpunkte des im Zustandsraum R^n dargestellten Zustandsvektors $q(t)$ mit $t \in [t_a, t_e]$ als Parameter.

D 2.10

Aus der Definition 2.8 des Zustandsvektors folgt:

Die Zustandskurve ist im Intervall $t \in [t_a, t_e]$ für ein in diesem Intervall definiertes Eingangssignal $u(t)$ *eindeutig*.

S 2.1

Charakteristisch für ein System sind dessen für $u(t) \equiv 0$ bei verschiedenen Anfangszuständen $q(0)$ auftretende ungestörte Bewegungen. Werden ausgewählte Anfangspunkte über den Zustandsraum verteilt, so bildet die Menge der erhaltenen Zustandskurven das *Zustandsporträt* dieses Systems (für die ungestörte Bewegung).

Für den bereits genannten Spezialfall, daß als Zustandsvariable die Ausgangsgröße x und deren $(n - 1)$ Ableitungen Verwendung finden, wird der Zustandsraum gewöhnlich als *Phasenraum* bezeichnet. Wir wollen deshalb vereinbaren:

Der *Phasenraum* eines Systems n -ter Ordnung mit der Ausgangsgröße x ist der von den Zustandsvariablen $q_i(t) = x^{(i-1)}(t)$; $i = 1(1)n$ aufgespannte n -dimensionale Zustandsraum. Zustandskurve und Zustandsvariable heißen in diesem Fall *Phasenkurve* (*Phasentrajektorie*) bzw. *Phasenkoordinaten*.

D 2.11

2.2.3. Analoge und diskrete Systeme

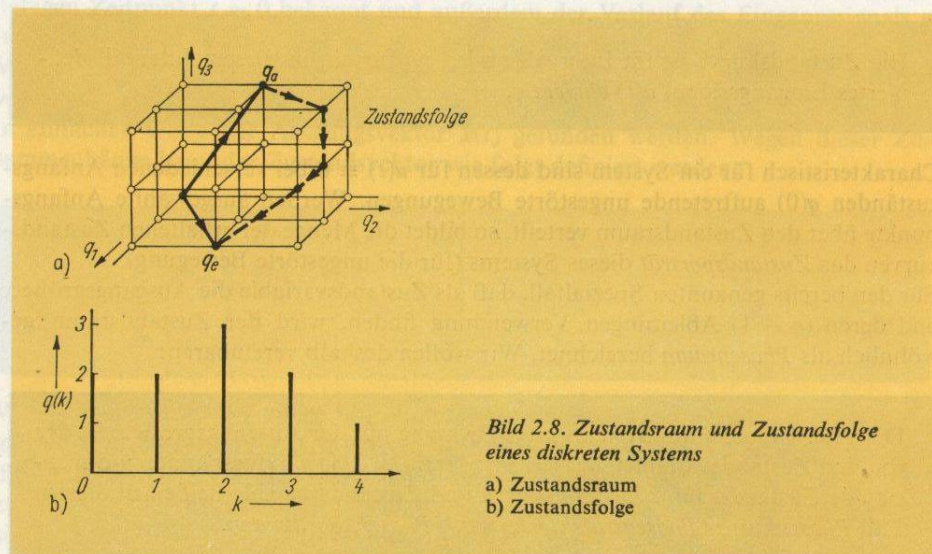
Die bisher betrachteten Systeme konnten ihren Zustand – ebenso die Ein- und Ausgangssignale – stetig ändern. Für praktische Fälle trifft das gewöhnlich für einen bestimmten endlichen Bereich des Zustandsraums zu. So können beispielsweise die Temperatur einer Warmwasserheizung von 0 bis 100 °C, der Druck in den pneumatischen Einheiten des Systems ursamat¹⁾ von 0,2 bis 1 kpcm⁻² Überdruck, der Strom in den elektrischen Einheiten dieses Systems von -5 bis +5 mA stetig verändert werden. Bei Fahrzeugen sind – wegen der endlichen Leistungen der verwendeten Motoren und evtl. auch mit Rücksicht auf die Sicherheit und Zuträglichkeit für beförderte Personen – Geschwindigkeit und Beschleunigung begrenzt, aber innerhalb dieser Begrenzung gewöhnlich stetig veränderbar. Derartige Systeme werden *analoge* genannt.

¹⁾ Das System ursamat ist ein in der DDR entwickeltes universelles System von Geräten und Einrichtungen zur Erfassung, Übertragung, Verarbeitung und Nutzung von Informationen für die Automatisierung technologischer Prozesse.

Bei einem solchen analogen System kann der Zustandsvektor – auch in einem endlichen Bereich des Zustandsraums – unendlich viele Werte annehmen.

Im Gegensatz hierzu existieren jedoch auch Systeme, deren Zustand nicht stetig veränderbar ist, sondern nur bestimmte diskrete Werte annehmen kann. Beispiele hierfür sind ein Schalter mit zwei oder ein Zähler mit beispielsweise 1000 Stellungen. Alle numerischen Rechenmaschinen gehören hierzu. Derartige Systeme, die ihren Zustand nur sprunghaft von dem einen zu einem anderen diskreten Wert ändern können, heißen *diskrete Systeme*.

Im Zustandsraum ergeben sich die möglichen Zustände eines diskreten Systems als diskrete (voneinander getrennte) Punkte; die Zustandskurve ist eine Folge derartiger Punkte im Zustandsraum (Bild 2.8).



Als Definition analoger bzw. diskreter Systeme wollen wir somit vereinbaren:

D 2.12

Analoge Systeme sind solche, deren Zustandsvektoren – in einem begrenzten oder unbegrenzten Bereich des Zustandsraums – stetig veränderbar sind.

Diskret heißen *Systeme*, deren Zustandsvektoren nur Werte aus einer – endlichen oder unendlichen – Menge diskreter Werte annehmen können.

Bei der Messung des Zustands analoger Systeme und dem Ablesen der Meßwerte ist man wegen des begrenzten Auflösungsvermögens der Meßgeräte sowie wegen der begrenzten Ablesegenauigkeit (und der numerischen Ausgabe in einer endlichstelligen Zahl) stets genötigt, die stetig veränderbaren (analogen) Zustandsvariablen zu quantisieren, d. h. in diskrete umzusetzen. Beim Ablesen eines Fieberthermometers ist man beispielsweise auf kleinste Stufen (Quanten) von 0,05 grad beschränkt. Man kann deshalb das analoge System als den Grenzfall eines diskreten auffassen, bei dem die diskreten Zustände in ein Kontinuum übergehen.

Schließlich besteht die Möglichkeit, daß eine oder mehrere Zustandsvariable stetig

veränderbar (d. h. analog) sind und wenigstens eine Zustandsvariable nur diskrete Werte annehmen kann. Ein solches System wird *hybrid*, d. h. zwitterartig, genannt.

Hybride Systeme sind solche, deren Zustandsvektoren sowohl stetig als auch diskret veränderbare Komponenten (analoge und diskrete Zustandsvariable) haben.

D 2.13

Ein Beispiel bietet das Bild auf einer Fernsehröhre, bei dem die senkrechte Ortskoordinate des Bildpunktes in 587 Zeilen quantisiert ist, die waagerechte Ortskoordinate und die Helligkeit jedoch stetig verändert werden. („Senkrechte“ und „waagerechte“ Koordinaten werden hierbei als um den kleinen Winkel gedreht angesehen, den jede Zeile mit der Waagerechten bildet.)

2.2.4. Kontinuierliche und diskontinuierliche Systeme

Während durch das Begriffspaar *diskret-analog* unterschieden wird, ob die Zustandsvariablen und damit der Zustandsvektor eine Quantisierung aufweisen oder nicht, wird durch das Begriffspaar *kontinuierlich-diskontinuierlich* die zeitliche Veränderbarkeit des Zustandsvektors charakterisiert. Mit Rücksicht auf die praktische Anwendbarkeit und die sich ergebenden mathematischen Beschreibungsformen ist es zweckmäßig, die zeitliche Veränderbarkeit des Zustandsvektors q im Zusammenhang mit dessen Steuerung durch den Eingangsvektor (den Steuervektor) u sowie mit dessen Beobachtung durch den gemessenen Ausgangsvektor x zu betrachten.

Bei *kontinuierlichen Systemen* kann der Zustandsvektor in *jedem beliebigen Zeitpunkt* durch den Eingangsvektor gesteuert und durch den gemessenen Ausgangsvektor beobachtet werden. Das trifft für viele analoge Systeme zu, nämlich solche, die durch Gl. (2.31) beschrieben werden können. Das gilt jedoch auch für bestimmte diskrete Systeme: Ein Zähler, dessen Zustand – gekennzeichnet durch die Stellung der einzelnen (Speicher-)Elemente zur Darstellung der verschiedenen Ziffern – in jedem Zeitpunkt weiter verstellt und zur Anzeige gebracht werden kann, ist ein kontinuierliches diskretes System. Er ist ein Spezialfall der sog. asynchronen Automaten, die ebenfalls zu dieser Systemklasse gehören.

Bei den üblichen Digitalrechnern handelt es sich dagegen um sog. synchrone Automaten. Diese ändern ihren Zustand nur zu diskreten – normalerweise gleichabständigen – Zeitpunkten, den Taktzeiten des Automaten. Nur zu diesen Zeitpunkten wird ein Eingangssignal aufgenommen und ein Ergebniswert ausgegeben. Man kann demzufolge von einer Quantisierung der Zeitvariablen sprechen. Derartige Systeme heißen *diskontinuierlich*. Im Fall des genannten Digitalrechners, dessen Zustand wegen der numerischen Arbeitsweise und der begrenzten Stellenzahl nur eine endliche Menge diskreter Werte annehmen kann, liegt ein diskontinuierliches diskretes System vor. Durch den Einsatz digitaler Rechner als sog. Prozeßrechner zur Steuerung industrieller Prozesse hat auch die Klasse diskontinuierlicher analoger Systeme größere Bedeutung erlangt. Bedingt durch die diskontinuierliche Arbeitsweise des Prozeßrechners, werden dabei nur zu diskreten Zeitpunkten auf die – für sich genommen häufig analog und kontinuierlich arbeitende – Anlage Steuerbefehle gegeben und deren Ausgangssignale vom Rechner abgefragt. Das dazwischenliegende Zeitintervall wird zur numerischen Berechnung des neuen Stellbefehls durch den Rechner benötigt.

Bild 2.9 zeigt, wie das kontinuierliche Ausgangssignal der Strecke x durch Tastung in ein diskontinuierliches Signal x^* (eine Wertefolge) übergeführt wird. Dieses wird dann von einem Analog-Digital-Umsetzer in eine für den digitalen Rechner verständliche Signalform umgeformt. Auf diese werden wir erst im Abschn. 5. näher eingehen. Ebenso wird das digitale Ausgangssignal des Rechners durch einen Digital-Analog-Umsetzer in eine Folge diskreter Amplituden u^* umgeformt.

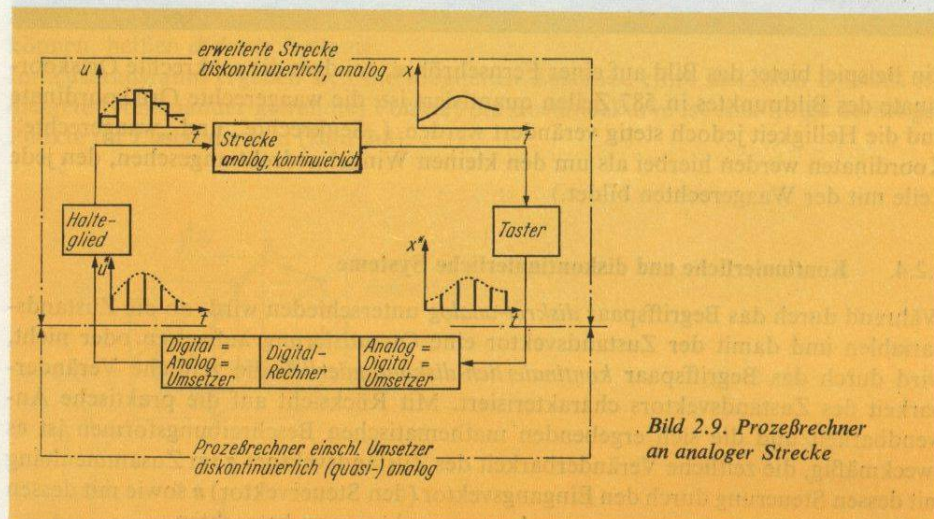


Bild 2.9. Prozeßrechner an analoger Strecke

Da die Quantisierung eines Digitalrechner-Ausgangssignals sehr feinstufig ist, kann u^* praktisch als eine diskontinuierliche [quasi]analoge Steuergröße angesehen und der Prozeßrechner einschließlich der Umsetzer vereinfacht als ein diskontinuierlich [quasi]analoges Teilsystem beschrieben werden.

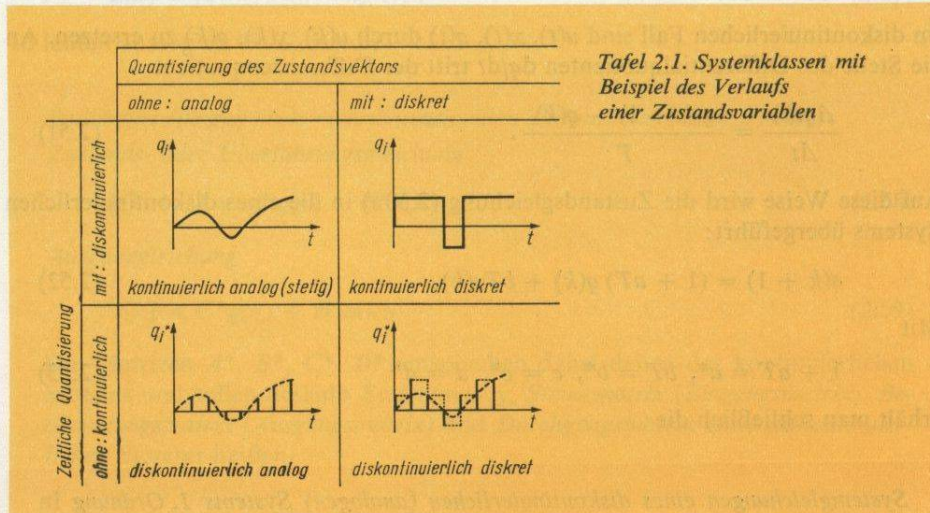
Das diskontinuierliche Steuersignal u^* wird häufig durch ein Halteglied in ein – immer noch diskontinuierliches – Signal u umgeformt. Die um Halteglied und tastendes Meßglied erweiterte Strecke kann somit als ein diskontinuierliches analoges Teilsystem mit diskontinuierlich analogen Ein- und Ausgangssignalen betrachtet werden. Es wird sich zeigen, daß zur Berechnung des diskontinuierlichen Ausgangssignals x^* eines derartigen Systems auch vom Zustandsvektor nur eine solche diskontinuierliche Folge q^* bekannt sein muß, obwohl sich letzterer auch zwischen den Tastzeitpunkten ändern kann. Gerade das veranlaßt uns, entsprechend der Bemerkung zu Beginn dieses Abschnitts die folgende Definition zu wählen:

D 2.14

Kontinuierlich heißen Systeme, deren Zustandsvektor zu jedem beliebigen Zeitpunkt, *diskontinuierlich* solche, deren Zustandsvektor nur zu diskreten Zeitpunkten vom Eingangsvektor gesteuert und vom Ausgangsvektor beobachtet wird.

Lassen wir vorerst Mischformen außer acht, bei denen der Eingangsvektor kontinuierlich und der Ausgangsvektor diskontinuierlich ist oder umgekehrt, so ergeben sich die in Tafel 2.1 gezeigten Systemklassen. Für jede Klasse ist außerdem der Verlauf

einer Zustandsvariablen eingetragen. Im diskontinuierlichen Fall sind auch die punktiert eingezeichneten Verläufe möglich.



2.2.5. System- und Bewegungsgleichungen diskontinuierlicher und diskreter Systeme

An die Stelle der kontinuierlichen Signale $u(t)$, $x(t)$, $q(t)$ treten bei diskontinuierlichen Systemen die diskontinuierlichen Signale $u^*(t)$, $x^*(t)$, $q^*(t)$. Aus Bild 2.9 und Tafel 2.1 ist ersichtlich, daß letztere nur zu den diskontinuierlichen Taktzeiten

$$t_k = kT; \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.48)$$

die voneinander um die (Tast-)Periode T verschoben sind, zur Verfügung stehen. Sie können daher auch durch die

Wertefolgen der Steuer-, Ausgangs- und Zustandssignale

$$\begin{aligned} [u(k)] &= (u(0), u(1), \dots, u(v), \dots) \\ [x(k)] &= (x(0), x(1), \dots, x(v), \dots) \\ [q(k)] &= (q(0), q(1), \dots, q(v), \dots) \end{aligned} \quad (2.49)$$

exakt beschrieben werden. Hierbei wird statt $u(kT)$ vereinfacht $u(k)$ gesetzt usw. Diese Beschreibung gilt für diskontinuierliche analoge und diskrete Signale, wenn man beachtet, daß im ersten Fall $u(k)$, $x(k)$ und $q(k)$ stetig veränderbar sind, während sie im zweiten Fall nur jeweils einen Wert aus einer gegebenen Menge diskreter Werte annehmen können.

Betrachten wir zunächst ein analoges System erster Ordnung mit je einem Ein- und Ausgang. Im kontinuierlichen Fall gelten für dieses die Systemgleichungen (2.10), (2.11)

$$\dot{q}(t) = aq(t) + bu(t) \quad (2.50a)$$

$$x(t) = cq(t) + du(t). \quad (2.50b)$$

Im diskontinuierlichen Fall sind $u(t)$, $x(t)$, $q(t)$ durch $u(k)$, $x(k)$, $q(k)$ zu ersetzen. An die Stelle des Differentialquotienten dq/dt tritt der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta q(k)}{\Delta t} = \frac{q(k+1) - q(k)}{T}. \quad (2.51)$$

Auf diese Weise wird die Zustandsgleichung (2.50a) in die eines diskontinuierlichen Systems übergeführt:

$$q(k+1) = (1 + aT)q(k) + bTu(k). \quad (2.52)$$

Mit

$$1 + aT = a^*, \quad bT = b^*, \quad c = c^*, \quad d = d^* \quad (2.53)$$

erhält man schließlich die

Systemgleichungen eines diskontinuierlichen (analogen) Systems 1. Ordnung in Standardform:

die Zustands- oder Überführungsgleichung

$$q(k+1) = a^*q(k) + b^*u(k) \quad (2.54a)$$

die Ausgabegleichung

$$x(k) = c^*q(k) + d^*u(k). \quad (2.54b)$$

Die erste Gleichung ist eine Differenzengleichung und erlaubt, die Überführung des alten Zustands $q(k)$ in den neuen $q(k+1)$ unter Berücksichtigung des Eingangssignals $u(k)$ zu berechnen. Das Ausgangssignal $x(k)$ erhält man aus Zustand und Eingangssignal über die algebraische Ausgabegleichung (2.54b).

Bei Übergang von einem System 1. Ordnung zu einem n -ter Ordnung trat im kontinuierlichen Fall anstelle von Gl. (2.50a) eine Differentialgleichung n -ter Ordnung bzw. ein System n simultaner Differentialgleichungen 1. Ordnung, die man zu der Vektordifferentialgleichung (2.31a) zusammenfassen konnte. Entsprechend erhält man für ein diskontinuierliches System n -ter Ordnung eine Differenzengleichung n -ter Ordnung oder eine *Vektordifferenzengleichung*, die n Differenzengleichungen 1. Ordnung entspricht.

Beschreibt man die m diskontinuierlichen Eingangssignale durch einen *diskontinuierlichen Eingangsvektor*

$$u(k) = [u_1(k) \ u_2(k) \ \dots \ u_m(k)]^T \quad (2.55)$$

die n Zustandsvariablen durch einen *diskontinuierlichen Zustandsvektor*

$$q(k) = [q_1(k) \ q_2(k) \ \dots \ q_n(k)]^T \quad (2.56a)$$

bzw.

$$q(k+1) = [q_1(k+1) \ q_2(k+1) \ \dots \ q_n(k+1)]^T \quad (2.56b)$$

und die r Ausgangssignale durch einen *diskontinuierlichen Ausgangsvektor*

$$\mathbf{x}(k) = [x_1(k) \ x_2(k) \ \dots \ x_r(k)]^T, \quad (2.57)$$

so lauten analog zu Gl. (2.31) die

Systemgleichungen eines mehrdimensionalen diskontinuierlichen Systems:
Zustands- oder Überführungsgleichung

$$\mathbf{q}(k+1) = \mathbf{A}^* \mathbf{q}(k) + \mathbf{B}^* \mathbf{u}(k) \quad (2.58)$$

Ausgabegleichung

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{C}^* \mathbf{q}(k) + \mathbf{D}^* \mathbf{u}(k). \quad (2.59)$$

Die Matrizen $\mathbf{A}^*$, $\mathbf{B}^*$, $\mathbf{C}^*$, $\mathbf{D}^*$ entsprechen dabei denen des kontinuierlichen Systems und sollen deshalb *Systemmatrix*, *Steuermatrix* (*Eingangsmatrix*), *Beobachtungsmatrix* (*Ausgangsmatrix*) und *Durchgangsmatrix* eines *diskontinuierlichen Systems* heißen.

Die Lösung der Zustandsgleichung bei gegebenem $\mathbf{q}(0)$ bestimmen wir rekursiv:

$$\mathbf{q}(1) = \mathbf{A}^* \mathbf{q}(0) + \mathbf{B}^* \mathbf{u}(0) \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(2) &= \mathbf{A}^* \mathbf{q}(1) + \mathbf{B}^* \mathbf{u}(1) \\ &= \mathbf{A}^{*2} \mathbf{q}(0) + \mathbf{A}^* \mathbf{B}^* \mathbf{u}(0) + \mathbf{B}^* \mathbf{u}(1). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Durch Verallgemeinerung findet man die allgemeine Lösung, sie heißt

Bewegungsgleichung eines diskontinuierlichen Systems:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(k) &= \Phi^*(k) \mathbf{q}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi^*(k-i-1) \mathbf{B}^* \mathbf{u}(i) \\ &= \mathbf{q}_{\text{fr}}(k) + \mathbf{q}_{\text{erzw}}(k) \end{aligned} \quad (2.62)$$

mit der *Übergangsmatrix* (*Fundamentalmatrix*) eines *diskontinuierlichen Systems*

$$\Phi^*(k) = \mathbf{A}^{*k}. \quad (2.63)$$

Wie im kontinuierlichen Fall enthält die Bewegungsgleichung je ein Glied für die freie und die erzwungene Bewegung, von denen das erste nur vom Anfangszustand $\mathbf{q}(0)$, das zweite ausschließlich vom Eingangssignal $\mathbf{u}(i)$ im Intervall $0 \leq i \leq k-1$ abhängt.

Die Gln. (2.58), (2.59), (2.62) sind für den Fall eines analogen diskontinuierlichen Systems aufgestellt worden. Sie gelten formal auch für eine Klasse diskreter diskontinuierlicher Systeme, die sog. *linearen diskreten Automaten*, wenn man festlegt, daß die durch diese Gleichungen gegebenen Rechenoperationen im Ring der ganzen Zahlen modulo p (p ganze reelle Zahl) durchgeführt werden.

Eine ausführlichere Behandlung diskontinuierlicher Systeme, bei der auch die Wahl geeigneter Zustandsvariabler zu untersuchen ist, soll später erfolgen. Hier wird nur der Charakter der beschreibenden Gleichungen klargelegt.

Abschließend sei noch bemerkt, daß die Bezeichnung diskretes System in der Literatur nicht selten für die nach vorstehenden Definitionen diskontinuierlichen analogen Systeme verwendet wird.

2.3. Verhaltensweisen kybernetischer Systeme

2.3.1. Zustands- und Übertragungsverhalten

Bei der Bewegung kybernetischer (dynamischer) Systeme beobachten wir verschiedene charakteristische *Verhaltensweisen*. Diese gelten in ähnlicher Weise für analoge und diskrete, kontinuierliche und diskontinuierliche Systeme. Wir wollen deshalb bei den folgenden Überlegungen unseren Ausgang von den analogen kontinuierlichen Systemen und den für sie gültigen Bewegungsgleichungen nehmen, da diese für die im Vordergrund der Betrachtungen stehende Steuerung verfahrenstechnischer Produktionsprozesse besondere Bedeutung haben.

Obwohl durch die Ausgangsgleichung (2.31 b) Zustand und Ausgangssignale eng verbunden erscheinen, können in Sonderfällen beide unterschiedliche Verhaltensweisen aufweisen.

Hierauf wird in einem weiteren Buch bei der Untersuchung der Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit von Systemen eingegangen werden.

Wir müssen deshalb verschiedene Verhaltensweisen sowohl für den Zustand als auch für die Ausgangssignale erklären.

Die *Bewegung des Zustands* eines analogen kontinuierlichen Systems ergibt sich mit der Übergangsmatrix $\Phi(t)$ von Gl. (2.45) nach Gl. (2.44) zu

$$\mathbf{q}(t) = \Phi(t) \mathbf{q}(0) + \int_0^t \Phi(t - \tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (2.64)$$

Für den Fall des fehlenden Eingangssignals $\mathbf{u}(t) \equiv 0$ erhalten wir daraus die

Zustandsbewegung des ungestörten Systems oder freie Bewegung bei einem Anfangszustand (einer Anfangsauslenkung) $\mathbf{q}(0)$

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_{tr}(t) = \Phi(t) \mathbf{q}(0). \quad (2.65)$$

Für verschwindende Anfangsauslenkung $\mathbf{q}(0) = 0$ ergibt sich aus der Gl. (2.64) der Sonderfall der

Zustandsbewegung des gestörten Systems

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_{erzw}(t) = \int_0^t \Phi(t - \tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (2.66)$$

Zusammenfassend können wir somit definieren:

Unter *Zustandsverhalten* versteht man Bewegung des Zustandsvektors eines Systems in Abhängigkeit von dessen Anfangszustand und Eingangsvektor. Die Bewegung des Zustandsvektors bei gegebenem Anfangszustand und verschwindendem Eingangsvektor heißt *Zustandsverhalten des ungestörten Systems oder freie Zustandsbewegung*. Die Bewegung des Zustandsvektors allein in Abhängigkeit vom (beliebigen) Eingangsvektor heißt *Zustandsverhalten des gestörten Systems oder erzwungene Zustandsbewegung*.

D 2.15

Durch Einsetzen der Bewegungsgleichung (2.44) in die Ausgangsgleichung (2.31a) findet man die allgemeine

Gleichung für die Ausgangsbewegung

$$x(t) = C\Phi(t)q(0) + \int_0^t C\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau + Du(t). \quad (2.67)$$

Von besonderem Interesse ist der Fall verschwindenden Anfangszustands, die

Gleichung für das Übertragungsverhalten eines Mehrgrößensystems

$$x(t) = \int_0^t C\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau + Du(t) \quad (2.68a)$$

und die eines Eingrößensystems [s. Gl. (2.32b)]

$$x(t) = \int_0^t c^T\Phi(t-\tau)bu(\tau)d\tau + du(t). \quad (2.68b)$$

Allgemein gilt:

Mit *Übertragungsverhalten* eines Systems bezeichnet man die Bewegung des Ausgangssignals (Ausgangsvektors) dieses Systems in Abhängigkeit von dessen Eingangssignal (Eingangsvektor) bei verschwindendem Anfangszustand für beliebige Eingangssignale.

D 2.16

Setzen wir vorübergehend $d = 0$ (was in realen Systemen überwiegend zutrifft) und substituieren wir

$$g(t) = c^T\Phi(t)b, \quad (2.69)$$

so können wir statt Gl. (2.68b) schreiben

$$x(t) = \int_0^t g(t - \tau) u(\tau) d\tau \quad (2.70a)$$

oder verkürzt symbolisch

$$x(t) = g(t) * u(t). \quad (2.70b)$$

Der Stern symbolisiert die *Faltung* der Funktionen $u(t)$ und $g(t)$ durch das sog. *Faltungsintegral* Gl. (2.70a). Diese Gleichung besagt somit, daß das Ausgangssignal $x(t)$ durch Faltung des Eingangssignals $u(t)$ mit der das System beschreibenden Funktion $g(t)$ erhalten wird. [Die Funktion $g(t)$ wird später als Gewichtsfunktion identifiziert werden. Mit Gl.(8.35) wird auch ein nichtverschwindendes d in $g(t)$ einbezogen und obige Einschränkung $d = 0$ aufgehoben werden.]

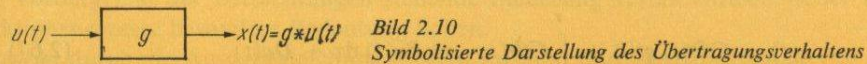


Bild 2.10 symbolisiert die Beschreibung des Übertragungsverhaltens durch die Faltungsoperation mit der Gewichtsfunktion $g(t)$ und veranschaulicht, daß hierdurch ein Eingangssignal $u(t)$ in ein Ausgangssignal $x(t)$ abgebildet wird.

Zur verallgemeinernden Unterscheidung von Abbildungen wollen wir mit U die Menge der Elemente u und mit X die Menge der Elemente x bezeichnen. Dann kann eine *Abbildung der Menge U auf die Menge X* wie folgt symbolisch beschrieben werden:

$$U = \{u\} \rightarrow X = \{x\}. \quad (2.71)$$

Tafel 2.2. Funktion, Funktional, Operator

	Abbildung von U auf X	Eigenschaften von U und X	Explizite Darstellung	Bezeichnung	Beispiele
f	$U \rightarrow X$	$U \subseteq R^1, X \subseteq R^1$	$x = f(u)$	reelle Funktion	$x = \alpha u^2, x = \beta t$
f^*	$U \rightarrow X$	$U \subseteq C^1, X \subseteq C^1$	$x^* = f^*(u^*)$	komplexe Funktion	$x^* = (u_a + j u_b)^2$
f	$U \rightarrow X$	$U \subseteq R^m, X \subseteq R^r$	$x = f(u)$	reeller Funktionsvektor	$x = Ku$ $K(r, m)$ -Matrix
F	$U \rightarrow X$	$U \subseteq L(a, b)$ $X \subseteq R^1$	$x = F\{u(t)\}$	Funktional	$x = \int_0^\infty u^2(t) dt$
$\mathfrak{F}$	$U \rightarrow X$	$U \subseteq L(a, b)$ $X \subseteq L(a, b)$	$x(t) = \mathfrak{F}\{u(t)\}$	Operator	$x(t) = g * u(t)$ Frequenzgang s. u., Laplaceintegral s. u.

Je nach den Eigenschaften der Elemente der Mengen U und X werden dabei die in Tafel 2.2 dargestellten, für die weiteren Ausführungen wichtigen Abbildungsklassen unterschieden. Hierbei ist R^1 die Menge der reellen, C^1 die der komplexen Zahlen. R^n ist die Menge der aus reellen Elementen gebildeten n -dimensionalen Vektoren. $L(a, b)$ sei eine Menge im Intervall $[a, b]$ definierter Funktionen mit bestimmten Eigenschaften, z. B. die Menge der in $0 \leq t \leq \infty$ integrierbaren Funktionen $f(t)$. Der Tafel 2.2 kann man entnehmen, daß durch eine *Funktion* einer Zahl eine Zahl, durch ein *Funktional* einer Funktion eine Zahl zugeordnet wird. Ein solches Funktional werden wir später in dem Zielfunktional Gl. (6.1) kennenlernen.

Mit der Gl. (2.70) ist eine Zuordnung zweier Funktionen gegeben, die als *Operator* bezeichnet wird. Im vorliegenden Fall des Faltungsintegrals spricht man von einem *Integraloperator*.

Wir wollen uns merken:

Die Abbildung einer Menge von Funktionen (mit bestimmten Eigenschaften) auf eine Menge von Funktionen wird *Operator* genannt.

D 2.17

Aus den Ausführungen dieses Abschnitts ist ersichtlich, daß bei Kenntnis der Matrizen A, B, C, D das Verhalten eines Systems bei gegebenem Anfangszustand und/oder Eingangssignal bestimmt werden kann. Umgekehrt können unter bestimmten Bedingungen aus dem Studium des Verhaltens des Systems die Matrizen A, B, C, D , die die Struktur und Parameter beschreiben, ermittelt werden, wie später bei der *Identifikation* von Systemen erläutert werden wird.

Somit gilt:

Über die Bewegungsgleichungen sind Struktur und Parameter eines Systems und dessen Zeitverhalten einander zugeordnet.

S 2.2

Während jedoch zu einer Systemstruktur einschließlich des Parametersatzes genau ein Zeitverhalten gehört, können einem Zeitverhalten i. allg. mehrere Systemstrukturen zugeordnet werden (s. Abschn. 13.).

2.3.2. Lineares und nichtlineares, zeitinvariantes und zeitvariables Verhalten

Eine hinsichtlich der anzuwendenden Berechnungsmethoden wichtige Unterscheidung ist die zwischen linearem und nichtlinearem Verhalten. Diese Bestimmung kann sowohl auf den Zustand als auch auf ein Ausgangssignal angewendet werden:

Die in Abhängigkeit von Eingangssignal oder/und Anfangszustand erfolgende *Bewegung des Zustands bzw. des Ausgangssignals* eines Systems heißt genau dann *linear*, wenn dafür das Superpositionsgesetz gilt.

Gehorchen die Bewegungsgleichungen für den Zustand und für alle Ausgangssignale dem Superpositionsgesetz, so heißt das durch sie beschriebene System ein *lineares System*; trifft das nicht zu, so wird es *nichtlineares System* genannt.

D 2.18

Zur Präzisierung des Superpositionsgesetzes wollen wir in diesem Abschnitt g ggf. auch als nichtlinearen Operator betrachten und unter der Beziehung

$$x(t) = g * u(t)$$

in Verallgemeinerung von Gl. (2.70) verstehen:

$x(t)$ ist die Antwort des durch g beschriebenen (linearen oder nichtlinearen) Systems auf ein Eingangssignal $u(t)$.

Damit kann formuliert werden:

- D 2.19** Ein System heißt das *Superpositionsgesetz* erfüllend genau dann, wenn für beliebige $u_1(t)$ und $u_2(t)$ und für beliebige Konstanten α, β gilt:

$$g * [\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)] = \alpha g * u_1(t) + \beta g * u_2(t). \quad (2.72)$$

Die Antwort eines linearen Systems auf ein aus zwei Summanden gebildetes Eingangssignal muß also gleich der Summe der Antworten auf die einzelnen Komponenten des Eingangssignals sein. Für $\alpha = \beta = 1$ erhält man daraus die

Bedingung der Additivität

$$g * [u_1(t) + u_2(t)] = g * u_1(t) + g * u_2(t). \quad (2.73a)$$

Für $u_2(t) \equiv 0$ ergibt sich aus der Linearitätsbedingung Gl. (2.72) die

Bedingung der Homogenität

$$g * \alpha u(t) = \alpha [g * u(t)]. \quad (2.73b)$$

Eine proportionale Veränderung des Eingangssignals bewirkt also die gleiche Veränderung des Ausgangssignals.

Alle bisher angegebenen System- und Bewegungsgleichungen für Zustand und Ausgangssignal entsprachen linearen Bewegungen und Systemen. Zur Einbeziehung nichtlinearer Systeme sind die Systemgleichungen (2.31) durch die

nichtlineare Zustandsgleichung

$$\dot{q}(t) = f_q[q(t), u(t)] \quad (2.74)$$

und/oder die *nichtlineare Ausgabegleichung*

$$x(t) = f_x[q(t), u(t)] \quad (2.75)$$

zu ersetzen, die nicht auf die Gln. (2.31 a, b) umformbar sein sollen.

Hierbei bezeichnen die f_i Spaltenvektoren mit n – im allgemeinen nichtlinearen – Funktionen $f_i [q(t), u(t)]$ als Elemente.

Eine weitere wichtige Unterscheidung ist die zwischen *zeitinvarianten* und *zeitvariablen Verhaltensweisen* bzw. *Systemen*. Erläutern wir die Zeitinvarianz am Beispiel des Übertragungsverhaltens, so gilt:

Ein Übertragungsverhalten zwischen einem Eingangssignal $u(t)$ und einem Ausgangssignal $x(t)$ heißt *zeitinvariant* genau dann, wenn aus

D 2.20

$$g * u(t) = x(t)$$

für alle τ folgt:

$$g * u(t - \tau) = x(t - \tau). \quad (2.76)$$

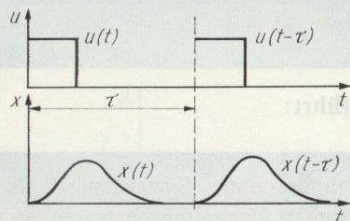


Bild 2.11. Zeitinvariantes Übertragungsverhalten

Wie durch Bild 2.11 veranschaulicht, hängt das Ausgangssignal bei zeitinvariantem Übertragungsverhalten nicht davon ab, zu welchem Zeitpunkt das Eingangssignal angelegt wird. Ein um das Zeitintervall τ später angelegtes Eingangssignal bewirkt ein um τ verspätetes Ausgangssignal.

Ein System, das hinsichtlich aller Zustandsvariablen und Ausgangssignale zeitinvariantes Verhalten zeigt, heißt *zeitinvariantes System*. Ein System, bei dem wenigstens ein Zustands- oder Ausgangssignal kein zeitinvariantes Verhalten hat, heißt *zeitvariables (zeitvariantes) System*.

D 2.21

Die linearen und nichtlinearen Systemgleichungen (2.31) bzw. (2.74), (2.75) stammen von zeitinvarianten Systemen. Ein zeitvariables lineares System, das durch lineare Differentialgleichungen beschrieben werden kann, hat zeitvariable Parameter. Die *Systemgleichungen eines solchen zeitvariablen linearen Systems* enthalten Systemmatrizen, deren Elemente Zeitfunktionen sind, und lauten:

$$\dot{q}(t) = A(t) q(t) + B(t) u(t) \quad (2.77a)$$

$$x(t) = C(t) q(t) + D(t) u(t). \quad (2.77b)$$

Man kann zeigen, daß ein durch vorstehende Gleichungen beschriebenes zeitvariables System das Superpositionsgesetz erfüllt, also tatsächlich ein lineares System darstellt:

2.3.3. Statisches und dynamisches, stationäres und Übergangsverhalten

Zwei weitere wichtige Begriffspaare zur Klassifizierung des Verhaltens kybernetischer Systeme sind das

statische und dynamische Verhalten

sowie das

stationäre und Übergangsverhalten.

Wir wollen die Begriffsbestimmungen für das Verhalten des Zustands eines Systems angeben. Sie können auf das Verhalten der Ausgangssignale übertragen werden.

- D 2.22** Unter *statischem Verhalten* eines Systems versteht man die für konstante Eingangssignale $u(t) = u_0 = \text{konst.}$ nach Abklingen der Bewegung, d. h. aus $\dot{q}(t) \equiv 0$, sich ergebenden Gleichgewichtszustände (falls diese existieren). Unter *dynamischem Verhalten* eines Systems wird das Verhalten in der Bewegung, d. h. für $\dot{q}(t) \neq 0$, verstanden.

Hierbei hat sich folgende Bezeichnungsweise eingeführt:

- D 2.23** Ein bezüglich seines dynamischen Verhaltens untersuchtes System wird als *dynamisches System*, ein hinsichtlich seines statischen Verhaltens betrachtetes als *statisches System* bezeichnet.

Die Systemgleichungen (2.31) beschreiben das statische und dynamische Verhalten eines linearen Systems. Man findet das statische Verhalten aus ihnen, indem man die Ableitung des Zustandsvektors Null setzt und die sich für konstanten Eingangsvektor

$$u(t) = u_0 \quad (2.78)$$

ergebenden Gleichgewichtszustände q_G und Ausgangsruhwerte x_G berechnet (falls sie existieren):

$$Aq_G + Bu_0 = 0. \quad (2.79a)$$

Bei nichtsingulärer Matrix A ergibt sich durch Auflösung nach q_G und Einsetzen in die Ausgabegleichung (2.31 b) die

statische Übertragungsgleichung für lineare Systeme

$$x_G = (-CA^{-1}B + D)u_0 = Ku_0. \quad (2.79b)$$

Für nichtlineare Systeme erhält man die Gleichgewichtszustände mit Gl. (2.74) aus der Bedingung

$$f_q[q_G, u_0] = 0. \quad (2.80a)$$

Bei Auflösbarkeit nach q_G findet man durch Einsetzen in die nichtlineare Ausgangsgleichung (2.75) die

statische Übertragungsgleichung für nichtlineare Systeme

$$x_G = f_x(q_G, u_0) = f(u_0). \quad (2.80b)$$

Unter den Bewegungsvorgängen gibt es nun solche, die das System aus einem Anfangszustand $q(0)$ in einen neuen Gleichgewichtszustand q_G überführen (Bild 2.12a). Ein solcher Übergangsvorgang kann jedoch auch – bei fehlendem Eingangssignal (z. B. bei einem Schwingungserzeuger) oder bei periodischem Eingangssignal – in eine periodische Bewegung des Zustandsvektors mit der Periodendauer T einmünden: $q(t) = q(t + T)$.

Im Zustandsraum (Bild 2.12b) erscheint ein periodischer Vorgang als in sich geschlossene Kurve, als ein sog. Grenzyklus.

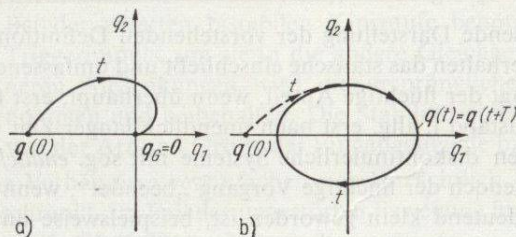


Bild 2.12. Zustandskurve bei stationärem und Übergangsverhalten

- a) Übergangsvorgang aus Anfangszustand $q(0)$ in Gleichgewichtszustand $q_G = 0$
 b) stationärer periodischer Vorgang (Grenzyklus) ———
 und Übergangsvorgang aus Anfangszustand in Grenzyklus - - - -

Die Gleichgewichtszustände und die periodischen Vorgänge sind die wichtigsten Bewegungsformen des sog. stationären Verhaltens eines Systems. Zur im folgenden benutzten, für ungestörte $[u(t) \equiv 0]$ und gestörte Systeme gültigen Definition des stationären Verhaltens wollen wir voraussetzen, daß wir die Lösung für $q(t)$ in zwei Summanden aufspalten können:

$$q(t) = q_{fl}(t) + q_{st}(t), \quad (2.81)$$

von denen der erstere den von der Lösung der homogenen Gleichung stammenden flüchtigen Anteil $q_{fl}(t)$, der zweite den als partikuläres Integral der inhomogenen Gleichung erhaltenen stationären Anteil $q_{st}(t)$ darstellt. Das ist bei den hier im wesentlichen untersuchten linearen Systemen und betrachteten deterministischen Eingangssignalen zutreffend. Dann gelten folgende Definitionen:

Das stationäre Verhalten eines Systems ist dessen Verhalten nach Abklingen der Ausgleichsvorgänge, d. h. für $q_{fl}(t) \equiv 0$. Es umfaßt insbesondere das statische und periodische Verhalten.

D 2.24

D 2.25

Das *instationäre* oder *Übergangsverhalten* eines Systems ist dessen Bewegung $q(t)$ für nichtverschwindenden flüchtigen Anteil: $q_{fl}(t) \neq 0$. Es umfaßt die Übergänge aus einem Anfangs- oder Gleichgewichtszustand in einen neuen Gleichgewichtszustand, in einen periodischen Vorgang oder ins Unendliche, außerdem die zwischen zwei verschiedenen periodischen Vorgängen und die aus einem periodischen Zustand in einen Gleichgewichtszustand oder in das Unendliche.

Tafel 2.3. Verhaltensweisen kybernetischer Systeme

Statisches Verhalten $\dot{q}(t) = 0$	Dynamisches Verhalten $\dot{q}(t) \neq 0$
stationäres Verhalten (insbesondere statisches und periodisches Verhalten) $q_{fl}(t) = 0$	Übergangsverhalten $q_{fl}(t) \neq 0$

Tafel 2.3 bringt eine zusammenfassende Darstellung der vorstehenden Definitionen und deutet an, daß das stationäre Verhalten das statische einschließt und umfassender als dieses ist. Genaugenommen klingt der flüchtige Anteil, wenn überhaupt, erst für $t \rightarrow \infty$ ab, so daß der stationäre Zustand i. allg. erst nach unendlich langer Zeit erreicht wird. (Eine Ausnahme bilden diskontinuierliche Systeme mit sog. *endlicher Einstellzeit*.) Für den Ingenieur ist jedoch der flüchtige Vorgang „beendet“, wenn er für das untersuchte Problem unbedeutend klein geworden ist, beispielsweise unter die vorliegende Meßgenauigkeit gesunken ist.

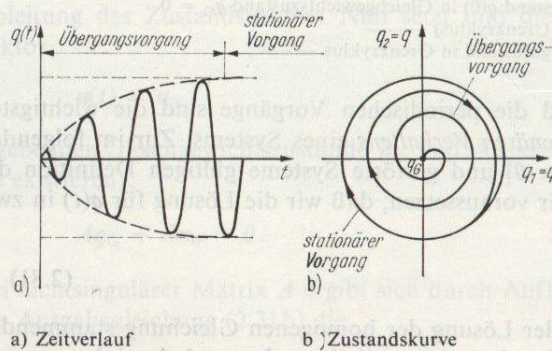


Bild 2.13. Übergang aus einem (instabilen) Gleichgewichtspunkt $q_G = 0$ in einen stationären periodischen Vorgang

Übergangsvorgang und stationären Zustand beim Einschalten eines Schwingungsgenerators zeigt Bild 2.13.

2.3.4. Stabiles und instabiles Verhalten

Damit ein dynamisches System gesteuert, d. h. zielgerichtet beeinflusst werden kann, muß es sich im gewünschten Arbeitsbereich „stabil“ verhalten. Eine allen Sonderfällen genügende *Stabilitätsdefinition* muß folgende Tatsachen berücksichtigen:

- a) Wie später bei der Untersuchung der Beobachtbarkeit näher erläutert werden wird, bedingt ein instabiles Verhalten des (inneren) Zustandsvektors nicht notwendig ein instabiles Verhalten des Ausgangsvektors. Beispielsweise kann sich ein Ausgangssignal als endliche Differenz zweier unbeschränkt wachsender Zustandsvariablen ergeben. Um auch das „Systeminnere“ unter Kontrolle zu behalten, wird die Stabilität deshalb zweckmäßig für den Zustand des Systems erklärt.
- b) Eine allgemein brauchbare Stabilitätsdefinition muß sowohl auf das Zustandsverhalten ungestörter Systeme (mit Anfangsauslenkung) als auch auf gestörte Systeme (für bestimmte Klassen von Störungen) anwendbar sein (s. Definition 2.15).
- c) Nichtlineare Systeme können mehrere Gleichgewichtszustände aufweisen, die sich als Lösungen der Gl. (2.80a) ergeben. Eine Kippstufe (ein Flipflop) hat zwei Gleichgewichtszustände und wird bistabil, monostabil oder astabil genannt, je nachdem, ob beide, einer oder keiner dieser beiden Zustände „stabil“ ist. Ebenso können Schwingungen (Grenzzyklen) auftreten, die sich im Fall eines Schwingungserzeugers als „stabil“ erweisen, in anderen Fällen jedoch weiter aufschaukeln. Die Stabilität kann also i. allg. offensichtlich nur von den verschiedenen Gleichgewichtszuständen und Grenzzyklen ausgesagt werden.
- d) Bei der zitierten bistabilen Kippstufe benötigt man einen hinreichend großen Triggerimpuls, um sie in die andere Gleichgewichtslage „umzukippen“. Bei kleineren Auslenkungen wird die ursprüngliche Gleichgewichtslage wieder eingenommen und beibehalten. Die Stabilität einer Gleichgewichtslage ist demzufolge von der Art und Größe der Eingangssignale bzw. Anfangsauslenkungen abhängig.

Die Verhältnisse vereinfachen sich beträchtlich, wenn man sich auf *lineare Systeme* beschränkt. Im Fall der ungestörten Bewegung findet man den Gleichgewichtszustand q_G nach Gl. (2.79a) mit $u_0 = 0$:

$$Aq_G = 0. \quad (2.82)$$

Für nichtsinguläre Matrix A hat diese Gleichung eine einzige Lösung:

$$q_G = 0. \quad (2.83)$$

Im Fall eines linearen Systems (mit nichtsingulärer Matrix A) existiert also nur ein Gleichgewichtszustand für das ungestörte System, weshalb wir die Stabilität des Gleichgewichtszustandes mit der des Systems identifizieren können.

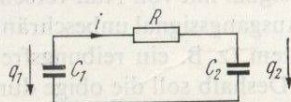


Bild 2.14. System mit singulärer Matrix

Bemerkung. Ist A singulär, so existieren unendlich viele Gleichgewichtszustände. Dieses trifft für die Schaltung Bild 2.14 zu, bei der alle Zustände mit gleichen, aber sonst beliebigen Kondensatorspannungen bestehenbleiben. Führt man die beiden Kondensatorspannungen als Zustandsvariable q_1, q_2 ein, so erhält man

$$C_1 \dot{q}_1 = -\frac{1}{R} (q_1 - q_2) \quad (2.84)$$

$$C_2 \dot{q}_2 = \frac{1}{R} (q_1 - q_2) \quad (2.85)$$

und somit

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & \frac{1}{RC_1} \\ \frac{1}{RC_2} & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{q}. \quad (2.86)$$

Da die Determinante von $\mathbf{A}$ verschwindet:

$$\det \mathbf{A} = 0, \quad (2.87)$$

ist $\mathbf{A}$ wie erwartet singular.

Später wird gezeigt werden, daß die Stabilität eines ungestörten linearen Systems nicht von der Größe der Anfangsauslenkung abhängt. Wir können deshalb definieren:

D 2.26

Ein *lineares ungestörtes System* heißt:

- *stabil*, wenn der Zustandsvektor nach einer endlichen Auslenkung $\mathbf{q}(0)$ beschränkt bleibt:

$$\|\mathbf{q}(t)\| \leq q_{\max} < \infty \quad \text{für alle } t > 0 \quad (2.88)$$

- *asymptotisch stabil*, wenn es stabil ist und der Zustandsvektor nach einer Anfangsauslenkung wieder verschwindet:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{q}(t) = \mathbf{0} \quad (2.89)$$

- *instabil*, wenn der Zustandsvektor bei beliebig kleiner Anfangsauslenkung unbeschränkt wächst.

$\|\mathbf{q}\|$ ist hierbei die Norm des Vektors $\mathbf{q}$ (die Länge des Zustandsvektors).

Ein Integrator behält seine Anfangsauslenkung bei. Er ist somit stabil, aber nicht asymptotisch stabil. Eine allgemeingültige – auch nichtlineare Systeme einschließende – Stabilitätsdefinition für die Gleichgewichtszustände ungestörter Systeme ist von *Ljapunow* gegeben worden. Auf sie werden wir im nächsten Band ausführlich eingehen. Bei bestimmten (Klassen von) Eingangssignalen und Systemen ist die Stabilität des ungestörten Systems nicht hinreichend, um die Beschränkung des Zustandsvektors zu gewährleisten. Beispielsweise wächst bei einem Dauersignal mit von Null verschiedenem Mittelwert am Eingang eines Integrators dessen Ausgangssignal unbeschränkt. Das gleiche gilt für ein ungedämpftes Schwingungssystem (z. B. ein reibungsfreies Pendel), das mit seiner Eigenfrequenz angestoßen wird. Deshalb soll die obige durch die folgende *Stabilitätsdefinition für gestörte Systeme* ergänzt werden:

D 2.27

Ein *gestörtes System* ist bezüglich einer gegebenen Menge $U = \{u(t)\}$ von Eingangssignalen genau dann *stabil*, wenn der Zustandsvektor für alle Signale aus dieser Menge beschränkt bleibt:

$$\|\mathbf{q}(t)\| \leq q_{\max} < \infty \quad (2.90)$$

für alle t und alle $u(t) \in U$.

Sinnvollerweise wird die Definition auf eine vereinbarte Klasse U von Eingangssignalen bezogen, da Signale, die in dem betrachteten System nicht auftreten, für die Stabilitätsuntersuchung uninteressant sind.

Häufig wählt man hierzu die Menge aller beschränkten Signale:

$$U = \{u(t) : ||u(t)|| \leq u_{\max} < \infty \text{ für alle } t\} \quad (2.91)$$

oder die Menge aller beschränkten stetigen Signale.

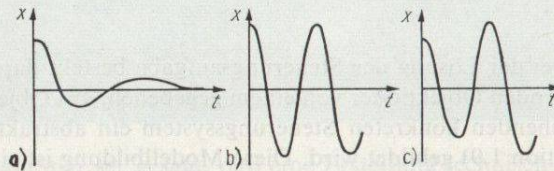


Bild 2.15. Freie Bewegung dreier Schwingungsglieder

- a) asymptotisch stabil
- b) schwach stabil
- c) instabil

Bild 2.15 zeigt den Verlauf des Ausgangssignals bei drei ungestörten Systemen 2. Ordnung (drei Schwingungsglieder) bei gegebenem Anfangszustand

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0. \quad (2.92)$$

Nehmen wir als Zustandsvariable

$$q_1 = x, q_2 = \dot{x}, \quad (2.93)$$

so ist daraus auch die freie Zustandsbewegung $q_{tr}(t)$ ablesbar.

Der Zustandsverlauf im Bild 2.15a stammt nach Definition 2.26 von einem asymptotisch stabilen Glied, der im Bild 2.15b entspricht einem stabilen, jedoch nicht asymptotisch stabilen Glied. Ein solches Glied wird auch *schwach stabil* genannt. Bild 2.15c zeigt die Bewegung eines instabilen Gliedes.

Würde auf das Glied von Bild 2.15b ein Eingangssignal mit genau der gleichen Frequenz gegeben, wie sie die freie Bewegung aufweist, so würde die Schwingungsamplitude unbeschränkt wachsen. Für Störklassen, die diese Schwingung enthalten, erweist sich also das gestörte Glied nach Definition 2.27 als instabil.

3. Kybernetische Modellbildung, Kennfunktionen des statischen und dynamischen Übertragungsverhaltens

Ein erster wesentlicher Schritt bei der Lösung der Steuerungsaufgabe besteht darin, daß von dem konkreten zu steuernden Objekt oder von einem gegebenen, aus Objekt (Strecke) und Einrichtung bestehenden konkreten Steuerungssystem ein abstraktes kybernetisches Modell (s. Definition 1.9) gebildet wird. Diese Modellbildung ist eine der Grundaufgaben und ein Charakteristikum der Kybernetik. Im vorliegenden Abschnitt wollen wir einen Überblick über die Voraussetzungen und wesentlichen Schritte bei der Bildung eines kybernetischen Modells gewinnen. Hierbei wollen wir einige für die kybernetische Beschreibung eines Systems wichtige Kenngrößen und Kennfunktionen kennenlernen.

Unseren Ausgang wollen wir von technischen Automatisierungsvorhaben nehmen. Bei diesen wird aus der vom Auftraggeber erstellten *wissenschaftlich-technischen Gesamtkonzeption* vom Projektanten das *technologische Schema* abgeleitet. Dieses umfaßt das *Anlagenschema* und das *Meß-Steuer-Regel-Schema (MSR-Schema)*. Das letztere basiert auf der in der Gesamtzielstellung enthaltenen Automatisierungskonzeption.

Auf Grund des MSR-Schemas wird vom Projektanten die MSR-Instrumentierung projektiert, die im *Baugliedplan* ihren Niederschlag findet. Diese Projektierung schließt viele gerätetechnische und technologische Probleme ein, deren Untersuchung nicht zur Zielstellung dieser Arbeit gehört. Eine sachgerechte Projektierung erfordert jedoch auch eine kybernetische Durchdringung des Problems, die erst in den nächsten Abschnitten erarbeitet werden soll. Wir wollen deshalb den Baugliedplan zunächst als gegeben ansehen und im Abschn. 3.1. nur die für das MSR-Schema und den Baugliedplan übliche Symbolik vorstellen.

Im Abschn. 3.2. wird aus dem Baugliedplan als erste Stufe der Modellbildung das *Wirkungsschema (Blockschaltbild)* erstellt. Mit Hilfe der in den Abschnitten 3.3. und 3.4. bereitgestellten *Kenngrößen und Kennfunktionen für das statische und dynamische Übertragungsverhalten* wird dann im Abschn. 3.5. mit der Aufstellung des *Signalflußplans* die formale Beschreibung der Modellbildung abgeschlossen. Die eigentliche – experimentelle wie theoretische – Gewinnung der für die Modellbildung benötigten Kennfunktionen wird später im Rahmen der Identifikation erfolgen.

3.1. Technologisches Schema, Baugliedplan

3.1.1. Technologisches Schema, MSR-Schema

Ein automatisierter Produktionsprozeß der Energie-, Verfahrens- oder Fertigungstechnik besteht aus der eigentlichen *technologischen Anlage* (z. B. Dampferzeuger, chemischer Reaktor, Taktstraße für Fertigung elektrischer Widerstände) und der

Meß-, Steuer- und Regelausrüstung (MSR-Ausrüstung), die zur Automatisierung der Anlagen benötigt wird. Die Forderungen hinsichtlich der Anzeige, Registrierung, Regelung usw. bestimmter Größen einer Anlage werden vom Hersteller der Anlage (Wärmetechniker, chemischer Verfahrenstechniker, Fertigungstechniker) zusammen mit dem künftigen Betreiber und dem Automatisierungstechniker in dem *MSR-Schema* niedergelegt.

Das *MSR-Schema* ist die schematische Darstellung der für die Automatisierung einer gegebenen Anlage geforderten MSR-Funktionen. Es wird in die schematische Darstellung der Anlage, das *Anlagenschema*, eingetragen und bildet mit diesem zusammen das *technologische Schema*.

D 3.1

Schon hier sei gesagt, daß eine Erstellung technisch-ökonomisch günstiger Produktionsprozesse eine möglichst frühzeitige und intensive kollektive Zusammenarbeit von Technologen und Automatisierungstechnikern erfordert, da einerseits die Konstruktion der Anlage deren Automatisierbarkeit wesentlich bestimmt und andererseits die Automatisierung eine Änderung und Verbesserung der Prozeßtechnologie erlaubt. Als einfaches Beispiel betrachten wir als Ausschnitt aus einer verfahrenstechnischen Produktionsanlage einen Teil einer Ofenregelung (Bild 3.1).

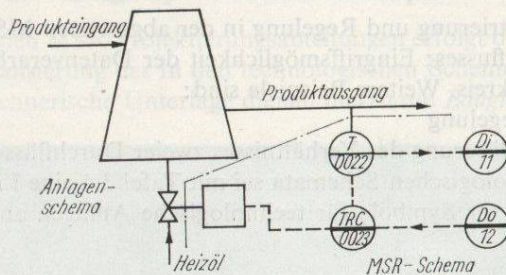


Bild 3.1. Technologisches Schema einer Ofenregelung

Zum Verständnis sei ein kurzer Auszug aus TGL 14 091, Blatt 1 – MSR-Technik, Symbole und Kennzeichen, Darstellung in technologischen Schemata wiedergegeben (Tafeln 3.1 bis 3.3).

Außerdem sind alle MSR-Stellen vierstellig durchzunummerieren. Für die dargestellte Ofenregelung wird also gefordert: Messung und Umformung der Temperatur des Ausgangsprodukts vor Ort; Weiterleitung des umgeformten Signals zur Daten-

Tafel 3.1. Grundsymbole für MSR-Schemata

	MSR-Stelle		Meßwertumformung
	MSR-Stelle mit Fernübertragung		Stellantrieb
	MSR-Stelle mit Zusatzeinrichtung		Signalübertragung mit Angabe der Wirkungsrichtung

Tafel 3.2. Kennzeichnungen von Prozeßgrößen in MSR-Schemata

Temperatur (temperature)	<i>T</i>	Gewicht (weight)	<i>W</i>
Durchfluß (flow)	<i>F</i>	Bewegung, Dicke	<i>U</i>
Füllstand (level)	<i>L</i>	andere Prozeßgrößen	<i>X</i>
Druck (pressure)	<i>P</i>	Zusatzbuchstaben	
Qualität (quality)	<i>Q</i>	Verhalten (ratio)	<i>r</i>
Geschwindigkeit (speed)	<i>S</i>	Differenz (difference)	<i>d</i>

Tafel 3.3. Kennzeichnung der Funktion von MSR-Stellen

<i>Im Grundkreis</i>			
Anzeige (indication)	<i>I</i>	Steuerung, Regelung (control)	<i>C</i>
Registrierung (record)	<i>R</i>	Grenzwertsignalisierung (alarm)	<i>A</i>
Zählung (count)	<i>S</i>	Noteingriff (emergency)	<i>E</i>
<i>Im Zusatzkreis</i>			
Handsteuerung (Handeingriff)		Datenverarbeitung	
(handoperation)	<i>H</i>	Eingangsseite (input)	<i>Di</i>
Zeitplan als Führungsgröße	<i>Time</i>	Datenverarbeitung	
		Ausgangsseite (output)	<i>Do</i>

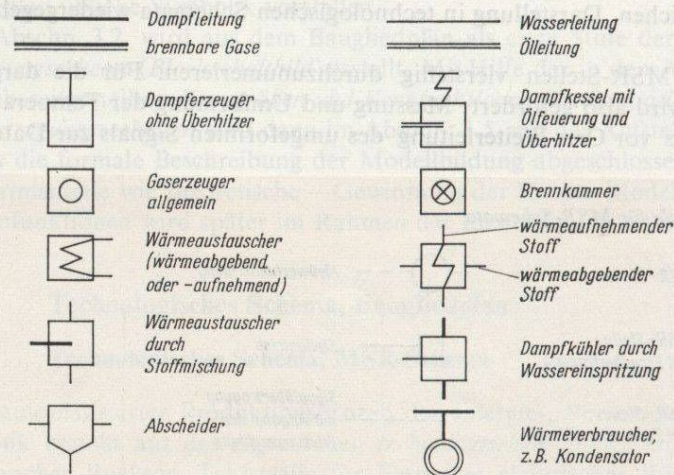
verarbeitungsanlage sowie zur Registrierung und Regelung in der abgesetzten MSR-Warte; Verstellung des Heizöldurchflusses; Eingriffsmöglichkeit der Datenverarbeitungsanlage in den Temperaturregelkreis. Weitere Beispiele sind:

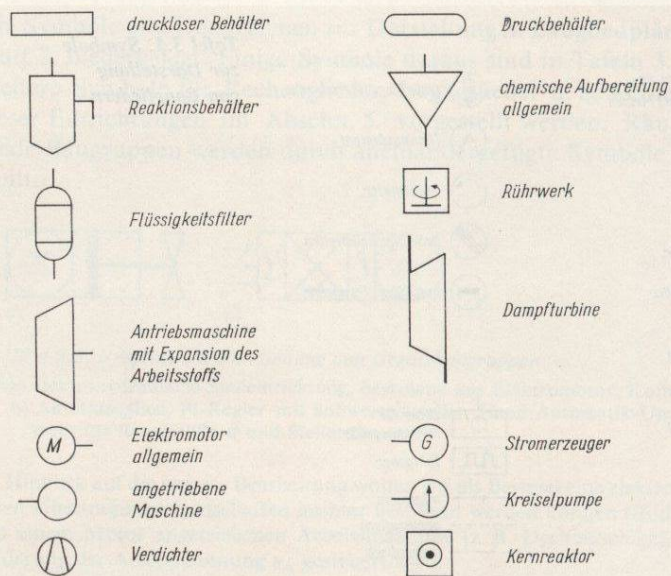
$P_d IC$ Differenzdruckanzeige und -regelung

$F_r CA$ Regelung und Grenzwertsignalisierung des Verhältnisses zweier Durchflüsse.

Zum besseren Verständnis der technologischen Schemata sei mit Tafel 3.4 eine Liste wichtiger in diesen Schemata benutzter Symbole für technologische Anlagen angefügt.

Tafel 3.4. Symbole technologischer Anlagen



Tafel 3.4
(Fortsetzung)

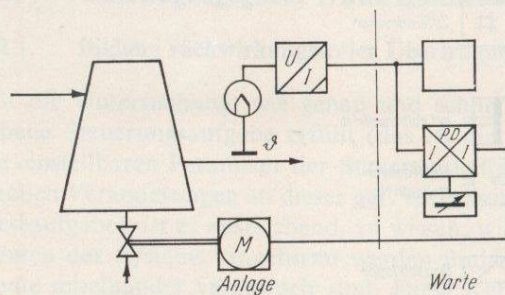
3.1.2. Baugliedplan, Übersichtsschaltplan

In den MSR-Projektierungsabteilungen erfolgt die Vorbereitung für die gerätemäßige Realisierung der in den technologischen Schemata enthaltenen MSR-Aufgaben. Als zeichnerische Unterlage dienen hierzu die *Baugliedpläne*:

Der *Baugliedplan* ist die symbolische Darstellung aller Geräte und Anlagenteile (aller Bauglieder) der gesamten technologischen Anlage oder ihrer Teile. In der Elektrotechnik ist für derartige Pläne elektrischer und elektronischer Schaltungen und Anlagen der Begriff *Übersichtsschaltplan* gebräuchlich.

D 3.2

Gewöhnlich werden Baugliedpläne für die einzelnen Regelkreise gesondert gezeichnet. Ein solcher Baugliedplan hat den Charakter einer Ausführungszeichnung, d. h., er dient als eine Grundlage der Montage und der Inbetriebsetzung.

Bild 3.2
Baugliedplan einer Ofenregelung

Den Baugliedplan für die im Bild 3.1 dargestellte Ofenregelung (ohne Datenverarbeitung) zeigt Bild 3.2.

Tafel 3.5. Symbole zur Darstellung von Baugliedern

a) Meßfühler

 Meßfühler allgemein, das T-Ende kennzeichnet Meßort

 Membranmanometer

 Füllstandsmessung mit Schwinger

 Durchflußmessung mit Blende oder Düse

 fotoelektrischer Geber

 Meßeinrichtung für radioaktive Strahlen

 Widerstandsthermometer

 Thermoelement

 Tachometer

 Dehnungsmeßstreifen

 induktiver Ferngeber

b) Geber für Führungsgrößen

 Handsteleinrichtung

 Zeitplangeber

 Geber für Führungsgröße

 Taktgeber

c) Übertragungsleitungen

 elektrisch

 mechanisch

 allgemein

 pneumatisch

 hydraulisch

d) Schalteinrichtungen

 Steuerschaltungen allgemein

 Hand-Automatik-Umschalter

e) Wandler; Meßwertumformer

 allgemein

 elektrisch-pneumatischer Meßwertumformer mit normierten Ein- und Ausgangssignalen

f) Regler

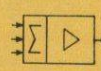
 allgemein
1 Eingangsfeld
2 Ausgangsfeld

 elektrischer PI-Regler mit Strömeingang und -ausgang mit eingebautem Sollwertgeber

g) Verstärker

 allgemein

 Verstärker mit Zweipunktverhalten (Schaltverstärker)

 Verstärker mit vorgeschaltetem Summationsglied

h) Anzeige- und Registrierinstrumente

 Anzeigeinstrument

 Registrierinstrument

 Anzeige- und Registrierinstrument

 Zifferndrucker

i) Stellantrieb

 allgemein

 mit Membranantrieb

 mit Kolbenantrieb

 Elektromotor-stellantrieb

k) Stellglieder

 Stellventil

 Drosselklappe

l) Grenzwertfassung

 oberer Grenzwert (schließt bei Erreichen)

 unterer Grenzwert (öffnet bei Erreichen)

Die Symbole und Kennzeichen zur Darstellung in Baugliedplänen sind in TGL 14091, Blatt 2, niedergelegt. Einige Symbole daraus sind in Tafeln 3.5a bis I aufgezeichnet. Weitere Symbole für Rechenglieder, Logikglieder u. a. werden bei der Behandlung dieser Einrichtungen im Abschn. 5. vorgestellt werden. Räumlich zusammengehörende Baugruppen werden durch aneinandergefügte Symbole wie im Bild 3.3 dargestellt.

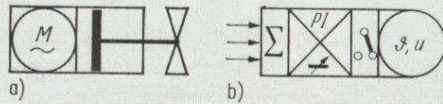


Bild 3.3. Symbolische Darstellung von Gerätebaugruppen

- a) elektrohydraulische Stelleinrichtung, bestehend aus Elektromotor, Kolbenantrieb und Stellventil
b) Additions- und Regelglied, bestehend aus Summenknoten, PI-Regler mit Sollwert-einsteller, Hand-Automatik-Umschalter und Anzeigeinstrument für Regelgröße θ und Stellgröße u

Im Hinblick auf die weitere Bearbeitung wollen wir als Beispiel eine elektrotechnische Anlage wählen, deren Übertragungseigenschaften leichter bestimmt werden können (Bild 3.4). Sie besteht aus einer von einem Motor angetriebenen Arbeitsmaschine (z. B. Drehmaschine), deren Drehzahl n durch Änderung der Ankerspannung u_A gesteuert wird.

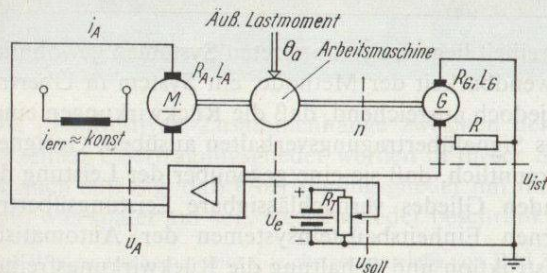


Bild 3.4. Baugliedplan (Übersichtsschaltplan) eines geregelten Gleichstromantriebs

Diese Drehzahl wird von einem Tachogenerator gemessen, der eine dem Istwert der Drehzahl proportionale Spannung u_{ist} erzeugt. Diese wird mit einer der gewünschten Solldrehzahl äquivalenten Spannung u_{soll} verglichen. Die Differenzspannung $u_e = u_{ist} - u_{soll}$ dient nach Verstärkung zur Erhöhung bzw. Verminderung der Ankerspannung u_A , wodurch die Ist-drehzahl der Solldrehzahl angeglichen wird. (Das ist eine Regelung, die im Abschn. 4.2. genauer betrachtet werden wird.)

3.2. Übertragungsglied, Wirkungsschema

3.2.1. Bildung rückwirkungsfreier Übertragungsglieder

Für die Untersuchung, wie genau und schnell ein kybernetisches System eine gegebene Steuerungsaufgabe erfüllt (das ist die Analyseaufgabe) bzw. welche Werte die einstellbaren Parameter der Steuereinrichtung erhalten sollen und welche strukturellen Veränderungen an dieser ggf. vorgenommen werden müssen (das ist die Syntheseaufgabe), ist es ausreichend, zu wissen, wie die Signale von den einzelnen Elementen des Systems umgeformt werden und zu welcher Systemstruktur diese Elemente miteinander verkoppelt sind. Diese Kenntnis kann durch unmittelbare Aufstellung der Systemgleichungen für das Gesamtsystem gewonnen werden. Das geschieht jedoch in der Regel leichter und übersichtlicher, wenn zuvor das gesamte System in einzelne Glieder aufgeteilt und für diese die Berechnung einzeln durchgeführt wird.

Die im Teil II, Abschn. 12, eingeführten Verfahren zur Berechnung der Signalübertragungen bei Verknüpfungen von Gliedern erfordern allerdings, daß diese Glieder rückwirkungsfrei sind:

D 3.3

Ein Glied heißt *rückwirkungsfrei*, wenn

- a) die Ausgangssignale keine Wirkung auf die Eingangssignale (dieses unverkoppelten Gliedes) ausüben
- b) die Ausgangssignale durch die Eingänge der angekoppelten Glieder nicht beeinflußt werden. Ein solches rückwirkungsfreies Glied wird *Übertragungsglied* genannt und durch das aus Bild 3.5 ersichtliche Blocksymbol mit gerichteten Signalflußlinien für die Ein- und Ausgangssignale dargestellt.



Bild 3.5. Symbol eines allgemeinen rückwirkungsfreien Übertragungsglieds bei Darstellung in Wirkungsschemata (in Blockschaltbildern)

Eine ideale völlige Rückwirkungsfreiheit liegt in den konkreten Systemen gewöhnlich nicht vor. Für die praktische Anwendbarkeit der Methode, ein System in Übertragungsglieder zu untergliedern, ist jedoch ausreichend, daß die Rückwirkungen einen vernachlässigbaren Einfluß auf das Signalübertragungsverhalten ausüben. Geeignete Trennstellen sind i. allg. daran erkenntlich, daß sie eine gegenüber der Leistung des vorausgehenden oder nachfolgenden Gliedes vernachlässigbare Leistungsübertragung aufweisen. In den modernen Einheitsbausteinsystemen der Automatisierungstechnik ist durch Konstruktion und Schaltung die Rückwirkungsfreiheit für die einzelnen Funktionseinheiten und Bauglieder gewährleistet.

Bei den zu steuernden Objekten (den Strecken) müssen zuweilen mehrere Bauglieder zu einem Übertragungsglied zusammengefaßt werden. Sind die Gleichungen für alle in einem (Bau-) Glied ablaufenden (physikalischen) Elementarprozesse bekannt, so kann dieses Glied in eine Menge rückwirkungsfreier Elemente aufgespalten werden, die dann gewöhnlich nicht mehr bestimmten physikalischen, biologischen und anderen Elementen, sondern bestimmten mathematischen elementaren Operationen entsprechen. In linearen Systemen sind das insbesondere Konstantmultiplikation, Addition und Integration. Diese Methodik wird später in einem weiteren Band ausführlicher dargestellt werden. Zur Berechnung der Signalübertragungen bei Zusammenschaltung nichtrückwirkungsfreier Glieder dienen unter anderem die Methoden der Vierpoltheorie.

Als *Beispiel* wollen wir den im Bild 3.4 dargestellten Gleichstromantrieb in Übertragungsglieder aufspalten und hierzu geeignete Trennstellen suchen. Als solche erweisen sich die eingezeichneten Schnittstellen vor und nach dem Tachogenerator mit konstantem Belastungswiderstand R . Die Drehzahl n von Motor und Arbeitsmaschine ruft eine ihrem Istwert proportionale Spannung u_{ist} hervor, während in umgekehrter Richtung eine Einwirkung praktisch nicht besteht. Außerdem ist die Drehträgheit des als Meßglied dienenden Tachogenerators gegenüber den Trägheitsmomenten von Motor und Arbeitsmaschine so klein, daß sie die Drehzahl praktisch nicht beeinflußt. Ebenso besteht keine Rückwirkung von der dem Tachogenerator folgenden elektrischen Vergleichsschaltung, da die aus hochohmigem Verstärkereingang und in Reihe geschaltetem Sollwertgeber bestehende

Belastung hochohmig gegenüber dem Ausgangswiderstand des Generatorglieds ist, der aus der Parallelschaltung von R_G und R besteht.

Zwischen Motor und Arbeitsmaschine kann dagegen keine Trennstelle gelegt werden, da die Drehzahl n , die für beide die gleiche ist, maßgebend von dem Moment der (belasteten) Arbeitsmaschine bestimmt bzw. mitbestimmt wird. Zur Vereinfachung ist im Bild 3.4 angenommen worden, daß der Ankerwiderstand des Motors R_A groß gegenüber dem Ausgangswiderstand des Verstärkers ist, weshalb eine Trennstelle mit u_A als Ausgangssignal des Verstärkers und Eingangssignal des Motors eingeführt werden kann. Häufig ist das nicht zutreffend. Dann muß der Ankerkreis des Motors mit dem Verstärker zu einem Übertragungsglied vereint und der Ankerstrom als dessen Ausgangssignal gewählt werden.

3.2.2. Wirkungsschema (Blockschaltbild)

Das erstrebte kybernetische Modell eines konkreten Systems wird nun gewöhnlich in zwei Schritten gewonnen. Im ersten Schritt wird dabei ein qualitatives Modell gebildet, das die Übertragungsglieder und deren Anordnung zur Struktur des Systems zeigt. Es wird *Wirkungsschema* oder *Blockschaltbild* genannt.

Das *Wirkungsschema* (*Blockschaltbild*) ist die schematische (qualitative) Darstellung der Übertragungsglieder eines Systems und ihrer Verkopplungen über die Ein- und Ausgangssignale, d. h. der Struktur des Systems. Die Übertragungsglieder werden dabei durch Blöcke symbolisiert.

D 3.4

Die quantitativen Zusammenhänge zwischen den Aus- und Eingangssignalen der einzelnen Übertragungsglieder werden in dieser Stufe also noch nicht vermerkt. Es ist auch zulässig, daß Übertragungsglieder mit mehreren Eingängen gezeichnet werden, was später auf sog. Rechenglieder beschränkt bleibt (s. Abschn. 5).

Das Wirkungsschema eines Gleichstromantriebs von Bild 3.4 zeigt das Bild 3.6.

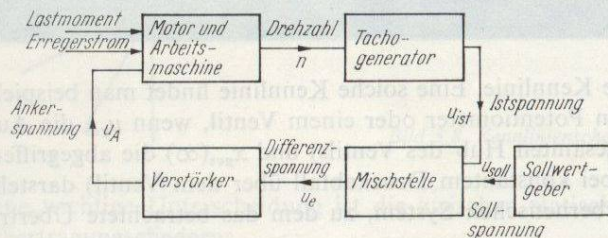


Bild 3.6. Wirkungsschema (*Blockschaltbild*) des geregelten Gleichstromantriebs von Bild 3.4

Unsere nächste Aufgabe besteht darin, das Signalübertragungsverhalten der einzelnen Übertragungsglieder *quantitativ* zu fassen und geeignet darzustellen.

3.3. Kennfunktionen des statischen Übertragungsverhaltens

3.3.1. Kennlinie, Abweichungen vom Arbeitspunkt, statisch lineare Übertragungsglieder

Die erforderliche quantitative Beschreibung des Übertragungsverhaltens soll getrennt für das statische und das dynamische Verhalten erfolgen. Entsprechend Defi-

nition 2.22 und Gl. (2.80) soll unter dem *statischen Übertragungsverhalten* eines Gliedes mit dem Ausgangssignal x und den (zur Aufnahme eines Meßpunktes konstant gehaltenen) Eingangssignalen $u_1, \dots, u_m$ das durch die

statische Übertragungsgleichung

$$x_G = x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = f(u_1, \dots, u_m) \quad (3.1)$$

beschriebene Übertragungsverhalten nach Abklingen aller Bewegungsvorgänge verstanden werden, falls $x(\infty)$ existiert.

Bemerkung. $x(\infty)$ existiert beispielsweise nicht bei einem Integrator. Benutzt man jedoch die Geschwindigkeit der Ausgangsgröße als Ausgangssignal, so erhält man eine neue statische Übertragungsgleichung mit existierendem $x(\infty)$.

Die grafische Darstellung des statischen Übertragungsverhaltens erfolgt durch die *statische Kennlinie* bzw. das *statische Kennlinienfeld*:

D 3.5

Die *statische Kennlinie* eines Übertragungsglieds mit einem Ausgangs- und einem Eingangssignal ist die grafische Darstellung der Abhängigkeit des Ausgangs vom Eingangssignal nach Abklingen der Bewegungsvorgänge.

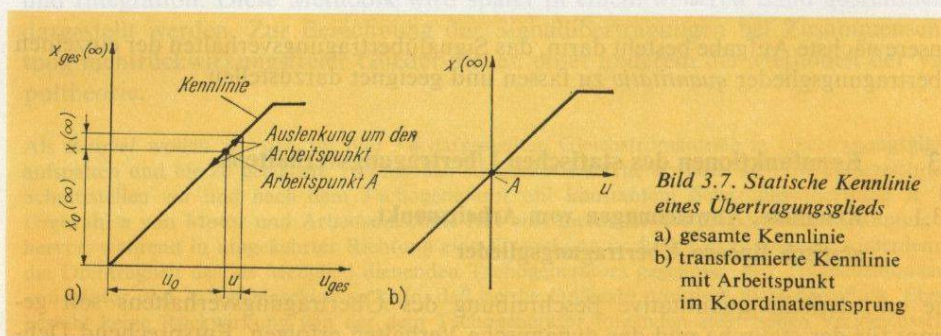
Die Darstellung des statischen Übertragungsverhaltens von Übertragungsgliedern mit mehreren Eingangssignalen $u_1, \dots, u_m$ erfolgt durch *statische Kennlinienfelder* mit den *Kennlinienscharen*

$$x(\infty) = f_i(u_i) \quad (3.2)$$

$u_v = \text{konst}; v = 1, \dots, m, v \neq i$.

Die konstant gehaltenen anderen Eingangssignale u_v werden als Kurvenparameter eingetragen.

Bild 3.7a zeigt eine statische Kennlinie. Eine solche Kennlinie findet man beispielsweise bei einem unbelasteten Potentiometer oder einem Ventil, wenn u_{ges} die Auslenkung des Abgriffs (den gesamten Hub des Ventils) und $x_{\text{ges}}(\infty)$ die abgegriffene Spannung (den Durchfluß bei konstantem Druckabfall über dem Ventil) darstellt. Tatsächlich wird in dem kybernetischen System, zu dem das betrachtete Übertra-



gungsglied gehört, bei Fehlen von Störungen ein bestimmter Ruhezustand, der *Arbeitspunkt A*, sich einstellen oder eingestellt werden. Zu diesem gehört eine bestimmte Auslenkung u_0 des Potentiometers oder Ventils und eine dadurch bewirkte Spannung bzw. ein Durchfluß $x_0(\infty)$.

Bei der Untersuchung kybernetischer Systeme interessiert im wesentlichen, wie eine durch Störungen verursachte Abweichung vom gegebenen Arbeitspunkt beseitigt wird oder wie der Übergang von einem vorhandenen zu einem gewünschten neuen Arbeitspunkt abläuft. Es ist deshalb naheliegend und vor allem für die Durchführung der Berechnungen sehr vorteilhaft, den Arbeitspunkt *A* in den Ursprung des Koordinatensystems zu verlegen (Bild 3.7b) und als Signale die Abweichungen u bzw. x vom Arbeitspunkt einzuführen. Wir wollen deshalb vereinbaren:

Die mit kleinen Buchstaben bezeichneten Signale $x_i(t)$, $u_i(t)$, $z_i(t)$ usw. stellen Abweichungen vom Arbeitspunkt dar.

D 3.6

Ausnahmen von dieser Vereinbarung werden wir stets ausdrücklich vermerken.

Als Beispiel einer Kennlinienschar ist im Bild 3.8 die eines Multiplikationsglieds mit der statischen Übertragungsgleichung

$$x(\infty) = ku_1u_2 \quad (3.3)$$

angegeben. In gleicher Weise kann das Kennlinienfeld auch für die Abhängigkeit von u_2 mit u_1 als Parameter gezeichnet werden.

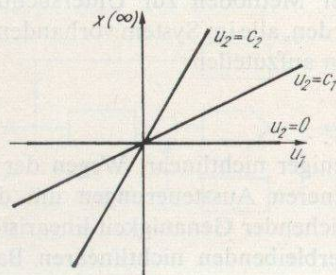


Bild 3.8. Kennlinienschar eines Multiplikationsglieds

Eine wichtige Unterscheidung ist die zwischen statisch linearen und nichtlinearen Übertragungsgliedern:

Ein Übertragungsglied heißt genau dann *statisch linear*, wenn seine statische Übertragungsgleichung linear ist, andernfalls heißt es *statisch nichtlinear*.

D 3.7

Wegen der für Linearität zu fordernden Gültigkeit des Superpositionsgesetzes (Definition 2.18) hat die statische Übertragungsgleichung (3.1) eines statisch linearen Übertragungsglieds genau die Form

$$x(\infty) = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i. \quad (3.4)$$

(Wegen der Vereinbarung gemäß Definition 3.6 entfällt das absolute Glied.) Daraus folgt:

S 3.1

Die *Kennlinie* eines statisch linearen Übertragungsglieds mit einem Eingangssignal ist genau eine Gerade; das *Kennlinienfeld* eines statisch linearen Übertragungsglieds mit mehreren Eingangssignalen ist genau eine Schar paralleler Geraden.

Die Linearität der Kennlinie ist somit eine notwendige und hinreichende Voraussetzung für die statische Linearität eines Übertragungsglieds; für die (statische und dynamische) Linearität insgesamt ist sie zwar notwendig, jedoch nicht hinreichend.

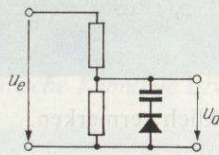


Bild 3.9. Nichtlineares Glied mit linearer Kennlinie

Das Glied von Bild 3.9 beispielsweise hat eine lineare Kennlinie, da die Diode im statischen Zustand durch den Kondensator abgeblockt ist. Das dynamische Verhalten ist jedoch nichtlinear.

3.3.2. Bildung trägheitsfreier nichtlinearer Übertragungsglieder

Zur Vereinfachung der Darstellungsweisen wie der Methoden zur Untersuchung kybernetischer Systeme soll im folgenden erstrebt werden, alle im System vorhandenen Übertragungsglieder in die beiden folgenden Klassen aufzuteilen:

- a) *lineare träge Übertragungsglieder*
- b) *nichtlineare trägheitsfreie Übertragungsglieder.*

Tatsächlich sind alle realen Objekte mehr oder weniger nichtlinear. Wegen der in kybernetischen Systemen häufig vorliegenden kleineren Aussteuerungen um den Arbeitspunkt können viele Glieder jedoch mit ausreichender Genauigkeit linearisiert werden (s. Abschn. 3.3.3.). Tatsächlich sind die verbleibenden nichtlinearen Bauglieder trägheitsbehaftet. Wir wollen jedoch annehmen, daß entweder

- a) die Trägheiten der nichtlinearen Glieder vernachlässigbar klein seien oder
- b) die Bauglieder in trägheitsfreie nichtlineare Übertragungsglieder und mit diesen rückwirkungsfrei verkoppelte lineare träge Glieder aufspaltbar seien.

Bemerkung. Der letztere Weg wird oft zur näherungsweisen Beschreibung komplizierter Glieder beschritten. Er ist gangbar, wenn man von den die Elementarprozesse eines Gliedes beschreibenden mathematischen Gleichungen ausgeht und die verschiedenen mathematischen Grundoperationen als Übertragungsglieder interpretiert.

Aus den Ausführungen des Abschn. 3.3.1. folgt:

S 3.2

Ein trägheitsfreies nichtlineares Glied wird durch seine statische Kennlinie bzw. sein statisches Kennlinienfeld vollständig beschrieben.

Nichtlineare Übertragungsglieder können nicht nur besondere Erscheinungen im Verhalten der Systeme hervorrufen, zu denen sie gehören, sie bedingen auch gegenüber linearen Systemen andere, und zwar kompliziertere Untersuchungsmethoden. Deshalb ist es wünschenswert, sie in dem zu entwickelnden quantitativen kybernetischen Modell deutlich von den linearen Gliedern abzusetzen. Das geschieht durch die im Bild 3.10 angegebenen Symbole. Da die bei linearen Gliedern vorliegende gerade Kennlinie bis auf einen Übertragungsfaktor K keine Informationen enthält, wird der Platz im Symbol zur Kennzeichnung des dynamischen Verhaltens frei gehalten (s. Abschn. 3.4.).



Bild 3.10. Symbole für Übertragungsglieder in Signalflußplänen

- a) lineares trägheitsbehaftetes Übertragungsglied mit noch einzutragendem dynamischem Übertragungsverhalten
- b) nichtlineares trägheitsfreies Übertragungsglied mit eingezeichneter Kennlinie

Wie später zu zeigen sein wird, läßt sich ein nichtlineares dynamisches Glied mit genau einer isolierbaren nichtlinearen statischen Kennlinie im allgemeinsten Fall durch die aus Bild 3.11 ersichtliche Verkopplung von Übertragungsgliedern darstellen. Gewöhnlich entfällt ein (größerer) Teil der dort angegebenen linearen Glieder.

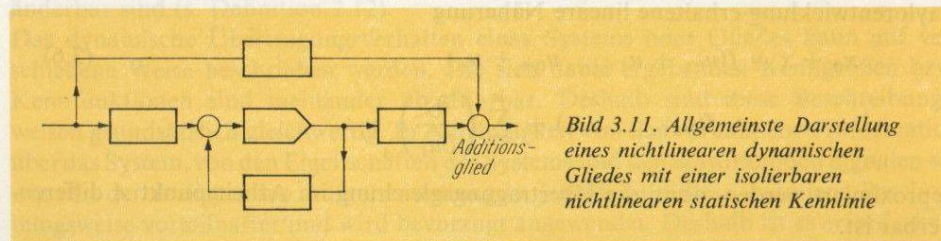


Bild 3.11. Allgemeinste Darstellung eines nichtlinearen dynamischen Gliedes mit einer isolierbaren nichtlinearen statischen Kennlinie

3.3.3. Linearisierung nichtlinearer trägheitsfreier Übertragungsglieder

Für die praktische Anwendung ist es ausreichend, daß die für ein lineares Übertragungsglied geforderten Linearitätsbedingungen im Aussteuerbereich um den Arbeitspunkt hinreichend genau erfüllt sind. Da ein trägheitsfreies Glied durch seine Kennlinie vollständig beschrieben wird, ist zu prüfen, ob die Kennlinie im Aussteuerbereich durch eine lineare Näherung ersetzt werden kann. Eine begründete Entscheidung dieser Frage kann nur im Zusammenhang mit der gestellten Steuerungsaufgabe und der für diese geforderten Genauigkeit erfolgen. Dazu dienen u. a. die Methoden der *Empfindlichkeitsanalyse*.

Die Behandlung nichtlinearer Systeme ist bedeutend aufwendiger und schwieriger als die der linearen. Die lineare Näherung bietet außerdem in vielen Fällen eine qualitative Übersicht über das zu erwartende Verhalten. Man ist deshalb bestrebt, die Systemuntersuchungen mit einer linearen Näherung zu beginnen und in den Fällen,

in denen größere Fehler zu erwarten sind, nachträglich nichtlineare Korrekturen anzubringen. In solchen Fällen jedoch, in denen die Nichtlinearität die Wirkungsweise des Systems prinzipiell bestimmt, wie das z. B. bei einem Zweipunktregler (Ein/Aus-Schalter) zutrifft, ist eine Linearisierung fehl am Platz.

Die lineare Näherung kann grafisch und auch analytisch erhalten werden. *Grafisch* erfolgt sie durch Ersatz der gekrümmten Kennlinie durch eine Gerade. Je nach Größe der zu erwartenden Aussteuerungen kann sich dabei eine Tangente im Arbeitspunkt oder eine geeignet gewählte Sekante als günstiger erweisen (Bild 3.12).

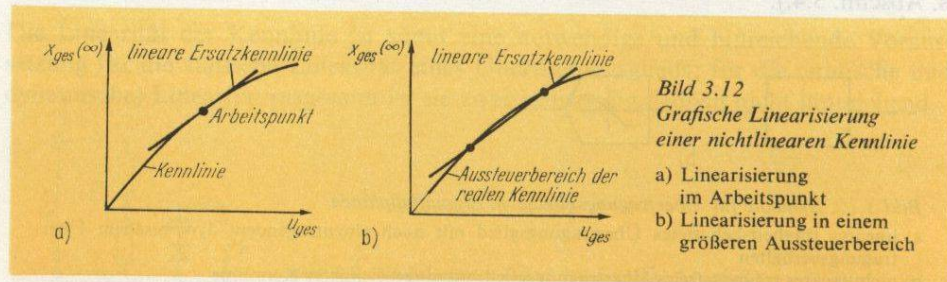


Bild 3.12
Grafische Linearisierung
einer nichtlinearen Kennlinie
a) Linearisierung
im Arbeitspunkt
b) Linearisierung in einem
größeren Aussteuerbereich

Bei analytisch vorliegender statischer Übertragungsgleichung kann die Linearisierung auch *analytisch* durchgeführt werden. Ist das Ausgangssignal eines statischen Übertragungsglieds mit m Eingangssignalen im Arbeitspunkt A

$$x_0 = f(u_{01}, u_{02}, \dots, u_{0m}), \quad (3.5)$$

so kann es für kleine Aussteuerungen u_i um diesen Arbeitspunkt durch die mittels Taylorentwicklung erhaltene lineare Näherung

$$\begin{aligned} x_0 + x &= f(u_{01} + u_1, \dots, u_{0m} + u_m) \\ &\approx f(u_{01}, \dots, u_{0m}) + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial u_i} \right)_A u_i \end{aligned} \quad (3.6)$$

approximiert werden, wenn die Übertragungsgleichung im Arbeitspunkt A differenzierbar ist.

Für die uns ausschließlich interessierende Abweichung x vom Arbeitspunkt folgt aus den Gln. (3.6), (3.5) die

lineare Näherung

$$x \approx \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial u_i} \right)_A u_i. \quad (3.7)$$

Für das *Beispiel* eines Multiplizierglieds mit der Gleichung

$$x_0 + x = k(u_{01} + u_1)(u_{02} + u_2) \quad (3.8)$$

erhält man für kleine Aussteuerungen um den Arbeitspunkt $(x_0; u_{01}; u_{02})$

$$x \approx k_1 u_1 + k_2 u_2 \quad (3.9)$$

mit $k_1 = k u_{02}, k_2 = k u_{01}.$

Hierbei ist zu beachten, daß u_1, u_2 kleine Größen gegenüber den im Arbeitspunkt vorliegenden konstanten Größen u_{01}, u_{02} darstellen. Das lineare Ersatzbild des durch Gl. (3.8) beschriebenen Multiplikators ist somit das von Bild 3.13.

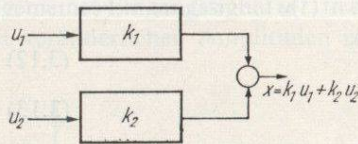


Bild 3.13. Lineares Ersatzbild eines Multiplikators für kleine Aussteuerungen um den Arbeitspunkt

Vermerkt sei, daß für größere Aussteuerungen noch andere Linearisierungsverfahren existieren. Für sinusförmiges Eingangssignal erhält man die beste Näherung durch die sog. *harmonische Linearisierung*.

3.4. Kennfunktionen des dynamischen Übertragungsverhaltens

Unter dynamischem Übertragungsverhalten wird nach den Definitionen 2.16 und 2.22 die Abhängigkeit des Systemausgangs von dessen Eingang während der Bewegung verstanden. Der Einfachheit halber wollen wir dabei zunächst annehmen, daß das betrachtete Übertragungsglied oder Übertragungssystem nur ein Eingangs- und ein Ausgangssignal hat und, wie im Abschn. 3.3.3. dargelegt, um den Arbeitspunkt linearisierbar sei bzw. daß die Nichtlinearität in Form eines trägheitsfreien nichtlinearen Gliedes abgespaltet werden kann. Außerdem beschränken wir uns hier auf analoge Übertragungsglieder, deren Eingangs-, Zustands- und Ausgangssignale stetig veränderbar sind (s. Definition 2.12).

Das dynamische Übertragungsverhalten eines Systems oder Gliedes kann auf verschiedene Weise beschrieben werden. Die sich dabei ergebenden Kenngrößen bzw. Kennfunktionen sind ineinander überführbar. Deshalb sind diese Beschreibungsweisen grundsätzlich gleichwertig. In Abhängigkeit von der vorhandenen Information über das System, von den Eigenschaften des Systems und den einwirkenden Signalen sowie von der vorliegenden Aufgabenstellung ist jedoch bald diese, bald jene Beschreibungsweise vorteilhafter und wird bevorzugt angewendet. Deshalb ist es erforderlich, die wichtigsten hier darzustellen.

3.4.1. Beschreibung durch Differentialgleichung

Für analoge Übertragungsglieder oder -systeme mit konzentrierten Parametern und einem Eingangssignal $u(t)$ und einem Ausgangssignal $x(t)$ kann das Übertragungsverhalten durch die folgende *skalare Differentialgleichung* beschrieben werden (nach Division durch den bei $x^{(n)}$ stehenden Koeffizienten):

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{x} + a_0x = b_m u^{(m)} + \dots + b_0 u. \quad (3.10)$$

Unter Einführung von geeignet gewählten Zustandsvariablen

$$q(t) = [q_1(t) \ q_2(t) \ \dots \ q_n(t)]^T, \quad (3.11)$$

die in den Abschnitten 7. und 13. näher erläutert werden, erhält man die den Gln. (2.31) entsprechenden *Systemgleichungen* (Vektordifferentialgleichung und algebraische Gleichung) für den eindimensionalen Fall:

$$\dot{q}(t) = Aq(t) + bu(t) \quad (3.12)$$

$$x(t) = c^T q(t) + du(t). \quad (3.13)$$

Hieraus ist ersichtlich, daß die Parameter

$$a_v; \quad v = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.14)$$

$$b_\mu; \quad \mu = 0, 1, \dots, m$$

bzw. die Systemmatrizen oder -vektoren

$$A, b, c^T, d \quad (3.15)$$

das Übertragungsverhalten vollständig charakterisieren. Die Parameter a_v, b_μ sind dabei den Systemmatrizen bei getroffener Wahl der Zustandsvariablen eindeutig zugeordnet.

3.4.2. Sprung- und Übergangfunktion

Die Übertragungseigenschaft eines linearen Gliedes kann durch seine Reaktion auf einen Sprung des Eingangssignals

$$u_f(t) = u_0 \sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ u_0 & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

gekennzeichnet werden. Hierbei ist $\sigma(t)$ die sog.

(Einheits-)Sprungfunktion (Bild 3.14):

$$\sigma(t) \triangleq \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

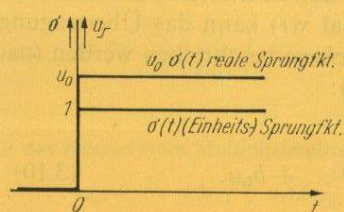


Bild 3.14. Reale und Einheitssprungfunktion

Durch die Sprungamplitude u_0 wird berücksichtigt, daß die sprungförmige Änderung des Eingangssignals je nach dessen physikalischer Qualität und der gewünschten

Aussteuerung eine bestimmte Dimension und einen Zahlenwert hat, z. B. 2 mA; 0,5 V; 0,1 kp/cm².

Die verallgemeinerbare Bedeutung der Sprungfunktion ist darin begründet, daß ein allgemeines Eingangssignal $u(t)$ in eine Folge von zeitlich versetzten Sprungfunktionen mit veränderlichen Amplituden zerlegt werden kann, wie das im Bild 3.15 gezeigt

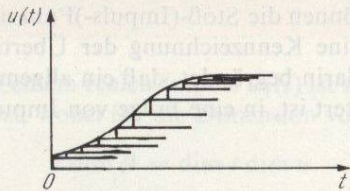


Bild 3.15. Zerlegung eines Signals in eine Folge von Sprungfunktionen

wird (s. Abschn. 8.). Wegen des in linearen Systemen gültigen Superpositionsgesetzes läßt sich das zugehörige Ausgangssignal durch Überlagerung der Reaktionen des Systems auf die einzelnen Sprungfunktionen zusammensetzen. Deshalb kann die Sprungantwort als eine ein lineares Übertragungsglied vollständig beschreibende Kennfunktion dienen. Mit der mit Gl. (2.70) eingeführten Bezeichnungsweise definieren wir

die *Sprungantwort* $x_f(t)$ eines linearen Übertragungsglieds:

$$x_f(t) \triangleq g * u_f(t) = g * u_0 \sigma(t) \quad (3.18)$$

und die *Übergangsfunktion* $h(t)$ eines linearen Übertragungsglieds:

$$h(t) \triangleq x_f(t)/u_0 = g * \sigma(t). \quad (3.19)$$

In Worten (Bild 3.16):

Die *Übergangsfunktion* $h(t)$ eines linearen Übertragungsglieds ist dessen durch Quotientenbildung auf die Sprunghöhe des Eingangssignals bezogene Sprungantwort.

D 3.8

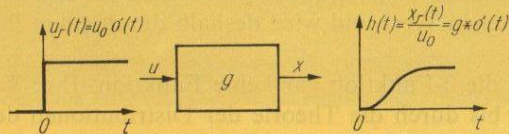


Bild 3.16
Zur Definition der Übergangsfunktion

Wegen der mit Bild 3.15 erläuterten allgemeinen Bedeutung des Sprungsignals ist die Übergangsfunktion eine dessen Signalübertragungsverhalten kennzeichnende *Eigenschaft eines linearen Übertragungsglieds*.

Die Übergangsfunktion kann leicht experimentell bestimmt werden. Wird für die weitere Behandlung ein analytischer Ausdruck benötigt, so muß die grafisch oder

numerisch vorliegende Funktion durch eine analytische approximiert werden. Darauf werden wir später bei der Behandlung der Kennwertermittlung (Identifikation) zurückkommen.

3.4.3. Stoß-(Impuls-)Funktion und Gewichtsfunktion

Ähnlich der Sprungfunktion und Sprungantwort können die Stoß-(Impuls-)Funktion und die zugehörige Stoßantwort für eine allgemeine Kennzeichnung der Übertragungseigenschaft linearer Glieder dienen. Das ist darin begründet, daß ein allgemeines Eingangssignal $u(t)$, wie das im Bild 3.17 erläutert ist, in eine Folge von Impulsfunktionen zerlegt werden kann.

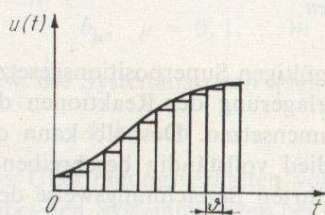


Bild 3.17. Zerlegung eines Signals in eine Folge von Impulsfunktionen

Offensichtlich müssen für eine gute Approximation die Breiten ϑ der im Bild 3.17 gezeichneten Pulse verschwindend klein werden. Wie im Abschn. 8. gezeigt, wird eine vorteilhafte mathematische Behandlung durch die Einführung der sog. Impulsfunktion $\delta(t)$ ermöglicht. Eine heuristische Interpretation dieser δ -Funktion bringt Bild 3.18.

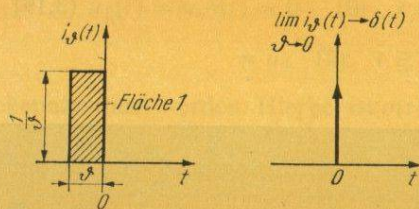


Bild 3.18. Heuristische Interpretation der δ -Funktion

Danach erhält man die δ -Funktion aus der Pulsfunktion $i_\vartheta(t)$, indem man in letzterer unter Beibehaltung der Fläche 1 die Pulsbreite gegen Null gehen läßt. Sie hat demzufolge im Punkte $t = 0$ keinen endlichen Wert und wird deshalb durch einen Pfeil symbolisiert.

Im Sinn der klassischen Analysis ist die δ -Funktion gar keine Funktion. Ihre Verwendung löste manche Dispute aus, bis durch die Theorie der Distributionen derartige verallgemeinerte Funktionen wie die δ -Funktion und deren Ableitungen, die als Distributionen bezeichnet werden, einer strengen Behandlung zugeführt wurden. Wir werden darauf bei der mathematischen Behandlung von Signalübertragungen im Abschn. 8. zurückkommen. Für viele Zwecke ausreichend ist die folgende Definition der

Stoß-(Impuls-)Funktion:

$$\delta(t) \equiv 0 \quad \text{für } t \neq 0 \quad (3.20)$$

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \sigma(t). \quad (3.21)$$

Bei einem realen Impuls $u_{\uparrow}(t)$ ist zu beachten, daß dessen Fläche nicht eins, sondern A ist, wobei für die Dimension von A gilt

$$\dim A = \dim t \dim u. \quad (3.22)$$

Die reale Impulsfunktion lautet somit:

$$u_{\uparrow}(t) = A \delta(t). \quad (3.23)$$

Wegen der in linearen Systemen möglichen Anwendung des Superpositionsprinzips kann das Ausgangssignal eines linearen Gliedes aus den Reaktionen auf die Impulse zusammengesetzt werden, in die das Eingangssignal zerlegt worden ist. Der Impulsantwort kommt deshalb eine allgemeine Bedeutung zur Kennzeichnung eines linearen Übertragungsglieds zu. Unter Verwendung der Bezeichnungsweise von Gl. (2.70) definieren wir:

die Stoß-(Impuls-)Antwort $x_{\uparrow}(t)$ eines linearen Übertragungsglieds:

$$x_{\uparrow}(t) \triangleq g * u_{\uparrow}(t) = g * A \delta(t) \quad (3.24)$$

und die Gewichtsfunktion $g(t)$ eines linearen Übertragungsglieds:

$$g(t) \triangleq x_{\uparrow}(t)/A = g * \delta(t). \quad (3.25)$$

In Worten (Bild 3.19):

Die Gewichtsfunktion $g(t)$ eines linearen Übertragungsglieds ist dessen durch Quotientenbildung auf das Zeitintegral des Eingangsimpulses bezogene Stoß-(Impuls-)Antwort.

D 3.9

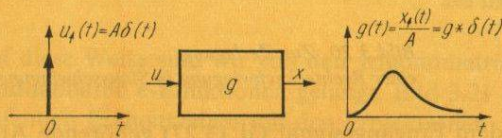


Bild 3.19. Zur Definition der Gewichtsfunktion

Wegen der allgemeinen Bedeutung des Impulssignals (s. Bild 3.17) ist die Gewichtsfunktion eine *Eigenschaft des Übertragungsglieds*, die dessen Signalübertragungsverhalten beschreibt.

Die Bezeichnung Gewichtsfunktion ist gewählt worden, weil diese Funktion das Gewicht bestimmt, mit dem jeder durch die Zerlegung des Eingangssignals gebildete Eingangsimpuls zum Wert des Ausgangssignals zu einem späteren Zeitpunkt beiträgt. Da entsprechend dem Kausalitätsgesetz die Wirkung der Ursache nicht vorausgehen kann, folgt

$$g(t) \equiv 0 \quad \text{für } t < 0. \quad (3.26)$$

Soll die Gewichtsfunktion experimentell bestimmt werden, so wird für den Eingangsimpuls wegen der in realen Systemen vorliegenden Begrenzung des Steuersignals $u(t) < u_{\max}$ zwecks Erzielung einer ausreichenden Energie zur Auslenkung des Systems eine genügend große Impulsbreite ϑ benötigt. Dabei hängt es von der Trägheit des Übertragungsglieds ab, bis zu welchem Wert die Impulsdauer ausgedehnt werden kann, ohne daß die gemessene Ausgangsfunktion von der gesuchten Gewichtsfunktion unzulässig abweicht.

Abschließend sei bemerkt, daß die Berechtigung, in Gl. (3.25) zweimal das gleiche Symbol g zu benutzen, im Abschn. 8. nachgewiesen werden wird.

3.4.4. Frequenzgang

Ähnlich dem Sprung- und Impulssignal sind auch

Sinussignale des Typs

$$u(t) = |U| \cos(\omega t + \varphi_u); \quad -\infty < t < \infty \quad (3.27)$$

Grundbausteine, aus denen nach dem Fouriertheorem allgemeinere Signale aufgebaut bzw. in welche diese allgemeineren Signale zerlegt werden können. Als einfaches Beispiel zeigt Bild 3.20 den Anfang des Aufbaus einer Rechteckschwingung der Frequenz ω_0 mit den beiden ersten Sinusschwingungen (ω_0 und $3\omega_0$). (Im Abschn. 9. werden wir auf dieser Basis ein Verfahren zur Berechnung von Signalübertragungen entwickeln.) Das ist der Grund, weshalb der Übertragungseigenschaft eines Gliedes für sinusförmige Eingangssignale eine allgemeine Bedeutung zur Charakterisierung des dynamischen Übertragungsverhaltens zukommt.

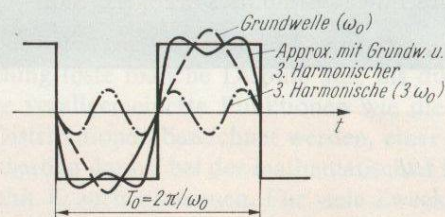


Bild 3.20. Zur Zerlegung einer Rechteckschwingung in Sinusschwingungen

Unsere Aufgabe ist es somit, das zu dem Eingangssignal Gl. (3.27) gehörende Ausgangssignal zu bestimmen. Da dieses Eingangssignal schon seit $t = -\infty$ wirkt,

interessiert nur das *stationäre* Ausgangssignal. Als Übertragungsglied betrachten wir ein lineares Glied mit konzentrierten Parametern, das durch die Differentialgleichung

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_0x = b_mu^{(m)} + \dots + b_0u \quad (3.28)$$

beschrieben wird. Zur Bestimmung des stationären Ausgangssignals probieren wir, ob wir mit dem Ansatz

$$x(t) = |X| \cos(\omega t + \varphi_x) \quad (3.29)$$

mit geeignet gewählter Amplitude $|X|$ und Phase φ_x die inhomogene Gl. (3.28) erfüllen können. Diese Rechnung können wir uns mit einem Kunstgriff wesentlich erleichtern. Wir fügen nämlich zu dem obigen Eingangssignal noch ein zweites imaginäres Sinussignal hinzu und erhalten

$$\begin{aligned} \hat{u} &= |U| [\cos(\omega t + \varphi_u) + j \sin(\omega t + \varphi_u)] \\ &= |U| e^{j(\omega t + \varphi_u)} = U e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (3.30)$$

mit der *komplexen Amplitude*

$$U = |U| e^{j\varphi_u}. \quad (3.31)$$

Unser tatsächliches Eingangssignal ist dann

$$u = \operatorname{Re} \{\hat{u}\}. \quad (3.32)$$

Entsprechend erweitern wir auch den Ansatz für das Ausgangssignal

$$\hat{x} = |X| e^{j\varphi_x} e^{j\omega t} = X e^{j\omega t}, \quad (3.33)$$

wobei

$$x = \operatorname{Re} \{\hat{x}\}. \quad (3.34)$$

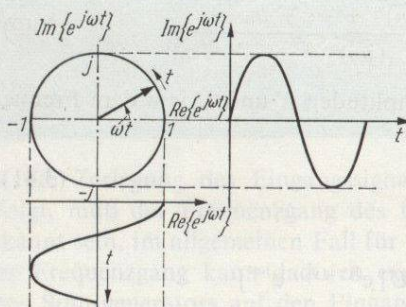


Bild 3.21. Verlauf von $e^{j\omega t}$, $\operatorname{Re} \{e^{j\omega t}\}$ und $\operatorname{Im} \{e^{j\omega t}\}$

Auf diese Weise sind wir von den trigonometrischen Funktionen zu den bequemer handhabbaren e-Funktionen gelangt. Bild 3.21 zeigt die Funktion $e^{j\omega t}$ als einen umlaufenden Einheitszeiger mit den Projektionen

$$\operatorname{Re} \{e^{j\omega t}\} = \cos \omega t, \quad \operatorname{Im} \{e^{j\omega t}\} = \sin \omega t. \quad (3.35)$$

Die reelle Komponente des komplexen Eingangssignals $\hat{u}$ [s. Gl. (3.30)] ergibt bei einem realen Übertragungsglied ein reelles Ausgangssignal. Bei der imaginären Komponente ist das Eingangssignal und demzufolge auch das Ausgangssignal mit dem Faktor j verbunden. Nach dem Superpositionsprinzip beeinflussen sich in linearen Systemen die beiden Komponenten nicht. Demzufolge hängt der Realteil des Ausgangssignals nur vom Realteil des Eingangssignals ab. Entsprechendes gilt für die Imaginärteile von Aus- und Eingangssignal:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\{\hat{u}\} * g &= \operatorname{Re}\{\hat{x}\} \\ \operatorname{Im}\{\hat{u}\} * g &= \operatorname{Im}\{\hat{x}\}.\end{aligned}\quad (3.36)$$

Unsere Aufgabe konzentriert sich damit auf die Berechnung der Signalübertragung für das Eingangssignal $\hat{u}$. Hierzu gehen wir mit dem Eingangssignal $\hat{u}$ [s. Gl. (3.30)] und dem Ansatz Gl. (3.33) für das Ausgangssignal $\hat{x}$ in die Differentialgleichung des Übertragungsglieds [s. Gl. (3.28)], wobei x durch $\hat{x}$ und u durch $\hat{u}$ ersetzt wird. Beachtet man, daß

$$\frac{d^i}{dt^i} e^{j\omega t} = (j\omega)^i e^{j\omega t}, \quad (3.37)$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned}X[(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0] e^{j\omega t} \\ = U[b_m(j\omega)^m + \dots + b_1(j\omega) + b_0] e^{j\omega t}.\end{aligned}\quad (3.38)$$

Auf beiden Seiten der Gleichung steht dieselbe Zeitfunktion. Die Differentialgleichung kann also mit dem Ansatz Gl. (3.33) befriedigt werden, wobei man für die komplexe Amplitude des Ausgangssignals erhält

$$X = \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_0} U. \quad (3.39)$$

Mit

$$G(j\omega) = |G(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_0} \quad (3.40)$$

und unter Beachtung, daß die komplexen Amplituden X und U von dem Frequenzparameter $j\omega$ abhängen, ergibt sich

$$X(j\omega) = G(j\omega) U(j\omega) \quad (3.41)$$

und [s. Gln. (3.33), (3.34)]

$$\begin{aligned}x(t) &= \operatorname{Re}\{|X| e^{j\varphi_x} e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{|G| |U| e^{j(\varphi + \varphi_u)} e^{j\omega t}\} \\ &= |G| |U| \cos(\omega t + \varphi + \varphi_u).\end{aligned}$$

Das Ausgangssignal ist also wieder ein Sinussignal mit der gleichen Frequenz ω wie das Eingangssignal. Verändert sind nur Amplitude und Phase, wobei gilt (Bild 3.22)

$$|X| = |G| |U|; \quad \varphi_x = \varphi + \varphi_u. \quad (3.43)$$

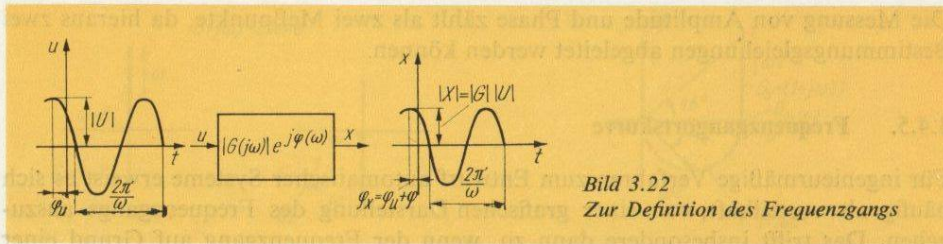


Bild 3.22
Zur Definition des Frequenzgangs

Die Übertragungseigenschaft eines Übertragungsglieds für Sinussignale ist also durch dessen amplituden- und phasenändernde Eigenschaft vollständig bestimmt. Sie wird beschrieben durch den

(komplexen) Frequenzgang $G(j\omega)$:

$$G(j\omega) = |G(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = \frac{X(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{|X(\omega)|}{|U(\omega)|} e^{j(\varphi_X(\omega) - \varphi_U(\omega))}. \quad (3.44)$$

Beachten wir, daß der Frequenzgang eine Eigenschaft des Übertragungsglieds ist, so können wir definieren:

Der Frequenzgang $G(j\omega)$ ist der das Übertragungsverhalten eines linearen Übertragungsglieds für Sinussignale kennzeichnende komplexe Operator, durch dessen Multiplikation mit der komplexen Eingangsamplitude die komplexe Ausgangsamplitude erhalten wird. Er ist eine Funktion des Frequenzparameters $j\omega$. Sein Betrag $|G(\omega)|$ heißt *Amplitudengang*, seine Phase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ *Phasengang*.

D 3.10

Aus vorstehendem Rechnungsgang folgt außerdem der Satz:

Der Frequenzgang kann vereinfacht als Quotient der komplexen Amplituden von Ausgang zu Eingang bei Übertragung des Eingangssignals $\exp\{j\omega t\}$ berechnet werden.

S 3.3

Da die Zerlegung des Eingangssignals in Sinussignale *verschiedener* Frequenzen erfolgt, muß der Frequenzgang des Übertragungsglieds für alle diese Frequenzen bekannt sein, im allgemeinen Fall für $0 \leq \omega < \infty$.

Der Frequenzgang kann dadurch experimentell bestimmt werden, daß mit Hilfe eines Sinusgenerators auf den Eingang des Übertragungsglieds ein Sinussignal gegeben wird und die Amplitude und die Phase des Ausgangssignals gemessen und auf die des Eingangssignals bezogen werden. Bei kompletten Frequenzgangmeßplätzen werden unmittelbar Real- und Imaginärteil oder Amplitude und Phase angezeigt. Ist der Frequenzgang durch Gl. (3.40) gegeben, so müssen wenigstens $n + m + 1$ Meßpunkte (verschiedener Frequenz) vorliegen, um die Parameter a_i und b_i bestimmen zu können. Dabei genügt es, nur die Amplitude oder nur die Phase zu messen.

Die Messung von Amplitude und Phase zählt als zwei Meßpunkte, da hieraus zwei Bestimmungsgleichungen abgeleitet werden können.

3.4.5. Frequenzgangortskurve

Für ingenieurmäßige Verfahren zum Entwurf automatischer Systeme erweist es sich häufig als vorteilhaft, von einer grafischen Darstellung des Frequenzgangs auszugehen. Das trifft insbesondere dann zu, wenn der Frequenzgang auf Grund einer Messung numerisch vorliegt und der entsprechende analytische Zusammenhang noch unbekannt ist. Eine übliche grafische Darstellung ist die als *Ortskurve* in der $G(j\omega)$ -Ebene (Bild 3.23).

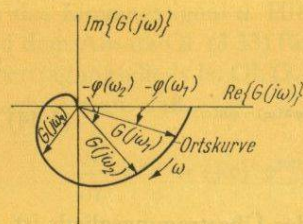


Bild 3.23. Frequenzgangortskurve

D 3.11

Die *Ortskurve des Frequenzgangs* ist die geometrische Ortslinie aller Endpunkte des in der komplexen Ebene mit der Kreisfrequenz ω als Parameter aufgetragenen Zeigers $G(j\omega)$.

Zum Vertrautwerden betrachten wir die Ortskurve einiger einfacher Sonderfälle des allgemeinen Frequenzgangs von Gl. (3.40). Dabei wird zur Vereinfachung angenommen, daß Ein- und Ausgangssignal gleiche Dimension haben. Dann hat G die Dimension eins, und die Parameter a_1, b_1 können durch feste Zeitkonstanten T ersetzt werden:

$$G_1(j\omega) = j\omega T, \quad G_2(j\omega) = \frac{1}{j\omega T}. \quad (3.45)$$

Für die Beträge erhält man

$$|G_1| = \omega T, \quad |G_2| = \frac{1}{\omega T}. \quad (3.46)$$

Unter Berücksichtigung, daß (s. Bild 3.21)

$$j = e^{j\pi/2}, \quad \frac{1}{j} = -j = e^{-j\pi/2}, \quad (3.47)$$

findet man für die Phasen

$$\varphi_1 = \pi/2, \quad \varphi_2 = -\pi/2. \quad (3.48)$$

Die Ortskurven beider Frequenzgänge zeigt Bild 3.24. Als weiteren Grundtyp untersuchen wir (Bild 3.25)

$$G_3(j\omega) = 1 + j\omega T = \sqrt{1 + (\omega T)^2} e^{j\varphi_3} \quad (3.49)$$

$$\varphi_3 = \arctan(\operatorname{Im}\{G\}/\operatorname{Re}\{G\}) = \arctan \omega T. \quad (3.50)$$

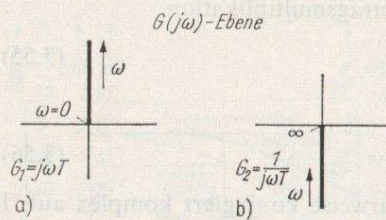


Bild 3.24. Frequenzgangortskurven

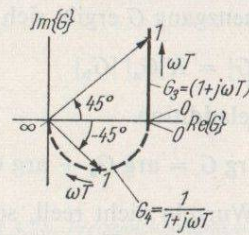


Bild 3.25. Frequenzgangortskurven

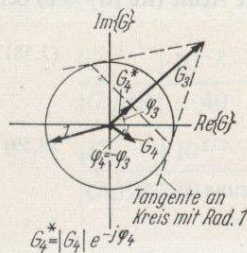
Die Ortskurven des Frequenzgangs

$$G_4(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} e^{-j \arctan \omega T} \quad (3.51)$$

kann man wegen

$$G_4 = 1/G_3, |G_4| = 1/|G_3|, \varphi_4 = -\varphi_3 \quad (3.52)$$

durch Inversion des Frequenzgangs G_3 (Bild 3.26), d. h. durch Spiegelung am Einheitskreis und danach an der Achse $\text{Re}\{G\}$, finden. Leichter erhält man G_4 aus G_3 mit Hilfe eines (hier nicht bewiesenen) Satzes der Ortskurventheorie.

Bild 3.26. Inversion $G_4 = 1/G_3$, $\omega = \omega_1$ fest

Eine nicht durch den Ursprung gehende Gerade wird bei Inversion in einen Kreis durch den Ursprung übergeführt.

S 3.4

Die Halbgerade $G_3(j\omega)$ im Bild 3.25 wird durch Inversion in den Halbkreis $G_4(j\omega)$ transformiert.

Ein allgemeinerer Frequenzgang entsprechend Gl. (3.40) kann, wenn bei Ersatz $j\omega = p$ die Wurzeln p_v des Zähler- und Nennerpolynoms bekannt und reell sind, auf ein Produkt der bereits behandelten Frequenzgangtypen zurückgeführt werden, z. B.

$$G = \frac{K}{(1+j\omega T_a)(1+j\omega T_b)} = KG_a G_b \quad (3.53)$$

mit

$$G_a = \frac{1}{1+j\omega T_a}, G_b = \frac{1}{1+j\omega T_b} \quad (3.54)$$

Der Frequenzgang G ergibt sich dann durch Betragsmultiplikation

$$|G| = K |G_a| |G_b| \quad (3.55)$$

und Winkeladdition

$$\arg G = \arg G_a + \arg G_b. \quad (3.56)$$

Sind die Wurzeln nicht reell, so treten sie paarweise konjugiert komplex auf. Der einfachste derartige Frequenzgang, der eines *Schwingungsglieds*, lautet mit dem *Dämpfungsgrad* D ($D < 1$):

$$G_s = \frac{1}{1 + 2Dj\omega T + (j\omega)^2 T^2} = \frac{1}{1 - \omega^2 T^2 + 2Dj\omega T} \quad (3.57)$$

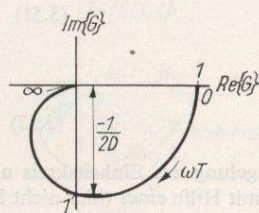


Bild 3.27. Frequenzgangortskurve eines Schwingungsglieds

Die Ortskurve (Bild 3.27) beginnt bei $G(0) = 1$, schneidet die imaginäre Achse ($\operatorname{Re}\{G\} = 0$) bei

$$\omega = 1/T, \quad G_s(1/T) = \frac{-j}{2D} \quad (3.58)$$

und nähert sich wegen

$$G_s \approx -1/(\omega T)^2 \text{ für } \omega T \gg 1 \quad (3.59)$$

für $\omega \rightarrow \infty$ entlang der negativen reellen Achse dem Koordinatenursprung.

3.4.6. Frequenzkennlinien

Die Konstruktion der Ortskurve von komplizierteren Frequenzgängen erweist sich als ziemlich aufwendig. Deshalb hat eine für viele Zwecke günstigere Darstellungsweise große Bedeutung erlangt und die Grundlage für Verfahren zum Entwurf von Steuerungssystemen abgegeben, die in der Ingenieurpraxis eine weite Verbreitung gefunden haben. Bei dieser Darstellungsweise werden der Logarithmus des Amplitudengangs und – falls erforderlich – der Phasengang über dem Logarithmus der Kreisfrequenz aufgetragen. Die wichtigsten Begriffe sind in folgenden Definitionen zusammengefaßt und im Bild 3.28 erläutert:

D 3.12

Die grafische Darstellung des Logarithmus des Amplitudengangs $\lg |G(\omega)|$ als Funktion des Logarithmus der Kreisfrequenz $\lg \omega/\omega_b$ (ω_b wählbare Bezugsfrequenz) heißt *Amplitudenkennlinie*. Die grafische Darstellung des Phasengangs $\varphi(\omega)$ über der logarithmierten Kreisfrequenz wird *Phasenkennlinie* genannt. Amplituden- und Phasenkennlinie werden unter dem Oberbegriff *Frequenzkennlinien* zusammengefaßt. Das Diagramm heißt deshalb *Frequenzkennliniendiagramm*.

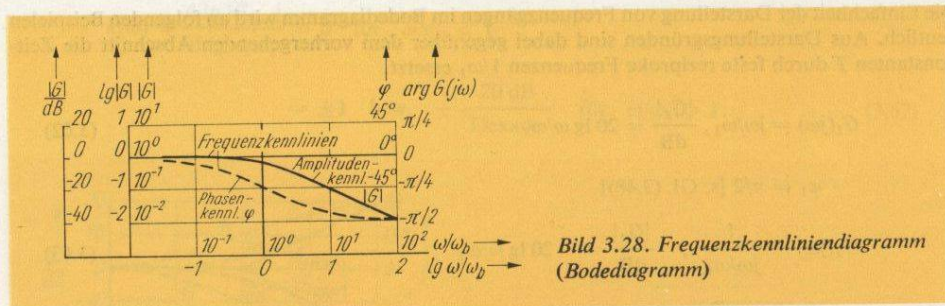


Bild 3.28. Frequenzkennliniendiagramm (Bodediagramm)

Es ist für Regelungsprobleme bzw. für die Untersuchung von gegengekoppelten Verstärkern erstmalig von *Bode* systematisch verwendet worden, weshalb auch die Bezeichnung *Bodediagramm* gebräuchlich ist.

Häufig wird der Amplitudengang im Dezibelmaß (dB) aufgetragen. Dabei gilt mit $\lg$ als Logarithmus zur Basis 10:

$$|G|/\text{dB} \triangleq 20 \lg |G|. \quad (3.60)$$

Einige häufig gebrauchte zugeordnete Wertepaare sind

$ G $	10^{-2}	10^{-1}	$10^{-1/2}$	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	2
$ G /\text{dB}$	-40	-20	-10	-6	-3	0	3	6
$ G $	$10^{1/2}$	10^1	10^2					
$ G /\text{dB}$	10	20	40					

(3.61)

Daraus können weitere Werte gebildet werden, z. B. für $|G| = 5$:

$$20 \lg 5 = 20 \lg 10/2 = 20 \lg 10 - 20 \lg 2 = 20 \text{ dB} - 6 \text{ dB} = 14 \text{ dB}.$$

Aus Bild 3.28 ist ersichtlich, daß für die Skalierung folgende Varianten gewählt werden können:

für die Ordinatenachse:

- linearer Amplitudengang $|G|$ mit logarithmischer Werteskala
- logarithmischer Amplitudengang $\lg |G|$ bzw. $|G|/\text{dB}$ mit linearer Skala

für die Abszissenachse (ω_b wählbare Bezugsfrequenz):

- lineare Kreisfrequenz ω/ω_b mit logarithmischer Werteskala
- Logarithmus der Kreisfrequenz $\lg \omega/\omega_b$ mit linearer Skala.

Die grob logarithmische Teilung einer Strecke der Länge L zeigt Bild 3.29.

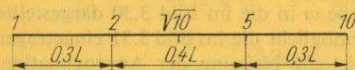


Bild 3.29. Logarithmische Skala

Die Einfachheit der Darstellung von Frequenzgängen im Bodediagramm wird an folgenden Beispielen deutlich. Aus Darstellungsgründen sind dabei gegenüber dem vorhergehenden Abschnitt die Zeitkonstanten T durch feste reziproke Frequenzen $1/\omega_1$ ersetzt.

$$G_1(j\omega) = j\omega/\omega_1, \quad \frac{|G_1|}{\text{dB}} = 20 \lg \omega/\omega_1 \quad (3.62)$$

$$\varphi_1 = \pi/2 \text{ [s. Gl. (3.48)]}$$

$$G_2(j\omega) = \frac{1}{j\omega/\omega_1}, \quad \frac{|G_2|}{\text{dB}} = -20 \lg \omega/\omega_1 \quad (3.63)$$

$$\varphi_2 = -\pi/2$$

Die Frequenzkennlinien zeigt Bild 3.30. Es sind Geraden mit den Neigungen

$$k = \frac{d \lg |G_{1,2}|}{d \lg \omega/\omega_1} = \pm 1 \text{ bzw. } \pm \frac{20 \text{ dB}}{\text{Dekade}} \quad (3.64)$$

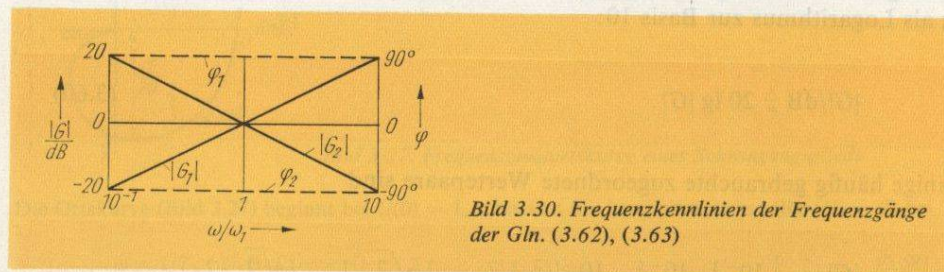


Bild 3.30. Frequenzkennlinien der Frequenzgänge der Gln. (3.62), (3.63)

Zwei weitere wichtige Grundtypen sind

$$G_3(j\omega) = 1 + j\omega/\omega_1, \quad \frac{|G_3|}{\text{dB}} = 20 \lg \sqrt{1 + (\omega/\omega_1)^2} \quad (3.65)$$

$$\varphi_3 = \arctan \omega/\omega_1$$

$$G_4(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_1}, \quad \frac{|G_4|}{\text{dB}} = -20 \lg \sqrt{1 + (\omega/\omega_1)^2} \quad (3.66)$$

$$\varphi_4 = -\arctan \omega/\omega_1$$

Tafel 3.6. Näherungswerte für die Frequenzkennlinien zu den Gln. (3.65), (3.66)

ω/ω_1	$ G_3 $	$ G_3 /\text{dB}$	φ_3	$ G_4 $	$ G_4 /\text{dB}$	φ_4
$\ll 1$	1	0	0	1	0	0
1	$\sqrt{2}$	3	45°	$1/\sqrt{2}$	-3	-45°
$\gg 1$	ω/ω_1	$20 \lg \omega/\omega_1$	90°	$1/\omega/\omega_1$	$-20 \lg \omega/\omega_1$	-90°

Eine Übersicht über das Verhalten bei tiefen und hohen Frequenzen gibt Tafel 3.6. Die Werte der obersten und der untersten Zeile gelten dabei näherungsweise. Die unterste Zeile besagt, daß die Amplituden- und Phasenkennlinien von G_3 bzw. G_4 für große ω in die im Bild 3.30 dargestellten Kennlinien der Frequenzgänge G_1 bzw. G_2 einmünden. Das ermöglicht die im Bild 3.31 eingetragene Geradenapproximation der Amplitudenkennlinien. Danach ist die Neigung der Approximationsgeraden:

$$k(\omega) = \frac{d \lg |G_{3,4}|}{d \lg \omega/\omega_1} = 0 \quad \text{für } \omega/\omega_1 < 1$$

$$= \pm 1 \quad \text{bzw.} \quad \pm \frac{20 \text{ dB}}{\text{Dekade}} \quad \text{für } \omega/\omega_1 > 1. \quad (3.67)$$

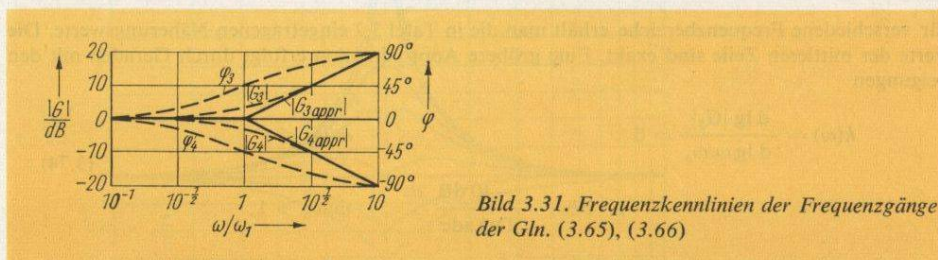


Bild 3.31. Frequenzkennlinien der Frequenzgänge der Gln. (3.65), (3.66)

Die exakten Amplitudenkennlinien (gestrichelt gezeichnet) unterscheiden sich von den Geradenapproximationen durch das Korrekturglied ΔG :

$$|G_3| = |G_{3\text{appr}}| - |\Delta G| \quad (3.68)$$

$$|G_4| = |G_{4\text{appr}}| + |\Delta G|. \quad (3.69)$$

Für dieses Korrekturglied erhält man die im Bild 3.32 aufgetragene Kennlinie.

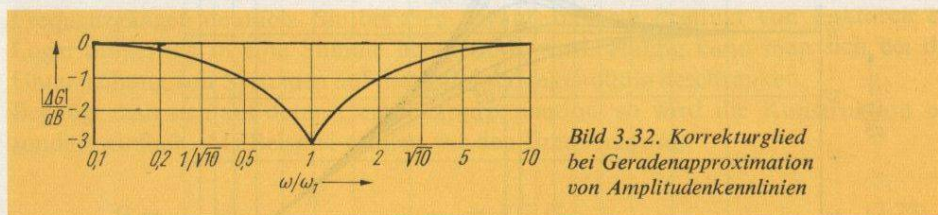


Bild 3.32. Korrekturglied bei Geradenapproximation von Amplitudenkennlinien

Für viele Anwendungszwecke wird sich die Geradenapproximation als ausreichend erweisen, zumal dann, wenn Frequenzen $\omega/\omega_1 > 3$ bzw. $< 0,3$ betrachtet werden. Für die Konstruktion der Phasenkennlinie seien nachfolgend einige Werte der arctan-Funktion (im Winkelmaß) angegeben:

ω/ω_1	0	0,1	0,2	$10^{-1/2}$	0,5	1	2
$\arctan \omega/\omega_1$	0°	6°	11°	18°	27°	45°	63°

ω/ω_1	$\sqrt{10}$	5	10	∞
$\arctan \omega/\omega_1$	72°	79°	84°	90°

(3.70)

Als wichtiger Grundtyp verbleibt noch das Schwingungsglied Gl. (3.57) (mit $T = 1/\omega_0$):

$$G_5 = \frac{1}{1 + 2Dj\omega/\omega_0 - (\omega/\omega_0)^2} \quad (3.71)$$

$$\frac{|G_5|}{\text{dB}} = -20 \lg \sqrt{[1 - (\omega/\omega_0)^2]^2 + (2D\omega/\omega_0)^2} \quad (3.72)$$

$$\varphi_5 = -\arctan \frac{2D\omega/\omega_0}{1 - (\omega/\omega_0)^2}. \quad (3.73)$$

ω/ω_0	$ G_s $	$ G_s /\text{dB}$	φ_s
$\ll 1$	1	0	0°
1	$1/2D$	$-20 \lg 2D$	-90°
$\gg 1$	$(\omega/\omega_0)^{-2}$	$-40 \lg \omega/\omega_0$	-180°

Tafel 3.7. Näherungswerte für die Frequenzkennlinien des Schwingungsglieds Gl. (3.71)

Für verschiedene Frequenzbereiche erhält man die in Tafel 3.7 eingetragenen Näherungswerte. Die Werte der mittleren Zeile sind exakt. Eine größere Approximation erfolgt durch Geraden mit den Neigungen

$$k(\omega) = \frac{d \lg |G_s|}{d \lg \omega/\omega_0} = 0 \quad \omega/\omega_0 < 1 \quad (3.74)$$

$$= -2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{-40 \text{ dB}}{\text{Dekade}} \quad \omega/\omega_0 > 1.$$

Amplituden- und Phasenkennlinien sind für einige ausgewählte Werte des Dämpfungsgrads D im Bild 3.33 aufgezeichnet. Das Korrekturglied zur Konstruktion der exakten Amplitudenkennlinie aus der Geradenapproximation bringt Bild 3.34.

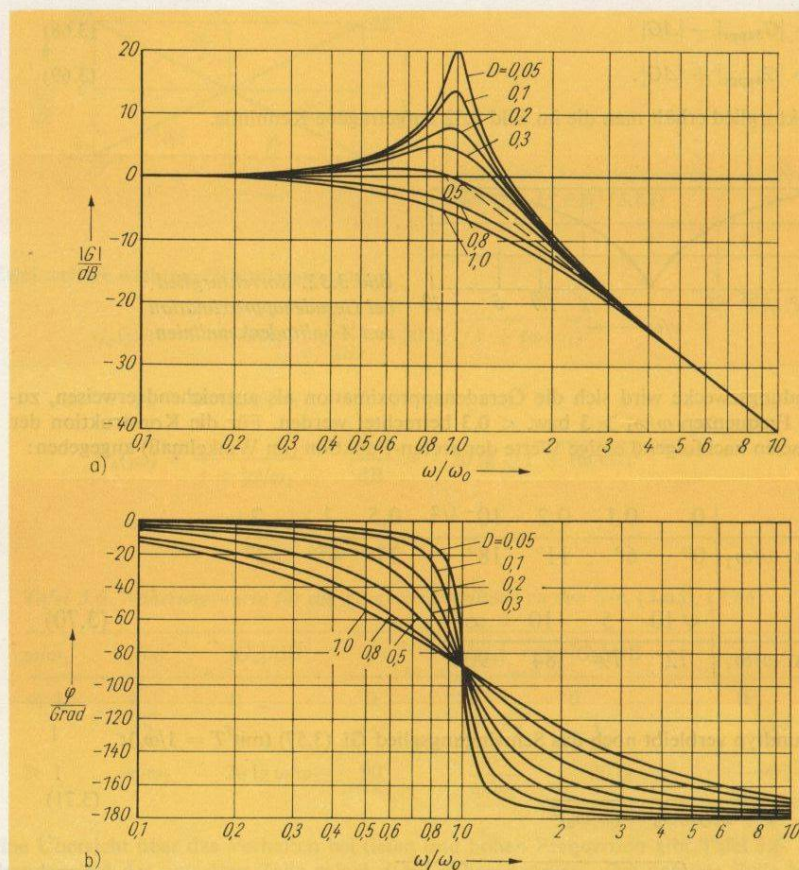


Bild 3.33. Frequenzkennlinien des Schwingungsglieds der Gln. (3.72), (3.73)

a) Amplitudenkennlinien

b) Phasenkennlinien

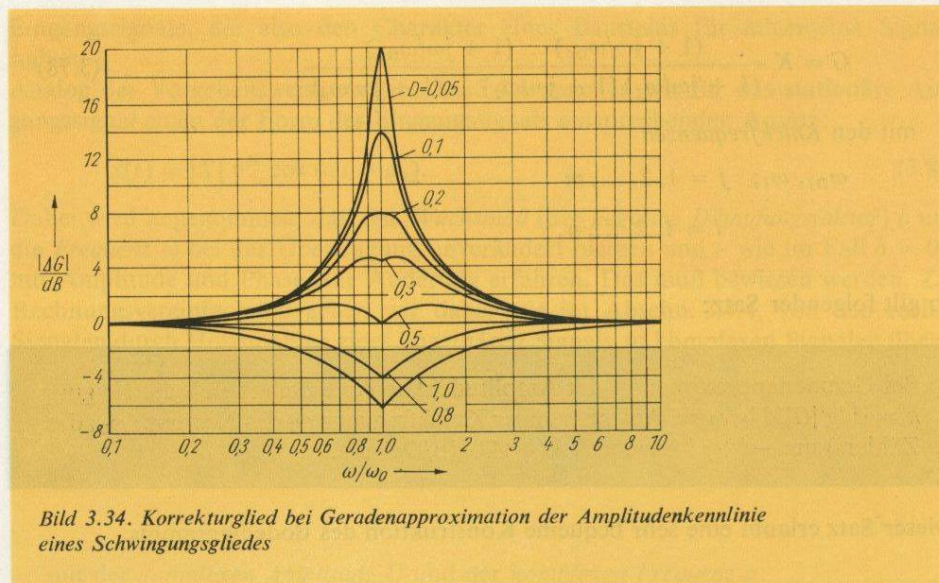


Bild 3.34. Korrekturglied bei Geradenapproximation der Amplitudenkennlinie eines Schwingungsgliedes

Die großen Vorteile des Frequenzkennliniendiagramms werden bei komplizierteren Frequenzgängen deutlich. Sie beruhen darauf, daß ein Produkt von Faktoren bei Logarithmierung in eine Summe übergeführt wird. Häufig kann man sich bei der Untersuchung von Systemen auf die Amplitudenkennlinie beschränken. Begnügt man sich auf deren Geradenapproximation, so wird die Konstruktion besonders einfach. Als Beispiel wählen wir den Frequenzgang

$$G = \frac{K}{(1 + j\omega/\omega_1)(1 + j\omega/\omega_2)} = KG_1G_2 \quad (3.75)$$

mit

$$G_1 = \frac{1}{(1 + j\omega/\omega_1)}, \quad G_2 = \frac{1}{(1 + j\omega/\omega_2)}, \quad (3.76)$$

dann ist

$$|G|/\text{dB} = 20 \lg K + 20 \lg G_1 + 20 \lg G_2. \quad (3.77)$$

Es sei $K = 10$, $\omega_2/\omega_1 = 10$. Wie im Bild 3.35 gezeigt, findet man die Kennlinie für $|G|$ durch Addition der Kennlinien der Komponenten K , $|G_1|$, $|G_2|$.

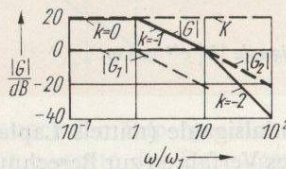


Bild 3.35. Amplitudenkennlinie des Frequenzgangs der Gl. (3.75)

Wählt man als Darstellung des Frequenzgangs (mit reellen Wurzeln im Zähler und Nenner) die Form

$$G = K \frac{(1 + j\omega/\omega_{D1}) \dots (1 + j\omega/\omega_{Dm})}{(1 + j\omega/\omega_1) (1 + j\omega/\omega_2) \dots (1 + j\omega/\omega_n)} \quad (3.78)$$

mit den *Knickfrequenzen*

$$\omega_{Dj}, \omega_i; \quad j = 1, 2, \dots, m$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

so gilt folgender Satz:

S 3.5

Bei Geradenapproximation der Amplitudenkennlinie ändert sich die Neigung $k = d \lg |G| / d \lg \omega$ bei Auftreten einer Knickfrequenz ω_i des Nenners (ω_{Dj} des Zählers) um $-(+)$ 1 bzw. um $-(+)$ 20 dB/Dekade.

Dieser Satz erlaubt eine sehr bequeme Konstruktion des Bodediagramms.

3.4.7. Übertragungsfunktion

Im vorangegangenen Abschnitt dient das Sinussignal als Element bei der Zerlegung allgemeiner Signale und wird deshalb das Übertragungsglied durch sein Übertragungsverhalten für Sinussignale charakterisiert. Viele für unsere künftigen Untersuchungen wichtigen Signale, nämlich solche, die mit der Zeit unbeschränkt wachsen, lassen sich jedoch nicht in Sinussignale zerlegen. Zum Erfolg führt eine Zerlegung in exponentiell wachsende Sinussignale (Bild 3.36), hier genannt

Exponentialsignale:

$$u(t) = |U| e^{\delta t} \cos(\omega t + \varphi_u); \quad -\infty < t < \infty. \quad (3.79)$$

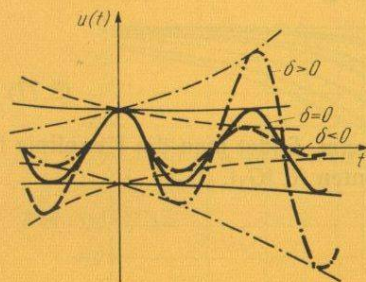


Bild 3.36. Exponentialsignale $|U| e^{\delta t} \cos \omega t$

Die Zerlegung allgemeiner Eingangssignale in Exponentialsignale (mittels Laplace-integrals) und ein darauf basierendes wichtiges allgemeines Verfahren zur Berechnung von Signalübertragungen werden wir im Abschn. 10. kennenlernen. In diesem Abschnitt interessiert uns die Kennzeichnung des dynamischen Übertragungsverhaltens eines Übertragungsglieds durch seine Übertragungseigenschaft für exponentielle

Eingangssignale, die also den Charakter eines Bausteins für allgemeine Signale haben.

Analog der Vorgehensweise im Abschn. 3.4.4. machen wir für das stationäre Ausgangssignal einen der Form des Eingangssignals entsprechenden Ansatz:

$$x(t) = |X| e^{\delta t} \cos(\omega t + \varphi_x). \quad (3.80)$$

Dabei wird angenommen, daß das *Wuchsmaß* (der *negative Dämpfungsfaktor*) δ und die *Frequenz* ω bei der Übertragung unverändert bleiben und – wie im Fall $\delta = 0$ – nur Amplitude und Phase eine Änderung erfahren. Das muß bewiesen werden. Zur Rechnungsvereinfachung gehen wir dabei wie im Abschn. 3.4.4. von den reellen Signalen durch Hinzunahme eines imaginären Signals zu komplexen Signalen über:

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) &= |U| e^{\delta t} [\cos(\omega t + \varphi_u) + j \sin(\omega t + \varphi_u)] \\ &= |U| e^{\delta t} e^{j(\omega t + \varphi_u)} = |U| e^{j\varphi_u} e^{(\delta + j\omega)t} \\ &= U e^{pt}, \end{aligned} \quad (3.81)$$

mit der *komplexen Amplitude* U und der *komplexen Frequenz* p :

$$U = |U| e^{j\varphi_u}, \quad p = \delta + j\omega. \quad (3.82)$$

In gleicher Weise verfahren wir mit dem Ausgangssignal und erhalten

$$\hat{x}(t) = |X| e^{j\varphi_x} e^{pt} = X e^{pt}. \quad (3.83)$$

Dabei ist

$$u(t) = \operatorname{Re} \{\hat{u}(t)\}, \quad x(t) = \operatorname{Re} \{\hat{x}(t)\}. \quad (3.84)$$

Den Verlauf von $\exp\{pt\}$ und von dessen Projektionen auf die reelle bzw. imaginäre Achse zeigt Bild 3.37.

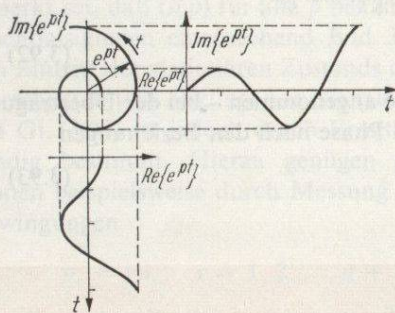


Bild 3.37. Verlauf von e^{pt} , $\operatorname{Re} \{e^{pt}\}$ und $\operatorname{Im} \{e^{pt}\}$

Da nach dem Superpositionsprinzip in linearen Systemen die reelle und die imaginäre Komponente des Eingangssignals sich nicht gegenseitig beeinflussen, ist die reelle Komponente des Ausgangssignals nur der reellen Komponente des Eingangs zugeordnet:

$$\operatorname{Re} \{\hat{x}(t)\} = g * \operatorname{Re} \{\hat{u}(t)\}. \quad (3.85)$$

Wir können deshalb für die Berechnung von den reellen zu den komplexen Signalen übergehen und dann vom Ergebnis den Realteil verwenden. Zur Ermittlung des komplexen Ausgangssignals $\hat{x}(t)$ gehen wir mit den Ansätzen der Gln. (3.81), (3.83) in die allgemeine Differentialgleichung eines linearen Gliedes mit konzentrierten Parametern:

$$\hat{x}^{(n)} + a_{n-1}\hat{x}^{(n-1)} + \dots + a_0\hat{x} = b_m\hat{u}^{(m)} + \dots + b_0\hat{u}. \quad (3.86)$$

Mit

$$\frac{d^i}{dt^i} e^{pt} = p^i e^{pt} \quad (3.87)$$

findet man

$$\begin{aligned} X[p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_0] e^{pt} \\ = U[b_m p^m + \dots + b_0] e^{pt}. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Offensichtlich kann mit dem Ansatz Gl. (3.83) eine stationäre Lösung gefunden werden, wobei sich für die Amplitude des Ausgangssignals X ergibt:

$$X = \frac{b_m p^m + \dots + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_0} U. \quad (3.89)$$

Unter Einführung der Funktion

$$G(p) = \frac{b_m p^m + \dots + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_0} = |G(p)| e^{j\varphi(p)} \quad (3.90)$$

und Beachtung, daß die komplexen Amplituden U und X (infolge der Zerlegung des Eingangssignals und der Übertragung) von der komplexen Frequenz p abhängen, kann man schreiben:

$$X(p) = G(p) U(p). \quad (3.91)$$

Für das Ausgangssignal gilt nach den Gln. (3.83), (3.84)

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Re} \{ |X| e^{j\varphi_x} e^{pt} \} = \operatorname{Re} \{ |G| |U| e^{j(\varphi + \varphi_u)} e^{pt} \} \\ &= |G| |U| e^{\delta t} \cos(\omega t + \varphi + \varphi_u). \end{aligned} \quad (3.92)$$

Frequenz ω und Wuchsmaß δ bleiben also – wie angenommen – bei der Übertragung unverändert, während die neue Amplitude und Phase nach den Beziehungen

$$|X| = |G| |U|, \quad \varphi_x = \varphi + \varphi_u \quad (3.93)$$

bestimmt werden (Bild 3.38).

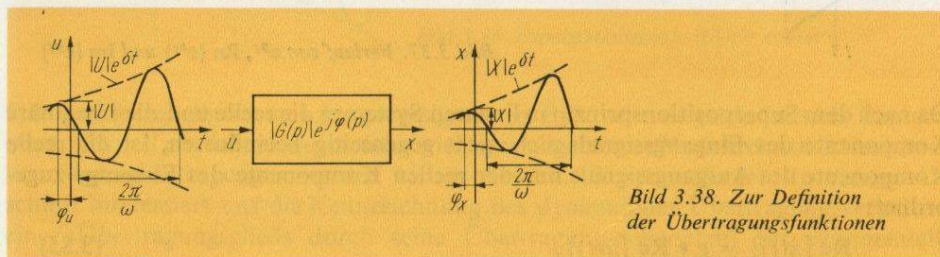


Bild 3.38. Zur Definition der Übertragungsfunktionen

Die einzige bei der Übertragung von Exponentialsignalen für die Ermittlung des Ausgangssignals benötigte Information ist also die über die Änderung der Amplitude und Phase. Sie ist in der *Übertragungsfunktion* genannten Funktion $G(p)$ enthalten, wobei wegen Gl. (3.91) und Gl. (3.82) gilt

$$G(p) = |G(p)|^{j\varphi(p)} = \frac{X(p)}{U(p)} = \frac{|X(p)|}{|U(p)|} e^{j(\varphi_x(p) - \varphi_u(p))} \quad (3.94a)$$

und

$$G(j\omega) = \lim_{\delta \rightarrow 0} G(p). \quad (3.94b)$$

Berücksichtigen wir, daß das Übertragungsverhalten eine Eigenschaft des Übertragungsglieds ist, so können wir definieren:

Die *Übertragungsfunktion* $G(p)$ eines linearen Übertragungsglieds ist der komplexe Operator, der dessen Signalübertragungsverhalten für exponentiell ge- und entdämpfte Sinussignale beschreibt. Er ergibt sich als Quotient der komplexen Amplituden von Ausgangs- zu Eingangssignal. Parameter ist die komplexe Frequenz $p = \delta + j\omega$. Der Frequenzgang ist der Spezialfall der Übertragungsfunktion für ungedämpfte Sinusschwingungen ($\delta = 0$).

D 3.13

Aus dem vorstehenden Rechnungsgang folgt außerdem der Satz:

Die Übertragungsfunktion kann vereinfacht als Quotient der komplexen Amplituden von Ausgang zu Eingang bei der Übertragung des Signals $\exp\{pt\}$ berechnet werden.

S 3.6

Bemerkt sei, daß $G(p)$ für alle p bekannt sein muß. Eine Messung von $G(p)$ mit Exponentialsignalen entsprechend Bild 3.38 ist praktisch nicht durchführbar, da bis zum Eintritt des stationären Zustands der Anzeigebereich der Meßgeräte gewöhnlich überschritten (für abklingende Signale unterschritten) wird. Die Übertragungsfunktion Gl. (3.90) ist jedoch durch Ermittlung ihrer $n + m + 1$ Parameter a_i, b_j vollständig bestimmt. Hierzu genügen $n + m + 1$ Bestimmungsgleichungen. Diese können beispielsweise durch Messung von $|G(p)|$ bei $n + m + 1$ stationären Sinusschwingungen

$$p_v = j\omega_v; \quad v = 1, 2, \dots, n + m + 1, \quad (3.95)$$

d. h. durch Amplitudengangmessung, erhalten werden.

3.4.8. Pol-Nullstellen-Bild

Zwecks günstiger grafischer Darstellung der rationalen Übertragungsfunktion (ÜF) von Gl. (3.90) bestimmen wir die Wurzeln des Zähler- und Nennerpolynoms p_{Dj} bzw. p_{Ni} und können schreiben:

$$\begin{aligned}
 G(p) &= \frac{b_m p^m + \dots + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} \\
 &= K \frac{(p - p_{D1}) \dots (p - p_{Dm})}{(p - p_1) (p - p_2) \dots (p - p_n)} = K \frac{\prod_{j=1}^m (p - p_{Dj})}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)} \quad (3.96)
 \end{aligned}$$

Man erkennt, daß (falls Zähler und Nenner keine gemeinsame Wurzel haben) $G(p)$ für $p = p_{Dj}$ ($j = 1, 2, \dots, m$) verschwindet und für $p = p_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) unendlich wird. Deshalb gilt:

D 3.14

Die komplexen Frequenzen p_{Dj} von Gl. (3.96) heißen *Nullstellen*; die komplexen Frequenzen p_i heißen *Pole* der Übertragungsfunktion $G(p)$.

Da $G(p)$ für reelle p wegen der reellen Koeffizienten b_μ, a_ν reell ist, folgt:

S 3.7

Die Nullstellen und Pole einer Übertragungsfunktion sind entweder reell oder paarweise konjugiert komplex.

Für reelle Pole und Nullstellen ist das unmittelbar einzusehen. Für ein konjugiert komplexes Polpaar $p_{1,2} = -\delta_e \pm j\omega_e$ erhält man als Beitrag zur Übertragungsfunktion

$$(p + \delta_e - j\omega_e)(p + \delta_e + j\omega_e) = p^2 + 2\delta_e p + \delta_e^2 + \omega_e^2, \quad (3.97)$$

also – wie gefordert – einen reellen Ausdruck.

Aus Gl. (3.96) ist ersichtlich, daß $G(p)$ bis auf den Faktor K durch die Lage der Nullstellen und Pole eindeutig beschrieben werden kann. Einen guten Überblick und die Basis für eine wichtige Methode zum Entwurf von Regelungssystemen bietet die Aufzeichnung der Pole und Nullstellen in der komplexen p -Ebene, das sog. *Pol-Nullstellen-Bild* (*PN-Bild*). Es sei am Beispiel der folgenden Übertragungsfunktion erläutert:

$$\begin{aligned}
 G(p) &= \frac{p - p_{D1}}{(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3)}; \\
 p_{D1} &= -\delta_{D1}, p_1 = 0, p_{2,3} = -\delta_e \pm j\omega_e.
 \end{aligned} \quad (3.98)$$

Das zugehörige PN-Bild zeigt Bild 3.39, wobei die Nullstellen durch einen Ring, die Pole durch ein Kreuz markiert werden. Allgemein gilt:

D 3.15

Das *Pol-Nullstellen-Bild* (*PN-Bild*) einer Übertragungsfunktion ist die grafische Darstellung der Lage ihrer Pole p_i und Nullstellen p_{Dj} in der Ebene der komplexen Frequenz $p = \delta + j\omega$. Hierbei werden die Pole mit dem Symbol $\times$, die Nullstellen mit $\circ$ markiert.

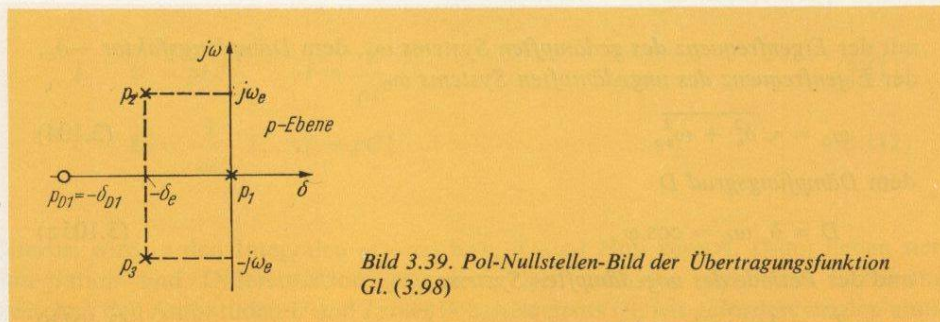


Bild 3.39. Pol-Nullstellen-Bild der Übertragungsfunktion Gl. (3.98)

Zur Einübung dieser Darstellungsweise sollen nun die PN-Bilder einiger wichtiger einfacher Typen von Übertragungsfunktionen aufgezeichnet werden. Die nachfolgende Übertragungsfunktion G_1 hat offensichtlich eine Nullstelle, die G_2 einen Pol im Ursprung (Bild 3.40):

$$G_1(p) = pT, \quad p_{D1} = 0 \quad (3.99)$$

$$G_2(p) = \frac{1}{pT}, \quad p_1 = 0. \quad (3.100)$$

Für die beiden Übertragungsfunktionen

$$G_3(p) = 1 + pT, \quad p_{D1} = -\frac{1}{T} \quad (3.101)$$

$$G_4(p) = \frac{1}{1 + pT}, \quad p_1 = -\frac{1}{T} \quad (3.102)$$

liegen Nullstelle bzw. Pol auf der negativen reellen Achse, da für die angegebenen Werte von p die Übertragungsfunktion verschwindet bzw. unendlich wird (Bild 3.40).

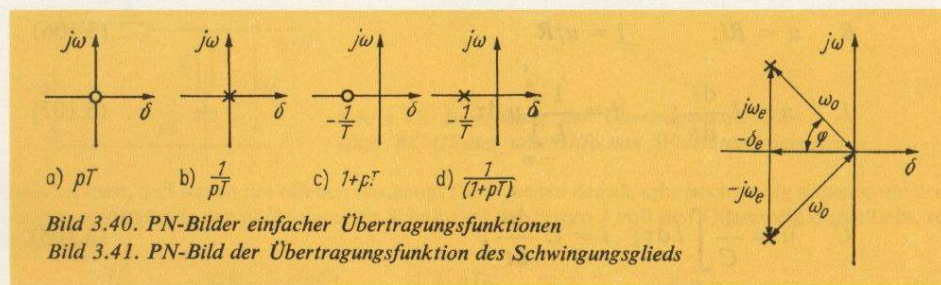


Bild 3.40. PN-Bilder einfacher Übertragungsfunktionen

Bild 3.41. PN-Bild der Übertragungsfunktion des Schwingungsglieds

Die Übertragungsfunktion eines Schwingungsglieds mit zwei konjugiert komplexen Polen $p_{1,2} = -\delta_e \pm j\omega_e$ können wir wie folgt schreiben und umformen (Bild 3.41):

$$\begin{aligned} G_5 &= \frac{1}{\left(1 + \frac{p}{\delta_e - j\omega_e}\right) \left(1 + \frac{p}{\delta_e + j\omega_e}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{2\delta_e p}{\delta_e^2 + \omega_e^2} + \frac{p^2}{\delta_e^2 + \omega_e^2}} \\ &= \frac{1}{1 + 2D \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}} = \frac{1}{1 + 2DpT_0 + p^2T_0^2} \end{aligned} \quad (3.103)$$

mit der *Eigenfrequenz des gedämpften Systems* ω_e , dem *Dämpfungsfaktor* $-\delta_e$, der *Eigenfrequenz des ungedämpften Systems* ω_0

$$\omega_0 = \sqrt{\delta_e^2 + \omega_e^2}, \quad (3.104)$$

dem *Dämpfungsgrad* D

$$D = \delta_e / \omega_0 = \cos \varphi \quad (3.105a)$$

und der *Periode des ungedämpften Systems*

$$T_0 = 1/\omega_0. \quad (3.105b)$$

3.4.9. Berechnung der Übertragungsfunktion und des Frequenzgangs von elektrischen Netzwerken mittels Widerstandsoperatoren

Zur Ermittlung der Übertragungsfunktion bzw. des Frequenzgangs von Übertragungsgliedern gibt es grundsätzlich zwei Wege: den des Experiments und den der Berechnung aus den die Elementarprozesse beschreibenden physikalischen und anderen Gesetzen. Für die Ermittlung des Übertragungsverhaltens elektrischer Netzwerke gestaltet sich diese Berechnung besonders einfach und soll deswegen hier vorweggenommen werden.

Die Berechnung der Spannungen und Ströme in elektrischen Netzwerken, von denen eine (einer) das Eingangssignal, eine andere (ein anderer) das Ausgangssignal bildet, erfolgt bekanntlich über die Aufstellung der Maschen- und Knotengleichungen. Dabei treten in additiver Verknüpfung nur die folgenden Ausdrücke auf:

$$R \quad u = Ri; \quad i = u/R \quad (3.106)$$

$$L \quad u = L \frac{di}{dt}; \quad i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u d\tau \quad (3.107)$$

$$C \quad u = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i d\tau; \quad i = C \frac{du}{dt}. \quad (3.108)$$

Nach Satz 3.6 kann die Übertragungsfunktion durch Berechnung des Übertragungsverhaltens für Signale des Typs $\exp \{pt\}$ gefunden werden. Betrachten wir in vorstehenden Gleichungen die Variablen auf der rechten und linken Seite als Eingangs- bzw. Ausgangssignal und setzen dafür gemäß Satz 3.6

$$u = U e^{pt}, \quad i = I e^{pt}, \quad (3.109)$$

so erhalten wir nach Kürzung von e^{pt} zwischen den Aus- und Eingangsamplituden die folgenden Beziehungen:

$$R \quad U = RI; \quad I = U/R \quad (3.110)$$

$$L \quad U = pLI; \quad I = \frac{1}{pL} U \quad (3.111)$$

$$C \quad U = \frac{1}{pC} I; \quad I = pCU. \quad (3.112)$$

Hierbei wird in den Integralen $u(-\infty)$ bzw. $i(-\infty)$ Null gesetzt. Dann heben sich Integration und Differentiation gegenseitig auf, und die stationäre Beziehung zwischen den Amplituden U und I eines Schaltelements ist, wie gefordert werden muß, nicht davon abhängig, was als Ein- oder Ausgangssignal betrachtet wird. Eine mathematische Begründung kann über die Laplacetransformation (s. Abschn. 10.) gegeben werden. Die Beziehungen der Gln. (3.110) bis (3.112) erhält man unmittelbar, wenn man die Widerstandsoperatoren R , pL und $1/pC$ einführt und die komplexen Amplituden U bzw. I als Ein- und Ausgangssignale ansieht (Bild 3.42).

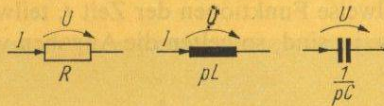


Bild 3.42. Widerstandsoperatoren

Zur Einübung dieses Verfahrens wollen wir die Übertragungsfunktion des bereits früher untersuchten RC-Gliedes berechnen (Bild 3.43), in das die Widerstandsoperatoren und komplexen Amplituden von Spannungen und Strömen eingetragen sind. Mit diesen Größen kann man wie in einem Gleichstromnetzwerk rechnen.

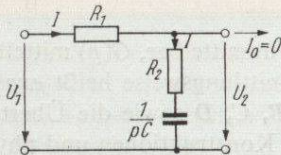


Bild 3.43. Berechnung der Übertragungsfunktion eines RC-Gliedes mit Hilfe von Widerstandsoperatoren

Beachtet man, daß wegen des offenen Ausgangs (bzw. wegen des als sehr hochohmig angenommenen Eingangswiderstands der nachfolgenden Schaltung) der Strom I voll den Querzweig durchfließt, so findet man

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{I(R_2 + 1/pC)}{I(R_1 + R_2 + 1/pC)} = \frac{1 + pT_D}{1 + pT}; \quad (3.113)$$

$$T_D = R_2 C, \quad T_1 = (R_1 + R_2) C.$$

Diese Beziehung kann auch unmittelbar durch Anwendung der Spannungsteilerregel erhalten werden. Den Frequenzgang findet man, indem man entsprechend Gl. (3.94b) p durch $j\omega$ ersetzt:

$$G(j\omega) = \frac{1 + j\omega T_D}{1 + j\omega T}. \quad (3.114)$$

Die hier eingeschlagene Vorgehensweise läßt sich auch auf nichtelektrische Systeme erweitern. Bei Ausgang von den ein dynamisches System beschreibenden simultanen Differential- und Integrodifferentialgleichungen kommt man auf Grund vorstehender Untersuchungen dadurch zur Übertragungsfunktion, daß man eine Differentiation (Integration) durch Multiplikation mit (Division durch) p ersetzt und die Zeit-

variablen ($x, u, \dots$) durch die entsprechenden komplexen Amplituden ($X, U, \dots$) austauscht. Das werden wir später im Zusammenhang mit der Einführung der Laplace-transformation noch näher betrachten.

3.5. Signalflußplan

3.5.1. Kennzeichnung des Übertragungsverhaltens der Übertragungsglieder

Auf dem Weg zur Aufstellung des kybernetischen Modells hatten wir in einem ersten Schritt (s. Abschn. 3.2.) mittels Bildung von Übertragungsgliedern aus dem Baugliedplan das zugehörige Wirkungsschema (Blockschaltbild) erhalten. Dieses enthält noch nicht die Information über das Übertragungsverhalten der einzelnen Glieder. In den beiden vorangegangenen Abschnitten sind für die Kennzeichnung des statischen Übertragungsverhaltens nichtlinearer trägheitsfreier Glieder die statische Kennlinie, für die Beschreibung des dynamischen Übertragungsverhaltens linearer Glieder die Übergangs- und die Gewichtsfunktion sowie der Frequenzgang und die Übertragungsfunktion bereitgestellt worden. Letztere wollen wir zusammenfassend als *Kennfunktionen* bezeichnen. Beachten wir, daß sie teilweise Funktionen der Zeit t , teilweise Funktionen der (komplexen) Frequenz p bzw. $j\omega$ sind, so gelten die Angaben von Tafel 3.8.

Gewichtsfunktion $g(t)$	} Kennfunktionen im Zeitbereich
Übergangsfunktion $h(t)$	
Frequenzgang $G(j\omega)$	} Kennfunktionen im Frequenzbereich
Übertragungsfunktion $G(p)$	

Tafel 3.8
Kennfunktionen des dynamischen
Übertragungsverhaltens

Von diesen Kennfunktionen können $g(t)$, $h(t)$ und $G(j\omega)$ unmittelbar, $G(p)$ mittelbar über $G(j\omega)$ durch Messung bestimmt werden. Diese Ermittlungsweise heißt *experimentelle Identifikation* von Systemen. Die Matrizen A , B , C , D sowie die Übertragungsfunktion $G(p)$ können direkt aus den vorliegenden Konstruktionen und physikalisch-chemischen Elementarprozessen mit Hilfe der Gleichungen der Mechanik, Elektrodynamik, Thermodynamik, Strömungsmechanik und Reaktionskinetik berechnet werden. (Daraus lassen sich dann auch die anderen Kennfunktionen ableiten.) Dieser Weg wird als *theoretische Identifikation (theoretische Prozeßanalyse)* bezeichnet.

Als allgemeines Symbol linearer Übertragungsglieder ist im Abschn. 3.2.1. der Rechteckblock vereinbart worden. Es ist nun üblich, entweder die Übergangsfunktion oder die Übertragungsfunktion darin einzutragen, wie das im Bild 3.44 gezeigt wird. Dabei ist die eingetragene Übergangsfunktion mehr als eine qualitative Kennzeich-

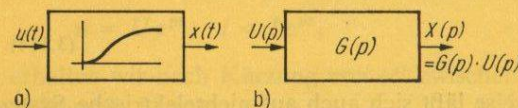


Bild 3.44. Kennzeichnung des Übertragungsverhaltens linearer Übertragungsglieder

- a) durch Eintragung der Übergangsfunktion
b) durch Eintragung der Übertragungsfunktion

nung anzusehen, die insbesondere dann Verwendung findet, wenn die Übergangsfunktion gemessen und noch nicht durch einen analytischen Ausdruck approximiert worden ist. Bei quantitativer Kenntnis der Signalübertragung sollte die Übertragungsfunktion eingetragen werden; denn sie erlaubt bei bekanntem Eingangssignal nach der Beziehung Gl. (3.91) das Ausgangssignal zu berechnen.

3.5.2. Signalflußplan: Darstellung als Blockdiagramm

Mit der in den vorangegangenen Abschnitten erläuterten Beschreibung des statischen und dynamischen Übertragungsverhaltens der Übertragungsglieder und deren symbolischer Darstellung können wir nunmehr ein dynamisches System unter kybernetischem Aspekt – d. h. dessen Signalübertragung und -umformung als Grundlage für die zu untersuchenden Steuerungsvorgänge – vollständig in grafischer Form beschreiben. (Die Methoden und symbolische Darstellung der zielgerichteten Signalverarbeitung mit Mitteln der analogen und digitalen Rechentechnik werden wir im Abschn. 5. über Informationsverarbeitung nachtragen.) Eine solche grafische Darstellung heißt *Signalflußplan*.

Der *Signalflußplan* eines kybernetischen Systems ist die grafische Darstellung des (statischen und dynamischen) Übertragungsverhaltens der Übertragungsglieder und ihrer Kopplung zum Gesamtsystem (der Struktur des Systems).

D 3.16

Bezeichnet man als *mathematisches Modell* die Gesamtheit aller ein gegebenes System beschreibenden Gleichungen, so können wir auch sagen:

Der *Signalflußplan* ist die grafische Darstellung des mathematischen Modells eines Systems. Das *mathematische Modell* ist hierbei die Gesamtheit aller Gleichungen, die die Beziehungen zwischen allen betrachteten Ein- und Ausgangssignalen beschreiben.

D 3.17

Für Signalflußpläne sind zwei Darstellungsweisen gebräuchlich, die beide bestimmte Vorzüge haben. Die zunächst betrachtete – die *Blockdiagrammform* – basiert auf der Symbolisierung der Übertragungsglieder durch Rechteckblöcke.

Bei der *Signalflußplandarstellung als Blockdiagramm* werden die Übertragungsglieder durch Blöcke und die Signale durch Signal[fluß]linien (mit Richtungspfeil) gezeichnet.

D 3.18

Für den geregelten Gleichstromantrieb, dessen Wirkungsschema im Bild 3.6 gezeigt worden ist, erhält man den im Bild 3.45 dargestellten Signalflußplan mit eingezeichneten Übergangsfunktionen. Dabei sind das Lastmoment m_a und der Erregerstrom i_{err} als konstant angenommen worden. Da wir vereinbarungsgemäß nur die Abweichungen vom Arbeitspunkt betrachten, entfallen diese beiden Störgrößen, denn es gilt

$$m_a = 0, \quad i_{err} = 0. \quad (3.115)$$

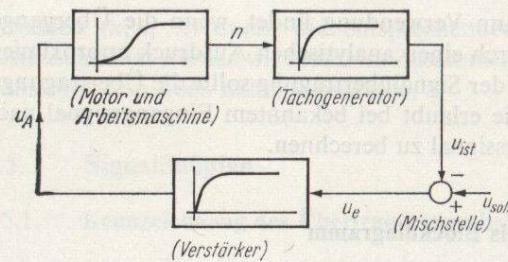


Bild 3.45. Signalflußplan des geregelten Gleichstromantriebs von Bild 3.6 in Blockdiagrammform mit eingezeichneten Übergangsfunktionen

In den Block Motor-Arbeitsmaschine ist dessen Übergangsfunktion, d. h. der Drehzahlverlauf nach einer Sprungänderung der Ankerspannung, eingetragen. Entsprechendes gilt für die anderen Blöcke. Ist die Signalübertragung der einzelnen Glieder in analytischer Form bekannt, so werden vorteilhafterweise die Übertragungsfunktionen in die Blöcke eingetragen. Da diese Übertragungsfunktionen nach Gl. (3.94) den Zusammenhang zwischen den komplexen Amplituden von Ein- und Ausgangssignal vermitteln, werden dabei zweckmäßig die Signale durch ihre (mit großen Buchstaben gekennzeichneten) komplexen Amplituden ersetzt. Auf diese Weise erhält man den im Bild 3.46 gezeichneten Signalflußplan.

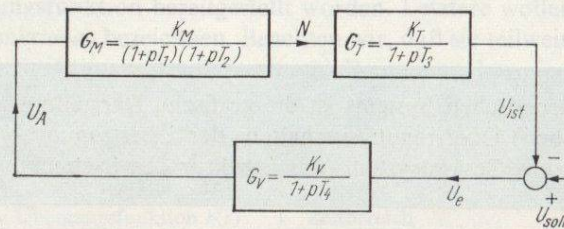


Bild 3.46. Signalflußplan des geregelten Gleichstromantriebs als Blockdiagramm mit eingetragenen Übertragungsfunktionen

Zu den eingetragenen Übertragungsfunktionen für Motor-Arbeitsmaschine (G_M), Tachogenerator (G_T) und Verstärker (G_V) müßten noch die Zahlenwerte für die Faktoren (K_M , K_T , K_V) und die Zeitkonstanten ($T_1, \dots, T_4$) angegeben werden. Wir werden diese Übertragungsfunktionen teilweise später berechnen.

Da wir uns bei den Signalflußplänen zunächst auf Übertragungsglieder mit einem Ein- und einem Ausgangssignal beschränken, benötigen wir in linearen Systemen wenigstens noch zwei weitere Symbole für Stellen der Signalverzweigung und der Signaladdition.

Für die im Bild 3.47a dargestellte Verzweigungsstelle gilt

$$x_1 = x_2 = x. \quad (3.116)$$

Für die Additionsstelle von Bild 3.47b soll gelten

$$x = x_1(\mp) x_2. \quad (3.117)$$

Dieses Symbol wird in den Bildern 3.45 und 3.46 zur Darstellung der Mischstelle von Soll- und Istwert verwendet.

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß es sich bei Bild 3.47a um eine Verzweigung von Signalen handelt. Zur Beschreibung einer Verzweigung von Stoff- oder Energieströmen ist das Verzweigungssymbol allein nicht ausreichend.

Die Einbeziehung nichtlinearer statischer Glieder mit einem Ein- und Ausgangssignal erfolgt unter Verwendung der im Bild 3.10b vorgestellten Symbole mit eingezeichneter statischer Kennlinie. Für die beiden besonders wichtigen Typen nichtlinearer Signalverknüpfung, die Multiplikation und Division, sind außerdem die im Bild 3.48 dargestellten Glieder und Symbole erklärt.

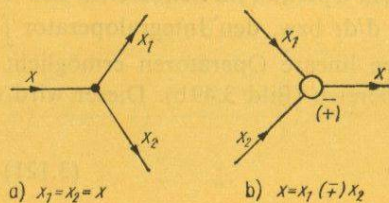


Bild 3.47. Signalverzweigung und Signaladdition

- a) Verzweigungsstelle
b) Additionsstelle

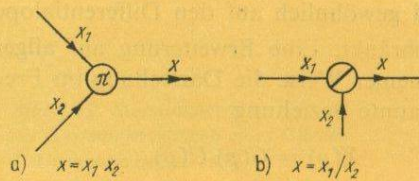


Bild 3.48. Nichtlineare Signalverknüpfungen

- a) Multiplikationsstelle
b) Divisionsstelle

Für die dort gezeichnete *Multiplikationsstelle* gilt

$$x = x_1 x_2. \quad (3.118)$$

Für die *Divisionsstelle* ist vereinbart

$$x = x_1 / x_2. \quad (3.119)$$

3.5.3. Signalflußplan: Darstellung als Signalflußgraph

Neben der Blockdiagrammform wird zur Darstellung von Signalflußplänen auch die in der Graphentheorie übliche Darstellungsweise verwendet. Allgemein gilt:

Ein *Graph* ist ein Netzwerk, bestehend aus *Knoten* und aus *Zweigen*, die diese Knoten verbinden. Ein *Signalflußgraph* ist ein Graph mit gerichteten Zweigen. Die Zweige heißen auch *Kanten*, gerichtete Zweige auch *Bögen*.

D 3.19

Da die Übertragungsglieder gerichtet übertragen, liegt es nahe, diese mit den gerichteten Zweigen zu identifizieren. Die Signale werden dann durch Knoten (kleine Kreise) repräsentiert (Bild 3.49). Somit gilt:

Bei der Darstellung des Signalflußplans als *Signalflußgraph* werden die Signale durch Knoten, die Übertragungsglieder (die Signalumformungen) durch gerichtete Zweige symbolisiert.

D 3.20

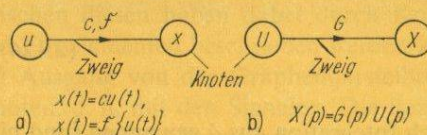


Bild 3.49. Darstellung der Signalübertragung durch Signalflußgraphen

- a) im Zeitbereich
b) im Frequenzbereich

Dabei wird vereinbart, der Darstellung im Zeitbereich (Bild 3.49a) die Beziehung

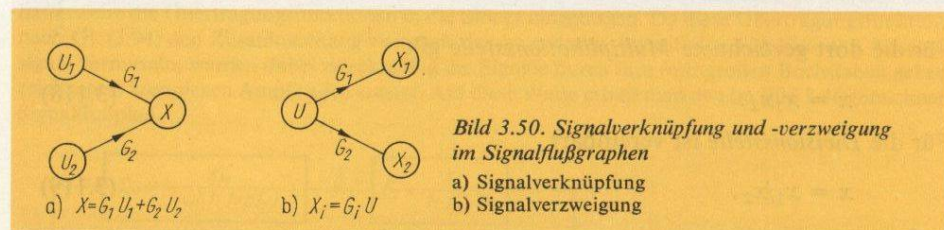
$$x(t) = cu(t) \quad \text{bzw.} \quad x(t) = \mathcal{F}\{u(t)\} \quad (3.120)$$

zuzuordnen. Hierbei ist c eine Konstante und $\mathfrak{F}$ ein Operator im Zeitbereich. Letzterer wird gewöhnlich auf den Differentialoperator d/dt bzw. den Integraloperator $\int dt$ beschränkt. Eine Erweiterung auf allgemeinere lineare Operatoren ermöglicht in bequemer Weise die Darstellung im Frequenzbereich (Bild 3.49b). Dieser wird die bekannte Beziehung

$$X(p) = G(p) U(p) \quad (3.121)$$

zugeordnet.

Zur Darstellung von Systemen als Signalflußgraph muß noch festgelegt werden, in welcher Weise Signalverknüpfungen bzw. -verzweigungen gekennzeichnet werden sollen. Das geschieht in der im Bild 3.50 gezeigten Weise.



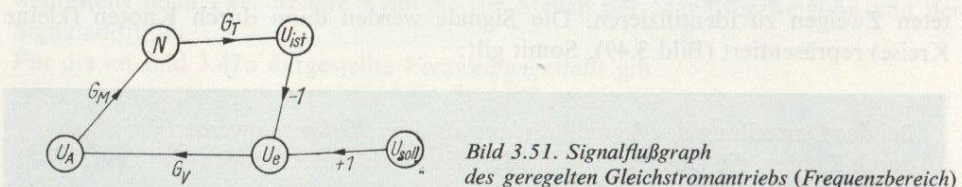
Dabei entspricht dem Signalflußgraphen Bild 3.50a die Beziehung

$$X(p) = G_1(p) U_1(p) + G_2(p) U_2(p), \quad (3.122)$$

die Signalumformung und Addition vereint. Für $G_1 = G_2 = 1$ erhält man eine einfache Signaladdition. Dem Signalflußgraphen Bild 3.50b entsprechen die beiden Gleichungen

$$X_1(p) = G_1(p) U(p), \quad X_2(p) = G_2(p) U(p). \quad (3.123)$$

Mit diesen Vereinbarungen kann nun der Signalflußgraph des geregelten Gleichstromantriebs im Bild 3.51 gezeichnet werden (s. Bild 3.46).



Als Beispiel eines Signalflußgraphen im Zeitbereich sind noch die Systemgleichungen eines Gliedes 1. Ordnung [s. Gln. (2.10), (2.11)]

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= aq(t) + bu(t) \\ x(t) &= cq(t) + du(t) \end{aligned} \quad (2.124)$$

im Bild 3.52 dargestellt. Hierbei wird q durch Integration aus $\dot{q}$ gewonnen (und nicht $\dot{q}$ durch Differentiation aus q). Differentiationen werden häufig vermieden, unter anderem im Hinblick auf eine nachfolgende Simulation am Rechner. Beachten Sie, daß den beiden Gln. (2.124) zwei Teilgraphen entsprechen, die im Bild 3.52 bereits zusammengefügt worden sind!

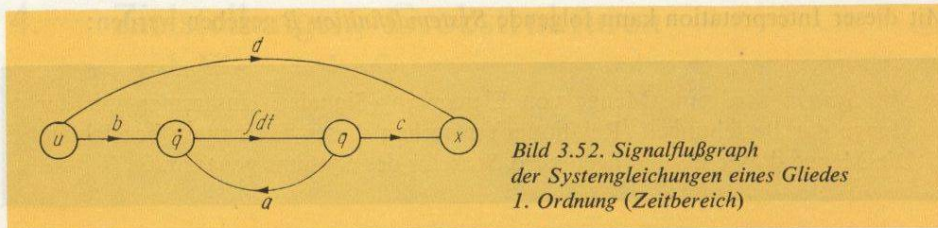


Bild 3.52. Signalflußgraph der Systemgleichungen eines Gliedes 1. Ordnung (Zeitbereich)

Die Darstellung als Blockdiagramm ist besonders naheliegend, wenn man von den Baugliedern eines Steuerungssystems ausgeht, deren Übertragungsverhalten man kennt oder messen kann. Dann kann man diese zunächst durch die leeren Blöcke symbolisieren, in die man danach das ermittelte Übertragungsverhalten einträgt. Bei Ausgang von den Gleichungen für die Elementarprozesse eines Übertragungsglieds oder Systems kann man diese Gleichungen sofort als Teilgraphen zeichnen, die man schrittweise zum Graphen des gesamten Gliedes oder Systems verknüpft. Das werden wir später noch üben. Da die Zahl der dabei auftretenden Signalflußumformungen i. allg. sehr groß ist, empfiehlt sich die platzsparende Darstellungsweise als Signalflußgraph. Mit zunehmender Komplexität der betrachteten Systeme trifft das auch zu, wenn man von Übertragungsgliedern ausgehen kann. Das ist bereits an einem relativ einfachen Objekt mit zwei Ein- und Ausgangsgrößen erkenntlich, wie Bild 3.53 zeigt.

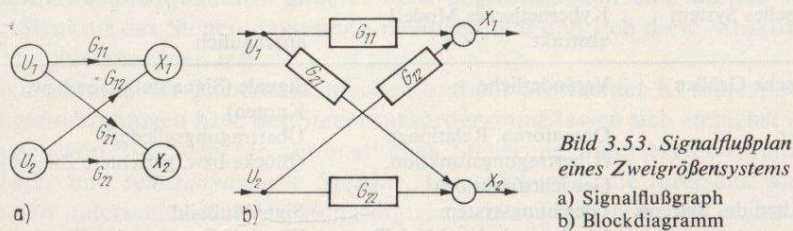


Bild 3.53. Signalflußplan eines Zweigrößensystems
a) Signalflußgraph
b) Blockdiagramm

Ein solches Objekt findet man beispielsweise bei einer Dusche vor. Die Größen u_1 und u_2 sind hierbei die Stellsignale der Ventile für warmes und kaltes Wasser; x_1 und x_2 stellen die austretende Wassermenge und deren Temperatur dar.

3.5.4. Systemdefinition auf der Basis der Darstellung als Signalflußgraph

Auf der Basis der Signalflußgraphendarstellung läßt sich eine gegenüber Definition 2.3 veränderte Interpretation und Definition für ein System geben. Bei der genannten früheren, auf der Blockdarstellung begründeten Definition sind die Elemente mit den Blöcken, d. h. mit den Übertragungsgliedern, identifiziert worden. Die Beziehungen zwischen diesen haben dabei durch Kopplungs- bzw. Strukturmatrizen mit Null- und Einselementen beschrieben werden können.

Bei Ausgang von der Graphendarstellung identifizieren wir die Elemente mit den Knoten, d. h. mit den Signalen. Die Beziehungen (Relationen) zwischen diesen sind komplizierter als die zwischen den Übertragungsgliedern. Sie treten als gerichtete Zweige des Graphen in Erscheinung. Im linearen Fall werden sie beispielsweise durch Gewichts- oder Übertragungsfunktionen beschrieben. Bei Zugrundelegung der Zustandsdarstellung (s. Bild 3.52) beschränken sich diese Beziehungen bei linearen Systemen auf Addition, Konstantmultiplikation und Integration.

Mit dieser Interpretation kann folgende *Systemdefinition B* gegeben werden:

D 3.21

Mit *System* wird eine Menge von Elementen (Signalen) zusammen mit der Menge der Beziehungen (Relationen) zwischen diesen Elementen bezeichnet. Die Menge dieser Beziehungen wird *Struktur* des Systems genannt.

Durch die Relationen erhält das System eine Ordnung, eine Struktur. Sie ist charakteristisch für ein System gegenüber einer Menge. Verkürzt können wir deshalb ein *System als eine geordnete Menge von Elementen* bezeichnen.

Die im Abschn. 2.1.1. erläuterte notwendige Abgrenzung erfolgt hier dadurch, daß solche und nur solche Signale in die Elementenmenge des Systems aufgenommen werden, die für die interessierende Untersuchung benötigt werden.

Abschließend kann nun präzisiert werden, was eingangs als *kybernetischer Aspekt* bezeichnet worden ist (s. Definition 1.9). Tafel 3.9 faßt zusammen, wie unter kybernetischem Aspekt von einem physikalischen System ein kybernetisches Modell abstrahiert wird, das alle zur Lösung der Steuerungsaufgabe benötigten Informationen enthält.

Tafel 3.9. Zur kybernetischen Betrachtungsweise

Physikalisches System	Kybernetisches Modell	
	abstrakt	anschaulich
Physikalische Größen	Veränderliche	Signale (Signalflußlinien bzw. Knoten)
Bauglieder	Operatoren, Relationen (Übertragungsfunktion, Gewichtsfunktion)	Übertragungsglieder (Blöcke bzw. gerichtete Zweige)
Zeitverhalten des Systems	Gleichungssystem (mathematisches Modell)	Signalflußbild (Blockdiagramm oder Graph)

Die veränderlichen Größen des konkreten Systems werden hierbei in die Veränderlichen mathematischer Beziehungen übergeführt, die die Signalübertragungseigenschaften der Bauglieder beschreiben. Das Verhalten des Systems spiegelt sich dann in dem Gleichungssystem bzw. dessen bildlicher Darstellung als Signalflußbild wider.

4. Zielstellungen, Grobstrukturen und Eigenschaften von Systemen der automatischen Steuerung

Im vorangegangenen Kapitel haben wir Prinzipien kennengelernt, nach denen von einem vorliegenden Objekt ein kybernetisches Modell gebildet werden kann, das dessen zur Lösung der Steuerungsaufgaben benötigte statische und dynamische Eigenschaften beschreibt. In den Abschnitten des Teiles II werden ausführlich die Methoden zur Berechnung des Zustands- und Übertragungsverhaltens abgehandelt werden. Darauf aufbauend werden später verschiedenartige Steuerungssysteme untersucht und entworfen werden. Bevor wir jedoch diese ins einzelne gehende Durchführung beginnen, wollen wir uns hier zunächst einen mehr phänomenologischen Überblick verschaffen, welche Aufgabenstellungen für Steuerungssysteme auftreten und welche Grobstrukturen diese Systeme aufweisen müssen, damit sie die gewünschten Eigenschaften und Fähigkeiten erhalten. Wir werden dabei beobachten können, daß quantitativ und qualitativ höhere Steuerungsfunktionen eine höhere Komplexität der Struktur des Steuerungssystems bedingen und daß sich diese Strukturen in einer Hierarchie anordnen lassen.

Nach Umfang der Steuerungsaufgaben und entsprechender Komplexität der Steuerungseinrichtungen bzw. der Steuerungsprogramme lassen sich zunächst zwei Hauptklassen von Systemen der automatischen Steuerung unterscheiden, nämlich *vorangepaßte* und *selbstanpassende Systeme*. Diese Klassen, die ihrerseits wieder Unterklassen unterschiedlicher Leistungsfähigkeit und Struktur haben, sollen in den Abschnitten 4.2. bis 4.4. vorgestellt werden.

Bei komplizierten und großen Systemen erweist es sich als vorteilhaft oder notwendig, die Steuerungsaufgabe und ggf. auch das zu steuernde Objekt zu zerlegen und Teilaufgaben an untergeordnete Steuerungseinrichtungen zu übertragen, die von übergeordneten Einrichtungen angeleitet (koordiniert) werden. Das führt auf *Systeme mit hierarchischer Steuerungsstruktur*, die im Abschn. 4.5. näher betrachtet werden. Das Kapitel schließt mit einigen Bemerkungen zur gerätetechnischen Realisierung von Steuerungssystemen (s. Abschn. 4.6.).

Bei allen Überlegungen wollen wir uns auf automatische Systeme beschränken, bei denen in der Arbeitsphase bis auf Ausnahmesituationen der Mensch nur eine Kontrollfunktion über das Gesamtsystem ausübt und ggf. dessen Zielstellung ändert.

Die folgenden Ausführungen beginnen mit einer Darlegung der in automatischen Systemen vorliegenden Zielstellungen und der zu ihrer Erfüllung zu leistenden Steuerungsfunktionen, weil aus ihnen später die geeigneten Steuerungsstrukturen abgeleitet werden können. Wenn der Leser einige dieser im Abschn. 4.1. gemachten Bemerkungen zunächst nicht voll verstehen sollte, so werden diese beim Studium der folgenden Abschnitte klarer werden. Ferner wird empfohlen, zum Schluß des Kapitels den Abschn. 4.1. noch einmal zu lesen. Nur durch solche systematische Überlegungen kann einige Übersicht über die Fülle automatischer Systeme gewonnen werden.

4.1. Kybernetische Aufgabenstellungen in automatischen Steuerungssystemen

4.1.1. Steuerungsziel: statische und dynamische Optimierung

Mit Steuerung haben wir die zielgerichtete Beeinflussung von Prozeßgrößen bzw. von Systemen bezeichnet (s. Definition 1.2.) Bevor wir uns überlegen, *wie* eine solche zielgerichtete Beeinflussung erfolgen kann, müssen wir fragen, *was* erreicht werden soll, müssen wir also die Zielstellung selbst untersuchen.

Konkrete Zielstellungen besagen:

- I. Wichtige Prozeßgrößen sollen trotz Störungen auf vorgegebenen Werten stabilisiert oder gewünschten Werten nachgeführt werden: Drehzahlen von Maschinen, Temperaturen von Räumen oder Öfen usw. sollen trotz veränderlicher Belastungen und anderer Störgrößen auf festen Sollwerten gehalten werden; der Kurs eines Schiffes oder Flugzeugs soll einem gewünschten Kurs, ein Schneidwerkzeug einer gewünschten Kontur nachgeführt werden.
- II. Die Sollwerte für die Temperaturen, Drücke und für das Verhältnis der Ströme der Eingangskomponenten in einem chemischen Reaktor sollen so eingestellt werden, daß ein zufriedenstellender oder optimaler Betriebszustand gewährleistet ist, daß also das gewünschte Ausgangsprodukt in ausreichender oder möglichst hoher Menge bzw. Qualität entsteht oder daß eine vorgegebene Menge des Ausgangsproduktes mit minimalen Selbstkosten produziert wird.
- III. Ein Prozeß soll bei Änderung der Produktionsaufgabe oder der Prozeßbedingungen in den neuen günstigen Betriebszustand in (möglichst) guter Weise übergeführt werden: Hierzu zählen das An- und Abfahren eines Chargen- sowie eines Produktionsprozesses oder energetischen Prozesses bei Reparatur oder sich änderndem Bedarf (Spitzenlastkraftwerk), die Umsteuerung einer Destillationskolonne bei Änderung des eingesetzten Rohöls, um möglichst schnell wieder optimale Betriebsbedingungen herzustellen.

Die Aufgabe II erfordert nur das statische Prozeßmodell und ist ein statisches Problem, so daß wir von einer *Steuerung des statischen Verhaltens* sprechen können. Die Aufgaben I und III betreffen dagegen das dynamische Verhalten; denn die zur Stabilisierung nötige Kompensation veränderlicher Störgrößen und die Angleichung von Prozeßgrößen an veränderliche Führungsgrößen, wie die Überführung von einem Zustand in einen anderen, können nur unter Einbeziehung der dynamischen Prozeßeigenschaften gelöst werden. Sie werden von letzteren maßgeblich bestimmt. Deshalb handelt es sich hier um eine *Steuerung des dynamischen Verhaltens*.

Als Grundlage für die Lösungsfindung und zur Beurteilung der Güte einer vorgeschlagenen Steuerung benötigen wir noch ein quantitatives Maß. Das ist die *Zielfunktion*. Bei den Problemen I und III kann hierzu die Zeit T dienen, in der das automatische System eine Sprungstörung bis auf eine vorgegebene Fehlerschranke beseitigt bzw. in der der Prozeß in den neuen gewünschten Zustand übergeführt wird. Die Zeit T drückt dabei die Güte der automatischen Steuerung aus. Beim Problem I kann auch das Integral über den absoluten Fehler zwischen der gesteuerten Größe und ihrem Sollwert Verwendung finden. In diesem Fall kann man von einer *Fehlerfunktion* sprechen. Bei der Problemklasse II sind als Zielfunktion die Selbstkosten bei vorgegebenem Produktionsumfang, ferner der Wirkungsgrad, der Gewinn u. a. geeignet. Eine Präzisierung der Zielfunktion wird später gegeben werden. Zu beachten ist, daß die wesentlichen Zielfunktionen von dem für den zu automatisierenden Prozeß

Verantwortlichen bestimmt und mit dem Automatisierungsingenieur zusammen formuliert werden sollten. Hierbei sind in erster Linie ökonomische und technologische Gesichtspunkte und Sicherheitsfragen maßgebend.

Je nachdem, ob die Zielfunktion eine Güte oder einen Gewinn beinhaltet oder ob sie einen Fehler oder die Kosten ausdrückt, besteht das erstrebenswerte Ziel darin, die steuerbaren Größen bzw. freien Parameter innerhalb der zulässigen bzw. möglichen Grenzen so zu verändern, daß die Zielfunktion einen maximalen bzw. minimalen Wert erhält. Dann liegt eine *optimale Steuerung* vor. In anderen Fällen begnügt man sich – wegen der ungenauen Kenntnis des Prozesses oder zwecks Herabsetzung des Geräte- oder Rechenaufwands – mit einer suboptimalen, *zufriedenstellenden Steuerung*.

Fassen wir zusammen:

Entwurf und Beurteilung der Arbeitsweise einer Steuerung erfolgen auf Grund einer *Zielfunktion*. In entsprechenden Fällen kann diese auch Güte-, Fehler-, Gewinn- oder Kostenfunktion genannt werden. Eine *optimale Steuerung* ist durch einen Extremwert der Zielfunktion bezüglich der Steuergrößen bzw. freien Parameter (unter Beachtung der diesen auferlegten Beschränkungen) gekennzeichnet. Bei einer *zufriedenstellenden Steuerung* liegt der Wert der Zielfunktion in einem zulässigen Toleranzgebiet.

S 4.1

Beachten wir, daß die eingangs genannten Steuerungsziele, kybernetisch gesehen, die Beeinflussung und Verbesserung des statischen bzw. des dynamischen Verhaltens umfassen, und vereinbaren wir, die optimale Steuerung als eigentliches Ziel und suboptimale Steuerungen als aus bestimmten Gründen gerechtfertigte Teilerfüllungen dieses Zieles anzusehen, so können wir sagen:

Unter kybernetischem Aspekt sind die beiden Hauptziele für die automatische Steuerung

S 4.2

1. die Optimierung des stationären Verhaltens, kurz *statische Optimierung*,
2. die Optimierung des dynamischen Verhaltens, kurz *dynamische Optimierung*, insbesondere
 - a) die optimale *Eliminierung der Auswirkungen von Störgrößen* bei konstanten Führungsgrößen (die optimale *Stabilisierung* der gesteuerten Größen)
 - b) die optimale *Nachführung* bei veränderlichen Führungsgrößen (bei gleitendem optimalem Arbeitspunkt)
 - c) die optimale *Umsteuerung* des Prozesses aus einem vorliegenden in einen gewünschten neuen Zustand.

4.1.2. Hauptsteuerungsfunktionen

Zur Erfüllung vorstehender Ziele müssen eine Reihe von Aufgaben und Funktionen vom Konstrukteur beim Systementwurf gelöst bzw. vom automatischen System in der Arbeitsphase geleistet werden. Wir beschränken uns dabei auf die kybernetisch wichtigen Aufgaben und Funktionen und lassen die außer acht, die der gerätetechnischen Realisierung dienen, z. B. Fertigung und Montage.

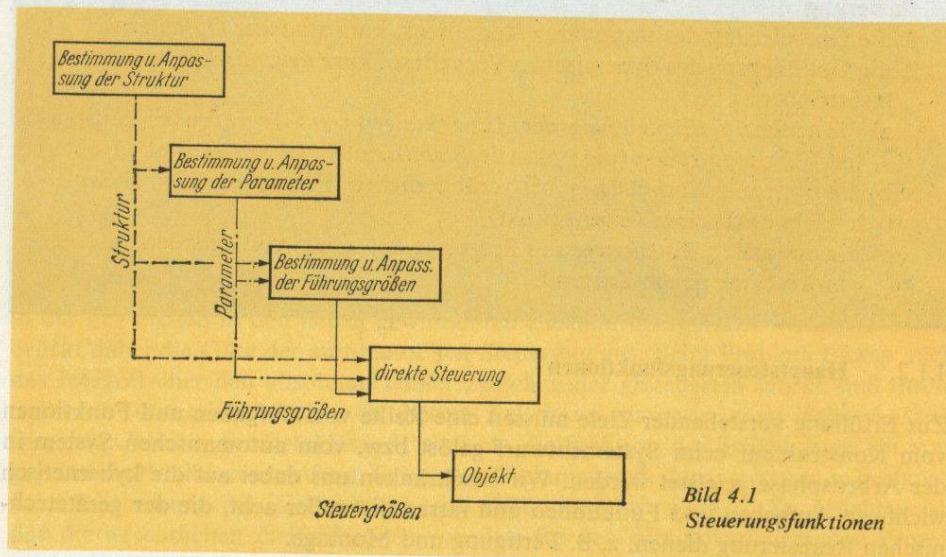
Vor der Charakterisierung der Steuerungsfunktionen soll jedoch noch eine Bedingung beachtet werden, die deren Lösung bzw. Durchführung wesentlich bestimmt. Sie betrifft die Frage, ob die entsprechende Steuerungsaufgabe nur einmalig – beim Entwurf des automatischen Systems – gelöst zu werden braucht oder ob sie – wegen sich ändernder Prozeßbedingungen – während der Arbeit des automatischen Systems wiederholt (laufend, in einem zeitlichen Zyklus oder nach Auslösung bei Grenzwertüberschreitungen) ausgeübt werden muß. Handelt es sich im ersten Fall nur um eine einmalige *Bestimmung* der Problemlösung, so bedingt der zweite Fall eine fortwährende *Anpassung* (Korrektur) der veralteten Lösungen an die veränderten Prozeßbedingungen. Zwecks begrifflicher Klarheit wollen wir vereinbaren:

- D 4.1** Mit dem Begriff *Bestimmung* ist im folgenden eine einmalige, mit dem Begriff *Anpassung* eine (öfters) wiederholte Lösung der im Zusammenhang genannten Steuerungsaufgabe gemeint.

Schließlich wird im folgenden der Begriff *Algorithmus* Verwendung finden. Für ihn soll als Definition gelten:

- D 4.2** Mit *Algorithmus* bezeichnet man eine eindeutige Vorschrift, bestehend aus einer endlichen Folge von elementaren Operationen, zur schrittweisen Lösung aller Aufgaben einer bestimmten Aufgabenklasse, bei den hier betrachteten Aufgaben insbesondere zur Ermittlung der Steuer- und Führungsgrößen aus gemessenen Prozeßgrößen und Zielvorgaben.

Auf den Begriff des Algorithmus und der Operation werden wir im Zusammenhang mit der digitalen Informationsverarbeitung im Abschn. 5.3.4.3. noch eingehen. Bedenkt man, daß die Berechnung der Steuergrößen und der günstigen Führungsgrößen durch Steuereinrichtungen mit wählbarer Struktur und einstellbaren Parametern



bzw. mit Steueralgorithmen erfolgt, deren Struktur und Parameter bestimmt werden müssen, so ergeben sich die im Bild 4.1 dargestellten prinzipiellen Steuerungsfunktionen.

4.1.2.1. Direkte Steuerung von Prozeßgrößen

Im Rahmen dieser Aufgabe erfolgt die laufende bzw. zyklische Ermittlung der (optimalen) Steuergrößen, die die Stabilisierung wichtiger Prozeßgrößen auf vorgegebenen Sollwerten bzw. deren Nachführung gegenüber veränderlichen Führungsgrößen gewährleisten. Das geschieht auf Grund vorher berechneter *Steuer- bzw. Regelalgorithmen*. Deren Realisierung erfolgt in *Steuer- bzw. Regeleinrichtungen* mit wählbarer Struktur und einstellbaren Parametern bzw. mittels frei programmierbarer, mit dem zu steuernden Prozeß gekoppelter *Prozeßrechner*.

Direkte Steuerungsfunktionen, die nur einmalig ausgeübt werden (z. B. das einmalige Ausschalten einer Beleuchtung) sind kybernetisch trivial. (Werden laufend die Bedingungen für das Ein- bzw. Ausschalten einer Beleuchtung geprüft, so liegt bereits eine laufende Steuerung vor, auch wenn diese nur in größeren Abständen zu einer Änderung des Steuersignals führt.) Deshalb entfällt hier das Bestimmungsproblem. Der Begriff Anpassung wird hier nicht verwendet. Statt dessen wird einfach von *direkter Steuerung* bzw. – bei einer solchen mit Rückmeldung – von *Regelung* (s. Abschn. 4.2.2.) gesprochen.

4.1.2.2. Bestimmung bzw. Anpassung der Führungsgrößen

Diese Funktion dient vornehmlich der statischen Optimierung. Durch einmalige Bestimmung optimaler Sollwerte kann ein zeitinvarianter Prozeß auf seinen optimalen Betriebszustand gebracht werden. Bei Prozessen, die, bedingt durch Änderungen der Anlage (Ablagerungen, Katalysatorveränderungen u. a.), der Eigenschaften der Eingangsprodukte oder der Produktionsaufgabe (der Zielfunktion), zeitvariabel sind, kann durch laufende Anpassung der Führungsgrößen der optimale stationäre Zustand bei langsamen Änderungen aufrechterhalten und nach vorübergehend schnelleren Änderungen wiederhergestellt werden.

Es kann auch bei dynamischen Umsteuersprozessen im Rahmen einer dynamischen Optimierung der optimale Verlauf der Führungsgrößen vorher berechnet und dann dem Prozeß aufgegeben werden. Diese Umsteuerung kann jedoch auch durch direkte Einwirkung eines Prozeßrechners auf die Steuergrößen erfolgen. Bemerkt sei schließlich, daß es auch Steuerungssysteme mit systemunabhängigen Führungsgrößen gibt, z. B. Ortungseinrichtungen oder Flugkörper zur automatischen Verfolgung von Luftzielen.

4.1.2.3. Bestimmung bzw. Anpassung der Parameter

Betrachten wir beispielsweise die in 4.1.2.1. genannte Stabilisierung wichtiger Prozeßgrößen. Sie erfolgt üblicherweise mit Regeleinrichtungen (s. Abschn. 4.2.2.). In sehr einfachen Fällen ist das ein Verstärker mit veränderbarem Verstärkungsfaktor. Meist muß jedoch zu einem dem Eingangssignal proportionalen Ausgangssignal noch eine dem Integral des Eingangssignals proportionale Größe addiert werden. Die Steuergröße u wird dann aus der Eingangsgröße des Reglers (hier x genannt) wie folgt berechnet:

$$u(t) = K_R x(t) + K_I \int_0^t x(\tau) d\tau \quad (4.1)$$

Um eine gute Stabilisierung der Prozeßgrößen, d. h. eine genaue und möglichst schnelle Eliminierung von Störungen zu erzielen, müssen die Parameter K_R und K_I geeignet bestimmt werden. Bei sich stärker ändernden statischen und dynamischen Übertragungseigenschaften des Prozesses müssen sie außerdem wiederholt korrigiert, also angepaßt werden, damit das gute (optimale) dynamische Verhalten gewährleistet bleibt.

In ähnlicher Weise müssen die Parameter der Algorithmen zur Berechnung der für optimales stationäres Verhalten notwendigen Führungsgrößen, die normalerweise in einem Rechner programmiert werden, richtig bestimmt und in besonderen Fällen während der Arbeit des automatischen Systems korrigiert werden. Dadurch wird angestrebt, daß der optimale Betriebszustand des Systems möglichst schnell gefunden und nach Änderungen wieder eingenommen wird.

4.1.2.4. Bestimmung bzw. Anpassung der Struktur

Diese Aufgabe betrifft die Bestimmung der Struktur der fest programmierten direkten Steuerungseinrichtungen (z. B. die Wahl der Reglertypen) und die Bestimmung bzw. Anpassung der Struktur der direkten Steuerungs- und statischen Optimierungsalgorithmen auf den frei programmierbaren Prozeßrechnern.

Besonders vermerkt sei abschließend, daß die vorstehenden Aufgaben die Ermittlung der statischen und dynamischen Eigenschaften der zu steuernden Objekte voraussetzen bzw. einschließen; denn zur Ermittlung der Steueralgorithmen wird stets die Kenntnis des kybernetischen Modells des Objekts und die Vorgabe einer Zielfunktion benötigt.

4.1.3. Zeitliche Phasen der Synthese und Arbeit eines automatischen Systems

Die genannten Aufgaben müssen nun laufend, zyklisch oder wenigstens einmalig ausgeübt bzw. gelöst werden. Das erfolgt zu zeitlich verschiedenen Phasen. Für ein besseres Verständnis wollen wir uns einen groben Einblick über die Vorbereitungs- und Arbeitsphasen eines automatischen Prozesses verschaffen, soweit diese für die Lösung und Erfüllung der genannten Aufgaben wesentlich sind. Dabei haben wir insbesondere die Automatisierung eines Produktionsprozesses im Auge.

Am Anfang der Automatisierungsvorbereitungen (für einen technologischen Prozeß) steht die *Formulierung der Automatisierungsaufgaben*. Sie erfolgt in Form einer *Automatisierungskonzeption*. Darin sind – neben wichtigen Meß-, Kontroll-, Registrier- und Bilanzierungsaufgaben – die wesentlichen geforderten Steuerungs-, Regelungs- und Optimierungsfunktionen festgelegt.

Auf Grund dieser Aufgabenstellungen wird zu einem relativ frühen Zeitpunkt die Instrumentierung mit MSR-Einrichtungen und ggf. Prozeßrechnern erarbeitet. Diese Phase wird *Projektierung* genannt. In ihr sind die wesentlichen Geräte und deren Verknüpfungen (in Form von Ausrüstungslisten und Schaltplänen), die Stellorte und die Meßorte festzulegen. Das kybernetische Modell der technologischen Anlage ist in dieser Phase meist nur sehr ungenau und lückenhaft bekannt, da sich diese noch in der Projektierung befindet. Es basiert auf theoretischen Untersuchungen und Ana-

logieschlüssen von Pilot- oder ähnlichen bereits ausgeführten Anlagen. Somit wird zu diesem Zeitpunkt die Festlegung von Grobstrukturen für die Steuereinrichtungen bei unvollständiger Information über den Prozeß gefordert.

Erst in einer späteren Phase, bei der Inbetriebnahme, können die statischen und dynamischen Eigenschaften von Anlagenteilen gemessen und damit das kybernetische Modell der Anlage bzw. von Anlagenteilen präzisiert werden. Dann sind die Voraussetzungen für die Präzisierung bzw. Festlegung der Struktur und Parameter der direkten Steuereinrichtungen und der direkten Steueralgorithmen gegeben. Bei den herkömmlichen Reglern erfolgte die Festlegung der Struktur (des Reglertyps) bisher weitgehend in der Projektierungsphase, und die Bemessung der Parameter wurde von den Inbetriebsetzungsingenieuren häufig an Ort und Stelle unter starker Vereinfachung der realen Verhältnisse durch Anwendung sog. *Bemessungsvorschriften* erledigt.

Für die Steigerung der Güte wichtiger und komplizierter (z. B. verkoppelter) Regelungen, insbesondere aber für die Ausarbeitung von Algorithmen zur automatischen Optimierung bei rechnergesteuerten Prozessen ist jedoch eine der Inbetriebsetzung vorausgehende *Entwurfsphase* notwendig.

In einer ersten *Phase des Entwurfs der direkten Steuerungen* werden die Übertragungseigenschaften wichtiger Strecken mittels Messung und/oder Berechnung bestimmt und danach die Parameter und ggf. Strukturen für die direkten Steuerungen ermittelt. Hierbei wird mit zunehmender Komplexität der Steuerungsobjekte die Verwendung von Rechnern erforderlich. Auf diesen werden die Objekte simuliert (nachgebildet) und günstige Strukturen und Parameter für die Steuereinrichtungen bzw. -algorithmen maschinell bestimmt. Man spricht in diesem Fall von einem *rechnergestützten oder maschinellen Entwurf*.

In einer damit verbundenen *Phase der Inbetriebsetzung der direkten Steuerungen* werden alsdann die gefundenen Parameter der Steuereinrichtungen eingestellt und die für die Prozeßrechner programmierten Steueralgorithmen eingefahren. Falls das für den Entwurf benutzte Modell und die vorausgesetzten Störungen den realen Prozeß nicht überall genügend genau wiedergeben, werden hierbei evtl. Korrekturen erforderlich.

Bei vorgesehenen statischen Optimierungen und dynamischen Anpassungen werden in einer weiteren *Entwurfsphase für die Algorithmmierung der höheren Steuerungsfunktionen* (häufig parallel zur Inbetriebnahme) statische und ggf. dynamische Modelle des Gesamtprozesses erstellt und die Algorithmen für die Ermittlung optimaler Führungsgrößen und für evtl. notwendige parametrische Anpassungen bestimmt. Diese werden dann in weiteren *Einfahrphasen für die höheren Steuerungsfunktionen* schrittweise dem Prozeßrechner übertragen.

Der erfolgreichen Inbetriebsetzung schließt sich die eigentliche *Arbeitsphase* des automatisierten bzw. automatischen Prozesses an. Diese umfaßt in erster Linie den *stationären Betrieb* und darüber hinaus *Umsteuer- sowie An- und Abfahrprozesse*, wie sie bei Produktionsänderungen sowie bei Charginbetrieb und vor und nach Produktionsunterbrechungen (z. B. zwecks Reparatur) auftreten. Bei häufigen Umsteuer- oder An- und Abfahrvorgängen (z. B. bei Spitzenlastkraftwerken) wird man bemüht sein, auch diese möglichst effektiv zu gestalten und mittels Rechners oder spezieller Steuereinrichtungen automatisch durchzuführen. Solche effektiven Umsteueralgorithmen (einschließlich An- und Abfahralgorithmen) müssen dann ebenfalls in einer besonderen Entwurfsphase ausgearbeitet werden. Für *Sondersituationen* mit geringem

Wiederholungsgrad, wie sie insbesondere bei speziellen Havariesituationen auftreten, wird man i. allg. die vorhandenen Rechner nur zur Entscheidungshilfe und -vorbereitung verwenden und die Entscheidung selbst und deren Durchführung dem für die Anlage verantwortlichen Techniker oder Ingenieur übertragen.

Zusammenfassend wollen wir festhalten:

D 4.4

Bei der Verwirklichung eines automatischen Steuerungssystems unterscheiden wir *Vorbereitungs- und Arbeitsphasen*. Die Vorbereitungsphasen umfassen die Erarbeitung der *Automatisierungsaufgabenstellungen*, die *Projektierung* sowie aufeinander folgende und zuweilen ineinander geschachtelte Phasen des *Steuerungsentwurfs* und der *Inbetriebsetzung*. Zu den Arbeitsphasen zählen der *stationäre Betrieb*, *Umsteuervorgänge* einschließlich An- und Abfahrvorgänge sowie *Sondersituationen* und notwendig werdende Anpassungs- und Korrekturmaßnahmen.

4.1.4. Vorangepaßte und selbstanpassende Systeme

Nach vorstehenden Betrachtungen können wir zwei Hauptklassen von Systemen der automatischen Steuerung definieren. Diese sind die *vorangepaßten* und die *selbstanpassenden Systeme*:

D 4.5

Vorangepaßte Steuerungssysteme sind solche, bei denen Struktur und Parameter der direkten Steuereinrichtungen bzw. direkten Steueralgorithmen und die Führungsgrößen in der Vorbereitungsphase bestimmt, bei Inbetriebsetzung eingestellt und von der Steuereinrichtung nicht verändert werden. Die Führungsgrößen dürfen auch durch von außen vorgegebene Ziele (Führungssteuerung) oder als Zeitplan vorliegen (s. Abschnitte 4.2.1. und 4.2.2.). (In diesem Fall können sie nicht in der Vorbereitungsphase eingestellt werden.)

Die hierzu komplementäre Klasse bilden die selbstanpassenden oder adaptiven Systeme:

D 4.6

Selbstanpassend (adaptiv) sind Systeme, bei denen wenigstens eine der übergeordneten Steuerungsfunktionen – Bestimmung bzw. Anpassung der Führungsgrößen, Anpassung der Parameter und Anpassung der Struktur – von der Steuereinrichtung in der Arbeitsphase selbständig (automatisch) durchgeführt wird. Soll ausgedrückt werden, daß selbstanpassende Systeme der statischen bzw. dynamischen Optimierung dienen, so bezeichnet man sie auch als *selbstoptimierende Systeme* für die statische bzw. dynamische Optimierung.

Die in der Arbeitsphase von automatischen Systemen ausgeübten Steueralgorithmen, die *Arbeitsalgorithmen*, sind also beim vorangepaßten System starr, beim selbstanpassenden System dagegen flexibel, d. h. anpassungsfähig. Bei den vorangepaßten Systemen werden Struktur und Parameter der Arbeitsalgorithmen in der Entwurfs-

phase mit Hilfe von *Entwurfsalgorithmen* einmalig ermittelt. Da in der Entwurfsphase nicht die feste Bindung an den Prozeß vorliegt wie in der durch sog. *Echtzeitbetrieb* gekennzeichneten Arbeitsphase, sind die Forderungen an Entwurfsalgorithmen nicht so hoch.

Beachten wir, daß die einmalige Bestimmung von Struktur, Parametern und Führungsgrößen im wesentlichen auf die Entwurfsphase konzentriert ist, so können wir den Begriff Bestimmung durch *Entwurf* ersetzen. Eine wiederholte Anpassung von Struktur, Parametern und Führungsgrößen durch den Ingenieur während der Arbeit eines automatisierten Systems würde praktisch meist den Charakter eines wiederholten Entwurfs haben. Deshalb ist bei der Anpassung insbesondere das Problem der automatischen Anpassung, der *Selbstanpassung*, von Interesse. Damit ist es möglich, die interessierenden Aufgabenklassen auf die in Tafel 4.1 angegebenen zu beschränken.

Tafel 4.1. Kybernetische Aufgabenstellungen bei Entwurf und Arbeit automatischer Steuerungssysteme

Ziel \ Aufgabe	Entwurf (Bestimmung in Entwurfsphase)		Automatische Anpassung (in Arbeitsphase)	
	zufriedenstellend	optimal	zufriedenstellend	optimal
Statisches Verhalten	statischer Entwurf	statische Optimierung	statische Selbstanpassung	statische Selbstoptimierung
Dynamisches Verhalten	dynamischer Entwurf	dynamische Optimierung	dynamische Selbstanpassung	dynamische Selbstoptimierung

In dieser Tafel ist die statische (dynamische) Optimierung als eine Unterklasse des statischen (dynamischen) Entwurfs anzusehen. Das gleiche gilt für die Selbstoptimierung und Selbstanpassung.

4.2. Grundtypen vorangepaßter Systeme

In diesem Abschnitt sollen die beiden Grundtypen vorangepaßter Systeme vorgestellt werden. Das sind die *Vorwärtssteuerung* (s. Abschn. 4.2.1.) und die *Regelung* (s. Abschn. 4.2.2.). Nach Definition 4.5 sind ihre Struktur und Parameter in der Entwurfsphase bestimmt worden und während der Arbeitsphase fest. Während letzterer üben sie die Funktion der direkten Steuerung aus.

Steuerungsfunktion vorangepaßter Systeme ist die direkte Steuerung von Prozeßgrößen (die als Ausgangsgrößen angesehen werden) mittels geeigneter Steuergrößen entsprechend einem vorgegebenen Führungsgrößenverlauf.

S 4.3

4.2.1. Vorwärtssteuerung

4.2.1.1. Prinzip und Definition

Der einfachste Grundtyp ist die *Vorwärtssteuerung* oder *offene Steuerung*, die wie folgt erklärt werden kann:

D 4.7

Die *Vorwärtssteuerung* (*offene Steuerung*) ist ein Steuerungsvorgang *ohne* Rückmeldung, bei dem die zu steuernden Größen eines Objekts durch geeignete Steuergrößen über eine *offene* Wirkungskette zielgerichtet beeinflusst werden. Die offene Wirkungskette wird (*offene*) *Steuerkette* genannt.

Das Wirkungsschema einer einfachen Steuerkette mit einer Ein- und Ausgangsgröße zeigt Bild 4.2. Den gesteuerten Teil der Anlage haben wir bereits im Abschn. 1.4.2. als *Strecke* S bezeichnet. Deren Ausgangssignal ist die *gesteuerte Größe* x , deren Eingangssignale sind die steuerbare *Stell- oder Steuergröße* u und die nicht steuerbare *Störgröße* z . Zur Durchführung der Steuerungsaufgabe wird eine *Steuereinrichtung* St benötigt, die auf Grund der *Führungsgröße* w über die Steuergröße u die Ausgangsgröße x beeinflusst. Somit liegt eine Steuerung *ohne Rückmeldung* der erzielten Steuerwirkung vor. Steuereinrichtung und Strecke bilden die (*offene*) *Steuerkette*.

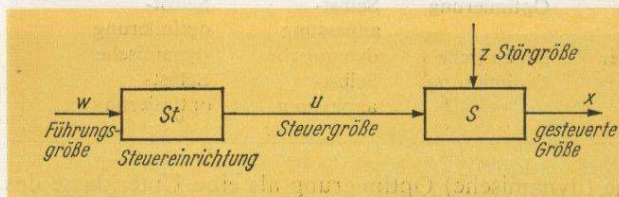


Bild 4.2. (Offene) Steuerkette

4.2.1.2. Beispiele: Zeitplan-, Führungs- und Ablaufsteuerung

Ein Beispiel einer Vorwärtssteuerung haben wir bereits bei der Steuerung der Temperatur eines Raumes (s. Bilder 1.5 und 1.6) betrachtet. Öffnet die Hausfrau auf Grund der morgens abgelesenen Außentemperatur das Stellventil der Heizung um einen ihrer Erfahrung entsprechenden Betrag, ohne die eigentliche Zielgröße, die Raumtemperatur, zu beobachten, so liegt eine solche offene Steuerung ohne Rückmeldung vor. Durch Öffnen von Türen und Fenstern und durch Änderung der Warmwassertemperatur, d. h. bei Auftreten nicht beachteter Störgrößen, wird sich die tatsächliche Raumtemperatur von der gewünschten unterscheiden.

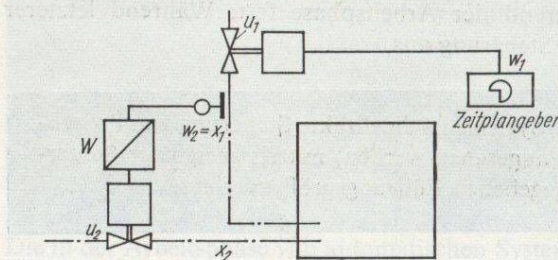
Bild 4.3. Verhältnisssteuerung
(Zeitplan- und Führungssteuerung)

Bild 4.3 zeigt zwei weitere Steuerketten (bezüglich der verwendeten Symbole s. Tafel 3.5). Soll beispielsweise in einem Ofen für die Wärmebehandlung von Werkstücken ein bestimmter zeitlicher Temperaturverlauf (wiederholt) verwirklicht werden, so kann man bei bekanntem kybernetischem

Modell den hierzu erforderlichen Zeitverlauf des Heizölstroms x_1 im voraus berechnen. Dieser Zeitverlauf kann durch einen sog. *Zeitplangeber* (z. B. eine sich drehende Kurvenscheibe, die einen Abgriff entsprechend ihrer Kontur verstellt) über die von diesem nach einem Zeitplan ausgegebene Führungsgröße w_1 gesteuert werden. Da die Zielgröße, die Ofentemperatur, nicht rückgemeldet wird, handelt es sich wieder um eine Vorwärtssteuerung. Wegen der als Zeitplan vorliegenden Führungsgröße wird sie als *Zeitplanvorwärtssteuerung* bezeichnet.

Durch eine zweite Steuerkette wird bewirkt, daß der zur Verbrennung benötigte (im voraus ermittelte) Luftstrom x_2 dem Heizölstrom x_1 nachgeführt wird. Die Führungsgröße w_2 dieser Kette ist somit x_1 . Der Heizölstrom x_1 wird gemessen und steuert über einen Wandler W , der den kleinen Differenzdruck Δp des Durchflußmessers in den zur Verstellung des Ventils benötigten Druck p umformt, mittels der Steuergröße u_2 den Luftstrom x_2 . Der gewünschte Proportionalitätsfaktor $k = x_2/x_1$ kann am Wandler eingestellt werden. Eine solche Steuerung mit veränderlicher, vorher unbekannter Führungsgröße heißt *Führungssteuerung*.

Bild 4.3 kann auch als eine Vorwärtssteuerung zur Herstellung eines bestimmten Mischungsverhältnisses zweier Flüssigkeitsströme x_1 und x_2 in einen chemischen Reaktor interpretiert werden. In beiden Fällen ist bei Änderung der Vordrücke, bei Verunreinigungen in den Ventilen, bei Änderung der Eigenschaften der zu mischenden Komponenten u. a. die Erfüllung des Steuerungsziels nicht gewährleistet.

Neben den genannten Zeitplan- und Führungssteuerungen existiert eine weitere wichtige Klasse, bei der der Steuerbefehl von den Werten (Abläufen) bestimmter Zustandsgrößen des Steuerungssystems und einem gegebenen Programm abhängt. Das sind die sog. *Ablaufsteuerungen*. Beispiele hierfür sind die Stillsetzung bzw. Umkehr des Vorschubs an einer Werkzeugmaschine durch einen Grenzwertschalter, der den Weg des Werkzeugs (Bohrer, Drehstuhl, Fräser) begrenzt. Auf diese Weise kann ein abgelaufener Arbeitstakt beendet und entsprechend dem eingegebenen Programm ein neuer ausgelöst werden. Ein weiteres Beispiel ist eine Aufzugsteuerung.

Zur Aufnahme des Programms dient ein *Programmgeber*. Meist werden die maßgebenden Zustandsgrößen nur auf die Erfüllung einer gegebenen Bedingung geprüft. Sie haben dann nur zwei bedeutungsvolle Werte, z. B. „Grenzwert erreicht“ oder „Grenzwert nicht erreicht“. Auch die Ausgangssignale des Programmgebers (Führungsgrößen) nehmen häufig nur zwei Werte an, z. B. „Motor ein“ oder „Motor aus“. Dann kann die Gleichung für die Führungsgrößen als sog. *logische Gleichung* formuliert und durch ein *Schaltssystem*, bestehend aus einer Verknüpfung elementarer *Logikglieder*, realisiert werden. Hierauf werden wir im Abschn. 5.3.2. zurückkommen.

4.2.1.3. Charakteristische Eigenschaften von Vorwärtssteuerungen

Charakteristisch für Vorwärtssteuerungen ist allgemein:

Durch eine vorangepaßte Vorwärtssteuerung kann die Erfüllung einer Steuerungsaufgabe nur gewährleistet werden, wenn

- a) die Übertragungseigenschaften der Strecke bekannt und zeitinvariant sind und
- b₁) keine wesentlichen Störungen auftreten oder
- b₂) wesentliche Störungen gemessen und in die Steuerung einbezogen werden.

S 4.4

Dadurch, daß bei der Verhältnissteuerung Bild 4.3 die Führungsgröße für die zweite Komponente x_2 nicht von w_1 , sondern von x_1 abgeleitet wird, werden im Sinn von Satz 4.4 b₂ Störungen in x_1 gegenüber dem gewünschten Verlauf w_1 erfaßt und bei der Zuteilung von x_2 berücksichtigt. Bei der in den Bildern 1.5 und 1.6 dargestellten

Steuerung könnte das Ventil zusätzlich von der Störgröße „Fensterstellung“ betätigt werden. Auf solche *Störgrößenaufschaltungen* werden wir später zurückkommen.

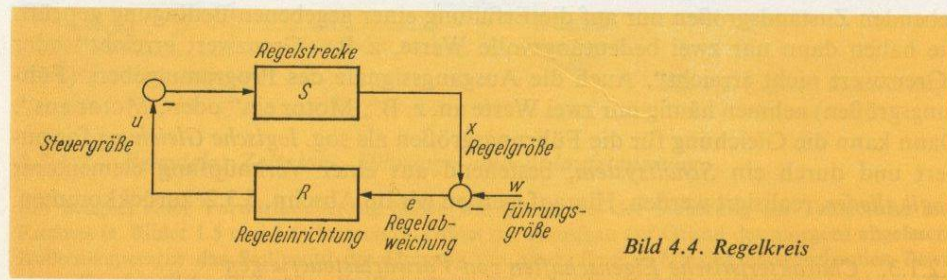
Die Bedingungen von Satz 4.4 a und b_1 sind besonders gut bei Werkzeugmaschinen erfüllt, weshalb Vorwärtssteuerungen dort eine besonders große Bedeutung haben. Eine weitere wichtige Aufgabe erfüllen sie als *Sicherheitssteuerungen* zum Abschalten von Maschinen und Anlagen jeglicher Art bei Gefahrensituationen. Ein Musterbeispiel ist die Abschaltung eines Kernreaktors bei zu hohem Neutronenfluß und bei zu schnellem Anstieg desselben.

Schließlich sei noch vermerkt, daß früher die Bedeutung des Begriffs Steuerung auf die Vorwärtssteuerung eingeengt gewesen ist. Entsprechend dem internationalen Sprachgebrauch wird jedoch in diesem Buch der Begriff Steuerung als Oberbegriff für jegliche zielgerichtete Beeinflussung genommen (s. Definition 1.2).

4.2.2. Ein- und Mehrgrößenregelung

4.2.2.1. Prinzip und Definition

Zur Beseitigung des Einflusses nichtgemessener Störungen, die die Vorwärtssteuerung nicht leistet, ist es notwendig, die zu steuernde Größe x (in obigem Beispiel die Raum- bzw. Ofentemperatur) fortlaufend zu messen, deren tatsächlichen Wert mit dem gewünschten Wert w zu vergleichen und in Abhängigkeit von der erhaltenen Abweichung e wieder auf das Objekt einzuwirken. Die Auswirkungen dieses Stelleingriffs werden dann wieder kontrolliert und mit dem Sollwert verglichen, so daß auch bei Anwesenheit von Störungen die Erfüllung der Steuerungsaufgabe gesichert wird.



Objekt und Steuereinrichtung bilden in diesem Fall eine Kreisstruktur (Bild 4.4), weil die Ausgangsgröße x des Objekts S auf den Eingang der Einrichtung R wirkt, deren Ausgangsgröße u wieder Eingangsgröße von S ist. Diese Struktur wird *Regelkreis*, der Vorgang *Regelung* genannt. Somit können wir definieren:

D 4.8

Die *Regelung* ist ein Steuerungsvorgang mit Rückmeldung, bei dem die zu steuernde Größe fortlaufend gemessen und mit der Führungsgröße verglichen wird; bei Auftreten einer Abweichung zwischen beiden erfolgt fortlaufend eine Steuerung in der Weise, daß die gesteuerte Größe der Führungsgröße angeglichen wird. Auf diese Weise entsteht ein geschlossener Wirkungskreis, der *Regelkreis*.

Fortlaufend bedeutet dabei eine für die jeweilige Regelung hinreichend häufige Wiederholung.

Im Fall einer Regelung heißen: die gesteuerte Größe *Regelgröße* x , die Strecke *Regelstrecke* S , die Einrichtung *Regeleinrichtung* R und die Abweichung zwischen Regel- und Führungsgröße *Regelabweichung* e .

D 4.9

4.2.2.2. Beispiele: Festwert-, Zeitplan- und Führungsregelung

Ein Beispiel einer Regelung ist der im Bild 3.4 dargestellte geregelte Gleichstromantrieb. Er dient zur Konstanzhaltung der Drehzahl bei sich ändernder Belastung. Das zugehörige Wirkungsschema Bild 3.6 sowie das zugehörige Signalfußbild 3.46 zeigen deutlich den geschlossenen Wirkungskreis. Die Führungsgröße hat in diesem Fall einen konstanten Wert. Wegen dieses fest vorgegebenen Sollwerts wird eine solche Regelung *Festwertregelung* genannt.

Im Bild 4.5 ist eine Verbrennungsregelung dargestellt, bei der die am Regler R_1 gebildete Abweichung zwischen der tatsächlichen Temperatur x_1 und der von Hand fest eingestellten Solltemperatur w_1 die Verstellung u_1 des Heizölstroms bewirkt. Da deren Auswirkungen sowie die von Störungen fortlaufend durch das Temperaturmeßglied beobachtet und vom Regler verarbeitet werden, liegt ein Regelkreis vor. Dabei handelt es sich wieder um eine Festwertregelung.

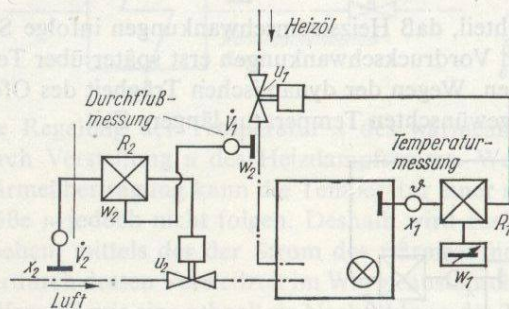


Bild 4.5. Verbrennungsregelung
(Festwert- und Führungsregelung)

Ein zweiter Regelkreis dient der Regelung des Luftstroms x_2 . Da sich eine durch u_2 bewirkte Verstellung des Luftstroms sowohl in als auch entgegen der Strömungsrichtung der Luft fortpflanzt, wird über das Durchflußmeßglied ($\dot{V}_2 = x_2$) und den Regler R_2 ein geschlossener Wirkungskreis gebildet, der die Auswirkungen von Schwankungen des Luftvordrucks und von Ventilverschmutzungen eliminiert. Seine Führungsgröße w_2 erhält dieser Luftstromregelkreis von dem Meßglied $\dot{V}_1$ für den Heizölstrom. Diese Führungsgröße ist veränderlich, vorher unbekannt und von dem betrachteten Luftstromregelkreis unabhängig. Wir sprechen deshalb von einer *Führungsregelung* oder auch *Folgeregelung*. Eine direkte Rückwirkung einer Verstellung u_2 auf den Heizölstrom $\dot{V}_1$ erfolgt nicht. Insofern liegt – wie schon im Beispiel von Bild 4.3 – eine Vorwärtssteuerung des Verhältnisses der beiden Ströme vor. Sollte auch dieses Verhältnis geregelt werden, müßte eine Größe gefunden und gemessen werden, die von diesem Verhältnis eindeutig abhängt. Eine solche ist der O_2 -Gehalt der abgesaugten Verbrennungsluft. Seine Messung erfordert ein O_2 -Analysenmeßgerät.

In den vorgestellten Beispielen sind einige Benennungen von Regelungen eingeführt worden, die sich auf die Art der Führungsgrößen beziehen. Sie gelten auch für Vorwärtssteuerungen und seien unter Einbeziehung der Ergebnisse von Abschn. 4.2.1.2. in Tafel 4.2 nochmals zusammengestellt.

Obwohl bei der Ablaufsteuerung eine Rückmeldung erfolgt, wenn die gesteuerte Größe bestimmte ausgezeichnete Werte (Grenzwerte) erreicht, ist doch ein notwendiges Kriterium der Regelung, nämlich der *fortlaufende* Eingriff auf Grund des fort-

laufenden Vergleichs (s. Definition 4.8), nicht erfüllt. Die Ablaufsteuerung steht somit an der Grenze zwischen Vorwärtssteuerung und Regelung, wird jedoch noch zu ersterer gezählt.

Tafel 4.2. Benennungen von Steuerungen (Vorwärtssteuerungen und Regelungen) nach der Art der Führungsgröße

Benennung	Art der Führungsgröße
Festwertsteuerung/-regelung	konstant (fester Sollwert)
Führungssteuerung/-regelung (Folgesteuerung/-regelung)	vom Steuerungssystem unabhängig, Zeitverlauf vorher unbekannt
Zeitplansteuerung/-regelung	vorher bekannte, in einem Zeitplangeber gespeicherte Zeitfunktion
Ablaufsteuerung	von den Werten (Abläufen) bestimmter Zustands- größen des gesteuerten Systems und einem Programm abhängig
Programmsteuerung/-regelung	zusammenfassender Begriff für Zeitplan- und Ablauf- steuerungen

4.2.2.3. Vermaschte Eingrößenregelung: Hilfsregel- und Hilfsstellgröße

Die Schaltung Bild 4.5 hat den Nachteil, daß Heizstromschwankungen infolge Störungen am Ventil oder als Folge von Vordruckschwankungen erst später über Temperaturänderungen beobachtet werden. Wegen der dynamischen Trägheit des Ofens erfordert die Wiederherstellung der gewünschten Temperatur längere Zeit.

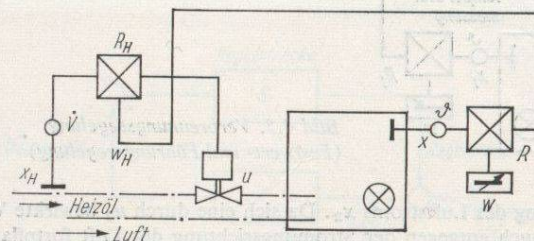


Bild 4.6. Kaskaden-Temperaturregelung

Eine bessere Stabilisierung der Temperatur ermöglicht die im Bild 4.6 dargestellte Kaskadenregelung. (Die Steuerung des Luftstroms ist nicht eingezeichnet.) Hier wird der Heizölstrom mittels eines schnell reagierenden Durchflußregelkreises durch den Regler R_H stabilisiert. Die Steuerungsaufgabe besteht jedoch in der Konstanthaltung der Temperatur x und nicht in der des Heizstroms. Letzterer hat nur die Bedeutung einer *Hilfsregelgröße* x_H . Die Führungsgröße w_H für diesen Durchfluß-Hilfsregelkreis wird von einem überlagerten Temperaturregelkreis gebildet. Dessen Regler R verändert auf Grund der Abweichung zwischen Isttemperatur und Sollwert den Sollwert w_H für den Heizstrom.

Das zugehörige Blockschaltbild (Bild 4.7) macht deutlich, daß nur eine Steuergröße u und eine Hauptregelgröße, die Temperatur x , existiert. S_H ist die Durchfluß-Hilfsregelstrecke, S die Hauptregelstrecke vom Eintritt des Heizöls bis zur Temperatur am Meßort. Die durch Bild 4.7 erläuterte Schaltung mit unter- und übergeordnetem Regelkreis heißt *Kaskadenregelung*. Diese stellt eine wichtige Form eines *Regelkreises mit Hilfsregelgröße* dar.

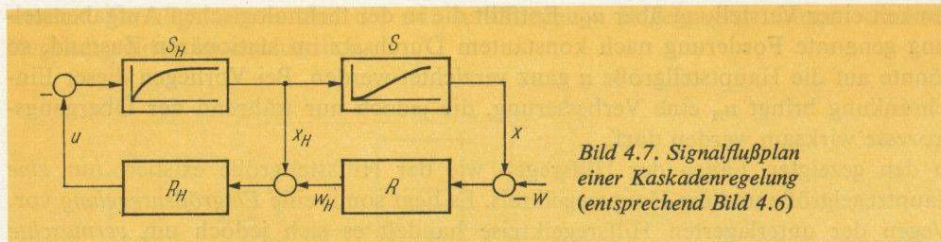


Bild 4.7. Signalflußplan einer Kaskadenregelung (entsprechend Bild 4.6)

Eine andere Modifikation des Grundregelkreises zur Erzielung eines besseren Regelungsverhaltens besteht in der Einführung einer *Hilfsstellgröße*, wie sie bei der im Bild 4.8 dargestellten Temperaturregelung eines Wärmeaustauschers vorliegt.

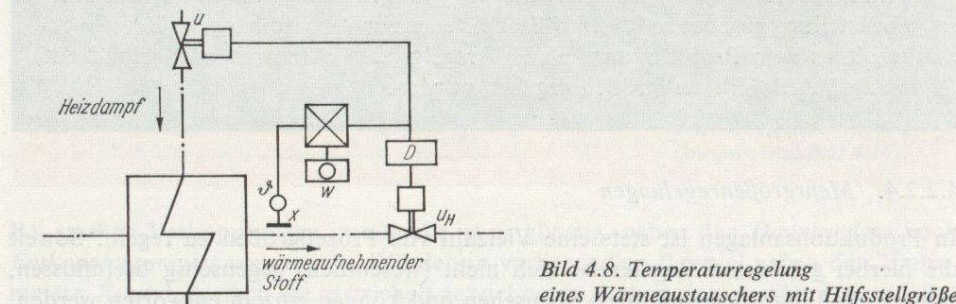


Bild 4.8. Temperaturregelung eines Wärmeaustauschers mit Hilfsstellgröße

Die Regelung der Temperatur x des wärmeaufnehmenden Stoffes erfolgt normal durch Verstellung u des Heizdampfstroms. Wegen der großen Trägheiten bei der Wärmeübertragung kann die Temperatur einer schnelleren Änderung der Führungsgröße w jedoch nicht folgen. Deshalb wird zusätzlich eine Hilfssteuergröße u_H vorgesehen, mittels der der Strom des wärmeaufnehmenden Stoffes verstellt wird. Da hierdurch dessen Verweilzeit im Wärmeaustauscher geändert wird, erfolgt über diesen Hilfsregelkreis eine schnellere Nachführung der Temperatur gegenüber der Führungsgröße. Im stationären Zustand soll jedoch bei den meisten Aufgabenstellungen der erwärmte Stoffstrom einen vorgegebenen festen Sollwert annehmen. Deshalb wird durch ein Differenzierglied D sichergestellt, daß die Hilfsstellgröße u_H nur vorübergehend bei Führungs- bzw. Regelgrößenänderungen von ihrer Normalstellung abweicht (Verschwindimpuls).

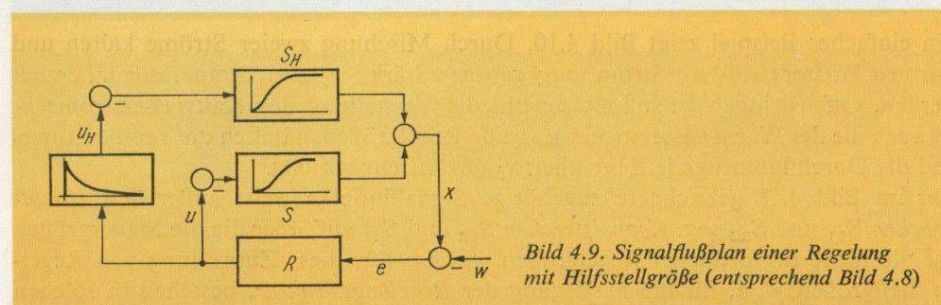


Bild 4.9. Signalflußplan einer Regelung mit Hilfsstellgröße (entsprechend Bild 4.8)

Der Signalflußplan Bild 4.9 verdeutlicht auf Grund der qualitativ eingezeichneten Übergangsfunktionen von Hilfsstrecke S_H und Hauptstrecke S die schnellere Wirk-

samkeit einer Verstellung über u_H . Entfällt die in der technologischen Aufgabenstellung genannte Forderung nach konstantem Durchsatz im stationären Zustand, so könnte auf die Hauptstellgröße u ganz verzichtet werden. Bei Vorliegen dieser Einschränkung bringt u_H eine Verbesserung, die jedoch nur während der Übergangsprozesse wirksam werden darf.

In den gezeigten Fällen der Hilfsregel- wie der Hilfsstellgröße existiert nur eine Hauptregelgröße und ein Hauptregelkreis. Es liegt somit eine *Eingrößenregelung* vor. Wegen der unterlagerten Hilfsregelkreise handelt es sich jedoch um *vermaschte Eingrößenregelungen*.

Es gilt also:

D 4.10

Vermaschte Eingrößenregelungen sind Regelungen mit genau einer laut Aufgabenstellung gegebenen Regelgröße, bei denen zur Verbesserung des Regelungsverhaltens dem Prozeß zusätzlich Hilfsregelgrößen entnommen oder/und auf den zusätzlich Hilfsstellgrößen gegeben werden.

4.2.2.4. Mehrgrößenregelungen

In Produktionsanlagen ist stets eine Vielzahl von Prozeßgrößen zu regeln. Soweit die hierbei gebildeten Regelkreise sich nicht (wesentlich) gegenseitig beeinflussen, sind sie als Eingrößenregelungen anzusehen und können einzeln entworfen werden. Häufig sind jedoch zwei oder mehr der Regelkreise miteinander verkoppelt. Sie dürfen dann bei einer exakten Behandlung nicht mehr isoliert voneinander betrachtet, sondern müssen insgesamt als eine sog. *Mehrgrößenregelung* entworfen werden.

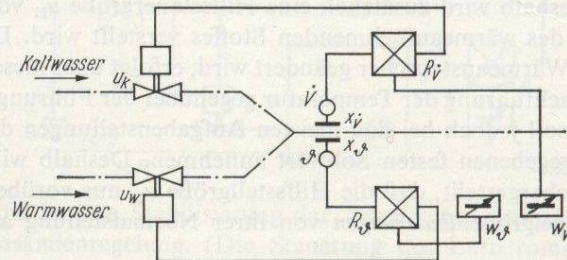
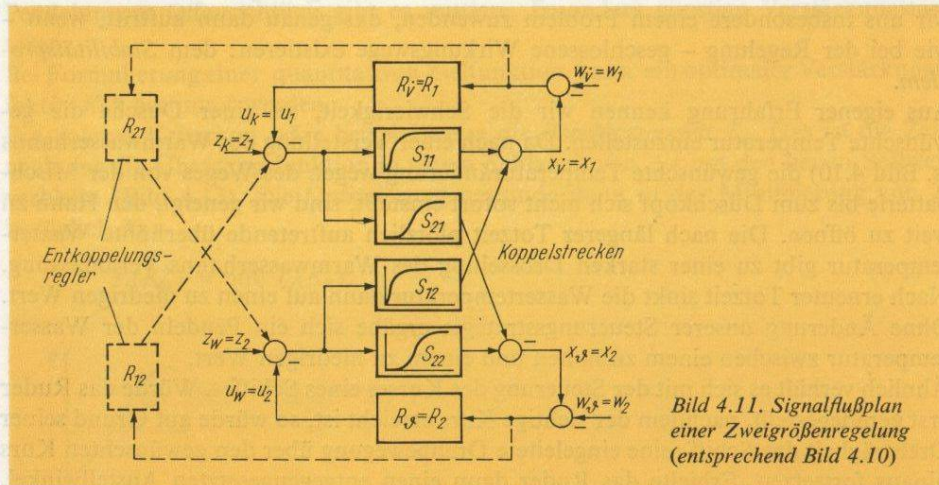


Bild 4.10. Zweigrößenregelung

Ein einfaches Beispiel zeigt Bild 4.10. Durch Mischung zweier Ströme kalten und warmen Wassers soll ein Strom vorgegebener Stärke $w_{\dot{V}}$ und Temperatur w_θ erzielt werden. Offensichtlich beeinflusst sowohl die Verstellung des Kaltwasserstroms u_k als auch die des Warmwasserstroms u_w beide Regelgrößen, nämlich die Temperatur x_θ und die Durchflußmenge je Zeiteinheit $x_{\dot{V}}$ des Mischprodukts.

Der im Bild 4.11 gezeichnete zugehörige Signalflußplan weist außer den *Hauptstrecken* S_{11} und S_{22} sog. *Koppelstrecken* S_{12} und S_{21} auf, über die die Steuergrößen auf die nicht zugeordneten Regelgrößen wirken. Für diese Zuordnung von Regel- zu Stellgrößen, d. h. für die Festlegung der *Regelungsstruktur*, bestehen in solchen Fällen mehrere Möglichkeiten, wobei dann Haupt- und Koppelstrecken ihre Rolle vertauschen. In vorliegendem Beispiel könnte durch den Temperaturregler R_θ auch der Kaltwasserstrom, durch den Mengenregler $R_{\dot{V}}$ der Warmwasserstrom verstellt

werden. Im allgemeinen sind die mit verschiedenen Regelungsstrukturen erzielten Regelungsgüten unterschiedlich.



Bei starken Verkopplungen im Objekt ist es günstig, neben den *Hauptreglern* noch *Entkopplungsregler* vorzusehen. Würden in vorliegendem Beispiel neben den Hauptreglern R_1 und R_2 noch die gestrichelt gezeichneten Entkopplungsregler R_{12} und R_{21} angebracht, so könnte bei einer Erhöhung des Temperatursollwerts w_1 die Störung der Mengenregelung dadurch weitgehend beseitigt werden, daß über den Entkopplungsregler R_{12} der Kaltwasserstrom um den Betrag herabgesetzt wird, um den der Warmwasserstrom erhöht wird.

Die im Bild 4.11 eingezeichneten Störgrößen z_k und z_w kennzeichnen Temperatur- und Druckschwankungen des kalten bzw. warmen Wassers.

Zusammenfassend wollen wir festhalten:

Mehrgrößenregelungen sind Regelungen mit wenigstens zwei Regelgrößen, wobei alle auftretenden Regelkreise miteinander gekoppelt sind, so daß Regelungsvorgänge in einem Kreis solche Vorgänge in allen anderen Kreisen auslösen, wenn das nicht durch besondere Entkopplungsmaßnahmen unterbunden wird.

D 4.11

Bei Mehrgrößenregelungen ergibt sich zusätzlich zur Wahl der Reglerstruktur (d. h. des Reglertyps) und der Bemessung der Reglerparameter die Aufgabe der Bestimmung einer günstigen *Regelungsstruktur*. Diese umfaßt die Zuordnung von Regel- zu Stellgrößen, d. h. die Festlegung der Hauptregler, sowie die Einbeziehung von Entkopplungsreglern. Der Entwurf kann nicht isoliert für die einzelnen Kreise, sondern muß für das Mehrgrößenregelungssystem als Ganzes erfolgen.

S 4.5

Der Entwurf von Mehrgrößenregelungen ist deshalb erheblich schwieriger als der von Eingrößenregelungen.

4.2.2.5. Charakteristische Eigenschaften von Regelungen, Stabilitätsproblem

Wollen wir die charakteristischen Eigenschaften von Regelungen nennen, so müssen wir uns insbesondere einem Problem zuwenden, das genau dann auftritt, wenn – wie bei der Regelung – geschlossene Wirkungswege existieren: dem *Stabilitätsproblem*.

Aus eigener Erfahrung kennen wir die Schwierigkeit, an einer Dusche die gewünschte Temperatur einzustellen. Da nach einer Verstellung des Warmwasserhahns (s. Bild 4.10) die gewünschte Temperaturänderung wegen des Weges von der Mischbatterie bis zum Duschkopf sich nicht sofort einstellt, sind wir geneigt, den Hahn zu weit zu öffnen. Die nach längerer Totzeit plötzlich auftretende überhöhte Wassertemperatur gibt zu einer starken Drosselung des Warmwasserhahns Veranlassung. Nach erneuter Totzeit sinkt die Wassertemperatur dann auf einen zu niedrigen Wert. Ohne Änderung unserer Steuerungsstrategie ergäbe sich ein Pendeln der Wassertemperatur zwischen einem zu hohen und einem zu niedrigen Wert.

Ähnlich verhält es sich mit der Steuerung des Kurses eines Schiffes. Würde das Ruder erst geradegestellt, nachdem der richtige Kurs erreicht ist, so würde auf Grund seiner Drehträgheit das Schiff seine eingeleitete Drehbewegung über den gewünschten Kurs hinaus fortsetzen. Erhielte das Ruder dann einen entgegengesetzten Anstellwinkel, so würde die Drehbewegung des Schiffes allmählich umgekehrt. Unter Beibehaltung der geschilderten Strategie ergäbe sich jedoch erneut eine Drehung über den Sollkurs hinweg und insgesamt ein Pendeln um diesen, im ungünstigen Fall mit wachsender Amplitude. Die Kursregelung wäre dann instabil. Ein ähnliches Phänomen könnten wir auch bei der Temperaturregelung des Wärmetauschers der Bilder 4.8 und 4.9 beobachten, insbesondere wenn wir auf die Hilfsstellgröße u_H verzichten. Bei Verwendung eines Proportionalreglers mit der Reglergleichung

$$u = K_R e = K_R(x - w) \quad (4.2)$$

erhielte man bei sprunghafter Erhöhung des Sollwerts von w_1 auf w_2 für verschiedene Werte des Reglerübertragungsfaktors (Verstärkungsfaktors) K_R die im Bild 4.12 (qualitativ) gezeichneten Übergangsvorgänge.

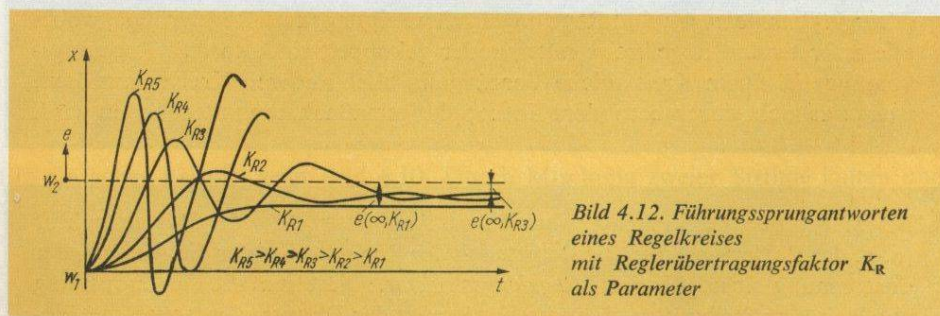


Bild 4.12. Führungssprungantworten eines Regelkreises mit Reglerübertragungsfaktor K_R als Parameter

Mit wachsendem K_R ergeben sich zunächst aperiodisch, dann periodisch gedämpfte Übergangsvorgänge. Schließlich wird mit konstanten Schwingungen die Stabilitätsgrenze erreicht und mit aufklingenden Schwingungen überschritten. Im letzteren Fall schaukeln sich die Schwingungen von selbst auf, so daß der Gleichgewichtszustand für $t \leq 0$ nicht aufrechterhalten werden kann.

Bild 4.12 zeigt, daß mit zunehmendem Verstärkungsfaktor des Reglers die bleibende

Regelabweichung $e(\infty)$ kleiner wird und der Regelkreis schneller reagiert. Bei zu großer Verstärkung ergeben sich jedoch lange anhaltende oder gar anwachsende Pendelungen. Offensichtlich gibt es mittlere, besonders günstige Verstärkungsfaktoren.

Bei Formulierung einer quantitativen Zielfunktion kann ein optimaler Verstärkungsfaktor K_R^* bestimmt werden.

Ein solches Kriterium wäre beispielsweise die *Beruhigungszeit* T_ε . Das ist die Zeit, nach der die Übergangsfunktion in einem Schlauch von $\pm\varepsilon$ um den neuen Sollwert verbleibt (Bild 4.13). Die Optimierung bestünde dann in der Minimierung von T_ε bezüglich K_R :

$$T_\varepsilon(K_R^*) = \min T_\varepsilon(K_R). \quad (4.3)$$

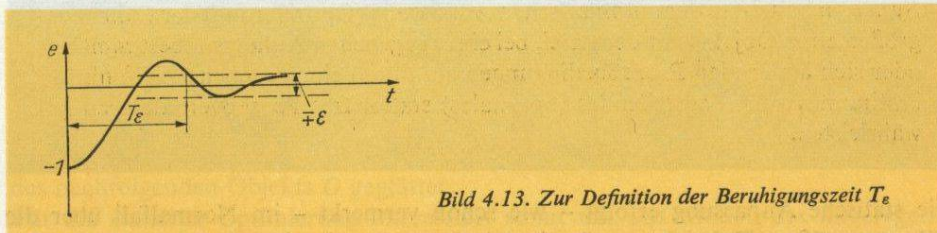


Bild 4.13. Zur Definition der Beruhigungszeit T_ε

Bei der Mehrzahl der Strecken kann mit einem einfachen Proportionalregler keine große Regelungsgüte erzielt werden. Dann muß ein Regler des Typs von Gl. (4.1) oder ein noch komplizierterer Regler Verwendung finden. In allen Fällen müssen für eine gute Regelung beim Entwurf bzw. bei der Inbetriebsetzung die Reglerparameter günstig bemessen oder nach einer vereinbarten Zielfunktion optimiert werden. Resultierend aus den Erörterungen des Abschnitts 4.2. kann man einschätzen:

Für Regelungen sind folgende Eigenschaften charakteristisch:

- a) Die Kreisstruktur hat gegenüber der offenen Kette die qualitativ höhere Fähigkeit, nicht beobachtete Störungen weitgehend zu eliminieren (auszuregeln).
- b) Diese potentielle Fähigkeit der Störeliminierung hat der Regelkreis tatsächlich nur, wenn durch geeignete Wahl bzw. Bemessung von Reglerstruktur und -parametern (d. h. durch geeigneten Entwurf des Regelkreises) Stabilität und darüber hinaus ausreichende Güte gesichert sind.
- c) Bei mäßigen Änderungen der Übertragungseigenschaften des Objekts bleiben Stabilität und Regelungsfähigkeit erhalten, während die Güte dann nicht das mögliche Optimum erreicht.

S 4.6

Die Vorzüge des Regelkreises gegenüber der offenen Kette erhält man also um den Preis des Stabilitätsproblems. Bei großen Änderungen der Übertragungseigenschaften des Objekts arbeitet der Regelkreis schlecht oder wird sogar instabil. Eine gewisse Abhilfe kann durch Konstruktion sog. *parameterunempfindlicher Regelungen* erzielt werden. Das erfordert i. allg. Erweiterungen der Regeleinrichtung und ist gewöhnlich mit einer Minderung der Regelungsgüte verbunden. Für die Aufrechterhaltung eines optimalen Regelungsverhaltens trotz sich stark ändernder Prozeßeigenschaften

benötigt man selbstanpassende Systeme. Im folgenden Abschn. 4.3. werden wir uns mit den Prinzipien zum Aufbau von Systemen der Anpassung des stationären Verhaltens, im Abschn. 4.4. mit solchen für das dynamische Verhalten befassen.

4.3. Grundtypen selbstanpassender Systeme für das statische stationäre Verhalten

4.3.1. Steuerungsaufgabe, Prozeßmodell und Zielfunktion bei der statischen Optimierung

S 4.7

Die *Steuerungsaufgabe von statisch selbstanpassenden (selbstoptimierenden) Systemen* besteht in der automatischen Anpassung (Optimierung) der Führungsgrößen eines Objekts mit dem Ziel, bei einer gegebenen Anfangsunbestimmtheit oder sich ändernden Prozeßbedingungen ein durch eine gegebene Zielfunktion bestimmtes zufriedenstellendes (optimales) stationäres Prozeßverhalten zu gewährleisten.

Die statische Anpassung erfolgt – wie schon vermerkt – im Normalfall über die Führungsgrößen. Dabei ist es günstig – insbesondere für die hier vorzugsweise betrachteten industriellen Produktionsprozesse –, von dem im Bild 4.14 dargestellten erweiterten Grundmodell des zu steuernden Prozesses auszugehen.

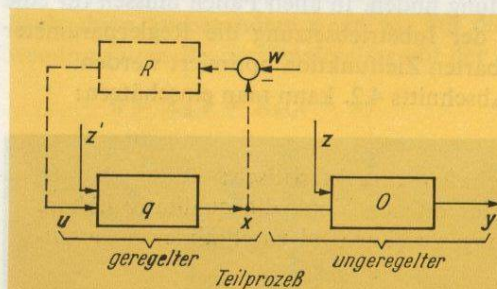


Bild 4.14. Erweitertes Prozeßmodell

Bei diesem Modell ist berücksichtigt, daß ein solcher Prozeß meist aus einem *geregelten Teil* (den Regelstrecken S) und einem *ungeregelten Prozeßteil* O besteht. Die Größen u sind dabei die Steuergrößen (z. B. Ventilstellungen) für die in den Prozeß eintretenden Stoff- und Energieströme. Die Größen x stellen im wesentlichen die Eingangsstoff- und Energieströme in den – zuweilen auch die Ausgangsströme aus dem – Verarbeitungsraum und deren Integrale (Behälterstand) sowie die thermodynamischen Zustandsgrößen (Druck, Temperatur) im Verarbeitungs- (Reaktions-) Raum dar. Sie werden geregelt bzw. bei Abwesenheit von Störungen auch vorwärts gesteuert.

Die Ausgangsgrößen y werden von den Qualitäten und evtl. von den Strömen der Ausgangsprodukte gebildet. Die Störgrößen z' sind solche, die sich auf die Regelgrößen x auswirken und demzufolge durch die Regelungen dann weitgehend eliminiert werden. Dagegen werden die Auswirkungen der Störungen z nicht durch die Regelungen erfaßt. Sie verändern die Eigenschaften des Ausgangsprodukts y und demzufolge die

Prozeßgüte. Für die zu ihrer Kompensation einzuschlagende Strategie ist wichtig, ob sie meßbar sind oder nicht (s. u.).

Im Beispiel eines chemischen Reaktors sind die Ströme der Eingangskomponenten bzw. deren Verhältnis und der Behälterstand sowie Temperatur und ggf. Druck im Reaktionsraum Regelgrößen x . Ausgangsgrößen y sind die Anteile bzw. Ströme gewünschter Komponenten des Ausgangsprodukts. Die Störgrößen z resultieren aus sich ändernden Eigenschaften der Eingangskomponenten und vorhandener Katalysatoren. Die Prozeßgüte wird durch das Produktionsergebnis, gekennzeichnet durch die Ausgangsgrößen y , und den hierfür geleisteten Aufwand bestimmt. Letzterer wird durch die Eingangsgrößen x ausgewiesen und besteht in vorliegendem Fall besonders aus den Kosten für die dem Reaktor zugeführten Stoffe und Energien.

Die statische Optimierung erfolgt zweckmäßig dadurch, daß auf einer übergeordneten Ebene günstige Werte für die Eingangsgrößen x ermittelt und als Führungsgrößen w vorgegeben werden. Deren Einhaltung wird i. allg. durch Regelungen (Regler R) erzwungen. Für den hier interessierenden (quasi-)stationären Betrieb kann dabei mit ausreichender Genauigkeit

$$x = w \quad (4.4)$$

gesetzt werden. Vorübergehende Regelabweichungen werden durch die Trägheiten des nachfolgenden Objekts O geglättet.

Für die statische Optimierung interessiert somit nur das Modell des unregulierten Teilprozesses O . Da die statische Optimierung genügend langsam erfolgen kann, können die dynamischen Trägheiten des Objekts O gewöhnlich vernachlässigt werden.

Die statische Prozeßgleichung des unregulierten Teiles lautet:

$$y = h(x, z). \quad (4.5)$$

Charakteristisch ist, daß normalerweise

$$\dim y < \dim x, \quad \text{während} \quad \dim u = \dim x. \quad (4.6)$$

Die Zielfunktion Q wird durch Prozeßertrag und dafür geleisteten Aufwand und damit durch Ausgangs- und Eingangsgrößen y bzw. x bestimmt:

$$Q = Q'(y, x). \quad (4.7)$$

Ersetzen wir hierin y durch die Prozeßgleichung (4.5), so erhalten wir

die Optimierungsfunktion

$$Q = Q(x, z). \quad (4.8)$$

Die Prozeßgüte hängt hierbei nur noch von den steuerbaren und nichtsteuerbaren (aber evtl. meßbaren) Eingangsgrößen x bzw. z des unregulierten Teilprozesses O ab. Bei der Optimierung ist zu beachten, daß für die steuerbaren Eingangsgrößen x häufig *Beschränkungen* vorliegen. Für Temperaturen und Drücke bestehen beispielsweise obere, durch die Festigkeit des Kessels oder durch das Auftreten unerwünschter

Reaktionen bedingte Schranken. Sie werden gewöhnlich in Form von Ungleichungen eingeführt:

$$b_j(x) \leq 0; \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (4.9)$$

Bezeichnet man mit X die Menge aller zulässigen Eingangsvektoren x ,

$$X = \{x | b_j(x) \leq 0; j = 1, 2, \dots, k\}, \quad (4.10)$$

so besteht die statische Optimierung darin, aus dieser Menge X den optimalen Eingangsvektor x^* zu finden, der der Optimierungsfunktion (und damit auch Zielfunktion) Q einen Extremwert (Maximum oder Minimum) Q^* erteilt:

$$Q^* = \text{extr}_{x \in X} Q(x, z) = Q(x^*, z). \quad (4.11)$$

Begnügt man sich mit einer zufriedenstellenden (suboptimalen) Lösung $\tilde{x}$, so tritt an die Stelle der vorstehenden Gleichung die Forderung, daß die Güte Q besser sei als ein Mindestwert $Q_{\min}$:

$$Q(\tilde{x}, z) > Q_{\min}, \quad (4.12)$$

bzw. die Kosten kleiner als ein zugelassener Maximalwert sind:

$$Q(\tilde{x}, z) < Q_{\max}. \quad (4.13)$$

Da durch Multiplikation der Zielfunktion mit -1 eine Gewinnfunktion in eine Kostenfunktion übergeführt wird, kann jedes Maximierungsproblem durch ein Minimierungsproblem ersetzt werden. Wir wollen deshalb im folgenden jede Optimierung als eine *Minimierungsaufgabe* ansehen.

Im folgenden wollen wir Prinzipien zur Konstruktion statisch selbstanpassender Systeme und deren Grobstrukturen betrachten. Als Prinzipien, deren Eignung zu prüfen ist, bieten sich an: Vorwärtssteuerung, Regelung, Suche und Lernen.

Wir beginnen mit dem ersten und untersuchen jeweils das Problem der optimalen Selbstanpassung (der Selbstoptimierung).

4.3.2. Statische Vorwärtsanpassung (Vorwärtsoptimierung)

Können die wesentlichen auf den unregelmäßig Teilprozeß einwirkenden (äußeren und inneren) Störungen z gemessen werden und kann in der Vorbereitungsphase die Abhängigkeit des Optimums der Zielfunktion von x und z , d. h. Gl. (4.11), ermittelt werden, so bietet sich folgender Lösungsweg:

Aus Gl. (4.11) wird der optimale Eingangsvektor x^* bestimmt, der bei gegebenem z ein Optimum Q^* der Zielfunktion gewährleistet:

$$x^* = f^*(z). \quad (4.14)$$

Wegen Gl. (4.4) gilt dann für die optimalen Führungsgrößen w^* für die Kreise zur Regelung von x ebenfalls

$$w^* = f^*(z). \quad (4.15)$$

Durch diese Beziehung werden vorliegenden Störgrößen z (einer vorliegenden Störungssituation) optimale Führungsgrößen w^* (eine optimale Verhaltensweise) zugeordnet. Das ermöglicht die im Bild 4.15 dargestellte Konstruktion eines selbstoptimierenden Systems. (Die dort angegebene Bezeichnung „Schicht“ wird im Abschn. 4.5.2. erläutert werden.)

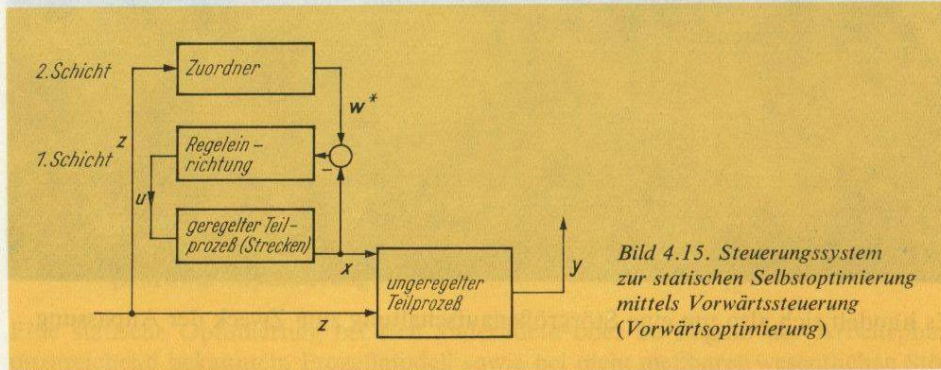


Bild 4.15. Steuerungssystem zur statischen Selbstoptimierung mittels Vorwärtssteuerung (Vorwärtsoptimierung)

In einem Zuordner (Zuordnungsmodell) werden die Beziehungen Gl. (4.15) programmiert. Die ursprünglich vielleicht nur numerisch vorliegenden Zuordnungen können dabei durch eine Gleichung approximiert werden, z. B. durch ein Polynom 2. Grades für die verschiedenen Komponenten w_i^* von w^* :

$$w_i^* = w_{i0} + a_i^T z + z^T B_i z; \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (4.16)$$

Die Koeffizienten der Matrizen a_i und B_i sind hierbei in der Vorbereitungsphase zu bestimmen und vor der eigentlichen Arbeitsphase dem Zuordner einzugeben. Wir sprechen in diesem Fall von einem *Gleichungsmodell*.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, auftretende Wertebereiche der Störgrößen z_i in Intervalle aufzuteilen. Im Bild 4.16 ist das für zwei Störgrößen z_1 und z_2 geschehen

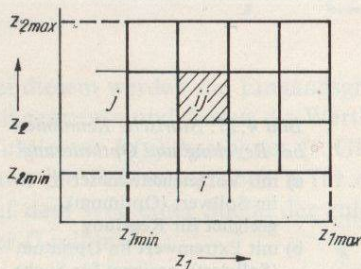


Bild 4.16. Klasseneinteilung der Störvektoren z

Wenn z_1 in das i -te und z_2 in das j -te Intervall fällt, so gehört der Störvektor z zur Klasse ij . Für jede solche Klasse ist der gefundene optimale Vektor $w^*(ij)$ abzuspeichern. Der Zuordner ist in diesem Fall ein sog. *Klassifikationsmodell* oder *Klassifikator*. Seine Aufgabe ist es, den gemessenen Störvektor zu klassifizieren und die hierzu tabellierte optimale Führungsgröße $w^*(ij)$ auszugeben.

Wir haben somit in der Arbeitsphase ein bereits *belehrtes System* vor uns. Da keine Rückmeldung erfolgt, ob das erstrebte Optimum auch wirklich eingehalten wird,

liegt eine Vorwärtssteuerung vor. Da diese der Optimierung dient, spricht man von einer *Vorwärtsoptimierung*.

Fassen wir zusammen:

S 4.8

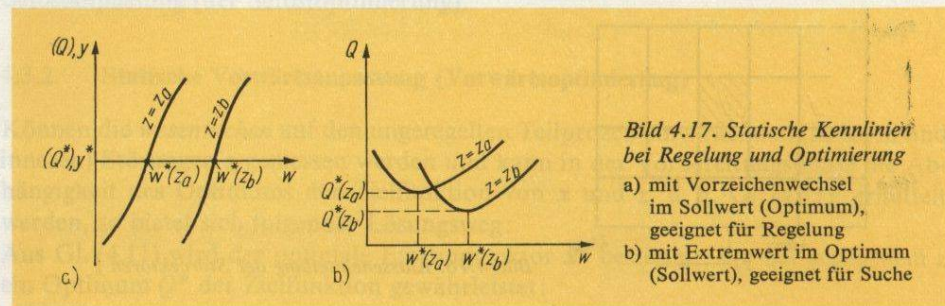
Bei Systemen der statischen Vorwärtsoptimierung erfolgt die automatische Anpassung der Führungsgrößen auf Grund einer in der Vorbereitungsphase bestimmten Zuordnung zu den wesentlichen Störgrößen in Form einer Vorwärtssteuerung. Die Anwendung setzt voraus,

- a) daß alle das stationäre Verhalten wesentlich beeinflussenden Größen gemessen werden (können) und
- b) daß das Prozeßmodell im gesamten Arbeitsbereich bekannt und zeitlich konstant ist. Wegen der Vorwärtssteuerung entfällt das Stabilitätsproblem, und es ist (bei kurzen Reaktionszeiten) eine schnelle Anpassung gewährleistet.

Es handelt sich also um eine Störgrößenaufschaltung zum Zweck der Anpassung.

4.3.3. Statische Selbstanpassung durch Regelung

Ändert sich das Prozeßmodell – z. B. auf Grund innerer Prozeßänderungen – in unkontrollierter Weise, so führt die geschilderte Vorwärtsanpassung nicht mehr zum Optimum. Sie ist auch nicht anwendbar, wenn das Prozeßmodell zu Beginn der Arbeitsphase noch unbekannt ist. In diesen Fällen liegt es nahe, analog der Vorgehensweise bei vorangepaßten Systemen die Abweichung vom gewünschten Zustand zurückzumelden und mit Hilfe einer Regelung zu beseitigen. Eine solche Vorgehensweise erfordert jedoch, daß die Abweichung des Istwerts der Zielfunktion vom optimalen Wert $Q - Q^*$ oder noch einfacher die Abweichung des Ausgangsvektors y von dem zu Q^* gehörigen Vektor y^* gemessen werden kann. Die statischen Kennlinien des Objekts O müßten hierzu den im Bild 4.17a gezeichneten Charakter mit Vorzeichenumkehr im gewünschten Arbeitspunkt haben.



Tatsächlich ist jedoch y^* bzw. Q^* nicht fest und vorher nicht bekannt. Vielmehr liegen statt der für Regelungsobjekte typischen Kennlinien von Bild 4.17a die im Bild 4.17b gezeichneten Extremalkennlinien vor. Bei diesen ist das Optimum durch einen Extremwert der Kennlinie (im zulässigen Aussteuerbereich von w) gekennzeichnet.

Durch Differentiation der Kennlinien von Bild 4.17b ergeben sich zwar solche des Typs Bild 4.17a. Mit einem gewöhnlichen Differentiator kann jedoch dieses Problem

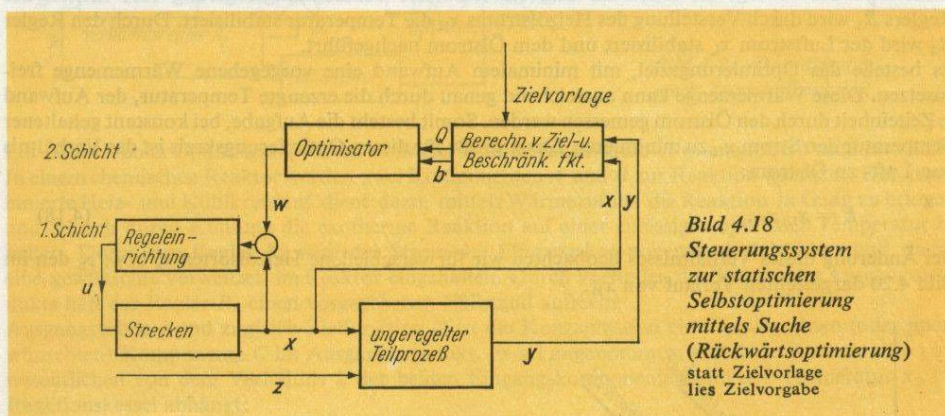
nicht auf eine normale Regelung übergeführt werden; denn ein solcher würde eine konstante Abweichung vom gewünschten Optimum nicht übertragen. Vielmehr sind aufwendigere Methoden notwendig, um die Richtung zum erstrebten Optimum festzustellen und dieses in einer Folge von Schritten möglichst gut zu erreichen. Diese sog. *Suche* stellt ein die Regelung übersteigendes neues Prinzip zum Aufbau von Steuerungssystemen dar und wird im folgenden Abschnitt vorgestellt. Wir vermerken:

Das (einfache) Regelungsprinzip ist für den Aufbau selbstanpassender (selbst-optimierender) Systeme im allgemeinen¹⁾ nicht ausreichend.

S 4.9

4.3.4. Statische Selbstanpassung mittels Suche am Prozeß (Rückwärtsoptimierung)

Eine statische Optimierung bei sich änderndem oder zu Beginn der Arbeitsphase unzureichend bekanntem Prozeßmodell sowie bei nicht meßbaren wesentlichen Störgrößen z ermöglicht das im Bild 4.18 dargestellte *Suchsystem*.



Bei diesem werden die Eingangsgrößen x und die Ausgangsgrößen y direkt am Prozeß gemessen und daraus die Werte der Zielfunktion $Q'(y, x)$ und der Beschränkungsfunktionen $b_f(x)$ berechnet [s. Gl. (4.7), (4.9)]. Durch einen *Optimisor* werden dann die Führungsgrößen w für die Eingangsgrößen x zielstrebig so geändert, daß auf dem Weg einer Suche der zulässige optimale Führungsvektor w^* gefunden wird, der Q minimiert:

$$Q^* = \min_{x \in X} Q'(y, x) = \min_{w \in X} Q'(y, w) = Q'(y, w^*). \quad (4.17)$$

Bei der Suche wird (wie bei der Regelung) über eine Rückmeldung ein geschlossener Wirkungskreis – ein *Suchkreis* – gebildet: Änderungen der Führungsgrößen verändern

¹⁾ Auf besondere Schaltungen, wie sie beispielsweise für die dynamische Anpassung mittels Regelung vorgeschlagen worden sind, können wir hier nicht eingehen.

die Werte der Zielfunktion Q ; diese werden durch Messungen erfaßt und dienen zur Berechnung weiterer Führungsgrößenkorrekturen. Diese Anpassungsart heißt deshalb *Rückwärtsoptimierung*.

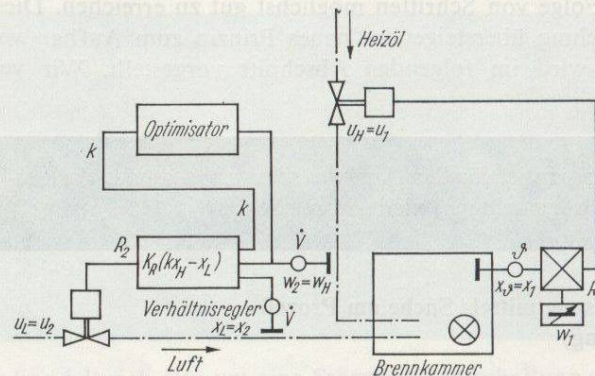


Bild 4.19. Suchsystem zur Verbrennungsoptimierung statt w_H lies x_H

Ein Beispiel eines Suchsystems für eine Variable zur Optimierung eines Verbrennungsvorgangs zeigt Bild 4.19.

Ohne Optimisator liegt die schon im Bild 4.5 erläuterte Verbrennungsregelung vor: Mittels des Reglers R_1 wird durch Verstellung des Heizölstroms x_H die Temperatur stabilisiert. Durch den Regler R_2 wird der Luftstrom x_L stabilisiert und dem Ölstrom nachgeführt.

Es bestehe das Optimierungsziel, mit minimalem Aufwand eine vorgegebene Wärmemenge freizusetzen. Diese Wärmemenge kann ausreichend genau durch die erzeugte Temperatur, der Aufwand je Zeiteinheit durch den Ölstrom gemessen werden. Somit besteht die Aufgabe, bei konstant gehaltener Temperatur den Strom x_H zu minimieren. Steuergröße für diesen Optimierungskreis ist das Verhältnis von Luft- zu Ölstrom:

$$k = x_L/x_H. \quad (4.18)$$

Bei Änderung dieses Verhältnisses beobachten wir für verschiedene Heizölsorten z_a bzw. z_b den im Bild 4.20 dargestellten Verlauf von x_H .

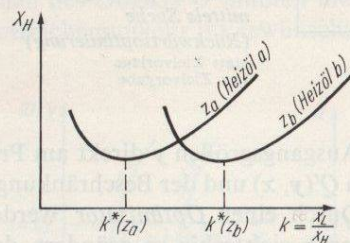


Bild 4.20. Heizölverbrauch für konstante Temperatur in Abhängigkeit vom Luft-Brennstoff-Verhältnis

Bei zu kleinem k wird nicht alles zugeführte Öl verbrannt. Der Ölstrom ist deshalb größer als der zur Erzeugung einer vorgegebenen Temperatur benötigte. Wird k über das Optimum k^* hinaus erhöht, so kühlt die nicht zur Verbrennung benötigte überschüssige Luft, weshalb x_H wieder ansteigt. Das optimale Luft-Brennstoff-Verhältnis k^* ist vom verwendeten Heizöl abhängig und muß zur Aufrechterhaltung der optimalen Betriebsweise nachgestellt werden. Ist die optimale Zuordnung $k^*(z)$ bekannt und können die maßgebenden Brennstoffeigenschaften z gemessen werden, so kann die durch Bild 4.15 erläuterte Vorwärtsoptimierung zur Anwendung kommen. Trifft das nicht zu oder wird die Analyse des Heizöls als zu aufwendig angesehen, so ermöglicht der im Bild 4.19 eingezeichnete Optimisator eine Suche von k^* .

Dieser Optimisator verstellt den Faktor k im Verhältnissregler. Letzterer bezweckt, die Regelabweichung $kx_H - x_L$ zum Verschwinden zu bringen. Dadurch ergibt sich für k das durch Gl. (4.18) definierte Verhältnis.

Nach Durchführung eines Suchschritts Δk wird die dadurch ausgelöste Änderung Δx_H des Brennstoff-

stroms (bei konstant gehaltener Temperatur x_3) beobachtet. Nimmt der Ölstrom ab, so erfolgt der nächste Suchschritt für k in derselben Richtung, anderenfalls wird die Richtung der Suchschritte umgekehrt. Auf diese Weise wird erreicht, daß in einem fortlaufenden Suchvorgang das Luft-Brennstoff-Verhältnis k dem vom benutzten Brennstoff abhängigen Optimalwert $k^*(z)$ nachgeführt wird und um das augenblickliche Optimum pendelt.

In dem geschilderten einfachen Fall einer Suchvariablen wird der Optimisator auch *Extremwertregler* genannt.

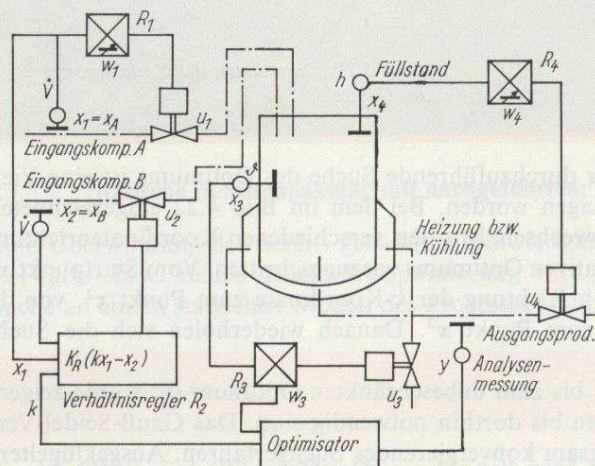


Bild 4.21. Optimierung einer Zweistoffreaktion

Ein Beispiel einer Optimierung bezüglich zweier Optimierungsvariablen (Suchgrößen) zeigt Bild 4.21: In einem chemischen Reaktor werden zwei Komponenten A und B zur Reaktion gebracht. Der kombinierte Heiz- und Kühlkreislauf dient dazu, mittels Wärmezufuhr die Reaktion in Gang zu bringen und danach durch Kühlung die exotherme Reaktion auf einer zulässigen optimalen Temperatur zu halten. Durch den Regler R_1 wird der Strom der Eingangskomponente A stabilisiert und damit eine gewünschte Verweilzeit im Reaktor eingehalten. Durch Verstellen des Stromes des Ausgangsprodukts hält der Regler R_4 einen vorgegebenen Füllstand aufrecht.

Ausgangsgröße y und zugleich Zielfunktion Q ist die Konzentration einer gewünschten (oder unerwünschten) Komponente C im Ausgangsprodukt. Es sei angenommen, daß diese Konzentration im wesentlichen von dem Verhältnis k der beiden Eingangskomponenten und der Temperatur x_3 im Reaktionskessel abhängt:

$$Q = y = Q(k, x_3). \quad (4.19)$$

Die Einhaltung des vom Optimisator vorgegebenen Verhältnisses k der Komponenten B zu A

$$k = x_B / x_A = x_2 / x_1 \quad (4.20)$$

wird dabei wie im vorhergehenden Beispiel durch den Verhältnisregler R_2 erzwungen. Als dritte Optimierungsvariable käme noch die über w_1 zu steuernde Verweilzeit in Betracht.

Zur Untersuchung eines Optimierungsvorgangs bei zwei Optimierungsvariablen werden vorteilhaft die Linien konstanter Güte bzw. konstanter Kosten Q in der Ebene dieser Variablen aufgetragen. Dieses sog. *Gütefeld* besitze für unser Beispiel die im Bild 4.22 dargestellte Form. Offensichtlich entspricht der dort eingezeichnete Punkt $\mathbf{x}^* = [x_3^*, k^*]^T$ dem optimalen Betriebsverhalten Q^* , wenn keine Beschränkungen vorliegen. $\bar{Q}^*$ ist die Güte im zulässigen optimalen Arbeitspunkt $\bar{\mathbf{x}}^* = [\bar{x}_3^*, \bar{k}^*]^T$, wenn die Temperatur auf Werte $x_3 < \bar{x}_3$ beschränkt ist. Man spricht hier von einem *beschränkten Optimum*.

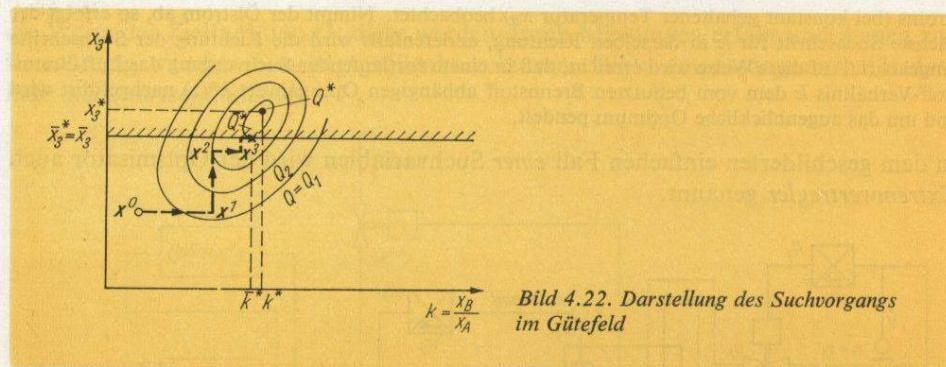


Bild 4.22. Darstellung des Suchvorgangs im Gütefeld

Für die durch den Optimisator durchzuführende Suche des Optimums ist eine Vielzahl von Methoden vorgeschlagen worden. Bei dem im Bild 4.22 eingezeichneten *Gauß-Seidel-Verfahren* wird abwechselnd in den verschiedenen Koordinatenrichtungen bis zum Erreichen eines relativen Optimums vorangeschritten. Vom Startpunkt x^0 gelangt man so durch Suche in Richtung der k -Koordinate zum Punkt x^1 , von da durch Suche in x_3 -Richtung zum Punkt x^2 . Danach wiederholen sich die Suchrichtungen.

Eine Fortsetzung dieser Suche bis zum unbeschränkten Optimum Q^* würde zeigen, daß noch viele Richtungssuchen bis dorthin notwendig sind. Das Gauß-Seidel-Verfahren gilt deshalb als ein langsam konvergierendes Suchverfahren. Ausgeklügeltere Verfahren benutzen statt der Koordinatenrichtungen Gradientenrichtungen und sog. konjugierte Richtungen. Auch für die Suche des relativen Optimums entlang dieser Richtungen sind verschiedene Varianten ausgearbeitet worden. Zusätzliche Komplikationen bringt die Berücksichtigung von Beschränkungen, insbesondere wenn diese nichtlinear sind. Eine Darstellung und Einschätzung der verschiedenen Suchstrategien wird später erfolgen. Schon jetzt sei gesagt, daß es eine für alle Anwendungsfälle überlegene Strategie nicht gibt. Die Aufgabe des Ingenieurs besteht deshalb darin, auf Grund von Apriori-Informationen über den Charakter des Gütefelds, über die Art der Beschränkungen und die Stärke der Störungen ein effektives Suchverfahren auszuwählen.

Wegen der dynamischen Trägheiten des Prozesses wird normalerweise nach jedem Suchschritt (Probe- oder Arbeitsschritt) der neue stationäre Zustand abgewartet. Das führt bei schnelleren Änderungen der Störgrößen und des Übertragungsverhaltens des Prozesses dazu, daß die Suche einem sich laufend ändernden optimalen Arbeitspunkt nicht mehr zu folgen vermag. Bei schnellerer Suche tritt wegen des (geschlossenen) Suchkreises das Stabilitätsproblem auf. Die Auswahl einer geeigneten, d. h. schnell und sicher konvergierenden Suchstrategie erfordert auch gewisse Kenntnisse des Prozeßmodells, auf die man gerade verzichten wollte. Aus diesen Gründen haben solche rückwärtsoptimierenden Systeme bei Prozessen mit mehreren Optimierungsvariablen bisher nur geringere Anwendung gefunden.

Zusammenfassend wollen wir anmerken:

S 4.10

Bei Systemen der statischen Rückwärtsoptimierung erfolgt die automatische Anpassung der Führungsgrößen durch einen Suchprozeß in einem von Optimisator

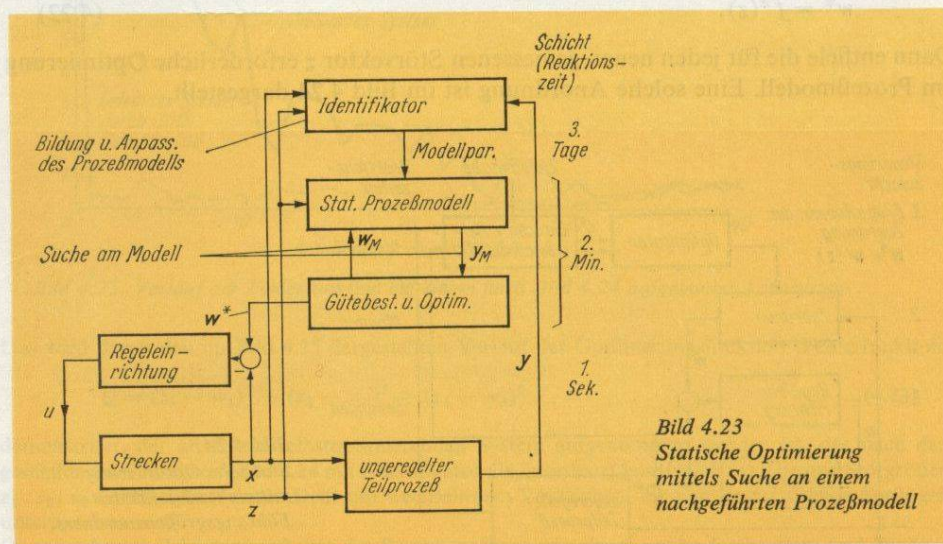
und Prozeß gebildeten (geschlossenen) Suchkreis. Durch den Optimisator werden hierbei auf Grund der am Prozeß gemessenen steuerbaren Ein- und Ausgangsgrößen und der daraus berechneten Werte für Ziel- und Beschränkungsfunktionen entsprechend einer vorgegebenen Suchstrategie die Führungsgrößen schrittweise so verstellt, daß der Wert der Zielfunktion unter Berücksichtigung der Beschränkungen optimiert wird. Eine vorherige quantitative Kenntnis von Prozeßmodell- bzw. Optimierungsmodell sowie eine Messung der Störgrößen ist nicht erforderlich. Wegen der dynamischen Trägheiten des Prozesses ist die Anwendbarkeit auf Prozesse beschränkt, deren optimale Arbeitspunkte sich langsam ändern.

4.3.5. Statische Selbstanpassung mit nachgeführtem statischem Prozeßmodell

Eine Überwindung der bereits genannten Schwierigkeiten und Nachteile der reinen Vorwärts- bzw. reinen Rückwärtsoptimierung wird dadurch ermöglicht, daß die Suche an einem statischen Modell des Prozesses [s. Gl. (4.5); $M \triangleq$ Modell]

$$y_M = h_M(x, z) \quad (4.21)$$

durchgeführt wird (Bild 4.23). Dieses Modell wird in der Arbeitsphase von einer Identifikations- (Modellbildungs-) Einrichtung auf Grund der am Prozeß gemessenen Ein- und Ausgangsgrößen gebildet und den sich ändernden statischen Übertragungseigenschaften des Prozesses nachgeführt: *Modellanpassung*.



Der Identifikator besteht gewöhnlich in einem Identifikationsalgorithmus, der auf dem Prozeßrechner oder einem übergeordneten, mit diesem verbundenen Leitrechner programmiert ist. Häufig beschränkt sich die Aufgabe des Identifikators auf die fort-

laufende Ermittlung der Parameter eines strukturell vorgegebenen Prozeßmodells (z. B. der Koeffizienten eines Polynoms) und die darauffolgende Abspeicherung dieser Parameterwerte anstelle der überholten. Zu den im Bild 4.23 angegebenen Reaktionszeiten wird später im Abschn. 4.5.2. Stellung genommen.

Zur Ermittlung der optimalen Führungsgrößen w^* führt ein Optimisator an dem Prozeßmodell eine Optimierung durch. Häufig erfolgt das durch Suche, so wie das im Abschn. 4.3.4. für die Suche am Prozeß erläutert worden ist. Dem Prozeßmodell können hierzu auch die gemessenen wesentlichen Störgrößen z zugeführt werden. Alle nichtgemessenen Störungen werden durch die Modellanpassung berücksichtigt, soweit diese den Störungsänderungen folgen kann. Der am Modell gefundene optimale Führungsvektor w_M^* wird dann als w^* auf den Prozeß gegeben. Da das Modell trägheitsfrei ist, kann die Suche von w^* wesentlich schneller erfolgen, als das am Prozeß möglich ist.

Bei gegebenem Prozeßmodell, d. h. zwischen zwei Modellanpassungen, liegt hinsichtlich der auf das Modell aufgeschalteten Störgrößen z eine Vorwärtsanpassung vor. Durch die Modellbildung und -anpassung wird die optimale Zuordnung zwischen w und z jedoch erst automatisch gelernt und danach sich ändernden Prozeßbedingungen nachgeführt. Diese Fähigkeit, bei wiederholten Umweltsituationen, die hier durch z repräsentiert werden, besser zu reagieren, ist eine charakteristische Eigenschaft von Lernsystemen.

4.3.6. Statische Selbstanpassung mit nachgeführtem Führungsgrößenzuordner

Soll das Prozeßmodell zwischen zwei Anpassungen zur Vorwärtsoptimierung dienen, so erhebt sich die Frage, ob dieses nicht besser durch einen optimalen Zuordner entsprechend Gl. (4.15) ersetzt werden sollte:

$$w^* = f^*(z). \quad (4.22)$$

Dann entfielen die für jeden neuen gemessenen Störvektor z erforderliche Optimierung am Prozeßmodell. Eine solche Anordnung ist im Bild 4.24 dargestellt.

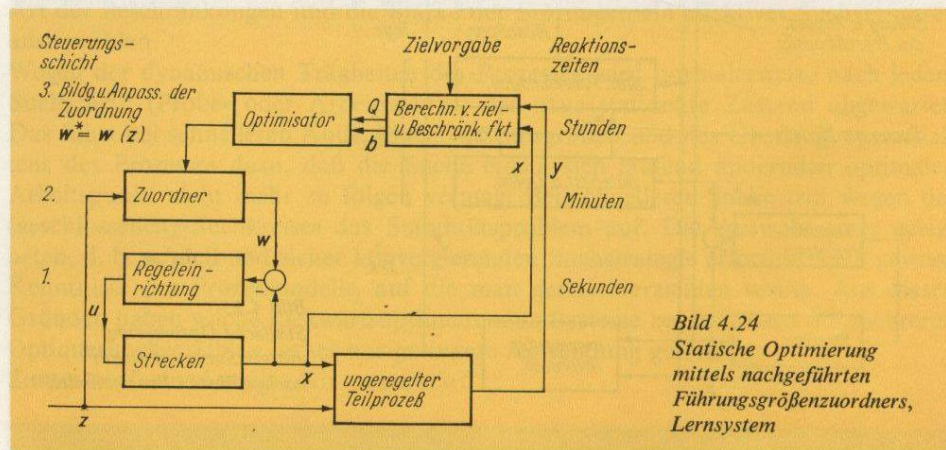


Bild 4.24
Statische Optimierung
mittels nachgeführten
Führungsgrößenzuordners,
Lernsystem

Der dort eingezeichnete Zuordner kann in Gleichungsform oder als Klassifikator gegeben sein, wie das schon bei der Vorwärtsoptimierung im Abschn. 4.3.2. erläutert

worden ist. Da zu Beginn der Arbeitsphase die optimale Zuordnung Gl. (4.22) noch unbekannt ist, muß diese zunächst in einer *Lernphase* gefunden und im Zuordner abgespeichert werden. Das erfolgt durch Suche mit dem eingezeichneten Optimisator. Obwohl diese Suche wieder am Prozeß durchgeführt werden muß, sind die infolge der Trägheiten des Prozesses bedingten Schwierigkeiten der Verfolgung eines wandernden optimalen Arbeitspunktes geringer als bei der reinen Rückwärtsoptimierung. Kann beispielsweise beim Klassifikationsmodell (s. Bild 4.16) der optimale Führungsvektor $w^*(ij)$ nicht gefunden werden, solange der Störvektor z in der Klasse ij verweilt, so wird zum Zeitpunkt des Verlassens dieser Klasse der bis dahin durch Suche erhaltene günstige (jedoch noch nicht optimale) Führungsvektor $\hat{w}(ij)$ abgespeichert. Beim späteren Wiedereintritt von z in die Klasse ij wird dann $\hat{w}(ij)$ sofort auf den Prozeß gegeben und durch weitere Suche dieser Wert verbessert. Auf diese Weise wird nach einer gewissen Lernphase ein optimaler Zuordner entsprechend Gl. (4.22) erhalten und sich langsam ändernden, nichtgemessenen Störungen angepaßt. Für die gemessenen Störungen z erlaubt dann der Zuordner, unverzüglich die hierzu optimalen Führungsgrößen $w^*(ij)$ auf den Prozeß zu geben.

Das im Abschn. 4.3.4. erläuterte, nur mit Suche am Prozeß arbeitende System muß bei Wiederholung einer Störsituation z sein optimales Verhalten (nämlich den Vektor w^*) grundsätzlich in der gleichen Weise suchen wie beim erstenmal. Das hier vorgestellte automatische System zeigt jedoch eine verbesserte Verhaltensweise – nämlich eine schnellere Anpassung – bei wiederholt auftretenden Störsituationen.

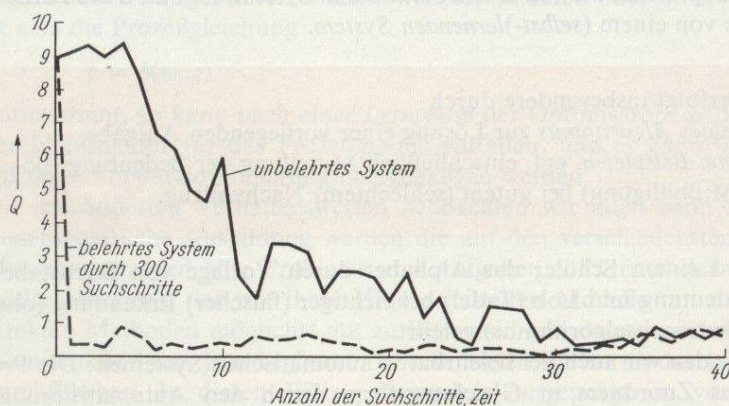


Bild 4.25. Verlauf der Fehlerfunktion bei einem nach Bild 4.24 aufgebauten Lernsystem

Das wird durch den im Bild 4.25 dargestellten Verlauf der Optimierungsfunktion (Fehlerfunktion)

$$Q = (z_1 - w_1)^2 + (z_2 - w_2)^2 + (z_3 - w_3)^2 \quad (4.23)$$

demonstriert, der an einem selbstoptimierenden System aufgenommen worden ist, das nach den geschilderten Prinzipien (Bild 4.24 mit Klassifikator als Zuordner) konstruiert ist. Die drei Störgrößen z_1, z_2, z_3 haben dabei lineare Drift mit wechselndem Vorzeichen, die von stochastischen Sprüngen unterbrochen wird.

Ohne vorherige Belehrung arbeitet das System anfangs wie ein normales Suchsystem und benötigt etwa 30 Suchschritte zum Abbau des großen Anfangsfehlers. Bei dem gleichen System wird der gleiche Anfangsfehler nach einer Lernphase von 300 Suchschritten in einem Schritt abgebaut. Der verbleibende Fehler hängt mit der Größe der Störklassen und dem Verfolgungsfehler innerhalb dieser Klassen zusammen.

Das vorgestellte System kann als ein *System der kombinierten Vorwärts- und Rückwärtsoptimierung* angesehen werden, wobei der Zuordner durch Rückwärtsoptimierung gefunden wird und dann eine Vorwärtsoptimierung ermöglicht.

Das geschilderte Verhalten weist typische Merkmale eines *Lernvorgangs* auf. Wir wollen uns deshalb im kommenden Abschnitt etwas allgemeiner mit den Eigenschaften von Lernvorgängen im Zusammenhang mit dem Aufbau automatischer Systeme befassen.

4.3.7. Eigenschaften automatischer lernender Systeme

Einem Menschen, der die Fähigkeit des Schwimmens oder Autofahrens erwerben möchte, wird man nur dann zugestehen, daß er „etwas gelernt“ hat, wenn er bei wiederholten Versuchen bessere Ergebnisse erzielt. Die gute Fahrweise eines Autos erfordert Anpassung insbesondere an die Straßenverhältnisse. Wer bei Eintritt eines jeden Winters erneut durch Probieren die richtige Fahrweise herausfinden muß, paßt sich zwar an, hat aber vom vorangegangenen Winter nicht gelernt. Nicht jeder Anpassungsvorgang ist demzufolge ein Lernvorgang. Das Lernen erfordert zusätzlich die Abspeicherung der gemachten günstigen Erfahrungen, so daß sie im Wiederholungsfall aktiviert werden können. Es dient somit der Anpassung und führt zu einer Verbesserung des Anpassungsvorgangs.

Das Lernen kann auf viele verschiedenartige Weisen erfolgen. Im Fall a der Belehrung durch einen Lehrer sprechen wir von einem *belehrbaren System*, im Fall b des Lernens ohne fremde Hilfe von einem (*selbst-*)*lernenden System*.

Die *Belehrung* erfolgt insbesondere durch

- a₁) *Mitteilung eines Algorithmus* zur Lösung einer vorliegenden Aufgabe
- a₂) *Vorführen von Beispielen*, ggf. einschließlich Mitteilung der Bedeutung, Bestätigung (Mißbilligung) bei gutem (schlechtem) Nachvollzug.

Beispielsweise wird einem Schüler das Alphabet durch Vorlage von Buchstaben, Mitteilung der Bedeutung und Lob (Tadel) bei richtiger (falscher) Erkennung (ohne Mitteilung des Erkennungsalgorithmus) gelehrt.

Beide Methoden finden wir auch bei belehrbaren automatischen Systemen: Die Programmierung eines Zuordners in Gleichungsform durch den Automatisierungingenieur bei der im Bild 4.15 dargestellten Vorwärtsoptimierung entspricht dem Fall a₁. Die Bildung eines Klassifikationszuordners kann dem Fall a₂ zugerechnet werden, wenn für Musterstörvektoren z_{ij} die zugehörigen optimalen Führungsvektoren („Bedeutungen“) w_{ji}^* mitgeteilt werden und das System dann andere Störvektoren in die Klasse des nächstgelegenen Mustervektors einordnet.

Bei den im Zusammenhang mit den selbstanpassenden Systemen besonders interessierenden (*selbst-*)*lernenden Systemen* muß die Belehrungsfunktion durch das System selbst geleistet werden. Das erfordert die selbständige Auffindung der Zuordnung zwischen gegebenen Umweltsituationen und den hierzu günstigen Verhaltensweisen und deren Bereithaltung für Wiederholungsfälle. Diese Zuordnung kann dabei wieder in funktioneller wie in tabellarischer Form gebildet werden. Das lernende System benötigt hierzu ein Erfolgskriterium. Bei automatischen Systemen muß dieses quantifiziert werden; es führt dann zu einer Zielfunktion.

Als Methoden zur Auffindung der optimalen bzw. einer zufriedenstellenden Zuordnung kommen bei automatischen Systemen in Betracht:

- b₁) die *direkte*, geschlossene oder numerische, *Bestimmung* der optimalen Lösung bei bekanntem mathematischem Modell
- b₂) die *Suche* der optimalen (einer zufriedenstellenden) Zuordnung bei unbekanntem oder für eine direkte Lösung zu kompliziertem Modell.

Das selbstoptimierende System mit nachgeführtem Prozeßmodell (s. Bild 4.23) erlaubt die Anwendung beider Methoden, insofern, als bei funktionell gegebenem Prozeßmodell das Optimum durch Lösung von Gleichungssystemen mit Nebenbedingungen gefunden werden kann. Häufig ist es auch in diesem Fall günstiger, die Lösung durch einen Suchprozeß zu gewinnen. Das System mit nachgeführtem Führungsgrößenzuordner (Bild 4.24) erlaubt wegen des unbekannten Prozeß- bzw. Optimierungsmodells nur die Anwendung der Suchmethode.

Beide soeben zitierten Systemtypen weisen Lerneigenschaften auf. Bei dem von Bild 4.23 trifft das zu, wenn die gemessenen Störgrößen z auf das Prozeßmodell geschaltet werden. Durch Bildung und laufende Anpassung des Prozeßmodells wird hier die Reaktion auf die Störgrößen z verbessert. Bei dem System von Bild 4.24 erfolgt das gleiche durch Bildung der Zuordnung zwischen Stör- und optimalen Führungsgrößen und deren Anpassung an sich ändernde (nichtgemessene) Prozeßbedingungen. Treten außer den gemessenen keine weiteren äußeren oder inneren Störgrößen auf, ist also die Prozeßgleichung

$$y = h(w, z) \quad (4.24)$$

zeitinvariant, so kann nach einer *Lernphase* der Optimisator für den Zuordner bzw. der Identifikator für das Prozeßmodell entfallen, und es kann in einer *Kannphase* auf reine Vorwärtsoptimierung übergegangen werden.

Die geschilderten Verhaltensweisen beobachten wir auch beim Menschen. Durch wissenschaftliche Ausbildung werden die auf den verschiedensten Gebieten tätigen Menschen erzogen, ihre Probleme und Aufgaben auf Grund der erkannten Gesetzmäßigkeiten und der mit ihrer Hilfe ermittelten Modelle mit den obengenannten direkten Methoden möglichst gut zu lösen und erst danach mit der Verwirklichung (Konstruktion usw.) zu beginnen. In sehr vielen Fällen ist das (allein) jedoch nicht durchführbar. In diesen Fällen, besonders ausgeprägt im vorwissenschaftlichen Kindesalter, beobachten wir deshalb die verschiedenartigsten Varianten von Suchmethoden. Sie beginnen bei einem mehr oder weniger planlosen Probieren und dem Merken der besonders günstigen und auch ungünstigen Ergebnisse und führen zu einem immer zielstrebigeren Experimentieren.

Selbst der wissenschaftlich Tätige wird sich noch dieser Suchmethoden bedienen. Sein Können wird gerade dadurch wesentlich mitbestimmt, daß er durch eine Kombination von analytischen und experimentellen Schritten die erstrebte Lösung mit möglichst geringem (Zeit-)Aufwand erhält. Hierzu wird er jedoch nicht planlos experimentieren. Im Rahmen der Untersuchung von Suchmethoden und der eng damit verbundenen *Versuchsplanung* werden solche effektiven Methoden ausgearbeitet.

Die in den beiden vorangegangenen Abschnitten vorgestellten automatischen lernenden Systeme kennzeichnen auch insgesamt typische menschliche Verhaltensweisen.

Die Funktionsweise des Systems mit nachgeführtem Prozeßmodell weist Analogien zu der menschlichen Gepflogenheit auf, in neuen wichtigen Situationen die Auswirkungen möglicher Verhaltensweisen zunächst an einem inneren Modell der Umwelt durchzuspielen und erst dann die gefundene optimale Reaktion auf die reale Umwelt anzuwenden. Solche Vorgänge laufen beim Menschen bewußt ab.

Das zuletzt angegebene System mit Bildung eines Zuordners charakterisiert die menschliche Fähigkeit, Assoziationen zwischen bestimmten Situationen und zweckmäßigen spontanen Reaktionen auszubilden, z. B. die Auslösung eines Bremsvorgangs bei Auftauchen eines Hindernisses vor einem Fahrzeug. Während die Herausbildung derartiger *bedingter Reflexe* während des menschlichen Lebens (in der „Arbeitsphase“) erfolgt, sind die *unbedingten Reflexe* eine angeborene Fähigkeit (in der „Vorbereitungsphase“ erworben). Ihr automatisches Analogon ist das System mit reiner Vorwärtsoptimierung über einen Zuordner (s. Bild 4.15).

Fassen wir zum Schluß dieses Abschnitts noch einmal zusammen:

D 4.12

Ein *lernendes System* ist durch die Fähigkeit charakterisiert, zweckmäßige Reaktionseigenschaften auf wiederholt auftretende Umweltsituationen herauszubilden und diese fortlaufend zu verbessern.

Erfolgt dieser Lernvorgang durch äußere Belehrung (insbesondere durch einen Menschen), so handelt es sich um ein *belehrbares System*; wird er durch das System selbst geleistet, so liegt ein selbstlernendes System, in dieser Arbeit kurz als *lernendes System* (im engeren Sinn) bezeichnet, vor.

Zur weiteren Erläuterung sei angefügt:

S 4.11

Die *Funktion eines automatischen lernenden Steuerungssystems* besteht in der – durch Suche am gesteuerten Prozeß bzw. über eine Modellbildung dieses Prozesses erfolgenden – Herstellung und fortlaufenden Anpassung von Zuordnungen zwischen meßbaren Prozeßsituationen und zweckmäßigen, insbesondere optimalen Reaktionen und deren Abspeicherung zum Zweck einer verbesserten (schnelleren) Reaktion bei sich wiederholenden Prozeßsituationen.

S 4.12

Bei Prozessen mit zeitinvariantem Prozeßmodell $y = h(x, z)$ kann der Lernvorgang auf eine zeitlich begrenzte *Lernphase* beschränkt werden. In der darauf folgenden *Kannphase* ist das System als ein belehrtes, aber nicht mehr als ein lernendes anzusehen. Bei zeitvariablem Prozeßmodell (infolge nichterfaßter Störungen) muß die Lernfähigkeit immer erhalten bleiben und entfällt diese zeitliche Unterscheidung.

4.4. Selbstanpassende Systeme bezüglich des dynamischen Verhaltens

4.4.1. Steuerungsaufgabe und Zielfunktional bei der dynamischen Optimierung

4.4.1.1. Steuerungsaufgabe

Bei den Vorwärtssteuerungen und Regelungen des Abschnitts 4.2. sind die Strukturen und Parameter der Steuer-/Regeleinrichtungen in der Vorbereitungsphase fest eingestellt worden. Solche Systeme arbeiten nur gut, wenn ein ausreichend genaues dynamisches Modell des Steuerungsobjekts dem Entwurf der Einrichtungen zugrunde gelegt worden ist und wenn sich dieses während der Arbeitsphase nicht wesentlich verändert. Das trifft jedoch nicht immer zu.

Werden Arbeitspunkte von Regelkreisen an einem nichtlinearen Prozeß im Zuge der statischen Optimierung verschoben, so ändern sich normalerweise auch die in den Arbeitspunkten linearisierten dynamischen Modelle für die Regelstrecken. Auch bei festgehaltenem Arbeitspunkt treten Änderungen des Übertragungsverhaltens infolge von Verschleiß, Alterung u. a. auf. Ein typisches Beispiel derartiger zeitlich veränderlicher Objekte sind Flugkörper, deren dynamische Eigenschaften sich mit der Fluggeschwindigkeit und der Flughöhe (der Luftdichte) ändern.

Muß bei starken Änderungen der Dynamik von Regelstrecken Stabilität und – darüber hinaus – zufriedenstellende oder gar optimale Arbeitsweise gesichert werden, so wird eine *dynamische Selbstanpassung* erforderlich, deren Aufgabe wie folgt formuliert werden kann:

Die *Steuerungsaufgabe von dynamisch selbstanpassenden (selbstoptimierenden) Systemen* besteht in der automatischen Anpassung (Optimierung) der Parameter und ggf. Struktur der Steueralgorithmen (insbesondere der Regeleinrichtungen) mit dem Ziel, bei anfangs unvollständig bekannten oder/und bei sich ändernden dynamischen Eigenschaften des Objekts ein durch ein gegebenes Zielfunktional bestimmtes zufriedenstellendes (optimales) dynamisches Prozeßverhalten zu gewährleisten.

S 4.13

Nach der Art der Beeinflussung werden dabei *selbsteinstellende* und *selbstorganisierende Systeme* unterschieden:

Selbstanpassende Systeme heißen *selbsteinstellend*, wenn die Anpassung durch Änderung der Parameter, und *selbstorganisierend (selbststrukturierend)*, wenn sie durch Änderung der Struktur der Steueralgorithmen bzw. Steuereinrichtungen erfolgt.

D 4.13

Selbstorganisierende Systeme können auch zur automatischen Wiederherstellung der Arbeitsfähigkeit nach Beschädigungen am Objekt oder den Steuereinrichtungen eingesetzt werden. Sie spielen bei Organismen eine größere Rolle, deren Fähigkeit zur Selbstregeneration und darüber hinaus zur Organisation neuer Organismen (Vermehrung) für sie charakteristisch ist.

4.4.1.2. Zielfunktionale

Als Kriterium zur Beurteilung des dynamischen Verhaltens dienen gewöhnlich *Zielfunktionale*, die für Systeme mit einer Steuer- und Ausgangsgröße folgende allgemeine Form haben:

$$I = \int_0^T f_0[q(t), u(t)] dt. \quad (4.25)$$

Bei diesen wird dem Verlauf der Zustands- und Steuergrößen in einem Beobachtungsintervall $0 \leq t \leq T$ eine die Güte bzw. den Fehler charakterisierende Zahl I zugeordnet. Bei einem häufig verwendeten Kriterium wird nur das Quadrat der Regelgröße $q_1 = x$ bzw. deren Abweichung vom Sollwert $e = x - w$ bewertet:

$$f_0 = e^2. \quad (4.26)$$

Soll beispielsweise die Güte der *Stabilisierung* nach einer Sprungstörung z_0 geprüft werden, so kann – falls $e(\infty) = 0$ ist oder von e abgezogen wird – T nach ∞ gelegt werden. Die auf diese Weise erhaltene sog.

quadratische Regelfläche

$$I = I_q = \int_0^\infty e^2(t) dt \quad (4.27)$$

ist im Bild 4.26 veranschaulicht.

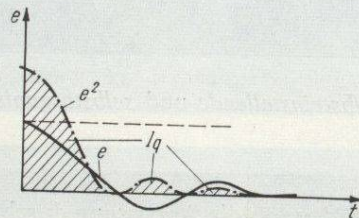


Bild 4.26. Quadratische Regelfläche I_q

Soll auch noch der Steuerungsaufwand bewertet werden, so kann das in Erweiterung von Gl. (4.27) unter Verwendung eines festen Bewertungsfaktors λ auf folgende Weise geschehen:

$$I = \int_0^\infty (e^2 + \lambda u^2) dt. \quad (4.28)$$

Bei der *Umsteueraufgabe* werden meist ein fester Anfangszustand $q(0)$ und ein fester Endzustand $q(T)$ vorgegeben. Wird hierbei $f_0 = 1$ gewählt, so ergibt sich das Kriterium der

Zeitoptimalität

$$I = \int_0^T f_0 \, dt = T. \quad (4.29)$$

In den genannten Beispielen besteht die Optimierungsaufgabe darin, die quadratische Regelfläche bzw. die Überführungszeit T zu einem Minimum zu machen. Allgemein wird der Optimalwert der Zielfunktion I^* (erforderlichenfalls nach Vorzeichenumkehr bei I) erhalten als

$$I^* = \min I. \quad (4.30)$$

4.4.1.3. *Optimierungsvariable*

Je nach den Größen, die bei der Optimierung verändert werden können, unterscheidet man folgende Optimierungen:

1. *Optimierung der Steuerfunktion $u^*(t)$*

$$I^* = \min_{u(t) \in U} I[q(t), u(t)] = I[q^*(t), u^*(t)] \quad (4.31)$$

$u^*(t)$ wird hierbei aus einer Menge zulässiger Steuerungen U ausgewählt, die insbesondere durch die von den Stellgliedern stammenden Schranken für die Steuergrößen und deren Geschwindigkeit bestimmt wird.

Diese Vorgehensweise entspricht einer offenen Steuerung. Sie kommt beispielsweise für die Durchführung eines optimalen Umsteuervorgangs (in Form einer Zeitplansteuerung) in Betracht.

Zur Störeliminierung wird die Gewinnung eines optimalen Regelalgorithmus bzw. einer optimalen Regeleinrichtung erstrebt, die die optimale Steuerung in Abhängigkeit vom Ausgangssignal x oder dem Zustand q zu berechnen gestatten:

$$u^*(t) = R^*[q(t)] \quad \text{bzw.} \quad u^*(t) = R^*[x(t)]. \quad (4.32)$$

Hierbei ist zwischen System- und Parameteroptimierung zu unterscheiden.

2. *Systemoptimierung*

$$I^* = \min_R I_R(R) = I_R(R^*) \quad (4.33)$$

Hierbei seien durch R die wählbare Struktur und Parameter der Regelalgorithmen symbolisiert, z. B. bei freier Programmierbarkeit an einem Prozeßrechner. R^* bezeichnet optimale Struktur und Parameter.

3. Parameteroptimierung

$$I^* = \min_{r_1, \dots, r_k} I_r(r_1, \dots, r_k) = I_r(r_1^*, r_2^*, \dots, r_k^*) \quad (4.34)$$

In diesem Fall ist die Struktur der Regeleinrichtungen bzw. der Regelalgorithmen an einem Prozeßrechner fest vorgegeben. Verfügbar sind k Parameter r_i , z. B. die in Gl. (4.1) eingeführten proportionalen und integralen Übertragungsfaktoren K_R und K_I . Mit r_i^* sind deren Optimalwerte bezeichnet.

In einem dynamischen selbstanpassenden System sind nun $u^*(t)$ bzw. R^* oder die r_i^* vom automatischen System in der Arbeitsphase selbst zu bestimmen und sich ändernden Prozeßeigenschaften nachzuführen.

4.4.2. Typen dynamisch selbstanpassender Systeme

Mit den bisher vermittelten Kenntnissen ist es noch nicht möglich, die Arbeitsweise dynamisch selbstanpassender Systeme in den Einzelheiten zu schildern. Wir wollen uns deshalb auf eine Darlegung der grundsätzlichen Möglichkeiten in Form von Blockschaltbildern beschränken. Dabei erweist es sich, daß dieselben Grundtypen existieren, die schon bei der statischen Selbstanpassung vorgefunden worden sind.

4.4.2.1. Dynamische Vorwärtsanpassung (Vorwärtsoptimierung)

Betrachten wir die wichtige Aufgabe, daß die Parameter r_i eines Reglers R den sich ändernden (wesentlichen) Parametern s_i einer Regelstrecke S angepaßt werden müssen. Es sei die Zuordnung des Vektors der optimalen Reglerparameter r^* zu dem Vektor der Streckenparameter s aus Voruntersuchungen bekannt:

$$r^* = r(s) \quad (4.35)$$

$$r^* = [r_1^*, \dots, r_k^*]^T, \quad s = [s_1, \dots, s_l]. \quad (4.36)$$

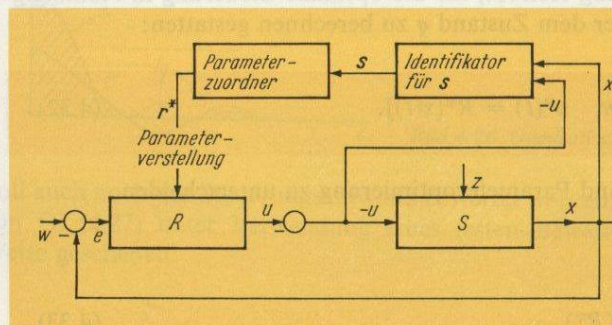


Bild 4.27. Steuerungssystem zur dynamischen Selbstanpassung mittels Vorwärtssteuerung (Vorwärtsoptimierung)

Dann kann das im Bild 4.27 dargestellte selbstanpassende System konstruiert werden. Aus den ihr zugeführten Ein- und Ausgangsgrößen der Strecke ermittelt die Identifikationseinrichtung den gegenwärtigen Parametervektor s der Strecke. Über den Parameterzuordner werden daraufhin die Parameter des Reglers auf ihre optimalen Werte r_i^* verstellt.

Da durch die Verstellung der Reglerparameter keine Beeinflussung der Streckenparameter (sondern nur eine Verbesserung des dynamischen Verhaltens des gesamten Regelkreises) erfolgt, existiert kein geschlossener Wirkungskreis über Identifikator, Zuordner und Regelkreis. Deshalb handelt es sich im vorliegenden Fall um eine *Vorwärtssteuerung (Vorwärtsoptimierung)*.

Ist die optimale Zuordnung der Regler- zu den Streckenparametern zu Beginn der Arbeitsphase noch unbekannt, so kann anstelle des Zuordners ein Optimierungsrechner treten, der auf Grund eines gegebenen Zielfunktional und der vom Identifikator gelieferten Parameter s die optimalen Reglerparameter r^* berechnet und deren Verstellung auslöst. Auch in diesem Fall besteht weiterhin der Charakter einer Vorwärtsoptimierung.

Da die optimale Reglereinstellung auch vom Charakter der Störsignale z abhängt, ist es zuweilen wünschenswert, eine dynamische Selbstanpassung auf Grund einer Identifikation der Störsignale z vorzunehmen. Ist die Zuordnung zwischen r^* und der gemessenen Störgrößeneigenschaft bekannt, so kann diese Optimierung wiederum als Vorwärtsanpassung analog dem Schema Bild 4.27 entworfen werden.

4.4.2.2. Dynamische Selbstoptimierung mittels Suche am Prozeß (Rückwärtsoptimierung)

Wird die dynamische Güte I des zu optimierenden Regelkreises selbst gemessen, dann kann auf einen Identifikator verzichtet und das im Bild 4.28 aufgezeichnete Suchsystem konstruiert werden.

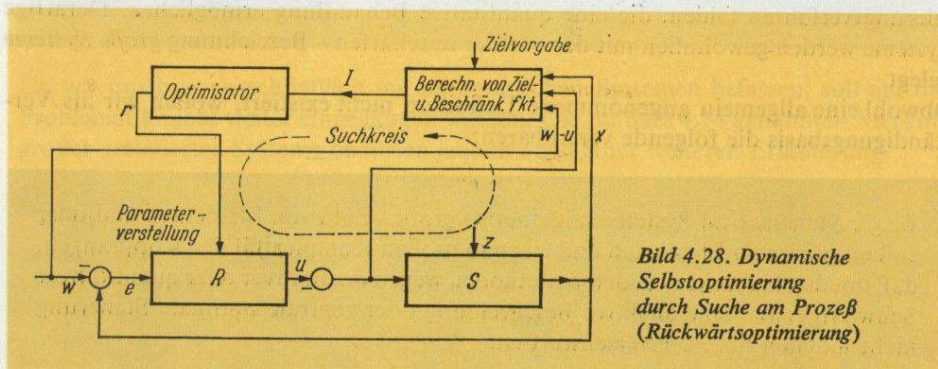


Bild 4.28. Dynamische Selbstoptimierung durch Suche am Prozeß (Rückwärtsoptimierung)

Der Optimisor verändert hier in einem zielstrebigem Suchprozeß (wie im Abschn. 4.3.4. erläutert) die Reglerparameter r_i und beobachtet die dadurch bewirkte Veränderung des Wertes des Zielfunktional I . Letzteres wird auf Grund der gemessenen Werte von x , u und w berechnet. Es existiert somit ein geschlossener Wirkungskreis (ein Suchkreis), und es handelt sich deshalb um eine *Rückwärtsoptimierung*. Damit taucht das Stabilitätsproblem auf und wird die Suchgeschwindigkeit beschränkt (wie schon im Abschn. 4.3.4. geschildert). Treten in der Regelstrecke sehr langsam veränderliche und nicht direkt meßbare sowie direkt meßbare und schneller veränderliche Parameterstörungen auf, so können auch die in den Abschnitten 4.3.6. und 4.3.5. am Beispiel der statischen Optimierung erläuterten *Lernverfahren* Anwendung finden. Die sich langsam ändernden Parameter werden hierbei durch Identifikation über die Ein- und Ausgangssignale der Strecke erfaßt. Mit diesen wird eine

Zuordnung zwischen optimalen Reglerparametern und den mit geringer Verzögerung direkt gemessenen Parameterstörungen ermittelt. Bis zur nächsten erforderlichen Korrektur dieses Zuordners bzw. Modells werden dann die Reglerparameter von den schnellen Parameterstörungen entsprechend der gefundenen Zuordnung unmittelbar verstellt.

4.5. Hierarchische (große) Steuerungssysteme

4.5.1. Charakteristische Eigenschaften großer Systeme

4.5.1.1. Zur Definition großer Systeme

In dem Bemühen, nicht nur Anlagenteile automatisch zu steuern und zu regeln, sondern zu einer optimalen Steuerung von ganzen Produktionsanlagen, Produktionssträngen und Produktionsbetrieben zu kommen, zeigen sich immer deutlicher die Grenzen der in der Vergangenheit benutzten Verfahren. Ähnliche Schwierigkeiten ergeben sich bei der Optimierung von großen Transportsystemen, Energieverbundsystemen, Informationssystemen (z. B. Post) sowie bei Planungs- und Leitungsprozessen auf den verschiedensten örtlichen und zentralen Ebenen.

Diese Schwierigkeiten sind einerseits quantitativer Art und betreffen den Rechenaufwand (Rechenzeit und Speicherplatzbedarf) zur Lösung der Steuerungsaufgaben in der Vorbereitungs- und Arbeitsphase. Sie sind jedoch andererseits zuweilen auch qualitativer Art, insofern, als für bestimmte Systeme Beschreibungs- und/oder Optimierungsverfahren fehlen, die eine quantitative Behandlung ermöglichen. Derartige Systeme werden gewöhnlich mit der – leider unscharfen – Bezeichnung *große Systeme* belegt.

Obwohl eine allgemein angenommene Definition nicht existiert, wollen wir als Verständigungsbasis die folgende vereinbaren:

D 4.14

Große Systeme sind Systeme mit einer so großen Zahl von Elementen und/oder so komplizierten Elementen und einer so großen Komplexität der Kopplungen, daß mit den bisher verwendeten Methoden wegen qualitativer oder quantitativer Schwierigkeiten eine effektive Beschreibung oder zentrale optimale Steuerung nicht möglich bzw. sehr erschwert ist.

Zu einer größeren Klarheit gelangen wir, wenn wir anstatt der vorstehenden, auf Ausschließung basierenden Definition die wesentlichen Besonderheiten großer Systeme nennen. Je nachdem, ob wir den zu steuernden Prozeß, die Zielfunktion oder die Steuereinrichtung (die Steueralgorithmen) betrachten, treten dabei andere Merkmale hervor.

S 4.14

Für *große Steuerungssysteme* sind folgende Merkmale charakteristisch:

- a) auf der Seite des *Steuerungsobjekts* die *Existenz mehrerer relativ selbständiger Teilsysteme*, die in gegenseitiger (stofflicher, energetischer, informationeller u. a.) Wechselwirkung stehen

- b) bezüglich der *Zielfunktion* das *Vorhandensein von* (sich teilweise widersprechenden) *Teilzielen* für die Teilsysteme, die ein oder mehrere für das Gesamtsystem erklärte Gesamtziele mitbestimmen
- c) hinsichtlich der *Steuerungseinrichtung* eine (funktionelle!) *hierarchische Struktur* der Steuerungseinrichtung bzw. der Steueralgorithmen.

Weitere Erschwernisse liegen in der zeitlichen Änderung der Objekteigenschaften und der Ziele und dem stochastischen Charakter der meisten Änderungen. Diese treten jedoch auch bei kleineren Systemen auf.

Qualitativ neue Probleme ergeben sich, wenn *Menschen* in großen Systemen wirksam sind. Als Angehörige von Kollektiven, die bestimmte Handlungen auszuführen haben – z. B. eine Bau- oder Montagebrigade, eine militärische Einheit oder ein Konstruktionsbüro – sind sie Teile eines gesteuerten (geleiteten) Prozesses. In Ausübung von Steuerungs-/Leitungsfunktionen – beispielsweise als Dispatcher oder Anlagenfahrer in einer Produktionsanlage oder als Leiter bestimmter organisatorischer Einheiten – sind sie Schöpfer und Träger von Steueralgorithmen. Sie übernehmen damit Aufgaben, die in automatischen Systemen den Steuerungseinrichtungen übertragen werden. Man spricht dann von *Leitung* anstelle von *Steuerung*, wenn dem geleiteten System auch Menschen angehören.

Mit *Leitung* bezeichnet man die Steuerung von Systemen, zu denen Menschen gehören, durch Menschen.

D 4.15

Da wir uns hier ausschließlich mit automatischen Systemen befassen, soll auf diese Problematik nicht weiter eingegangen werden. Die im Satz 4.14 genannten Merkmale großer gesteuerter Systeme bedürfen jedoch noch einer weiteren Erläuterung.

4.5.1.2. Teilsysteme

In Produktionsprozessen ist die relative Selbständigkeit von Teilen eines größeren Systems technologisch bedingt. Einzelne Verarbeitungsstufen eines chemischen oder metallurgischen Prozesses haben in sich wesentlich mehr Kopplungen als zu den Nachbarstufen, mit denen sie direkt gewöhnlich nur durch die übergebenen Zwischenprodukte verbunden sind. Eine übergeordnete Verkopplung tritt dadurch auf, daß die für den gesamten Betrieb zur Verfügung stehenden personellen und finanziellen Fonds und die Material- und Energiereserven beschränkt sind. Das bedingt, daß eine erhöhte Zuteilung an ein Teilsystem häufig eine verminderte bei anderen nach sich zieht.

Bei der Kooperation verschiedener Betriebe bilden diese relativ selbständige Teilsysteme, deren Kopplungen untereinander gering sind gegenüber den inneren Abhängigkeiten. Ähnliches kann von den Handels- und Versorgungsorganisationen hinsichtlich ihrer inneren Verflechtungen und der untereinander und zu den Produktionsbetrieben gesagt werden.

Bei vielen Organisationen kann die Größe von Teilsystemen in Grenzen geändert werden: im Bildungswesen die Größe von Hochschulen, Schulen und Klassen; in der Forschung die Größe von Instituten und Forschungskollektiven; beim Militär

die Gliederung und Stärke der Einheiten. In diesen Fällen muß eine möglichst gute Leitungsmöglichkeit der in solchen Teilsystemen ablaufenden, sehr verschiedenartigen Prozesse ein wichtiges Kriterium für die Wahl ihrer Größe bilden.

4.5.1.3. Teilziele

Die Aufgliederung in Teilsysteme bedingt, daß für das Gesamtsystem und die Teilsysteme eigene Ziele bestehen bzw. formuliert werden müssen. Dabei werden häufig die Teilziele und das Gesamtziel qualitativ gleich sein, z. B. Kostenminimierung für die Teilsysteme und das Gesamtsystem. In diesem Fall und vielen anderen Fällen ergibt sich die Gesamtzielfunktion als Summe der Teilzielfunktionen, und es handelt sich um eine *Zerlegung der Gesamtzielfunktion*. Infolge der gegenseitigen Verkopplung der Teilprozesse wird jedoch durch die einseitige Verfolgung des Zieles eines Teilsystems häufig die Güte anderer Teilprozesse herabgesetzt und nicht notwendig die Güte des Gesamtsystems erhöht. Dieser Umstand erfordert, daß die Zielfunktionen bzw. die Steuerungen der Teilsysteme so koordiniert werden, daß das letztlich erstrebte Optimum für das Gesamtsystem wirklich erreicht wird.

Nicht selten existieren für ein Gesamt- oder Teilsystem gleichzeitig mehrere qualitativ verschiedene Zielstellungen, die nicht ohne weiteres zu einer einzigen skalaren Zielfunktion vereinigt werden können: Ein Produktionsprozeß soll mit maximalem Durchsatz oder bei gegebenem Durchsatz mit minimalen Selbstkosten gefahren werden; gleichzeitig soll jedoch der Verschleiß der Anlage möglichst gering sein. Eine geforderte Prozeßautomatisierung soll mit minimalem Kostenaufwand, jedoch mit möglichst großer Zuverlässigkeit der Automatisierungseinrichtungen realisiert werden. Ein Prozeßmodell bzw. eine optimale Steuerung soll möglichst schnell und möglichst genau berechnet werden. Eine Volkswirtschaft soll so entwickelt werden, daß die Bedürfnisse der Bevölkerung heute und in weiterer Zukunft optimal erfüllt werden.

Derartige Probleme heißen *Polyoptimierungsprobleme* und erfordern spezielle Optimierungsstrategien.

Wir merken uns:

D 4.16

Ein Problem der *Polyoptimierung* liegt vor, wenn für das gleiche System gleichzeitig mehrere qualitativ unterschiedliche Zielfunktionen existieren.

Schließlich sei der Fall erwähnt, daß zwei oder mehr Systeme sich in Konkurrenz befinden. Derartige Probleme werden in der *Spieltheorie* behandelt. In dem einfachsten Fall ist der Gewinn des einen der Nachteil des anderen, z. B. in vielen Spielen und bei militärischen Auseinandersetzungen. Eine übergeordnete gemeinsame Zielfunktion, die von den Teilsystemen akzeptiert wird, gibt es dann nicht. Es ist ein Vorzug der sozialistischen Gesellschaftsordnung, daß alle Teilsysteme auf das Wohl des Gesamtsystems hin koordiniert werden können, und wir wollen uns auf diesen Fall beschränken.

4.5.1.4. Hierarchische Steuerungsstruktur

Von der Seite der automatischen Steuerung her zeigt sich, daß bei großen Systemen die Lösung der gesamten Steuerungsaufgabe bald einen solchen Umfang annimmt,

daß die hierzu eingesetzten Rechenmaschinen bezüglich Rechenzeit und Speicherplatz überfordert werden. Insbesondere wachsen die Zeiten zur Informationserfassung und -verarbeitung häufig so an, daß die Lösung des Steuerungsproblems erst erhalten wird, nachdem sich der zu steuernde Prozeß so weit verändert hat, daß die Ausführung der berechneten Steuerung nicht mehr sinnvoll ist. Wenn der Prozeß bis zur Lösung des gesamten Steuerungsproblems ohne Kontrolle bleibt, besteht darüber hinaus die Gefahr einer Havarie. Auch bei mittleren Rechenzeiten ergibt sich durch Verzögerung der Steuerbefehle ein Güteverlust.

Der allgemein beschrittene Weg zur Überwindung des Widerspruchs zwischen dem außerordentlichen Rechenaufwand, den die Lösung des gesamten Steuerungsproblems erfordert, und der Notwendigkeit, bestimmte Entscheidungen schnell zu treffen, besteht in einer *Zerlegung des Steuerungsproblems*. Diese führt auf eine funktionell *hierarchische Struktur der Steuereinrichtungen bzw. Steueralgorithmen*, weshalb derartige Systeme hierarchisch genannt werden.

Ein System heißt *hierarchisch*, wenn es eine hierarchische Steuerungs-/Leistungsstruktur hat. Eine *hierarchische Steuerungsstruktur* ist durch die Existenz mehrerer unter- und übergeordneter Steuerungsebenen gekennzeichnet, auf welche die gesamte Steuerungsaufgabe aufgeteilt ist.

D 4.17

Hierbei bestimmen und koordinieren die Steuereinrichtungen bzw. Steueralgorithmen einer übergeordneten Ebene die Arbeitsweise bzw. Arbeit der ihnen untergeordneten Steuereinrichtungen oder -algorithmen. Letztere melden erforderlichenfalls die Ergebnisse der im vorgegebenen Rahmen selbständig gelösten Steuerungsteilaufgaben an die höhere Ebene zurück, damit sie als Unterlage für die Findung übergeordneter Entscheidungen dienen können.

Ausdrücklich sei vermerkt, daß es sich um eine *funktionelle* Hierarchie handelt. So können die Aufgaben mehrerer Steuerungsebenen von einem Rechner bearbeitet werden, und die Aufgaben einer Ebene können auf mehrere Steuergeräte verteilt sein. Die Bildung einer Steuerungshierarchie kann auf zwei verschiedene Weisen erfolgen, die einer *vertikalen oder zeitlichen* bzw. *horizontalen oder räumlichen* Zerlegung der Steuerungsaufgaben entsprechen. Sie werden in den beiden folgenden Abschnitten 4.5.2. und 4.5.3. vorgestellt und mit Bild 4.35 zusammengefaßt.

4.5.2. Systeme mit hierarchischer Struktur der Steuerungsfunktionen: Mehrschichtsysteme

Beginnen wir mit einer *vertikalen oder zeitlichen Zerlegung*. Sie ist dadurch gekennzeichnet, daß verschiedene aus der Gesamtsteuerungsaufgabe für das gleiche Objekt sich ergebende Funktionen relativ selbständig gelöst und hierzu verschiedenen *Steuerungsfunktionsebenen* zugeordnet werden, die als *Schichten* bezeichnet werden. Die aus der Gesamtsteuerungsaufgabe ableitbaren Hauptsteuerungsfunktionen sind bereits im Abschn. 4.1.2. erläutert worden. Es sind dies: die direkte Steuerung der Prozeßgrößen; die Vorgabe der Führungsgrößen für die Direktsteuerung; die Vorgabe der Parameter für Direkt- und Führungsgrößensteuerung; die Vorgabe der Struktur für alle Steuereinrichtungen bzw. -algorithmen.

Ordnen wir diese Steuerungsfunktionen so in verschiedene Schichten ein, daß in

der untersten Schicht die zeitlich vordringlichsten, auf den höheren Schichten die grundsätzlicheren, jedoch längere Rechenzeit erfordernden Aufgaben bearbeitet werden, so erhalten wir die im Bild 4.29 dargestellte Hierarchie von Steuerungsfunktionen.

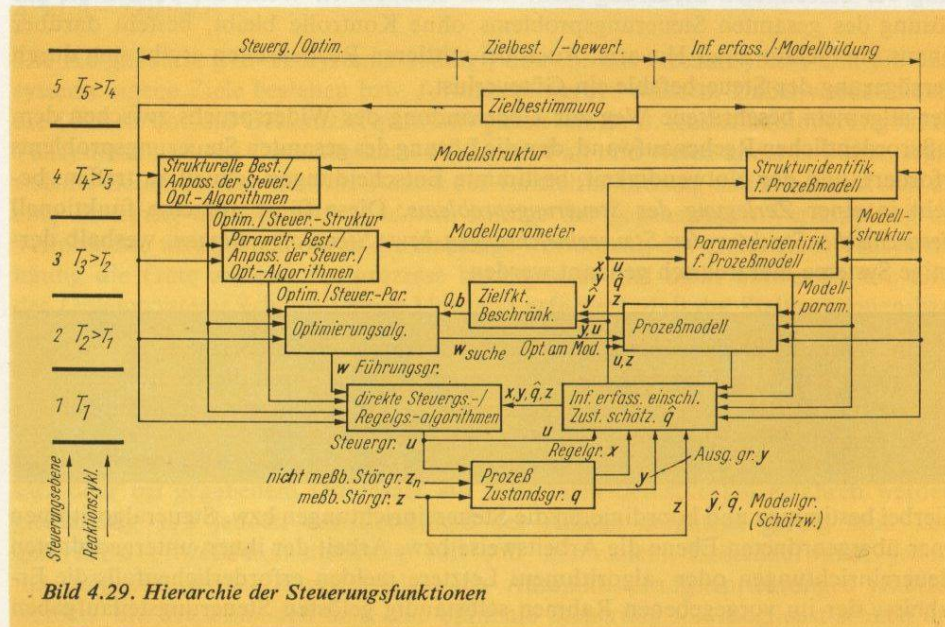


Bild 4.29. Hierarchie der Steuerungsfunktionen

Betrachten wir zunächst die linke, die Steuerung betreffende Bildhälfte. Auf der untersten Steuerungsfunktionsebene werden die Aufgaben der direkten Prozeßsteuerung (Regelung) erfüllt, die vergleichsweise einfach sind, jedoch wegen der notwendigen Kontrolle und Stabilität des Prozeßzustands keine Verzögerung erfahren dürfen. In der darüber befindlichen Steuerungsschicht werden die Führungsgrößen für die Direktsteuerung ermittelt, so wie das alle Beispiele des Abschnitts 4.3. (insbesondere die Bilder 4.15, 4.18, 4.23, 4.24) demonstrieren. Diese Aufgabe erfordert umfangreichere Berechnungen, und die Korrektur der Führungsgrößen kann wegen der i. allg. langsamen Drift des optimalen stationären Arbeitspunktes in größeren Zeitabständen erfolgen.

Eine noch längere Zeit erfordert die Bestimmung optimaler Parameter für die Algorithmen zur Führungsgrößen- und Direktsteuerung (s. Abschn. 4.4.2.). Glücklicherweise ändern sich die (dynamischen) Parameter des Objekts meist sehr langsam, so daß die benötigte Zeit auch wirklich zur Verfügung steht. Diese Funktion wird deshalb der nächsthöheren Schicht zugewiesen.

Die längste Zeit benötigt die Bestimmung optimaler Steuerungsstrukturen; sie wird deshalb von der obersten Schicht geleistet und fast immer in der Vorbereitungsphase erledigt.

Entsprechendes gilt für die in der rechten Bildhälfte dargestellte Ermittlung des statischen und dynamischen Prozeßmodells, das für die Berechnung der Steuer-algorithmen benötigt wird. Der direkten Steuerung der untersten Schicht entspricht hier die laufende Informationserfassung. Parameter und Struktur des in der zweiten

Schicht bereitgestellten Prozeßmodells werden von den entsprechenden Identifikationsalgorithmen höherer Schichten bestimmt.

Modellbildung und Steuerung stehen – insbesondere in der gleichen Schicht – in enger Wechselwirkung miteinander und werden von dem übergeordneten, für das zu steuernde System vorgegebenen Ziel durchdrungen.

Fassen wir zusammen:

Systeme mit hierarchischer Struktur der Steuerungsfunktionen oder Mehrschichtsysteme sind Systeme, bei denen die für ein Objekt zu leistende Gesamtsteuerungsfunktion in verschiedenartige Teilfunktionen zerlegt ist, die für das gleiche Objekt auf mehreren *Steuerungsfunktionsebenen* mit unterschiedlicher Periode ausgeübt werden. Diese Steuerungsfunktionsebenen werden *Schichten* genannt.

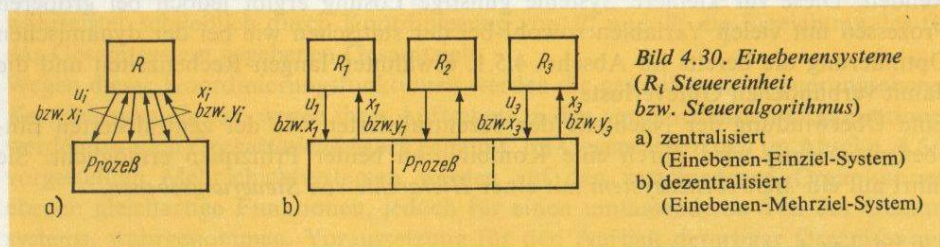
D 4.18

4.5.3. Systeme mit Hierarchie von Koordinierungsebenen: Mehrebenensysteme

4.5.3.1. Zentralisierte und dezentralisierte Einebenensysteme

Die bisher betrachteten Systeme waren dadurch gekennzeichnet, daß eine bestimmte Steuerungsfunktion von einer Steuerungseinheit bzw. einem Steueralgorithmus für das gesamte zu steuernde System ausgeübt wurde. Hierbei konnten verschiedene Steuerungsfunktionen in zueinander unter- und übergeordneten Schichten angeordnet sein (s. Abschn. 4.5.2.).

Eine gewisse Ausnahme bildeten die im Abschn. 4.2.2.4. vorgestellten Mehrfachregelungen, bei denen mehrere Regler an einem Objekt wirksam waren (s. Bild 4.11). Gelangen nur Hauptregler (R_1 , R_2) zum Einsatz, so bleiben die zwischen den Strecken (den Teilsystemen) bestehenden Kopplungen (weitgehend) unberücksichtigt. Die Hauptregler arbeiten dann so, als hätten sie nur das mit ihnen gekoppelte Teilsystem zu steuern.



Beiden Varianten ist zueigen, daß nur eine Steuerungsebene existiert, wobei in dem einen Fall diese durch einen Regler, in dem anderen durch mehrere gleichgeordnete und völlig selbständige Regler gebildet wird (Bild 4.30). Es ist deshalb sinnvoll, derartige Systeme *Einebenensysteme* zu nennen und sie durch die Attribute *zentralisiert* bzw. *dezentralisiert* zu unterscheiden.

Bei einem *zentralisierten (Einebenen-)System* wird eine bestimmte Steuerungsfunktion durch einen Steueralgorithmus für den Gesamtprozeß ausgeübt. Bei

D 4.19

einem *dezentralisierten (Ebenen-)System* existieren mehrere selbständige und gleichgeordnete Steueralgorithmien, die eine gleichartige Steuerungsfunktion für verschiedene Teile des Prozesses entsprechend gegebenen Teilzielen ausüben. Eine laufende Wahrnehmung eines Gesamtziels für den Gesamtprozeß erfolgt nicht. Die zentralisierten Systeme können somit auch als *Ebenen-Einzel-Systeme*, die dezentralisierten als *Ebenen-Mehrziel-Systeme* bezeichnet werden.

Maßgebend für diese Unterscheidung ist also nicht die gerätetechnische Realisierung. Ein Prozeßrechner, der zyklisch nacheinander die Funktionen der Regler für eine große Zahl von Regelstrecken wahrnimmt, ohne deren Verkopplung besonders zu beachten, stellt ein dezentralisiertes System dar.

Die mit Definition 4.19 getroffene Unterscheidung ist nicht auf die Funktion der direkten Steuerung/Regelung beschränkt. Sie gilt in gleicher Weise z. B. für die Optimierung der Führungsgrößen. Die Steuereinheiten R_i von Bild 4.30 sind dann Optimisatoren.

Mit dezentralisierten Steuereinrichtungen könnte ein für das Gesamtsystem erklärtes Ziel erreicht werden, wenn die von den einzelnen Einheiten ausgeübten Steuerungen sich nicht gegenseitig beeinflussen würden und die Teilziele in geeigneter Weise (z. B. additiv) mit dem Gesamtziel verbunden wären. Wegen der Verkopplung der Teilprozesse sind jedoch die erhaltenen Werte der Teilzielfunktionen von den Steuervariablen der anderen Teilsysteme abhängig. Manchmal ist der Einfluß dieser Wechselwirkungen auf die Steuerungsstrategie der Teilsysteme vernachlässigbar. Bei zeitinvarianten Prozessen kann er für den Fall der Regelungen vom Konstrukteur beim Entwurf der Regelalgorithmen berücksichtigt werden. Im allgemeinen Fall muß jedoch die Verfolgung des Zieles für das Gesamtsystem durch die Steuereinrichtungen zusätzlich wahrgenommen werden.

Die nächstliegende Möglichkeit besteht darin, eine zentralisierte Steuerung zu verwenden. Diese für kleinere Systeme günstige Lösung ergibt jedoch bei größeren Prozessen mit vielen Variablen sowohl bei der statischen wie bei der dynamischen Optimierung die bereits im Abschn. 4.5.1. erwähnten langen Rechenzeiten und die damit verbundenen Güteverluste.

Eine Überwindung der Nachteile der dezentralisierten wie der zentralisierten Ebenensteuerung wird durch eine Kombination beider Prinzipien ermöglicht. Sie führt auf ein *Mehrebenensystem* mit einer *Hierarchie von Steuerungsebenen*.

4.5.3.2. Mehrebenensysteme

Die Wirkungsweise von Mehrebenensystemen, deren Untersuchung insbesondere Mesarović zu verdanken ist, sei anhand des Bildes 4.31 mit besonderer Berücksichtigung der statischen Optimierung erläutert, für die dieses Prinzip große Bedeutung hat.

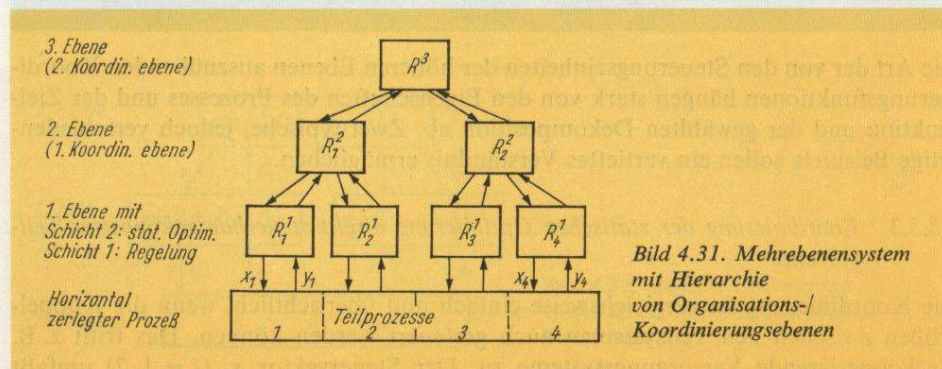
Ähnlich der Vorgehensweise bei den dezentralisierten Systemen gelangen auf der untersten Ebene mehrere gleichgeordnete Steuerungseinheiten R_i^1 zum Einsatz. Der zu steuernde Prozeß wird hierzu in mehrere Teilprozesse zerlegt, deren Steuerung durch je eine der Steuerungseinheiten der untersten Ebene erfolgt. Das entspricht einer *horizontalen oder räumlichen Zerlegung* des Prozesses. Für die Aufgabe der stati-

schen Optimierung wird hierbei der Prozeß durch sein statisches Modell repräsentiert:

$$y = h(x, z), \quad x = [x_1^T, \dots, x_4^T]^T \quad \text{usw.}; \quad (4.37)$$

x_i steuerbarer Eingangsvektor des i -ten Teilprozesses.

Jede Steuerungseinheit R_i^1 besteht in diesem Fall aus zwei Schichten, von denen die obere die optimalen steuerbaren Eingangsgrößen x_i für den i -ten Teilprozeß ermittelt und als Führungsgrößen w_i vorgibt, während die untere Schicht die Regeleinrichtungen umfaßt, die die Angleichung von x_i an w_i besorgen.



Über die dezentralisierten Einebenensysteme hinausgehend, haben die Mehrebenensysteme jedoch wenigstens noch eine weitere übergeordnete Ebene. Die auf den höheren Ebenen befindlichen Steuerungseinheiten koordinieren die Steuerungen der ihnen untergeordneten Einheiten so, daß die umfassenderen Ziele, die für die ihnen unterstellten Teilprozesse insgesamt bestehen, erreicht werden. Im Bild 4.31 sorgt R_1^2 für die Koordinierung der Optimierung des ersten und zweiten Teilprozesses. R^3 gewährleistet schließlich durch Koordinierung von R_1^2 und R_2^2 die Erreichung des für das Gesamtsystem gegebenen Gesamtziels.

Wegen dieser Koordinierungsfunktionen werden die geschilderten Steuerungsebenen *Koordinierungsebenen*, wegen ihres Auftretens in den verschiedensten Organisationen werden sie auch *Organisationsebenen* genannt. Im Gegensatz zu den im Abschn. 4.5.2. vorgestellten Mehrschichtsystemen werden auf den verschiedenen Organisationsebenen gleichartige Funktionen, jedoch für einen umfassenderen Teil des Gesamtsystems, wahrgenommen. Voraussetzung für den Aufbau derartiger Organisationsebenen ist eine Zerlegung des Prozesses und der Gesamtzielfunktion. Diese wird mit *Dekomposition* bezeichnet:

Unter *Dekomposition eines großen Steuerungssystems* versteht man die horizontale Zerlegung des zu steuernden Prozesses in Teilprozesse, verbunden mit einer Zerlegung der Gesamtzielfunktion und Beschränkungen in Teilzielfunktionen und Beschränkungen, die den Teilprozessen zugeordnet werden können.

D 4.20

Nach diesen Ausführungen können wir zusammenfassen:

- D 4.21** Ein *Mehrebenensystem* ist ein dekomponiertes Steuerungssystem mit einer Hierarchie von Steuerungsebenen, bei dem die Steuerungseinheiten/Steuerungsalgorithmen der untersten Ebene nur die optimale Steuerung der mit ihnen verbundenen Teilprozesse übernehmen, während die der höheren Ebenen durch *Koordinierung* der ihnen unterstellten Steuerungseinheiten die Erreichung der übergeordneten Ziele gewährleisten, die für bestimmte Teilmengen von Teilprozessen und für das Gesamtsystem bestehen. Die genannten Steuerungsebenen werden *Organisations- oder Koordinierungsebenen* oder kurz *Ebenen* genannt.

Die Art der von den Steuerungseinheiten der höheren Ebenen auszuübenden Koordinierungsfunktionen hängen stark von den Eigenschaften des Prozesses und der Zielfunktion und der gewählten Dekomposition ab. Zwei typische, jedoch verschiedenartige Beispiele sollen ein vertieftes Verständnis ermöglichen.

4.5.3.3. Koordinierung der statischen Optimierung direkt steuerbar gekoppelter Teilsysteme

Die Koordinierung ist vergleichsweise einfach und übersichtlich, wenn die Koppelgrößen zwischen den Teilsystemen auch gesteuert werden können. Das trifft z. B. für kooperierende Versorgungssysteme zu. Der Steuervektor x_i ($i = 1, 2$) umfaßt dann die vom System i an dessen Verbraucher abgegebenen Stoff- oder Energieflüsse. Der Koppelvektor v enthält den zwischen den beiden Versorgungssystemen stattfindenden (direkt steuerbaren) Stoff- bzw. Energieaustausch, dessen Steuerung sich auf beide Teilsysteme auswirkt. X_i, V seien die durch Zerlegung der Beschränkungen erhaltenen Mengen der entsprechenden zulässigen Steuergrößen.

Es sei die Zielfunktion Q des Gesamtsystems die Summe der Zielfunktionen Q_i der Teilsysteme. Dann läßt sich die Optimierungsaufgabe unter bestimmten Voraussetzungen wie folgt zerlegen:

$$\begin{aligned}
 \min_{\substack{x_1 \in X_1 \\ x_2 \in X_2 \\ v \in V}} Q(x_1, x_2, v) &= \min_{\substack{x_1 \in X_1 \\ x_2 \in X_2 \\ v \in V}} [Q_1(x_1, v) + Q_2(x_2, v)] \\
 &= \min_{v \in V} \left[\min_{x_1 \in X_1} Q_1(x_1, v) + \min_{x_2 \in X_2} Q_2(x_2, v) \right] \\
 &= \min_{v \in V} [\hat{Q}_1(v) + \hat{Q}_2(v)].
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Überträgt man die Optimierung bezüglich x_i den Optimisatoren der unteren Ebene, die bezüglich v dem übergeordneten Koordinator, so erhält man das im Bild 4.32 dargestellte Mehrebenensystem.

Bei diesem wird v als *Koordinierungsvektor* (als *Parametervektor*) den Optimisatoren der unteren Ebenen vorgegeben, die durch Optimierung bezüglich x_i die von v abhängigen Optima $\hat{Q}_i(v)$ der Teilsysteme bestimmen. An die obere Ebene werden nur

die (verdichteten) Informationen über die mit gegebenem v erzielten Werte der Teilzielfunktionen $\hat{Q}_i(v)$ gemeldet, die auf Grund der am Prozeß gemessenen Ein- und Ausgangsgrößen [s. Gl. (4.7)] ermittelt werden. Hierdurch wird der Koordinator in die Lage versetzt, das für einen vorgegebenen Koordinierungsvektor v erzielbare Optimum des Gesamtsystems

$$\hat{Q}(v) = \hat{Q}_1(v) + \hat{Q}_2(v) \quad (4.39)$$

zu bestimmen und durch einen Suchprozeß v schrittweise zu verbessern. Unter bestimmten Bedingungen, die erst später untersucht werden können, konvergiert dieser Suchprozeß zu dem im zulässigen Steuerungsbereich globalen Optimum

$$Q^* = \min_{v \in V} \hat{Q}(v) = \hat{Q}(v^*). \quad (4.40)$$

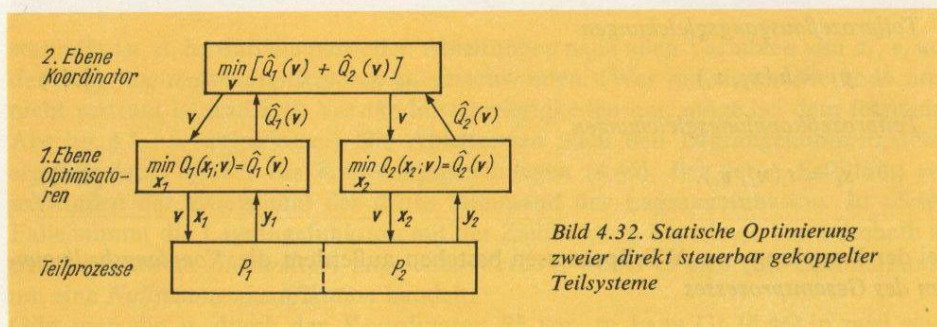


Bild 4.32. Statische Optimierung zweier direkt steuerbar gekoppelter Teilsysteme

Obwohl für jeden neuen Parametervektor v die Optimierung der Teilsysteme bezüglich x_i wiederholt wird, kann die Rechenzeit dann herabgesetzt werden, wenn die Zahl der Steuervariablen der einzelnen Teilsysteme beträchtlich kleiner als die des Gesamtsystems ist. Das hat seine Ursache darin, daß der Rechenaufwand für die Optimierung stärker als mit dem Quadrat der Zahl der Steuervariablen wächst. Durch die parallele Arbeit mehrerer Optimisatoren ergeben sich außerdem höhere Zuverlässigkeiten. Insbesondere können bei Ausfall des Koordinators oder eines Optimisators die (anderen) Teilsysteme bezüglich x_i weiter optimiert werden.

4.5.3.4. Koordinierung bei der statischen Optimierung abhängig gekoppelter Teilsysteme

Andere Koordinierungsmethoden sind erforderlich, wenn die Koppelgrößen nicht direkt steuerbar sind und von anderen Steuergrößen abhängen. Das statische Modell eines derartigen, für viele Anwendungsfälle typischen Teilprozesses zeigt Bild 4.33.

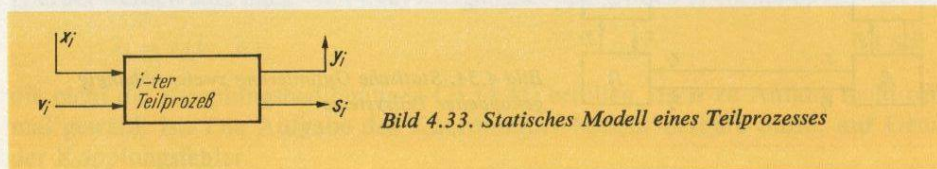


Bild 4.33. Statisches Modell eines Teilprozesses

Zur Vereinfachung sind darin und in den folgenden Beziehungen die Störgrößen z weggelassen worden.

Die eingezeichneten Eingangs- und Ausgangsvektoren bedeuten:

- x_i gesteuerte Eingangsgrößen, mit den Führungsgrößen w_i im stationären Zustand übereinstimmend
- y Ausgangsgrößen, die den Gesamtprozeß verlassen (Ausgangsprodukte)
- v_i Eingangskoppelgrößen, insbesondere Zwischenprodukte von anderen Teilprozessen
- s_i Ausgangskoppelgrößen, insbesondere Zwischenprodukte für andere Teilprozesse.

Im stationären Zustand seien sie durch folgende Beziehungen verbunden:

Teilprozeßausgangsgleichungen

$$y_i = h_i(x_i, v_i) \quad (4.41)$$

Teilprozeßkopplungsgleichungen

$$s_i = t_i(x_i, v_i). \quad (4.42)$$

Bei der Kopplung von N Teilprozessen bestehen außerdem die *Kopplungsbedingungen des Gesamtprozesses*

$$v_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} s_j, \quad (4.43)$$

wobei die Elemente der Kopplungsmatrizen C_{ij} vom j -ten zum i -ten Teilprozeß nur Eins- und Nullelemente sind, je nachdem, ob die entsprechenden Ausgangskoppelgrößen des j -ten Teilprozesses mit den Eingangskoppelgrößen des i -ten Teilprozesses verbunden sind oder nicht.

Beschränken wir uns im folgenden auf ein *Zweiebenensystem* mit zwei Teilprozessen (Bild 4.34).

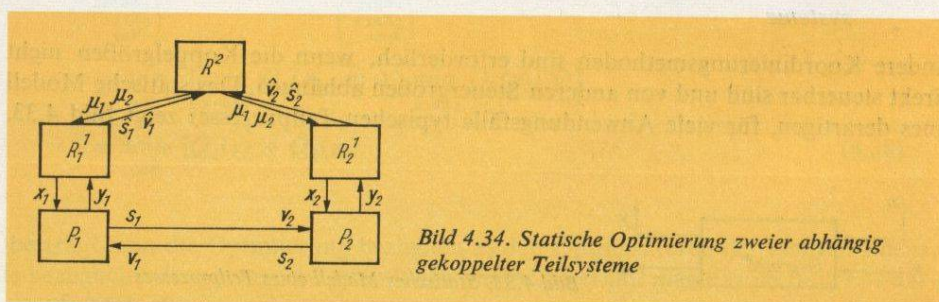


Bild 4.34. Statische Optimierung zweier abhängig gekoppelter Teilsysteme

Die Gesamtzielfunktion Q möge sich additiv aus den Teilzielfunktionen Q_i ergeben:

$$Q(x_1, x_2, v_1, v_2) = Q_1(x_1, v_1) + Q_2(x_2, v_2). \quad (4.44)$$

Die Kopplungsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} v_1 &= s_2 = t_2(x_2, v_2) \\ v_2 &= s_1 = t_1(x_1, v_1). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Eine *notwendige* Bedingung dafür, daß die Zielfunktion Gl. (4.44) mit den Nebenbedingungen Gln. (4.45) ein Minimum hat, besteht darin, daß die *Lagrangefunktion*

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i=1}^2 Q_i(x_i, v_i) + \mu_1^T [v_1 - t_2(x_2, v_2)] \\ &\quad + \mu_2^T [v_2 - t_1(x_1, v_1)] \end{aligned} \quad (4.46)$$

stationär ist, d. h., daß die partiellen Ableitungen nach allen Variablen von x_i , v_i und den sog. *Lagrangemultiplikatoren* μ_i verschwinden. (Wer mit dieser Methode noch nicht vertraut ist und evtl. Verständnisschwierigkeiten hat, möge bei dem folgenden Abschn. 4.5.3.5. weiterlesen.) Die Ableitungen nach den Lagrangemultiplikatoren ergeben dabei wieder die Kopplungsgleichungen (4.45). Bei deren Erfüllung verschwinden der zweite und der dritte Summand der Lagrangefunktion. In diesem Falle stimmt die Lagrangefunktion mit der Zielfunktion überein. L kann deshalb als eine *modifizierte Zielfunktion* angesehen werden, wobei es sich (im Optimalpunkt) um eine *Nullsummenmodifikation* handelt.

Gibt man die μ_i durch den Koordinator R^2 vor, so kann Gl. (4.46) in zwei *modifizierte Teilzielfunktionen* $Q_{i\mu}$ zerlegt werden, die nur von x_i , v_i abhängig sind ($i = 1, 2$):

$$\begin{aligned} Q_{1\mu}(x_1, v_1) &= Q_1(x_1, v_1) + \mu_1^T v_1 - \mu_2^T t_1(x_1, v_1) \\ Q_{2\mu}(x_2, v_2) &= Q_2(x_2, v_2) + \mu_2^T v_2 - \mu_1^T t_2(x_2, v_2) \end{aligned} \quad (4.47)$$

mit

$$Q_{1\mu}(x_1, v_1) + Q_{2\mu}(x_2, v_2) = L. \quad (4.48)$$

Aufgabe der Optimisatoren R_i^1 ist nunmehr die Minimierung von $Q_{i\mu}$ bei vorgegebenem Koordinierungsvektor μ :

$$\begin{aligned} \min_{(x_i, v_i)} Q_{i\mu}(x_i, v_i, \mu) &= Q_{i\mu}(\hat{x}_i, \hat{v}_i, \mu) \\ \mu &= [\mu_1^T, \mu_2^T]^T; \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Hierbei werden sich nach Gl. (4.42) Ausgangskoppelgrößen $\hat{s}_i$ einstellen:

$$\hat{s}_i = t_i(\hat{x}_i, \hat{v}_i), \quad (4.50)$$

die nicht die Kopplungsbedingungen Gl. (4.45) erfüllen, da μ zu Anfang nicht optimal gewählt ist. Die Aufgabe des Koordinators besteht deshalb darin, auf Grund der Kopplungsfehler

$$e_1 = \hat{v}_1 - \hat{s}_2, \quad e_2 = \hat{v}_2 - \hat{s}_1 \quad (4.51)$$

die Koordinierungsvektoren μ_i – z. B. in einem Suchprozeß – so zu verändern, daß

diese Fehler verschwinden. Dann ist auch die letzte Stationaritätsbedingung erfüllt. Das geschilderte Koordinierungsprinzip wird deshalb auch als *Wechselwirkungs-balance-Methode* bezeichnet.

Das Koordinierungsprinzip läßt sich anschaulich interpretieren, wenn man die Koordinierungsvektoren μ_1, μ_2 als (Schatten-)Preise für die eingekauften Produkte v_1, v_2 bzw. für die verkauften Produkte s_2, s_1 betrachtet. Durch Erhöhung von μ_1 wird R_1^1 veranlaßt, weniger einzukaufen (v_1 zu vermindern), und R_2^1 wird stimuliert, mehr zu verkaufen (s_2 zu erhöhen). Durch Herabsetzung von μ_1 kann die gegenteilige Wirkung hervorgerufen werden. Entsprechendes gilt für μ_2 . Auf diese Weise können durch Änderung des Preisniveaus die Kopplungsfehler beseitigt werden. Die Untersuchung der hinreichenden Bedingungen dafür, daß dieser hierarchisch gestufte Optimierungsprozeß zu einem globalen Minimum konvergiert, muß einer späteren ausführlicheren Behandlung vorbehalten bleiben.

4.5.3.5. Verallgemeinerung des Koordinationsbegriffs

Aus dem vorstehenden Beispiel lassen sich einige allgemeine Prinzipien zur Steuerung von Zweiebenensystemen abheben, die auch für andere, hier nicht vorgestellte Koordinierungsmethoden in ähnlicher Weise gelten:

Es existieren Zielfunktionen für das Gesamtsystem, für die Teilsysteme und für den Koordinator. (Im vorgestellten Beispiel besteht das Koordinationsziel in der Beseitigung der Kopplungsfehler.) Die Teilzielfunktionen sind hierbei mit der Gesamtziel-funktion durch eine meist additive oder multiplikative Kopplung verbunden. Aufgabe des Koordinators ist die Erzeugung von Harmonie zwischen den Teilsystemen und zwischen diesen und dem Gesamtsystem. Diese *Harmonie* liegt vor, wenn die von den Teilsystemen erstrebten Optima untereinander und mit dem des Gesamtsystems übereinstimmen. Zu diesem Zweck beeinflußt der Koordinator mittels eines Koordinierungsvektors die Steuerung der Teilsysteme. Das geschieht insbesondere durch Modifizierung der Teilzielfunktionen oder durch Vorgabe der Koppelgrößen zwischen den Teilprozessen.

Obwohl der Koordinator häufig nicht unmittelbar das Gesamtziel, sondern sein eigenes Koordinationsziel verfolgt, muß durch das verwendete Koordinationsprinzip sichergestellt werden, daß die genannte Harmonie zwischen den Teilsystemen und dem Gesamtsystem erzeugt wird. Wir können damit den bereits mehrfach verwendeten Begriff der Koordinierung schärfer formulieren:

D 4.22

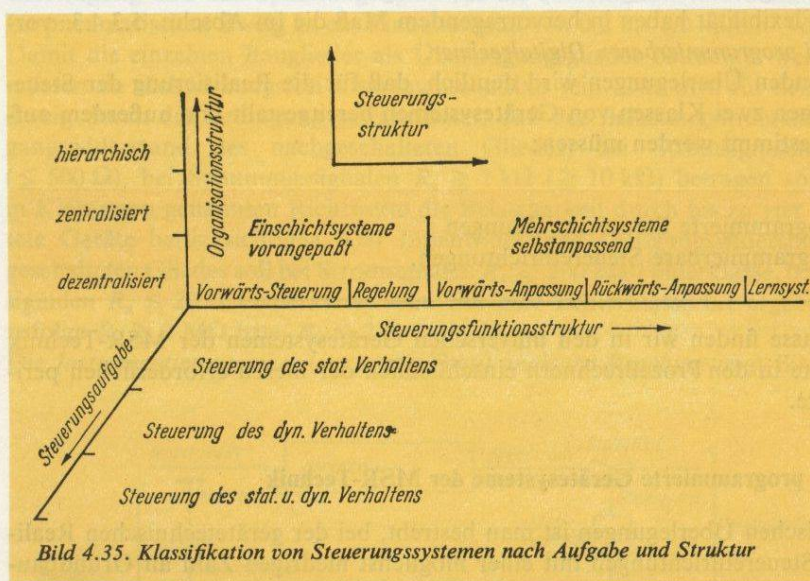
Unter *Koordinierung* versteht man die zielstrebige Beeinflussung der Steuerung von Teilsystemen durch eine *Koordinator* genannte Steuerungseinheit mit dem Ziel, daß die gleichzeitige Optimierung der Teilsysteme (nach modifizierten Teilzielfunktionen) und des Koordinators (entsprechend einer Koordinationsziel-funktion) das Optimum des Gesamtsystems (der Gesamtziel-funktion) ergibt.

Hierzu ist ein bestimmter Zusammenhang zwischen den Teilzielen, dem Ziel des Koordinators und dem Gesamtziel erforderlich, der von einem anwendbaren Koordinationsprinzip erfüllt sein muß. Bei Systemen mit mehr als zwei Ebenen gelten die vorstehenden Ausführungen sinngemäß für die den Koordinatoren unterstellten Teilsysteme bzw. Teilkomplexe.

4.5.3.6. Klassifizierung hierarchischer Steuerungssysteme

In konkreten größeren Steuerungssystemen finden wir mannigfaltige Kombinationen von Organisations- und Steuerungsfunktionsebenen vor. Dabei können einerseits auf einer Ebene verschiedene Steuerungsfunktionen geleistet werden (s. beispielsweise die erste Ebene im Bild 4.31). Andererseits kann eine Steuerungsfunktion über mehrere Ebenen verteilt sein, wie das für die vorstehenden Beispiele der statischen Optimierung in Mehrebenensystemen zutrifft. Bevorzugt werden auf den höheren Organisations-ebenen die übergeordneten Steuerungsfunktionen ausgeübt.

Beschränken wir uns auf die übergeordneten Unterscheidungsmerkmale, so kann das aus Bild 4.35 ersichtliche Klassifikationsschema gewählt werden. Bei diesem entspricht ein konkretes Steuerungssystem einem Gebiet in einem dreidimensionalen Raum.



Die hierarchische Strukturierung ermöglicht insbesondere eine *Informationsreduktion* nach oben und eine *Befehlspräzisierung* nach unten. Auf diese Weise kann sich die übergeordnete Ebene/Schicht auf die umfassenderen Entscheidungen, die längere Zeit der Informationserfassung und -verarbeitung erfordern, beschränken und diese in größeren Abständen fällen.

Offensichtlich kann dasselbe Steuerungsproblem mit verschiedenen Strukturen der Steuerungseinrichtungen gelöst werden. Hinsichtlich der Grobstruktur betrifft das die Zahl der bei der Zerlegung gebildeten Teilsysteme sowie die der Ebenen und Schichten. Damit ergibt sich das Problem der *Auswahl der besten Steuerungsstruktur*. Hierzu wird ein übergeordnetes Gütekriterium benötigt, das den mit verschiedenen Steuerungsstrukturen bei gleich guter Erfüllung der Grundaufgabe verbundenen Informationsverarbeitungsaufwand und evtl. weitere Kenngrößen, wie Systemzuverlässigkeit, zu vergleichen gestattet.

4.6. Zur gerätetechnischen Realisierung von Steuereinrichtungen

In den vorangegangenen Abschnitten dieses Kapitels haben wir sehen können, wie mit steigendem Umfang der Steuerungsaufgaben, von den vorangepaßten zu selbstanpassenden Systemen fortschreitend, die Komplexität der Steuereinrichtungen bzw. der von ihnen zu verwirklichenden Steueralgorithmen rasch wächst. Während für die einfacheren offenen Steuerungs- und Regelungsfunktionen der untersten Ebene typisierte Bausteine fester Struktur mit wenigen veränderbaren Parametern ausreichen, erfordern die im Bild 4.1 vermerkten höheren Steuerungsfunktionen der Führungsgrößenoptimierung bzw. der Ermittlung optimaler Parameter und Strukturen für die Steuerung des statischen und dynamischen Verhaltens kompliziertere Algorithmen. Diese müssen an den konkreten Anwendungsfall hinsichtlich ihrer zahlreichen Parameter und häufig auch bezüglich der Struktur angepaßt werden.

Eine solche Flexibilität haben in hervorragendem Maß die im Abschn. 5.3.4.3. vorgestellten *frei programmierbaren Digitalrechner*.

Aus vorstehenden Überlegungen wird deutlich, daß für die Realisierung der Steuerungsfunktionen zwei Klassen von Gerätesystemen bereitgestellt und außerdem aufeinander abgestimmt werden müssen:

1. fest programmierte Steuereinrichtungen
2. frei programmierbare Steuereinrichtungen.

Die erste Klasse finden wir in den universellen Gerätesystemen der MSR-Technik vor, die zweite in den Prozeßrechnern einschließlich der hierzu erforderlichen peripheren Geräte.

4.6.1. Fest programmierte Gerätesysteme der MSR-Technik

Aus ökonomischen Überlegungen ist man bestrebt, bei der gerätetechnischen Realisierung von Steuereinrichtungen mit einer möglichst niedrigen Zahl an Grundbausteinen auszukommen. Diese sind so festzulegen, daß damit flexibel alle gegenwärtigen und zukünftigen Steuerungsaufgaben erfüllt bzw. durch Ergänzungen leicht verwirklicht werden können. Eine solche Zielstellung führt auf die Festlegung von *Einheitssignalen* für den informationsübertragenden und -verarbeitenden Teil der Steuereinrichtungen. Auf der Seite der Informationserfassung und der der Informationsnutzung muß dann der Übergang zu den zu messenden bzw. zu verstellenden, sehr verschiedenartigen Größen des gegebenen Objekts gewährleistet werden. Gerätesysteme, die diesen Forderungen genügen, werden gewöhnlich als *Einheitssysteme* bezeichnet.

Das in der DDR geschaffene universelle System von Geräten und Einrichtungen zur Gewinnung, Übertragung, Verarbeitung und Nutzung von Informationen für die Automatisierung technologischer Prozesse trägt die Bezeichnung *ursamat*. Es ist in Übereinstimmung mit den von den Mitgliedsländern des Rates für Gegenseitige Wirtschaftshilfe gegebenen Richtlinien für ein universelles internationales Gerätesystem zur automatischen Überwachung, Regelung und Steuerung (Abkürzung URS) entwickelt worden.

Das System *ursamat* umfaßt die folgenden Hauptzweige:

- Geräte zur Informationsgewinnung (*ursakont*)
- Geräte zur elektrischen, pneumatischen und hilfsenergiefreien Informationsübertragung und -verarbeitung (*ursatron*, *ursapneu*, *ursastat*)
- Geräte zur Informationsnutzung (*ursawirk*).

Im analogen elektrischen Zweig wird mit einem *Stromeinheitssignal* von 0 bis 5 mA (–5 bis 5 mA bei symmetrischer Aussteuerung) oder mit einem *Spannungseinheitssignal* 0 bis 10 V (bei symmetrischer Aussteuerung –10 bis 10 V) gearbeitet. Dabei wird aus elektrotechnischen Überlegungen das Stromsignal für die Informationsübertragung und das Spannungssignal für die Informationsverarbeitung bevorzugt. Im pneumatischen Zweig ist ein Einheitssignal von 0,2 bis 1,0 kp/cm² vorherrschend. Damit die einzelnen Bauglieder als Übertragungsglieder betrachtet werden können, müssen sie rückwirkungsfrei zusammenschaltbar sein. Das wird für den elektrischen Zweig durch die Bedingung gewährleistet, daß der Belastungswiderstand (der Eingangswiderstand des nachgeschalteten Gliedes) bei Stromsignalen $R_e \leq 2 \text{ k}\Omega$ ($\leq 500 \Omega$), bei Spannungssignalen $R_e \geq 2 \text{ k}\Omega$ ($\geq 10 \text{ k}\Omega$) betragen soll, wobei die in Klammern genannten Richtwerte die Belastbarkeit durch bis zu vier nachgeschaltete Geräte berücksichtigen. Der Innenwiderstand (Ausgangswiderstand) des vorgeschalteten Gliedes soll bei Stromsignalen $R_a \geq 200 \text{ k}\Omega/\text{Fehlerklasse}$, bei Spannungssignalen $R_a \leq 20 \Omega/\text{Fehlerklasse}$ sein. Für eine Fehlerklasse 0,1 ergeben sich demzufolge $R_a \geq 2 \text{ M}\Omega$ bzw. $R_a \leq 2 \Omega$.

Die Instrumentierung einer (vorangepaßten) analogen Regelung zeigt Bild 4.36.

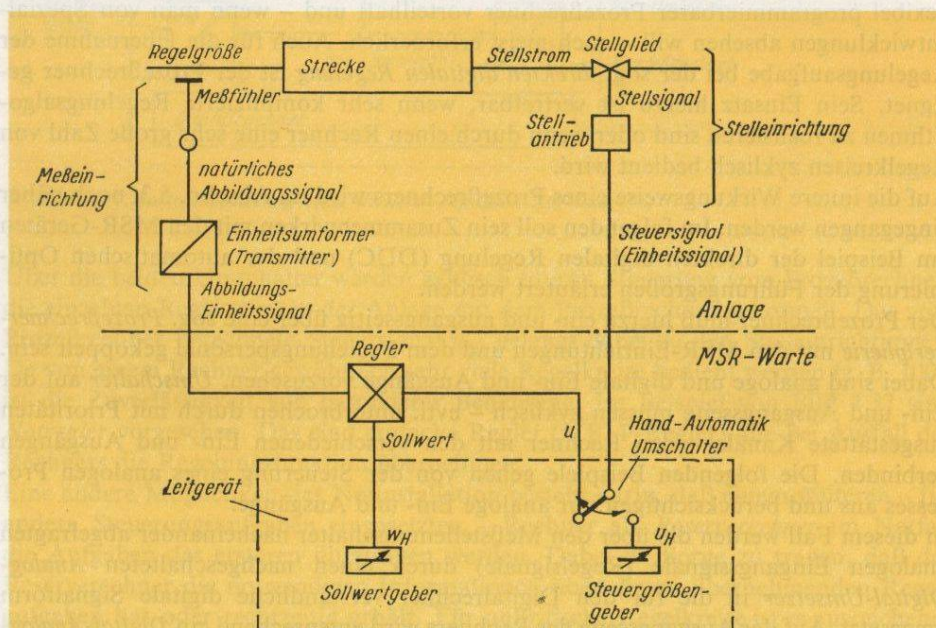


Bild 4.36. Instrumentierung einer analogen Regelung

Der Meßfühler (z. B. ein Thermoelement oder ein Differenzdruckmesser) liefert ein natürliches (elektrisches bzw. pneumatisches) *Abbildungssignal*. Durch einen *Einheitsumformer* wird dieses in ein elektrisches *Einheitssignal* umgeformt. Meßfühler und Umformer bilden zusammen die *Meßeinrichtung*.

In entsprechender Weise wird das *Einheitssteuersignal* am Reglerausgang durch den *Stellantrieb* in ein für die Betätigung des vorliegenden *Stellglieds* geeignetes *Stellsignal* umgeformt. Gegenüber Abschn. 1.4.3. wird hier also zwischen Steuer- und Stellsignalen unterschieden. Stellantrieb und Stellglied ergeben die *Stelleinrichtung*.

Die *Regeleinrichtung* umfaßt außer dem Regler die Meß- und Stelleinrichtung und das Leitgerät. Das *Leitgerät* enthält den *Sollwertgeber*, den *SteuergröÙengeber* und den *Handautomatikumschalter*. Es ermöglicht damit außer der Sollwerteinstellung, in Sondersituationen (beim Einfahren der Anlage und bei Ausfall des Reglers) die Steuerung nach Betätigung des Umschalters von Hand durchzuführen. Besondere Beachtung ist dabei der stoßfreien Umschaltung zu schenken. Sie wird dadurch ermöglicht, daß u und u_H am Leitgerät angezeigt und vor Umschaltung u_H an u angeglichen wird.

Meß- und Stelleinrichtungen befinden sich an der zu steuernden Anlage, während Regler und Leitgeräte gewöhnlich für die gesamte Anlage zur besseren Kontrolle und Eingriffsmöglichkeit übersichtlich in einer gemeinsamen MSR-Warte installiert werden. Das ermöglicht auch die Vermeidung an der Anlage evtl. bestehender ungünstiger Umweltbedingungen.

4.6.2. Einbeziehung programmgesteuerter Prozeßrechner in die Steuereinrichtung

Für die Realisierung der Algorithmen der höheren Steuerungsfunktionen ist ein flexibel programmierbarer Prozeßrechner vorteilhaft und – wenn man von Spezialentwicklungen absehen will – auch meist erforderlich. Auch für die Übernahme der Regelungsaufgabe bei der sog. *direkten digitalen Regelung* ist der Prozeßrechner geeignet. Sein Einsatz hierzu ist vertretbar, wenn sehr komplizierte Regelungsalgorithmen zu realisieren sind oder wenn durch einen Rechner eine sehr große Zahl von Regelkreisen zyklisch bedient wird.

Auf die innere Wirkungsweise eines Prozeßrechners wird im Abschn. 5.3. noch näher eingegangen werden. Im folgenden soll sein Zusammenwirken mit den MSR-Geräten am Beispiel der direkten digitalen Regelung (DDC) und der automatischen Optimierung der Führungsgrößen erläutert werden.

Der Prozeßrechner muß hierzu ein- und ausgangsseitig über eine sog. *Prozeßrechner-peripherie* mit den MSR-Einrichtungen und dem Bedienungspersonal gekoppelt sein. Dabei sind analoge und digitale Ein- und Ausgänge vorzusehen. *Umschalter* auf der Ein- und Ausgangsseite müssen zyklisch – evtl. unterbrochen durch mit Prioritäten ausgestattete Kanäle – den Rechner mit den verschiedenen Ein- und Ausgängen verbinden. Die folgenden Beispiele gehen von der Steuerung eines analogen Prozesses aus und berücksichtigen nur analoge Ein- und Ausgänge.

In diesem Fall werden die über den Meßstellenumschalter nacheinander abgefragten analogen Eingangssignale (Regelsignale) durch einen nachgeschalteten *Analog-Digital-Umsetzer* in die für den Digitalrechner verständliche digitale Signalform umgesetzt. Auf der Ausgangsseite des Rechners wird entsprechend ein *Digital-Analog-Umsetzer* und nachfolgender Umschalter benötigt, der die umgesetzten analogen Steuer- bzw. Führungssignale auf die verschiedenen Regelkreise verteilt, wo sie von

Speichern bis zum Eintreffen des neuen Wertes gehalten werden. Auf die Wirkungsweise von Digitalrechnern sowie von Analog-Digital- und Digital-Analog-Umsetzern wird im Abschn. 5.3. eingegangen werden.

Die Instrumentierung bei Einsatz eines Prozeßrechners zur *direkten digitalen Regelung*, bei der der Digitalrechner die Funktion des Reglers für eine Vielzahl von Regelkreisen übernimmt, zeigt Bild 4.37.

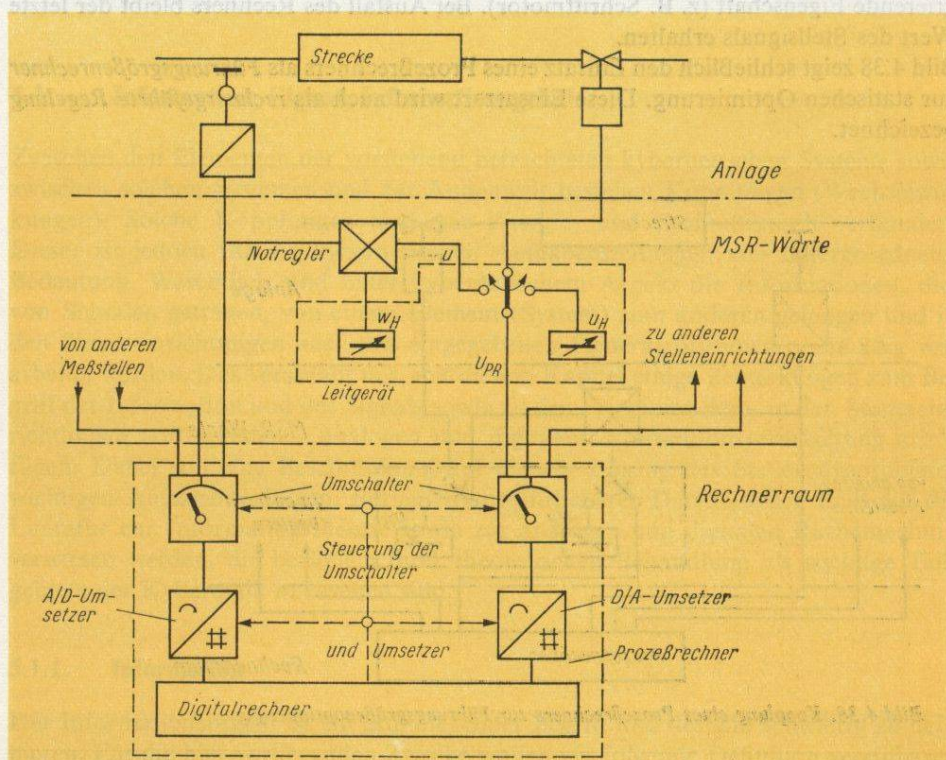


Bild 4.37. Instrumentierung einer direkten digitalen Regelung

Über die beiden Umschalter werden zyklisch (durch Steuerung vom Prozeßrechner) die einzelnen Regelstrecken der Anlage mit dem Prozeßrechner gekoppelt. Das vom Prozeßrechner berechnete Steuersignal u_{PR} gelangt dabei zu den Stelleinrichtungen. Da von einem Rechner gewöhnlich sehr viele Regelkreise bedient werden (z. B. 100), ist die Zuverlässigkeit von besonderer Bedeutung. Im Beispiel von Bild 4.37 sind *Notregler* vorgesehen. Das sind einfache Regler (z. B. P-Regler), die bei Ausfall des Rechners die Regelungsfunktion übernehmen.

Eine andere Möglichkeit der Notinstallation besteht darin, daß einem weiteren – für andere Steuerungsaufgaben eingesetzten – Rechner als *Reserverechner* im Notfall die Aufgaben des ersten übertragen werden. Dabei ist Sorge zu tragen, daß der Reserverechner die notwendigen Informationen über die zu übernehmenden Regelaufgaben hat oder rechtzeitig erhält. Für unkritische Regelkreise ist es ausreichend, wenn im Notfall die zuletzt vom Rechner ausgegebenen Steuersignale gespeichert und nach Umschaltung weiter von Hand verändert werden (u_H im Bild 4.37).

Für die erwünschte stoßfreie Umschaltung vom Rechner auf Handsteuerung bzw. auf die Notregler ist es günstig, wenn nicht die Ganzwerte der Steuergrößen auf die Stellanrichtungen gegeben werden, sondern nur deren Änderungen. Im ersteren Fall spricht man von einer *Ganzwertausgabe*, im letzteren Fall von einer *Inkrementalwertausgabe*. Bei dieser müssen die Inkremente durch ein integrierendes Halteglied in den Ganzwert umgewandelt werden. Häufig hat die Stellanrichtung eine solche integrierende Eigenschaft (z. B. Schrittmotor). Bei Ausfall des Rechners bleibt der letzte Wert des Stellsignals erhalten.

Bild 4.38 zeigt schließlich den Einsatz eines Prozeßrechners als *Führungsgrößenrechner* zur statischen Optimierung. Diese Einsatzart wird auch als *rechnergeführte Regelung* bezeichnet.

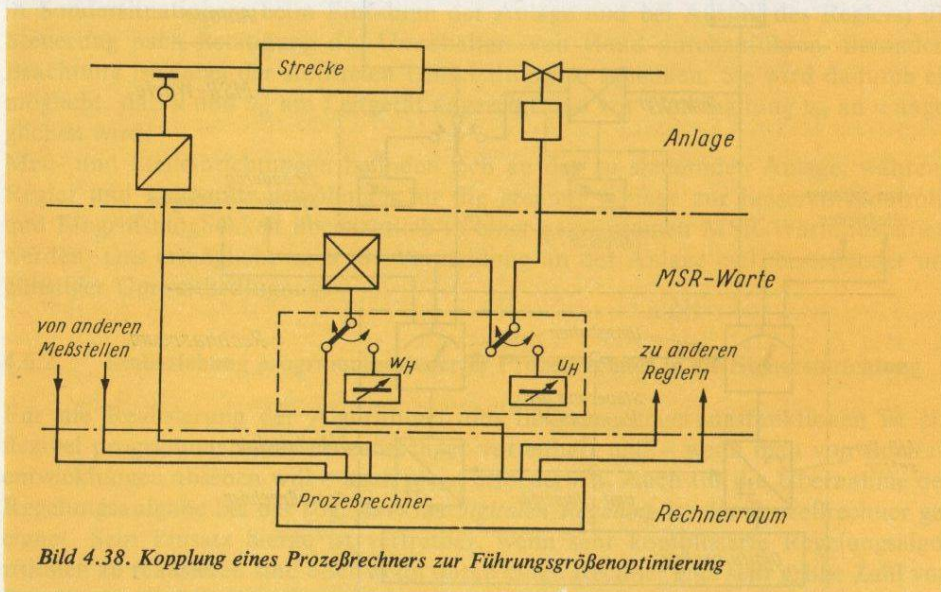


Bild 4.38. Kopplung eines Prozeßrechners zur Führungsgrößenoptimierung

Auch hier ist vorgesehen, daß die Sollwerte in Sondersituationen von Hand eingegeben werden können. Dabei ist es wiederum notwendig, daß die vom Rechner ausgegebenen Werte bei Rechnerausfall gespeichert werden, bis eine Weiterbetätigung von Hand erfolgt. Aus den bereits genannten Gründen wird deshalb auch hier eine Inkrementalwertausgabe durch den Rechner bevorzugt. Zur Integration der Inkremente zum benötigten Ganzwert dient dann ein Integrationsverstärker, ein Schrittmotor oder ein reversibler Zähler (der vor- und rückwärts zählen kann) mit nachgeschaltetem Digital-Analog-Umsetzer.

Während Regler und Leitgerät in der MSR-Warte untergebracht sind, befindet sich der Rechner gewöhnlich in einem besonderen (klimatisierten) *Rechnerraum*.

5. Information und Informationsverarbeitung

5.1. Information, Signal, Informationsgehalt

Zwischen den Elementen der vorstehend betrachteten kybernetischen Systeme sowie zwischen solchen Systemen und zur Außenwelt bestehen Kopplungen (Wechselwirkungen). Solche Kopplungen sind mit Energie- und Stoffaustausch verbunden. Dieser ist jedoch für die kybernetischen Aufgabenstellungen von untergeordneter Bedeutung. Wesentlich sind unter kybernetischem Aspekt die Informationen, die, von Signalen getragen, von einem Element (System) zum anderen gelangen und in den Steuereinrichtungen nach den eingegebenen Steueralgorithmen planmäßig verarbeitet werden. Das veranlaßt uns, mit diesem Kapitel einige Bemerkungen zum Begriff der Information und des Signals sowie zu den Prinzipien der – in den Steuereinrichtungen vorliegenden – analogen und digitalen Informationsverarbeitung anzufügen. Dabei soll eine Beschränkung auf die zur Lösung des Steuerungsproblems wichtigen Aussagen erfolgen. Bezüglich ausführlicherer Darstellungen muß auf die Literatur zur Informationstheorie sowie zur analogen und digitalen Rechentechnik verwiesen werden, die bezüglich ihrer theoretischen Behandlung als wichtige Teilgebiete der Kybernetik anzusehen sind.

5.1.1. Information

Der Informationsbegriff ist ein grundlegender Begriff und deshalb schwierig zu definieren. Für die hier vorliegenden Zwecke wollen wir folgende Definition vereinbaren und Erläuterungen anfügen:

Eine *Information* ist eine Mitteilung über das Eintreten eines Ereignisses.

Erläuterung:

In kybernetischen Systemen sind Ereignisse die auftretenden Werte (-tupel) der Zustands- bzw. der Ein- und Ausgangssignale.

D 5.1

Durch die Information über ein stattgefundenes Ereignis wird die Ungewißheit darüber beseitigt. Die Information ist deshalb um so größer, je unbestimmter dieses Ereignis vorherzusehen gewesen ist.

Sind die Sendenden und Empfangenden Menschen, so sind die Informationsübertragungen mit Bewußtseinsvorgängen verknüpft, insofern, als Sender und Empfänger der übertragenen Information eine Bedeutung zuordnen. Wegen dieser Sonderstellung vereinbaren wir in Anlehnung an den umgangssprachlichen Wortgebrauch:

- D 5.2** Informationen, die zwischen Menschen ausgetauscht werden, heißen *Nachrichten*.

Wenn wir in diesem Buch von Informationen sprechen, so sehen wir von deren Bedeutung ab. Mit der Bedeutung einer Information beschäftigt sich die *Semantik*. Später werden wir sehen, daß eine solche Information im wesentlichen ein statistischer Begriff ist.

Deshalb können wir auch sagen:

- S 5.1** Eine Information ist eine naturwissenschaftlich (statistisch) definierte Mitteilung ohne Berücksichtigung ihrer Bedeutung (ohne den semantischen Aspekt).

Soeben haben wir die hier interessierenden Ereignisse mit den Systemzuständen identifiziert. Dabei wirkt sich der Charakter des Systems auch auf den der Information aus. Insbesondere betrifft das die Quantisierung des Zustandsvektors und die davon abhängige Unterscheidung zwischen analogen und diskreten Systemen. Demzufolge wollen wir unter besonderer Beachtung von Steuerungsproblemen definieren:

- D 5.3** Eine Information über den Zustand eines analogen/diskreten Systems heißt *analoge/diskrete Information*.

5.1.2. Signale

Informationen müssen übertragen und gespeichert werden können. Hierzu dienen Signale. In Erweiterung und Präzisierung von Definition 1.7 können wir definieren:

- D 5.4** Eine von einer als *Signalträger* bezeichneten materiellen Größe getragene Zeitfunktion (*Übertragungsform*) oder räumliche Anordnung (*Speicherform*) wird *Signal* genannt, wenn sie durch mindestens einen ihrer Parameter Informationen überträgt.
Informationen übertragende Parameter heißen *Informationsparameter*.

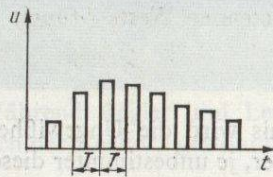


Bild 5.1. Amplitudenmoduliertes elektrisches Pulssignal

Zur Erläuterung sei das durch Bild 5.1 dargestellte Beispiel betrachtet. Signalträger ist hier die elektrische Spannung; der Informationsparameter ist die Pulsamplitude. Als Signal ist der Zeitverlauf $u(t)$ (die mathematische Funktion) anzusehen. Andere als Informationsparameter geeignete Größen sind die Amplitude einer Gleich- oder Wechselgröße, die Frequenz eines Sinus- oder Pulssignals, die Pulsbreite einer Pulsfolge u. a.

Beachtet man, daß nach Definition 2.12 in einem analogen/diskreten System der Zustandsvektor stetig /diskret veränderbar ist, so erkennt man, daß zur Übertragung analoger Information der Informationsparameter stetig veränderbar sein muß, während zur Darstellung diskreter Information ein diskret veränderbarer Informationsparameter ausreicht. Wir definieren deshalb:

Signale heißen *analog/diskret*, wenn sie analoge/diskrete Informationen übertragen bzw. darstellen.

D 5.5

Hierbei gilt:

Bei *analogen Signalen* können die Informationsparameter innerhalb gewisser Grenzen jeden beliebigen Wert annehmen, bei *diskreten Signalen* nehmen sie nur diskrete Werte an.

S 5.2

Bemerkung. Eine diskrete Information und damit ein diskretes Signal kann auch von einem analogen System stammen, wenn nämlich zur Informationsübertragung der analoge Zustandsvektor quantisiert wird und nur den einzelnen Stufen zugeordnete diskrete Werte signalisiert werden. Für das äußere Verhalten ist dann ein solches System als ein diskretes anzusehen. Ein Sonderfall liegt vor, wenn nur zwei diskrete Werte existieren:

Diskrete Signale, deren Informationsparameter genau zwei diskrete Werte annehmen können, heißen *binäre Signale*.

D 5.6

Eine wichtige Klasse diskreter Signale sind die digitalen (die ziffernmäßigen). Typische Vertreter digitaler Signale werden in den Abschnitten 5.1.2. und 5.3.1. vorgestellt werden.

Nach TGL 14591 gilt:

Digitale Signale sind verschlüsselte diskrete Signale, bei denen die diskreten Werte des Informationsparameters den Worten eines vereinbarten Alphabets entsprechen. Alle diskreten Signale, die nicht digital sind, heißen *Mehrpunktsignale*.

D 5.7

Die in dieser Definition verwendeten neuen Begriffe können wie folgt präzisiert werden:

Ein *Alphabet* ist eine endliche Liste von *Zeichen* (Symbolen); diese Zeichen werden auch *Buchstaben* genannt. Eine endliche geordnete Folge von Buchstaben heißt *Wort*.

D 5.8

Ein solches Alphabet ist beispielsweise das lateinische, wobei noch die Satzzeichen und die „Leertaste“ hinzugenommen werden können. Ein anderes Alphabet ist das dekadische mit den Ziffern 0, 1, ..., 9. Der Unterschied zwischen einem Mehrpunktsignal und einem digitalen Signal sei an einem binären Signal erläutert: Stammt dieses von einem Zweipunktregler (s. Abschn. 11.4.3.), der bei Überschreiten/Unterschreiten des Sollwerts den Stellstrom aus-/einschaltet, so handelt es sich um ein Mehrpunktsignal. Werden jedoch auf Grund vorheriger Vereinbarung dem Aussignal der Wert 0 und dem Einsignal – je nach der Leitung, auf der dieses Signal eintrifft – die Werte 1, 2, 4, 8, 16, ... zugeordnet, so liegt ein digitales Signal vor (nämlich ein duales Signal mit Paralleldarstellung, s. Abschn. 5.3.).

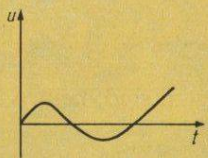
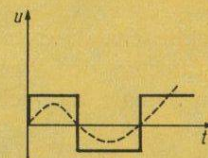
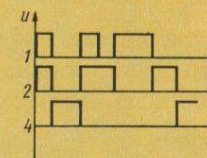
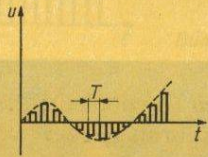
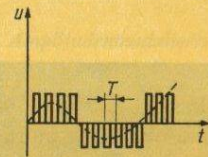
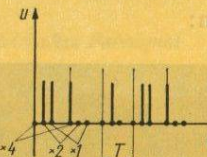
Für eine Klasseneinteilung der Signale ist noch die Unterscheidung zwischen kontinuierlichen und diskontinuierlichen Signalen bedeutungsvoll. Entsprechend der für die Systeme gegebenen Definition 2.14 sei vereinbart:

D 5.9

Signale heißen *kontinuierlich*, wenn ihre Informationsparameter zu jedem beliebigen Zeitpunkt, und *diskontinuierlich*, wenn diese nur zu diskreten Zeitpunkten veränderbar sind.

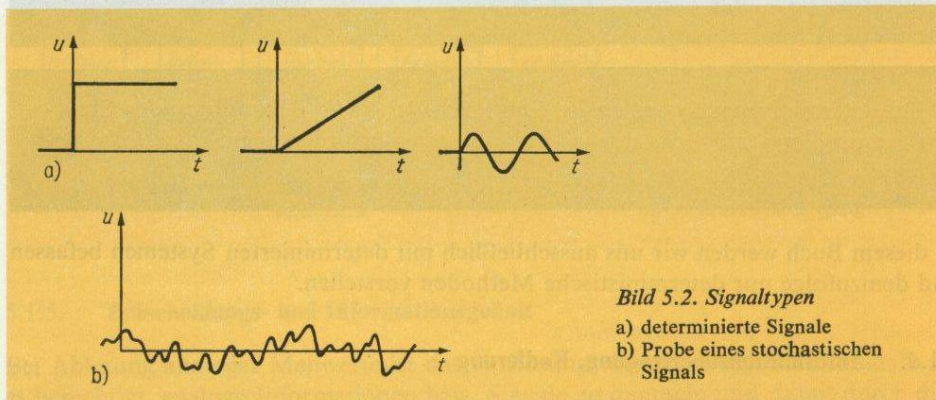
Mit den genannten Bezeichnungen kann die durch Tafel 5.1 erläuterte Klasseneinteilung von Signalen vorgenommen werden. Als Beispiel für ein kontinuierliches digitales Signal wird das bereits erwähnte duale Signal mit Paralleldarstellung gewählt. Dagegen ist das diskontinuierliche digitale Signal ein duales Signal mit Serieldarstellung. Der Wert eines Impulses (1, 2, 4, ...) ist hier von seiner zeitlichen Lage im Abtastintervall T abhängig. Digitale Signale werden im Abschn. 5.3.1. noch näher betrachtet werden.

Tafel 5.1. Signalklassifikation

		Quantisierung des Informationsparameters (IP)		
		ohne: analog	mit: diskret	
			ohne Wortzuordnung: Mehrpunktsignal	mit Wortzuordnung: digital
Zeitliche Quantisierung	ohne: kontinuierlich	kontinuierlich analoge Signale 	kontinuierliche Mehrpunktsignale 	kontinuierliche digitale Signale 
	mit: diskontinuierlich	diskontinuierliche analoge Signale 	diskontinuierliche Mehrpunktsignale 	diskontinuierliche digitale Signale 

5.1.3. Determinierte und stochastische Signale und Systeme

Ein weiteres wichtiges Unterscheidungsmerkmal, das die Lösung des Steuerungsproblems maßgebend mitbestimmt, betrifft die Determiniertheit der Signale. Der Verlauf der im Bild 5.2a dargestellten Signale kann offensichtlich eindeutig durch eine analytische Funktion für alle t beschrieben werden, wenn der Charakter dieses Verlaufs über das gezeichnete Intervall hinaus erhalten bleibt. Damit ist der Wert zu jedem Zeitpunkt t bestimmt, d. h. *determiniert*.



Für das im Bild 5.2b dargestellte Signal trifft das offensichtlich nicht zu. Sein in einem endlichen Zeitintervall gemessener Verlauf kann zwar nachträglich mit einem entsprechend großen Aufwand in diesem Intervall beliebig genau beschrieben werden. Hieraus läßt sich jedoch nicht der zukünftige Verlauf exakt vorausbestimmen. Der Zeitverlauf solcher Signale ist nämlich eine *Zufallsfunktion*.

Solche Signale ergeben sich häufig aus einer Überlagerung vieler Ursachen, die aus Aufwandsgründen nicht näher analysiert werden können oder nicht sollen. Dabei zeigt sich jedoch, daß nach Aufnahme einer ausreichenden Zahl von Proben – d. h. nach genügend langer Beobachtung eines Zufallssignals – mit den Methoden der Statistik (durch Mittelwertbildungen) in sehr vielen Fällen allgemeinere Signaleigenschaften bestimmt werden können, die für den gegenwärtigen und zukünftigen Signalverlauf gültig sind.

Derartige Signale werden nach dem griechischen Wort $\sigma\tau\acute{o}\chi\omicron\sigma$ (das Vermutete) *stochastische Signale* genannt.

Fassen wir zusammen:

Determiniert heißen Signale, deren Zeitverlauf (auch im voraus) eindeutig bestimmt werden kann. *Stochastisch* werden Signale genannt, deren Zeitverläufe Zufallsfunktionen sind, wobei für diese Verläufe allgemeinere statistische Kenngrößen (Mittelwerte u. ä.) angegeben werden können.

D 5.10

Sind nun alle Signale in einem System determiniert, so ist auch das Zeitverhalten des gesamten Systems determiniert. Stochastische Signale können in einem System dadurch auftreten, daß entweder stochastische Eingangssignale vorhanden sind oder daß bestimmte Parameter des Systems (bestimmte Beziehungen zwischen den Signalen

des Systems) zufällig schwanken. Bei Auftreten stochastischer Signale ist eine deterministische Behandlung nicht durchführbar. Später wird gezeigt werden, daß eine statistische Behandlung in diesem Fall für den Entwurf und die Untersuchung automatischer Systeme wertvolle Ergebnisse liefert. Diese Erkenntnis wollen wir in einem Satz festhalten und vorher definieren:

D 5.11

Systeme heißen *determiniert*, wenn alle Signale (Eingang, Zustand, Ausgang) determiniert sind, und *stochastisch*, sobald wenigstens ein Signal stochastisch ist.

S 5.3

Bei determinierten Systemen ist eine *deterministische* Behandlung des Steuerungsproblems möglich, stochastische Systeme erfordern eine *statistische* Behandlung.

In diesem Buch werden wir uns ausschließlich mit determinierten Systemen befassen und demzufolge nur deterministische Methoden vorstellen.

5.1.4. Informationsübertragung, Kodierung

Nach der Erläuterung des Informations- und Signalbegriffs wollen wir uns nun der Informationsübertragung zuwenden. In analogen kybernetischen Systemen erfolgt sie üblicherweise dadurch, daß die analoge Information durch einen Meßfühler und ggf. durch einen nachgeschalteten Meßumformer auf ein für die Weiterleitung geeignetes analoges Signal abgebildet wird. Als Informationsparameter dient gewöhnlich die Amplitude eines elektrischen oder pneumatischen Signalträgers. Durch die das Signal empfangende Informationsverarbeitungseinrichtung wird dann dessen Amplitude ausgewertet.

Eine weitergehende Betrachtung ist bei der Übertragung diskreter Information erwünscht, insbesondere soweit sie durch digitale Signale erfolgt. Für die Übertragung einer diskreten Information ist stets ein Alphabet mit einer endlichen Zeichenmenge ausreichend. Die Information wird dadurch erzeugt und übertragen, daß der Sender aus dem Alphabet Zeichen bzw. mit diesen gebildete Wörter auswählt und durch ein Signal veranlaßt, daß der Empfänger entsprechende Zeichen bzw. Wörter wählt. Diese Aufprägung einer Information auf ein Signal wird als Kodierung bezeichnet.

D 5.12

Mit *Kodierung* wird der Vorgang der Aufprägung einer Information auf ein (digitales) Signal, mit *Dekodierung* der der Entnahme einer Information von einem (digitalen) Signal bezeichnet.

Das Alphabet des Empfängers muß nicht notwendig das des Senders sein. Ausreichend ist die Existenz einer Zuordnungsvorschrift zwischen beiden Alphabeten. Jede Zuordnung zwischen zwei Alphabeten wird *Kode* genannt.

Der Vorgang einer diskreten Informationsübertragung kann damit durch Bild 5.3 charakterisiert werden.

Wenn in den Übertragungskanal Störungen eintreten, so werden gestörte Signale

empfangen. Dann ist es zuweilen nicht mehr möglich, daß der Empfänger die volle gesendete Information erhält. Der vom Empfänger aufgenommene Teil der gesendeten Information wird *Transinformation* genannt. Durch besondere Maßnahmen bei der Kodierung (*redundante* und *störungsgeschützte* Codes) wird erstrebt, daß trotz der Störungen kein Informationsverlust eintritt. Diese Probleme werden im Rahmen der Informationstheorie weiterbehandelt.

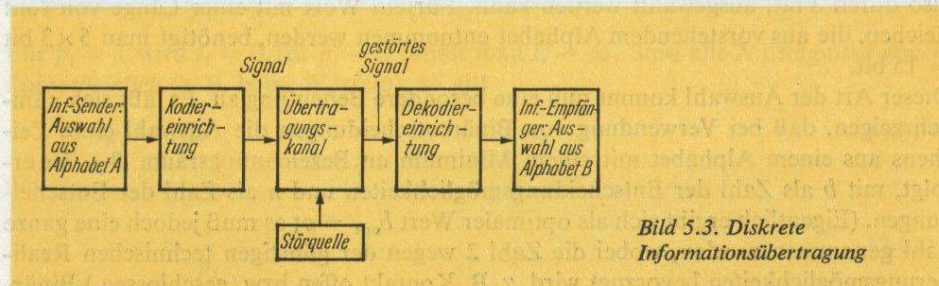


Bild 5.3. Diskrete Informationsübertragung

5.1.5. Entscheidungs- und Informationsgehalt

Bei Ablesung analoger Meßwerte ist das Auflösungsvermögen begrenzt. Deshalb ist es berechtigt, analoge Informationen bzw. Signale zu quanteln und damit durch diskrete zu ersetzen. Aus technischen Gründen ist man hierzu auch häufig gezwungen, z. B. zwecks digitaler Informationsverarbeitung. Daher hat die diskrete Information eine allgemeine Bedeutung. Wichtig ist es nun, ein quantitatives Maß für diese Information zu haben. Es ist das Verdienst des amerikanischen Nachrichteningenieurs und Mathematikers *Shannon*, ein solches brauchbares Maß, den *Informationsgehalt*, gefunden zu haben (1947).

Betrachten wir einen Informationssender, der über ein aus acht Buchstaben bestehendes Alphabet verfügt, z. B. die Zeichen 0, 1, 2, ..., 7 (es könnten auch die Buchstaben a, b, ..., h sein). Eine Information wird dann dadurch erzeugt, daß der Sender Zeichen auswählt, die das zu meldende Ereignis (z. B. den Systemzustand) symbolisieren.

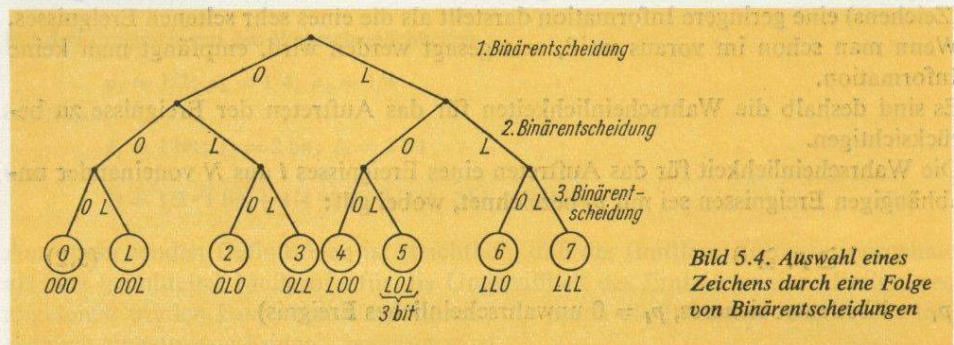


Bild 5.4. Auswahl eines Zeichens durch eine Folge von Binärentscheidungen

Bild 5.4 demonstriert, daß diese Auswahl durch eine Folge von Ja/Nein-Entscheidungen, *Binärentscheidungen* genannt, erfolgen kann. Hierbei ist die Entscheidung „nein“ mit O, die Entscheidung „ja“ mit L bezeichnet worden.

Definieren wir:

D 5.13 Die Zähleinheit für Binärentscheidungen wird *bit* genannt (von *binary digit*).

Dann ist ersichtlich, daß jeder der acht Buchstaben mit drei Binärentscheidungen, also durch 3 bit, ausgewählt werden kann. Für ein Wort mit einer Länge von fünf Zeichen, die aus vorstehendem Alphabet entnommen werden, benötigt man 5×3 bit = 15 bit.

Dieser Art der Auswahl kommt nun eine besondere Bedeutung zu. Es läßt sich nämlich zeigen, daß bei Verwendung von Binärentscheidungen die Auswahl eines Zeichens aus einem Alphabet mit einem Minimum an Bezeichnungsraum $B = bn$ erfolgt, mit b als Zahl der Entscheidungsmöglichkeiten und n als Zahl der Entscheidungen. (Eigentlich ergibt sich als optimaler Wert $b_{\text{opt}} = e$; es muß jedoch eine ganze Zahl genommen werden, wobei die Zahl 2 wegen der günstigen technischen Realisierungsmöglichkeiten bevorzugt wird, z. B. Kontakt offen bzw. geschlossen.) Binärentscheidungen sind deshalb geeignet, ein Maß für die Auswahlleistung abzugeben. Dieses ist 1928 von *Hartly* vorgeschlagen worden und heißt *Entscheidungsgehalt* oder *maximaler Informationsgehalt*:

D 5.14 Der *Entscheidungsgehalt* (*maximale Informationsgehalt*) I_0 ist die Zahl der Binärentscheidungen zur Auswahl eines Zeichens/Ereignisses aus N Zeichen/Ereignissen.

Ist ld der Logarithmus zur Basis 2 und $N = 2^n$, so gilt

$$I_0 = \text{ld } N = n. \quad (5.1)$$

Um vom Entscheidungsgehalt zum Informationsgehalt zu gelangen, ist noch zu berücksichtigen, daß die Mitteilung eines mit Sicherheit erwarteten Ereignisses (Zeichens) eine geringere Information darstellt als die eines sehr seltenen Ereignisses. Wenn man schon im voraus weiß, was gesagt werden wird, empfängt man keine Information.

Es sind deshalb die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der Ereignisse zu berücksichtigen.

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Ereignisses i aus N voneinander unabhängigen Ereignissen sei mit p_i bezeichnet, wobei gilt:

$$1 \geq p_i \geq 0 \quad (5.2)$$

($p_i = 1$ bedeutet sicheres, $p_i = 0$ unwahrscheinliches Ereignis)

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1. \quad (5.3)$$

Dann gilt nach *Shannon*:

Der Informationsgehalt I_i bei Mitteilung des Eintretens eines Ereignisses i aus N Ereignissen ist

D 5.15

$$I_i \triangleq \lg \frac{1}{p_i}. \quad (5.4)$$

Für $p_i = 1$ wird $I_i = 0$, für $p_i \rightarrow 0$ erhält man $I_i \rightarrow \infty$. Sind alle N Ereignisse *gleichwahrscheinlich* (z. B. beim Würfeln), so gilt

$$p_i = 1/N \quad (5.5)$$

und

$$I_i = \lg \frac{1}{p_i} = \lg N = I_0. \quad (5.6)$$

Der Informationsgehalt ist in diesem Fall mit dem Entscheidungsgehalt von Gl. (5.1) identisch. Das ist der *maximale Informationsgehalt*, der mit einem Zeichen im Mittel übertragen werden kann. Bei Abweichungen von dieser sog. *Gleichverteilung* der Wahrscheinlichkeiten ergeben sich nämlich im Durchschnitt geringere Informationsgehalte.

Diese mit einem Zeichen (mit Mitteilung eines Ereignisses) im Mittel übertragene Information heißt *mittlerer Informationsgehalt* oder *Entropie*, da ihr mathematischer Ausdruck mit dem gleichnamigen in der Physik übereinstimmt (bei Ersatz von $\lg$ durch $\ln$).

Mit *mittlerem Informationsgehalt* oder *Entropie* H wird der Erwartungswert über die Informationsgehalte aller möglichen Einzelereignisse bezeichnet:

D 5.16

$$H \triangleq \sum_{i=1}^N p_i I_i = \sum_{i=1}^N p_i \lg 1/p_i. \quad (5.7)$$

Für drei Ereignisse mit den Wahrscheinlichkeiten

$$p_1 = 1/2; p_2 = 1/4; p_3 = 1/4$$

erhält man

$$I_1 = 1 \text{ bit}; I_2 = 2 \text{ bit}; I_3 = 2 \text{ bit}$$

und

$$H = 1/2 \cdot 1 \text{ bit} + 1/4 \cdot 2 \text{ bit} + 1/4 \cdot 2 \text{ bit} = 3/2 \text{ bit}. \quad (5.8)$$

Aus vorstehenden Definitionen ist ersichtlich, daß der (mittlere) Informationsgehalt als eine (gemittelte) Meßgröße für die Ungewißheit des Eintretens eines Ereignisses angesehen werden kann, eine Ungewißheit, die durch die Information über das tatsächlich eingetretene Ereignis beseitigt wird.

Die Brauchbarkeit dieses Maßes ist wie die des Entscheidungsgehalts unter anderem darin begründet, daß es additiv ist: Wenn ein Ereignis aus N_1 möglichen Ereignissen und danach ein davon unabhängiges Ereignis aus N_2 möglichen Ereignissen mitgeteilt wird, so liegen insgesamt $N_1 N_2$ mögliche Ereignisse vor. Nehmen wir zur Verein-

fachung gleiche Wahrscheinlichkeiten aller Ereignisse an, so ist $I_0 = I_t = H = I$, und es gilt:

$$I(N_1 N_2) = \lg N_1 N_2 = \lg N_1 + \lg N_2 = I(N_1) + I(N_2). \quad (5.9)$$

Die Information bei Übermittlung zweier unabhängiger Zeichen (Ereignisse) ist also gleich der Summe der Informationen bei der Übermittlung der einzelnen Zeichen. Eine weitere wichtige Größe ist der auf einem Kanal übertragene Informationsfluß. Darunter soll verstanden werden:

D 5.17

Der *Informationsfluß* ist der auf einem Übertragungskanal je Zeiteinheit übertragene mittlere Informationsgehalt. Der durch die Kanaleigenschaften beschränkte maximale Informationsfluß eines Übertragungskanals heißt *Kanalkapazität*.

Informationsfluß und Kanalkapazität werden in bit/s gemessen. Die Endlichkeit der Kanalkapazität ist durch die endliche Bandbreite des Kanals sowie durch die Leistung der Störungen im Verhältnis zu der der Nutzsignale bedingt.

Zur quantitativen Erfassung der vom Empfänger erhaltenen Information, der Transinformation, ist die Einbeziehung sog. bedingter Wahrscheinlichkeiten notwendig. Da in diesem Buch Kenntnisse der Wahrscheinlichkeitslehre und Statistik noch nicht vorausgesetzt und verwendet werden sollen, wollen wir mit der vorstehenden Klärung einiger besonders wichtiger Grundbegriffe der Informationstheorie – die schon mit einem kleinen Exkurs in die Wahrscheinlichkeitslehre verbunden war – diese Problematik abschließen.

5.2. Prinzipien der analogen Informationsverarbeitung

5.2.1. Bedeutung der Informationsverarbeitung für die automatische Steuerung

Während in den Übertragungsgliedern des Steuerungsobjekts eine meist unbeabsichtigte Verformung (insbesondere Verzögerung) der Signale erfolgt, sollen in den Steuereinrichtungen die aus dem und für den gesteuerten Prozeß erhaltenen Informationen nach den in der Entwurfsphase ermittelten Steueralgorithmen planmäßig verarbeitet werden.

Je nachdem, ob von analogen/digitalen Signalen getragene analoge/diskrete Informationen zu verarbeiten sind, werden hierzu analoge/digitale Informationsverarbeitungseinrichtungen (Recheneinrichtungen) benötigt.

D 5.18

Eine planmäßige Verarbeitung von analogen bzw. digital kodierten diskreten Informationen heißt *analoge bzw. digitale Informationsverarbeitung*.

Die außerordentliche Bedeutung der Informationsverarbeitung für die automatische Steuerung ist jedoch nicht nur durch die genannten informationsverarbeitenden

Fähigkeiten der Steuereinrichtungen bedingt. Auch der Entwurf automatischer Systeme erfolgt in zunehmendem Maß als *rechnergestützter Entwurf* mit Hilfe von informationsverarbeitenden Einrichtungen. Diese Tatsachen bedingen, daß bei der Entwicklung der Steueralgorithmen und den Methoden zu ihrem Entwurf (die beide in den diesem Buch folgenden Kapiteln noch darzustellen sind) die Möglichkeiten und Eigenschaften der üblichen Informationsverarbeitungseinrichtungen zu beachten sind. Schließlich werden auch die in der Informationsverarbeitung üblichen Darstellungshilfen (z. B. Kopplungs- und Programmablaufpläne) für die Vermittlung des nachfolgenden Stoffes sehr nützlich sein.

Wegen der umrissenen Bedeutung sollen in diesem Abschnitt die Prinzipien der analogen, in dem Abschn. 5.3. die der digitalen Informationsverarbeitung erläutert werden. Die Informationsverarbeitung kann hierbei unter zwei verschiedenen Gesichtspunkten betrachtet werden, was sich auch auf die gerätetechnische Realisierung bzw. die Programmierung auswirkt: unter dem Gesichtspunkt der Durchführung von Rechenoperationen und unter dem der Modellbildung. Die analoge Rechentechnik wird in den Abschnitten 5.2.2. und 5.2.3., die analoge Modellbildung und einige allgemeine Aussagen der Modelltheorie werden in Abschn. 5.2.4. vorgestellt werden.

5.2.2. Analogrechner, Rechenverstärker

Der *Analogrechner* ist eine Einrichtung zur Untersuchung (Modellierung, Synthese) analoger Systeme bzw. Probleme, bei der die Systemsignale bzw. Rechengrößen durch analoge Signale dargestellt werden.

D 5.19

Als Signalträger dienen stetig veränderbare physikalische Größen, insbesondere elektrische Spannungen, daneben pneumatische Drücke und die Drehwinkel von (elektro)mechanischen Geräten. Dabei gilt:

Beim Analogrechner werden alle bei zeitinvarianten linearen analogen Systemen mit konzentrierten Elementen auftretenden Rechenoperationen auf *Konstantmultiplikation*, *Addition* und *Integration* zurückgeführt.

S 5.4

Zur Durchführung nichtlinearer Operationen dienen *Multiplikatoren* und *Funktionsumformer*. Systeme mit verteilten Elementen müssen i. allg. durch solche mit konzentrierten Elementen approximiert werden.

Zur Bestätigung von Satz 5.4 zeigen wir die prinzipielle Wirkungsweise analoger Summier- und Integrierglieder und beweisen dann, daß die ein analoges System beschreibenden Systemgleichungen mit Hilfe der genannten Operationen gelöst werden können.

Zur Ausführung von *Konstantmultiplikationen* dienen Potentiometer, die entweder rückwirkungsfrei in die Schaltung eingefügt oder unter Belastung eingemessen werden. Die Konstantmultiplikation kann auch mit der Addition verbunden werden, wie nachfolgend gezeigt werden wird.

Als *Additionsaufgabe* sei gegeben:

$$x = y_1 + y_2. \quad (5.10)$$

Zur Darstellung der Rechengrößen y_1, y_2 mögen die elektrischen Spannungen

$$u_1 = k_y y_1, u_2 = k_y y_2 \quad (5.11)$$

dienen, wobei k_y ein fester Maßstabsfaktor ist. Für $k_y = 1 \text{ V}$ und $y_1 = 1,7$ sowie $y_2 = 1,5$ beispielsweise erhält man $u_1 = 1,7 \text{ V}$ und $u_2 = 1,5 \text{ V}$. Als Additionsglied wird nun eine Schaltung benötigt, die ein Ausgangssignal

$$u_a = k_x x = k_x (y_1 + y_2) = \frac{k_x}{k_y} (u_1 + u_2) \quad (5.12)$$

mit dem festen Maßstabsfaktor k_x liefert. Eine solche Schaltung zeigt Bild 5.5.

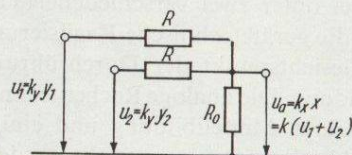


Bild 5.5. Einfaches Additionsglied

Wenn dieses Glied nicht belastet wird, dann erhält man für $R_0 \gg R$ und vernachlässigbare Innenwiderstände der Spannungsquellen für u_1 und u_2 :

$$u_a = k(u_1 + u_2); \quad k = 1/2. \quad (5.13)$$

Aus Vergleich mit Gl. (5.12) folgt

$$k_x = k k_y = 1/2 \text{ V}. \quad (5.14)$$

Sollen die einzelnen Summanden mit einstellbaren Faktoren gewichtet werden, so ist vorstehende Schaltung wegen der gegenseitigen Beeinflussung ungeeignet. Als günstig – auch bezüglich eines erstrebten niedrigen Ausgangswiderstands – erweist sich der im Bild 5.6 dargestellte *Summierverstärker*.

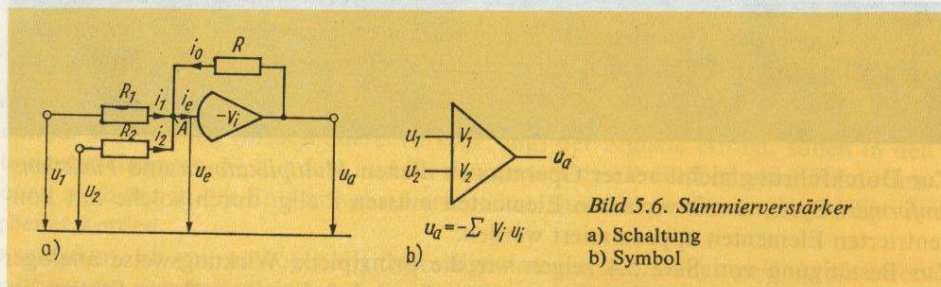


Bild 5.6. Summierverstärker

a) Schaltung
b) Symbol

Er besteht aus einem elektronischen Verstärker mit sehr hohem Verstärkungsgrad V_i und Vorzeichenumkehr, an den das eingezeichnete Gegenkopplungsnetzwerk angebracht ist. Eine solche Einrichtung wird als *Rechenverstärker* bezeichnet. Durch geeignete Dimensionierung wird gewährleistet, daß der Eingangsstrom in den Verstärker $i_e \approx 0$ ist.

Beachtet man, daß bei einem Transistorverstärker die Aussteuerung der Ausgangsspannung u_a auf etwa $\pm 20 \text{ V}$ beschränkt werden muß, so ist bei einem V_i von 200 000 bzw. 2 000 000 die Verstärkereingangsspannung $|u_e| \leq 0,1 \text{ mV}$ bzw. $\leq 10 \mu\text{V}$. Sie

ist dann gegenüber den Eingangsspannungen u_1 und u_2 , die wie u_a bis ± 20 V aus-
gesteuert werden, vernachlässigbar: $u_e \approx 0$.

Mit diesen Voraussetzungen erhält man aus dem Knotensatz für den Knoten A:

$$i_0 + i_1 + i_2 = 0 \quad (5.15)$$

$$\frac{u_a}{R} + \frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2} = 0 \quad (5.16)$$

und daraus

$$u_a = -\frac{R}{R_1} u_1 - \frac{R}{R_2} u_2 = -V_1 u_1 - V_2 u_2. \quad (5.17)$$

Man erkennt, daß durch Änderung von R_1 bzw. R_2 die Verstärkungsfaktoren V_1 bzw. V_2 ohne gegenseitige Beeinflussung eingestellt werden können. Gewöhnlich ist diese Einstellmöglichkeit nur für eine Grobstufung (z. B. 1, 10) vorgesehen, wobei die verschiedenen Stufen fest verdrahtet sind und durch Benutzung der entsprechenden Eingangsbuchsen des Rechenverstärkers gewählt werden können. Die Feinstufung erfolgt dann durch vorgeschaltete Potentiometer mit den Übertragungsfaktoren k_i , $0 \leq k_i \leq 1$, wie im Bild 5.7 gezeichnet.

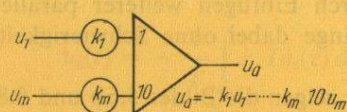


Bild 5.7

Summierverstärker mit Koeffizientenpotentiometern

Die letzte nach Satz 5.4 noch benötigte lineare Operation ist die *Integration*. Sie erfolgt vorteilhaft ebenfalls mit Hilfe eines Rechenverstärkers mit dem im Bild 5.8 gezeichneten Gegenkopplungsnetzwerk.

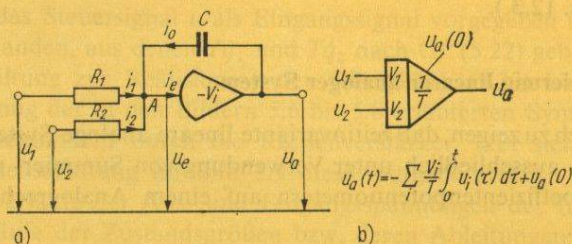


Bild 5.8. Integrierverstärker

a) Schaltung
b) Symbol

Setzt man wieder $i_e \approx 0$ und $u_e \approx 0$, so erhält man aus der Gleichung für den Knoten A:

$$C \frac{du_a}{dt} + \frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2} = 0 \quad (5.18)$$

und daraus für $u_a(0) = 0$:

$$u_a(t) = -\frac{1}{T_1} \int_0^t u_1(\tau) d\tau - \frac{1}{T_2} \int_0^t u_2(\tau) d\tau \quad (5.19a)$$

mit

$$T_1 = R_1 C, \quad T_2 = R_2 C. \quad (5.19b)$$

Zweckmäßig erfolgt eine Trennung der Operationen Summieren und Integrieren. Hierzu wird mit einem fiktiven Widerstand R_0 erweitert:

$$u_a(t) = -\sum_i \frac{R_0}{R_i} \frac{1}{R_0 C} \int_0^t u_i(\tau) d\tau = -\sum_i V_i \frac{1}{T} \int_0^t u_i(\tau) d\tau \quad (5.20a)$$

mit

$$V_i = R_0/R_i, \quad T = R_0 C. \quad (5.20b)$$

Durch die R_i können die Gewichte für die einzelnen Eingänge unabhängig voneinander eingestellt werden, während durch C die Integralzeit T für alle Eingänge gleichmäßig (stufenweise) verändert werden kann. Durch Einfügen weiterer paralleler Widerstände $R_3, R_4 \dots$ kann die Zahl der Eingänge dabei ohne Schwierigkeiten über 2 hinaus erhöht werden.

Das Symbol für Summier- bzw. Integrierverstärker zeigen die Bilder 5.6b und 5.8b. Die Vorzeichenumkehr durch den Rechenverstärker wird hierbei nicht besonders vermerkt.

Ein *nicht verschwindender Anfangswert* $u_a(0) \neq 0$ [s. Gl. (5.19)] wird durch eine entsprechende Anfangsspannung über dem Kondensator des Integrierverstärkers realisiert und in der im Bild 5.8b dargestellten Weise symbolisiert. Abschließend sei erwähnt, daß der Rechenverstärker infolge seiner Gegenkopplung einen speziellen Regelkreis darstellt (s. Abschn. 12.3.).

5.2.3. Zur Analogprogrammierung linearer analoger Systeme

Zum Beweis von Satz 5.4 ist noch zu zeigen, daß zeitinvariante lineare analoge Systeme mit konzentrierten Elementen ausschließlich unter Verwendung von Summier- und Integrierverstärkern sowie Koeffizientenpotentiometern auf einem Analogrechner programmiert werden können.

Die allgemeinen Gleichungen eines solchen Systems sind die mit den Gln. (2.31), (2.32) aufgestellten Systemgleichungen. Wegen des in linearen Systemen gültigen Superpositionsgesetzes bedeutet es keine Einschränkung der Allgemeingültigkeit, wenn wir den Nachweis nur für Systeme mit einem Eingangssignal u und einem Ausgangssignal x führen. In diesem Fall vereinfachen sich die Matrix C zu einem Zeilenvektor c^T , die Matrix B zu einem Spaltenvektor b und die Matrix D zu einem Skalar d , und die Systemgleichungen lauten:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{b}u \quad (5.21 \text{ a})$$

$$x = \mathbf{c}^T \mathbf{q} + du. \quad (5.21 \text{ b})$$

Der Einfachheit wegen betrachten wir hier ein System 2. Ordnung mit den Zustandsvariablen q_1 und q_2 , an dem bereits alles zu erkennen ist. Die ausführlichen Systemgleichungen haben dann die Form

$$T\dot{q}_1 = Ta_{11}q_1 + Ta_{12}q_2 + Tb_1u \quad (5.22 \text{ a})$$

$$T\dot{q}_2 = Ta_{21}q_1 + Ta_{22}q_2 + Tb_2u \quad (5.22 \text{ b})$$

sowie

$$x = c_1q_1 + c_2q_2 + du. \quad (5.23)$$

Hierbei sind die Zustandsgleichungen (5.22) in Rücksicht auf das Folgende mit T erweitert worden.

Zur Vermeidung der gerätetechnisch ungünstigen Differentiation bei der Aufstellung der Rechenschaltung zur Lösung dieser Aufgabe nehmen wir zunächst an, daß $T\dot{q}_1$ und $T\dot{q}_2$ verfügbar seien. Über Integrierverstärker mit den integralen Übertragungsfaktoren $1/T$ erhält man daraus $-q_1$ und $-q_2$. Aus Gl. (5.20) folgt nämlich für das Ausgangssignal u_a eines Integrierverstärkers bei einem Eingangssignal u_i ; $i = 1, 2$:

$$u_i = k_y T \dot{q}_i \quad (5.24)$$

mit $V_i = 1$ und $q_i(0) = 0$

$$u_a(t) = -\frac{1}{T} \int_0^t k_y T \dot{q}_i(\tau) d\tau = -k_y q_i(t). \quad (5.25)$$

Nehmen wir der Einfachheit und Übersichtlichkeit halber an, daß der Maßstabsfaktor k_y eins ist, so gilt:

$$u_i = T\dot{q}_i, \quad u_a = -q_i \quad (5.26)$$

für $k_y = 1$.

Da das Steuersignal u als Eingangssignal vorgegeben ist, sind damit alle Variablen vorhanden, aus denen $T\dot{q}_1$ und $T\dot{q}_2$ nach Gl. (5.22) gebildet werden. Somit kann die Schaltung zur Realisierung der Gln. (5.22), (5.23) konstruiert werden. Unter Beachtung der in den Bildern 5.6 bis 5.8 erläuterten Symbolik, insbesondere der Vorzeichenumkehr durch die Rechenverstärker, läßt sich leicht überprüfen, daß die Rechenschaltung im Bild 5.9 diese Aufgabe erfüllt. In dieser Schaltung sind die Zeitverläufe der Aus- und Eingangsspannungen der Integratoren Abbildungen der Verläufe der Zustandsgrößen bzw. deren Ableitungen bei der Lösung der Systemgleichungen (5.22), und das Ausgangssignal der Schaltung x ist ein Bild des durch Gl. (5.23) gegebenen Verlaufs der gesuchten Ausgangsgröße.

Für den Fall von – gewöhnlich vorliegenden – Gegenkopplungen sind die Koeffizienten $a_{ij}T$ mit $i, j = 1, 2$ negativ. Dann sind die $-a_{ij}T$ positiv und an einem Potentiometer einstellbar. Anderenfalls müssen Verstärker mit dem Übertragungsfaktor -1 – sog. *Inverter*- oder *Umkehrverstärker* – zwischengeschaltet werden, die das gewünschte Vorzeichen erzeugen.

und weiterer wichtiger Maßstabs-(Normierungs-)Fragen muß auf die Literatur über Analogrechner verwiesen werden. Auf einige Probleme der Analogprogrammierung, unter anderem die Programmierung von Übertragungsfunktionen, werden wir später bei der Untersuchung des rechnergestützten Entwurfs zurückkommen. Auf die Möglichkeit, durch geeignete Maßstabswahl die gesuchte Zeitfunktion in der Schaltung gegenüber der des beschriebenen Systems zeitlich zu komprimieren (oder auch zu dehnen), werden wir im folgenden Abschnitt kurz eingehen.

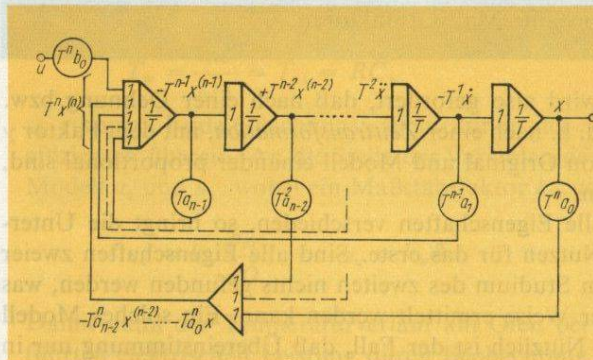


Bild 5.10. Rechenschaltung (Kopplungsplan) zur Lösung der Differentialgleichung (5.28)

Die Schaltungen der Bilder 5.9 und 5.10 werden auch Kopplungsplan genannt. Allgemein gilt:

Die der Programmierung auf einem Analogrechner dienende symbolische Darstellung der zur Lösung einer Rechenaufgabe benötigten analogen Funktionseinheiten (Summierer, Integrierer, Koeffizientenpotentiometer u. a.) und ihrer wechselseitigen Verkopplungen heißt (*analoge*) *Rechenschaltung* oder (*analoger*) *Kopplungsplan*.

D 5.20

5.2.4. Analoge Modelle

5.2.4.1. Analoges Modell

Bei einer etwas veränderten Betrachtungsweise steht nicht der Rechenaspekt, sondern der des Modells im Vordergrund. Unter Modell versteht man hierbei:

Stimmen zwei Objekte in wenigstens einer ihrer Eigenschaften überein (d. h., besteht irgendeine Ähnlichkeit zwischen ihnen), so heißt bezüglich dieser Eigenschaft das eine Objekt *Modell* des anderen, des *Originals*.

D 5.21

Betrifft diese Übereinstimmung die Form, so spricht man von einem Formmodell (z. B. Modellauto). In der Kybernetik interessieren *Verhaltensmodelle*, bei denen eine Übereinstimmung bzw. Ähnlichkeit des Verhaltens von Original und Modell vorliegt. Unter Ähnlichkeit des Übertragungsverhaltens soll hierbei verstanden werden:

D 5.22

Zwei Objekte mit den Ein- und Ausgangssignalen u und x bzw. u_M und x_M (Modell) heißen bezüglich ihres Übertragungsverhaltens ähnlich, wenn aus

$$u_M(t) = k_u u(t/\gamma) \quad (5.30a)$$

folgt

$$x_M(t) = k_x x(t/\gamma). \quad (5.30b)$$

Hierbei sind k_u , k_x und γ konstante Maßstabsfaktoren.

Für die Verhaltensähnlichkeit wird also gefordert, daß nach einer Dehnung bzw. Komprimierung der Zeitachse, d. h. nach einer *Zeittransformation*, mit dem Faktor γ die Ein- und Ausgangssignale von Original und Modell einander proportional sind, worauf wir noch zurückkommen.

Sind zwischen zwei Objekten alle Eigenschaften verschieden, so bringt die Untersuchung des zweiten keinerlei Nutzen für das erste. Sind alle Eigenschaften zweier Objekte gleich, so kann aus dem Studium des zweiten nichts gefunden werden, was nicht auch am ersten in gleicher Weise ermittelt werden kann. Ein solches Modell bringt ebenfalls keinen Vorteil. Nützlich ist der Fall, daß Übereinstimmung nur in einer interessierenden Eigenschaft oder in wenigen Eigenschaften besteht, während die anderen Eigenschaften des Originals durch günstigere des Modells ersetzt werden. Das ist die Ursache für die weite Verwendung der Modellmethode. Der auf ihr basierende sog. *Analogieschluß*, mittels dessen durch Studium an einem Modell Erkenntnisse für ein schwieriger zu untersuchendes Original gewonnen werden, ist ein altes philosophisches Mittel zum Erkenntnisgewinn.

Zur Verdeutlichung der Modellmethode wollen wir unseren Ausgang von einem Beispiel nehmen, dem im Bild 5.11 dargestellten elektrisch beheizten Ofen und seinem elektrischen Verhaltensmodell. Hierbei bedeuten p_{el} die zugeführte elektrische Leistung, ϑ die Temperatur des Ofens gegenüber der der Umgebung, m die Masse des Ofens und c deren spezifische Wärme, O die für die Wärmeabgabe an die Umgebung maßgebende Oberfläche des Ofens und α die Wärmeübergangszahl.

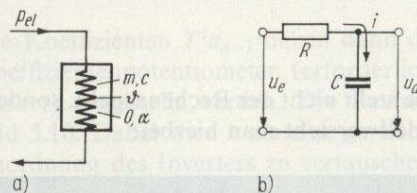


Bild 5.11. Elektrisch beheizter Ofen a) und elektrisches Verhaltensmodell b)

Aus der Leistungsbilanz, nach der die zugeführte elektrische Leistung gleich der Wärmeleistung zur Temperaturerhöhung des Ofens und der an die Umgebung abgegebenen Wärmeleistung sein muß, erhält man:

$$p_{el} = mc\dot{\vartheta} + \alpha O\vartheta \quad (5.31)$$

bzw.

$$\frac{p_{el}}{\alpha O} = \frac{mc}{\alpha O} \dot{\vartheta} + \vartheta. \quad (5.32)$$

Für das RC-Glied Bild 5.11 b ergibt sich

$$u_e = iR + u_a; \quad i = C\dot{u}_a \quad (5.33)$$

und somit

$$u_e = RC\dot{u}_a + u_a. \quad (5.34)$$

Ein Vergleich der Gln. (5.32), (5.34) zeigt die Übereinstimmung ihres Typs. Wählt man die Erwärmungszeitkonstante T_w gleich der elektrischen Zeitkonstante T_{e1}

$$T_w = \frac{mc}{\alpha O} = T_{e1} = RC, \quad (5.35)$$

so stimmen beide Gleichungen nicht nur in der Struktur, sondern auch in den Koeffizienten überein. An die Stelle der Variablen des Originals $p_{e1}/\alpha O$ und ϑ treten im Modell u_e und u_a , wobei ein Maßstabsfaktor k_w gewählt werden kann, so daß

$$u_e = k_w \frac{p_{e1}}{\alpha O}, \quad u_a = k_w \vartheta. \quad (5.36)$$

Damit kann der Temperaturverlauf am Ofen bei gegebenem Zeitverlauf der zugeführten elektrischen Leistung durch Beobachtung von $u_a(t)$ bei gegebenem Zeitverlauf $u_e(t)$ untersucht werden, was einfacher durchzuführen ist. Insbesondere können die Parameter in der elektrischen Schaltung durch R und C viel bequemer geändert werden, als das am Ofen durch Änderung von m und O möglich ist. Darüber hinaus kann durch Wahl von

$$\gamma = T_{e1}/T_w \quad (5.37)$$

der Zeitverlauf $u_a(t)$ gegenüber $\vartheta(t)$ um den Faktor $\gamma < 1$ verkürzt (komprimiert) bzw. um den Faktor $\gamma > 1$ verlangsamt (gedehnt) werden. Durch Lösung der Differentialgleichungen (5.32), (5.34) kann man für vorliegendes Beispiel leicht zeigen, daß

$$u_a(t) = k_w \vartheta(t/\gamma), \quad (5.38)$$

daß also Ähnlichkeit des Verhaltens gemäß Gl. (5.30) vorliegt.

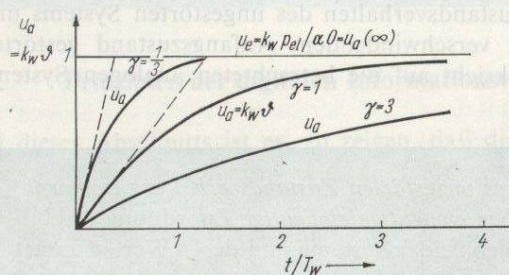


Bild 5.12. Untersuchung des Temperaturverlaufs eines Ofens an einem Modell bei verschiedenen Zeitkonstantenverhältnissen $\gamma = T_{e1}/T_w$

Für den Fall einer Sprungänderung der dem Ofen zugeführten elektrischen Leistung bzw. der Eingangsspannung des RC-Gliedes ergeben sich die im Bild 5.12 dargestellten Zeitverläufe der Temperatur bzw. der Ausgangsspannung des RC-Gliedes in Übereinstimmung mit Gl. (5.38).

Für $\gamma = 1/3$ erhält man einen dreimal schnelleren Ausgleichsvorgang, als er am Original beobachtet werden könnte. Da an einem elektronischen Modell, wozu vorteilhaft ein Analogrechner verwendet wird, die Zeitverläufe unter Beibehaltung ihrer Form um mehrere Größenordnungen zeitlich gerafft werden können (bei repetierenden Analogrechnern z. B. auf 20 ms), ergibt sich damit ein außerordentlich wirkungsvolles Mittel zur Untersuchung und zum Entwurf von Steuerungssystemen. In kurzer Zeit kann eine große Zahl von Varianten beobachtet und aus diesen die günstigste für die Realisierung am Original ausgewählt werden. Aus diesen Gründen findet diese Methode eine sehr häufige und weite Anwendung und hat eine besondere Bezeichnung erhalten:

D 5.23

Die Programmierung eines Objekts als Modell auf einem analogen/digitalen Rechner wird *analoge/digitale Simulation* genannt.

Die allgemeinen Bedingungen für eine Komprimierung bzw. Dehnung des Zeitverhaltens des Modells gegenüber dem des Originals bei der Programmierung können leicht mit Hilfe des weiter unten vorgestellten Ähnlichkeitssatzes der Laplacetransformation [s. Gl. (10.25)] angegeben werden. Wir wollen deshalb dieses Problem später bei der Behandlung des rechnergestützten Entwurfs von Steuerungssystemen klären.

5.2.4.2. Iso- und homomorphe Verhaltensmodelle

Bisher ist davon ausgegangen worden, daß die Systemgleichungen – und damit auch die Übertragungsfunktionen – von Modell und Objekt gleiche Struktur haben. Häufig ist jedoch das Original zu kompliziert, um mit vertretbarem Aufwand vollständig in einem Modell wiedergegeben werden zu können. Man denke nur an eine größere Anlage der chemischen Verfahrenstechnik oder an einen Dampfzerzeuger. In diesen Fällen wird ein vereinfachtes Modell benötigt, an dem die Untersuchungen mit *ausreichender* Vollständigkeit und Genauigkeit durchgeführt werden können. Es ist daher ein Begriff erwünscht, der die Vollständigkeit der Abbildung des Originals auf ein Modell kennzeichnet. Ein solcher ist der (besonders in der Automatentheorie verwendete) Begriff der *Isomorphie* bzw. *Homomorphie*. Für die Anwendung dieser Begriffe wollen wir zwischen dem Zustandsverhalten des ungestörten Systems und dem Übertragungsverhalten des bei verschwindendem Anfangszustand gestörten Systems unterscheiden und mit Rücksicht auf die betrachteten analogen Systeme definieren:

D 5.24

Zwei Systeme heißen *bezüglich ihres ungestörten Zustandsverhaltens isomorph/homomorph*, wenn es eine *umkehrbar eindeutige/eindeutige* Zuordnung (Abbildung) zwischen den Zustandsvariablen beider Systeme und deren Werten derart gibt, daß bei einer solchen Zuordnung zum Zeitpunkt $t = 0$ auch die für $t > 0$ folgenden Verläufe der Zustandsvariablen – ggf. nach einer linearen Zeittransformation der Zeitverläufe des einen Systems – einander zugeordnet sind.

Entsprechend gilt:

Zwei Systeme heißen *bezüglich ihres Übertragungsverhaltens isomorph/homomorph*, wenn es eine eindeutige/eindeutige Zuordnung zwischen den Ein- und Ausgangssignalen beider Systeme und ihren Werten derart gibt, daß bei einer solchen Zuordnung zum Zeitpunkt $t = 0$ auch die für $t > 0$ folgenden Zeitverläufe – ggf. nach einer linearen Transformation der Verläufe des einen Systems – einander zugeordnet sind.

D 5.25

Offensichtlich kann bei zwei isomorphen Systemen die Rolle von Original und Modell vertauscht werden. Die Vereinfachung des homomorphen Modells, die eine eindeutige Abbildung nur in Richtung vom Original zum Modell (und nicht umgekehrt) erlaubt, ist unter anderem dadurch bedingt, daß im Modell

- nicht interessierende Ein- und/oder Ausgänge weggelassen werden
- Zustandsvariable, die nicht durch die Eingangssignale gesteuert und durch die Ausgangssignale beobachtet werden, entfallen
- Zustandsvariable, die das Übertragungsverhalten unbedeutend beeinflussen, weggelassen oder zu einer Ersatzzustandsvariablen zusammengefaßt werden (Approximation von Systemen mit verteilten Elementen durch solche mit konzentrierten)
- eine Quantisierung der Signale bezüglich der Amplitude (Diskretisierung) bzw. der Zeit (Abtastung) erfolgt.

In allen diesen Fällen ist eine eindeutige Bestimmung des vollständigen Verhaltens des Originals aus dem des Modells nicht mehr möglich.

In Zusammenfassung und Verallgemeinerung der Erkenntnisse dieses Abschnitts wollen wir abschließend formulieren:

Bei isomorphen (homomorphen) Verhaltensmodellen haben die beschreibenden Systemgleichungen von Original und Modell die gleiche (näherungsweise die gleiche) Struktur und bestehen zwischen den Parametern bestimmte (noch anzugebende) Beziehungen, während die Signalträger von Original und Modell meist verschieden sind.

S 5.5

5.3. Prinzipien der digitalen Informationsverarbeitung

Ziel dieses Abschnitts ist es, zu zeigen, daß die im Abschn. 4. formulierten zahlreichen Steuerungsaufgaben und -funktionen von digitalen Informationsverarbeitungseinrichtungen geleistet werden können und daß an einer solchen Einrichtung reale gesteuerte Systeme simuliert und untersucht werden können. Das schließt auch eine grobe Skizzierung des Wie, d. h. der gerätetechnischen Lösung, ein. Außerdem sollen einige für die Vorbereitung und Durchführung dieser Aufgaben verwendete grundsätzliche Beschreibungs- und Darstellungsweisen eingeführt werden, die bei der Behandlung des weiteren Stoffes (insbesondere im folgenden Band) sich als nützlich erweisen werden. Die eigentliche Analyse und Synthese von digitalen Informationsverarbeitungseinrichtungen wird noch nicht einbezogen.

5.3.1. Digitale Signaldarstellung

Die digitale Informationsverarbeitung erfolgt unter Verwendung digitaler Signale (s. Definition 5.7) durch *digitale Rechen- bzw. Steuereinrichtungen*. Besondere Bedeutung haben hierbei die Realisierung logischer Verknüpfungen sowie die *numerische*, d. h. zahlenmäßige, Informationsverarbeitung. Letztere wird bei der Untersuchung diskreter Systeme dadurch ermöglicht, daß deren Zustand bei den normalerweise vorliegenden unteren und oberen Schranken für die Wertebereiche der Zustandsvariablen durch ein Tupel endlicher Zahlen beschreibbar ist.

Bei der *Darstellung von Zahlen* ist die Verwendung von Basisgrößen b gebräuchlich (in den sog. *Stellenwertsystemen*). Mit deren Hilfe kann eine endliche ganze Zahl N bei hinreichend großem n wie folgt geschrieben werden:

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b^1 + a_0 b^0; \quad (5.39)$$

b ganzzahlige Basis

b^i Stellenwert der Ziffer a_i ; $i = 0, 1, \dots, n$

$a_i \in A$; $A = \{0, 1, \dots, b-1\}$ Menge der Ziffern.

Für den bekannten *Dezimalcode (Dezimalsystem)* ist

$$b = 10, A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}, \quad (5.40)$$

für den *Dualcode (Dualsystem)* gilt

$$b = 2, A = \{0, 1\}. \quad (5.41)$$

Statt der Ziffer 1 findet in diesem Fall gewöhnlich das Symbol L Verwendung, was auch hier geschehen soll.

Bei der üblichen Schreibweise wird der Stellenwert durch die Stellung (Position) der Ziffer markiert. So bedeutet im Dezimalcode

$$23 = 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0. \quad (5.42)$$

Die Umkodierung in den Dualcode ergibt

$$\begin{aligned} 23 &= 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= \text{L} \quad \text{O} \quad \text{L} \quad \text{L} \quad \text{L}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Durch Hinzunahme negativer Exponenten können auch gebrochene Zahlen dargestellt werden. Offensichtlich wächst mit der Größe der Basis die Zahl der Ziffern und sinkt die Wortlänge (die Stellenzahl).

Im Abschn. 5.1.5. ist schon vermerkt worden, daß für $b = e$ (natürliche Zahl) der Bezeichnungsraum $B = bn$ ein Minimum annimmt. Als benachbarte ganze Zahl hat $b = 2$ den großen Vorteil, daß aufwandsparende und störunanfällige technische Zahlendarstellungen gefunden werden können. Beispielsweise kann die Ziffer O durch einen offenen Kontakt oder einen fehlenden Impuls, die Ziffer L durch einen geschlossenen Kontakt oder einen Impuls dargestellt werden. Aus diesen Gründen werden in digitalen Einrichtungen fast ausschließlich Signaldarstellungen benutzt, die aus zwei Elementen (aus zwei Ziffern) gebildet sind. Derartige Zahlendarstellungen heißen *Binärkodes* (s. Definition 5.6).

Dabei muß nicht notwendig ein Binärkode ein Dualkode sein. Beispielsweise können auch die Ziffern (die Stellen) eines dezimalkodierten Zahlenworts einzeln im Dualkode geschrieben werden. Wegen der zehn möglichen Ziffern müssen dabei für jede Stelle eines Dezimalworts 4 bit, eine sog. *Tetrade*, vorgesehen werden, z. B.

$$23 = \text{OOLO OOLL} \quad (5.44)$$

Fassen wir zusammen:

Digitale Rechen- und Steuereinrichtungen sind Einrichtungen zur Untersuchung (Modellierung, Lösung) diskreter/diskretisierter Systeme bzw. Probleme, in denen die Systemsignale bzw. Rechengrößen mit Hilfe digitaler Signale dargestellt werden.

D 5.26

Dabei gilt:

In digitalen Einrichtungen finden vorzugsweise Binärsignale Verwendung, die nach dem Dualkode oder einem anderen Binärkode verschlüsselt sind. Dabei werden die Ziffern O/L

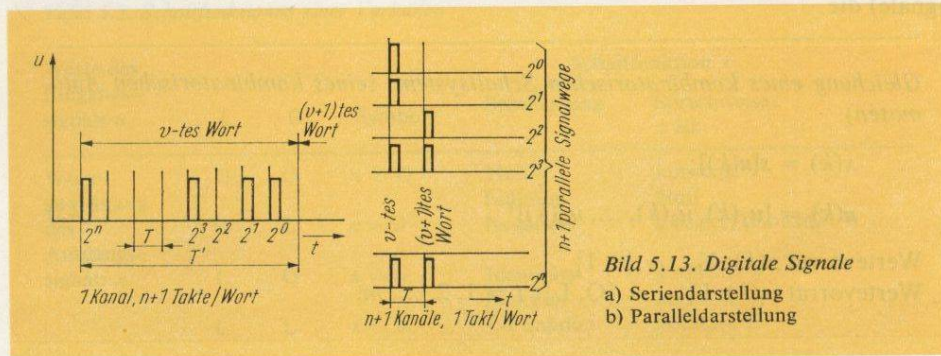
S 5.6

- in *Kontaktschaltungen* durch einen offenen/geschlossenen Kontakt
- in elektronischen *kontaktlosen Schaltungen* vorzugsweise durch keinen/einen Impuls realisiert.

Die Stellenbewertung erfolgt

- bei der *Paralleldarstellung* durch die räumliche
- bei der *Seriendarstellung* durch die zeitliche Lage.

Bild 5.13a veranschaulicht, wie bei der Seriendarstellung durch die zeitliche Zuordnung zu einer für die Einrichtung gültigen Taktzeit die Stellenbewertung erfolgt.



Bei der Paralleldarstellung (Bild 5.13b) erfolgt die Stellenbewertung durch die räumliche Kanalzuordnung. Dabei ergibt sich, daß für die Serienübertragung zwar nur ein Kanal, jedoch $n + 1$ Takte T für die Übertragung eines Wortes benötigt werden, während bei der Parallelübertragung nur ein Takt, jedoch $n + 1$ Kanäle hierfür erforderlich sind.

5.3.2. Informationsverarbeitung in kombinatorischen Schaltsystemen

5.3.2.1. Begriff des kombinatorischen Schaltsystems und der Schaltfunktion

Die nun zu betrachtende digitale Informationsverarbeitung wird ausführlich in Büchern über Digitalrechner und digitale Automaten abgehandelt. Wir wollen uns deshalb hier auf die Darlegung einiger Prinzipien und Methoden beschränken, die für die weitere Untersuchung von Steuerungsproblemen größere Bedeutung haben. Wir beginnen dabei mit einer einfacheren Klasse, den sog. *kombinatorischen Schaltsystemen* oder *kombinatorischen Automaten*.

Der Begriff *Automat* bedeutet im technischen Sinn eine Einrichtung, bei der Eingabe, Verarbeitung und Ausgabe von Stoffen, Energien oder Informationen ohne Mitarbeit des Menschen ablaufen. In der Kybernetik hat der Begriff des diskreten Automaten eine abstraktere Bedeutung. Mit Gl. (2.58) sind bereits die einen linearen diskreten Automaten definierenden Gleichungen aufgestellt worden, wenn man beachtet, daß die Ein- und Ausgangs- und Zustandssignale nur bestimmte diskrete Werte annehmen können (s. Schlußbemerkung des Abschnitts 2.2.5.).

Die hier zunächst betrachteten kombinatorischen Automaten haben keine Speicher (kein Gedächtnis). Das Ausgangssignal wird bei ihnen nur von den zum gleichen Zeitpunkt anliegenden Eingangssignalen bestimmt. Der Zustandsvektor, der nach Definition 2.8 dazu dient, die durch die Vergangenheit bedingte Unbestimmtheit der Ein-/Ausgangs-Beziehung zu beseitigen, entfällt somit. Als Definition gilt:

D 5.27

Eine informationsverarbeitende Einrichtung heißt *kombinatorisches Schaltsystem* oder *kombinatorischer Automat*, wenn Ein- und Ausgangssignale diskret sind und das Ausgangssignal in jedem Zeitpunkt nur von den im gleichen Zeitpunkt anliegenden Werten der Eingangssignale abhängt.

Für die – nicht notwendig gleichabständige – Folge des Ausgangssignals $x(k)$ in Abhängigkeit vom Eingangsvektor $u(k)$ gilt somit (bei Beschränkung auf Binärsignale) die

Gleichung eines kombinatorischen Schaltsystems (eines kombinatorischen Automaten)

$$x(k) = s[u(k)];$$

$$u(k) = [u_1(k), u_2(k), \dots, u_m(k)]^T \quad (5.45)$$

Wertevorrat $x(k): X_{\text{bin}} = \{0, 1\}$

Wertevorrat $u_i(k): U_{i \text{ bin}} = \{0, 1\}; i = 1, 2, \dots, m.$

D 5.28

Die eindeutige Abbildung

$$s: U_{1 \text{ bin}} \times U_{2 \text{ bin}} \times \dots \times U_{m \text{ bin}} \rightarrow X_{\text{bin}} \quad (5.46)$$

wird *Schaltfunktion* genannt.

5.3.2.2. Grundtypen von Schaltfunktionen

Im Unterschied zu Funktionen kontinuierlicher Variabler erhält man bei Funktionen diskreter Variabler nur eine endliche Menge von Funktionen. Unsere nächste Aufgabe besteht deshalb darin, diese Menge von Schaltfunktionen zu bestimmen und ihre symbolische Darstellung und Bezeichnung kennenzulernen.

Eine ähnliche Problemstellung ist in der Logik Gegenstand des sog. zweiwertigen Aussagenkalküls. Dort besteht die Aufgabe, aus bestimmten Vordersätzen (Prämissen, Bedingungen) durch logische Verknüpfungen zu einem Schluß (Ergebnis, Konklusion) zu kommen. Die Vordersätze und die Schlüsse können wahr oder auch falsch sein, haben also genau zwei Aussagewerte wie die Signale eines binären Systems. Damit bestehen die in Tafel 5.2 angeführten Entsprechungen zwischen dem zweiwertigen Aussagenkalkül und einem Kombinationsschaltssystem.

Tafel 5.2. Analogien zwischen Aussagenkalkül und kombinatorischem Schaltssystem

Aussagenkalkül	Vordersätze	Logische Verknüpfung	Schluß
Kombinations-schaltssystem	Eingangs-signale	logische Schaltung	Ausgangs-signa

Auf Grund dieser Entsprechungen darf erwartet werden, daß aus dem Aussagenkalkül Nutzen für die Beschreibung und den Entwurf von Schaltssystemen gezogen werden kann. *G. Boole* (1815 bis 1864) unternahm es erstmalig, diesen Aussagenkalkül zu algebraisieren, d. h. durch Funktionen zu beschreiben und Rechenregeln für deren Umformung anzugeben. Diese bilden die sog. *Boolesche Algebra*, auch *Algebra der Logik* genannt. Sie wurde ab 1938 insbesondere von *Shannon* auf die Berechnung von Schaltssystemen übertragen, wobei ihr die Bezeichnung *Schaltalgebra* gegeben wurde. Wegen dieser historischen Entwicklung und der geschilderten Analogien haben die Funktionen der Schaltalgebra Bezeichnungen erhalten, die denen der Logik entlehnt sind.

Für den Fall eines Eingangssignals ($m = 1$) ergeben sich die in Tafel 5.3 eingetragenen möglichen Schaltfunktionen mit den dort angegebenen Bezeichnungen.

Tafel 5.3. Schaltfunktionen einer Variablen

Werte des Eingangssignals u	Schaltfunktion x				
	L	O	Symbol	Bezeichnung	Sprechweise: x ist
Werte-zuordnung des Ausgangssignals x	O	O	$x = O$	Nullfunktion	konstant Null
	O	L	$x = \bar{u}$	Negation	u negiert (u nicht)
	L	O	$x = u$	Identitätsfunktion	u
	L	L	$x = L$	L-Funktion	konstant L

Besondere Bedeutung hat die *Negation*:

$$x = \bar{u}.$$

(5.47)

Diese kann durch die aus Tafel 5.3 herausgezogene *Schaltbelegungstabelle* (*Wahrheitstabelle*) erklärt werden:

$$\begin{array}{c|c} u & x = \bar{u} \\ \hline O & L \\ L & O \end{array} \quad (5.48)$$

Als nächstes wollen wir die möglichen Schaltfunktionen bei zwei binären Eingangssignalen aufstellen. Hierzu bilden wir die möglichen Kombinationen für die Wertebegleitungen der Eingangssignale und ordnen diesen die möglichen Ausgangssignalebelegungen zu (Tafel 5.4).

Tafel 5.4. Schaltfunktionen zweier Variabler

Werte der Eingangssignale					Schaltfunktion x		
	u_2	L	L	O	O	Symbol	Bezeichnung
	u_1	L	O	L	O		Sprechweise: x ist
Werte- zuordnung des Ausgangs- signals x		O	O	O	O	O	Nullfunktion
		O	O	O	L	$\overline{u_1 \vee u_2}$	Nor-(Peirce-) Funktion
		O	O	L	O	$u_1 \wedge \bar{u}_2$	Inhibition
		O	O	L	L	$\bar{u}_2$	Negation u_2
		O	L	O	O	$\bar{u}_1 \wedge u_2$	Inhibition
		O	L	O	L	$\bar{u}_1$	Negation u_1
		O	L	L	O	$u_1 \nabla u_2$	Antivalenz
		O	L	L	L	$\overline{u_1 \wedge u_2}$	Nand-(Sheffer-) Funktion
	L	O	O	O	O	$u_1 \wedge u_2$	Konjunktion
	L	O	O	L	L	$u_1 \equiv u_2$	Äquivalenz
	L	O	L	O	O	u_1	Identität mit u_1
	L	O	L	L	L	$u_2 \rightarrow u_1$	Implikation
	L	L	O	O	O	u_2	Identität mit u_2
	L	L	O	L	L	$u_1 \rightarrow u_2$	Implikation
	L	L	L	O	O	$u_1 \vee u_2$	Disjunktion
	L	L	L	L	L	L	L-Funktion

5.3.2.3. Darstellbarkeit einer Schaltfunktion als disjunktive Normalform

Man kann zeigen, daß alle kombinatorischen Schaltfunktionen unter Verwendung von nur wenigen Grundverknüpfungen (elementaren Schaltfunktionen) der Tafel 5.4 beschrieben und realisiert werden können. Wir wollen hierzu außer der bereits vor-

gestellten Negation die Disjunktion und Konjunktion auswählen. Dabei sollen die in die konjunktive bzw. disjunktive Verknüpfung einbezogenen Variablen auch in negierter Form auftreten dürfen. In diesem Sinn sind die in Tafel 5.4 eingetragenen Inhibitionen spezielle Konjunktionen.

Zunächst sollen Konjunktion und Disjunktion auch für $l > 2$ unabhängige Variable definiert werden:

Eine *Konjunktion* von l Variablen (einschließlich negierter Variabler) hat genau dann den Wert L, wenn alle l Variablen (bzw. negierten Variablen) mit dem Wert L belegt sind.

D 5.29

Eine *Disjunktion* von l Variablen (einschließlich negierter Variabler) hat genau dann den Wert O, wenn alle l Variablen (bzw. negierten Variablen) den Wert O aufweisen.

D 5.30

Eine Disjunktion von l Variablen nimmt also den Wert L genau dann an, wenn wenigstens eine dieser Variablen den Wert L hat.

Für den Fall $l = 3$ sind die Schaltbelegungstabellen bei konjunktiver und disjunktiver Verknüpfung der nichtnegierten Variablen aus Tafel 5.5 ersichtlich.

Tafel 5.5. Schaltbelegungstabelle (Wahrheitstabelle) bei Konjunktion und Disjunktion von drei Variablen

Eingangssignalbelegung			Belegung des Ausgangssignals x bei	
u_3	u_2	u_1	Konjunktion $u_1 \wedge u_2 \wedge u_3$	Disjunktion $u_1 \vee u_2 \vee u_3$
O	O	O	O	O
O	O	L	O	L
O	L	O	O	L
O	L	L	O	L
L	O	O	O	L
L	O	L	O	L
L	L	O	O	L
L	L	L	L	L

Für die weitere Untersuchung führen wir noch den Begriff der Elementarkonjunktion (Vollkonjunktion) ein:

Mit *Elementarkonjunktion* (*Vollkonjunktion*) wird eine Konjunktion bezeichnet, in der *sämtliche* unabhängigen Variablen (alle m Eingangssignale eines Schaltsystems) entweder unnegiert oder negiert auftreten.

D 5.31

Die bei drei Variablen möglichen Belegungen und die zugehörigen Elementarkonjunktionen, die bei der nebenstehenden Belegung den Wert L ergeben würden, zeigt

Tafel 5.6. Beispielsweise hat die Elementarkonjunktion k_6 den Wert L genau dann, wenn u_3 und u_2 den Wert L aufweisen und wenn $\bar{u}_1$ den Wert L, d. h. u_1 den Wert O, annimmt.

Tafel 5.6. Vollkonjunktionen k_i bei drei unabhängigen Variablen

Belegung der Eingangssignale $u_3 \quad u_2 \quad u_1$	Elementarkonjunktion k_i , die bei nebenstehenden Belegungen den Wert L annimmt	Beispiel einer Belegung des Ausgangssignals x
O O O	$k_0 = \bar{u}_3 \wedge \bar{u}_2 \wedge \bar{u}_1$	O
O O L	$k_1 = \bar{u}_3 \wedge \bar{u}_2 \wedge u_1$	O
O L O	$k_2 = \bar{u}_3 \wedge u_2 \wedge \bar{u}_1$	O
O L L	$k_3 = \bar{u}_3 \wedge u_2 \wedge u_1$	L
L O O	$k_4 = u_3 \wedge \bar{u}_2 \wedge \bar{u}_1$	O
L O L	$k_5 = u_3 \wedge \bar{u}_2 \wedge u_1$	O
L L O	$k_6 = u_3 \wedge u_2 \wedge \bar{u}_1$	L
L L L	$k_7 = u_3 \wedge u_2 \wedge u_1$	O

An einem Schaltsystem seien für die verschiedenen Eingangsbelegungen die in der rechten Spalte von Tafel 5.6 eingetragenen Werte des Ausgangssignals gemessen worden (bzw. von einer zu entwerfenden Schaltung gefordert worden). Ein L-Signal am Ausgang kann dann offensichtlich nur davon stammen, daß eine Eingangsbelegung vorliegt, die der Elementarkonjunktion k_3 den Wert L zuweist, oder eine solche Eingangsbelegung, die der Elementarkonjunktion k_6 den Wert L erteilt. Alle anderen Elementarkonjunktionen müssen in diesem Beispiel den Wert O annehmen. In symbolischer Darstellung lautet das:

$$\begin{aligned}
 x &= k_3 \vee k_6 \\
 &= (\bar{u}_3 \wedge u_2 \wedge u_1) \vee (u_3 \wedge u_2 \wedge \bar{u}_1).
 \end{aligned}
 \tag{5.49}$$

In Verallgemeinerung dieses Beispiels ist der folgende (hier nicht bewiesene) Satz einzusehen:

S 5.7

Jede kombinatorische Schaltfunktion ist als sog. *disjunktive Normalform* durch disjunktive Verknüpfung der Elementarkonjunktionen beschreibbar, die den Wert L für die Belegungen der Eingangssignale ergeben, welche den Wert L des Ausgangssignals erzeugen.

5.3.2.4. Realisierung von Schaltfunktionen

Aus vorstehendem Satz 5.7 folgt:

S 5.8

Alle kombinatorischen Schaltfunktionen sind unter Verwendung von *Disjunktion*, *Konjunktion* und *Negation* beschreibbar. Für ihre Instrumentierung sind Funktionselemente ausreichend, die diese Verknüpfungen realisieren.

Obwohl Schaltfunktionen auch mit anderen und mit weniger Typen von Verknüpfungen gebildet werden können, wollen wir im folgenden nur diese drei näher betrachten.

Bei der Realisierung von Schaltfunktionen ist zwischen *Kontaktschaltungen* und *kontaktlosen Schaltungen* zu unterscheiden. Bei ersteren werden den Variablen Kontakte zugeordnet, die durch die Eingangssignale über die Erregerwicklungen der Relais angesteuert werden. Dabei ist es üblich, nur die Kontakte zu zeichnen, und zwar bei O-Signal (in Ruhestellung).

Tafel 5.7 zeigt, daß eine Negation durch einen Ruhekontakt, eine Konjunktion durch in Reihe geschaltete Kontakte und eine Disjunktion durch parallelgeschaltete Kontakte realisiert werden kann. Davon kann man sich leicht anhand der dort eingetragenen Schaltbelegungstabellen überzeugen. Die rechte Spalte enthält die übliche vereinfachte Darstellungsweise als sog. *Kontaktschema*. Gewöhnlich wird dem O-Signal die Spannung Null, dem L-Signal eine positive oder negative Spannung zugeordnet. Letztere wird in Tafel 5.7 ebenfalls mit L bezeichnet.

Tafel 5.7. Realisierung logischer Verknüpfungen als Kontaktschaltungen

Logische Verknüpfung	Schaltbelegungstabelle	Schaltung (ohne Relais)	Kontaktschema															
Negation	<table><tr><th>u</th><th>$x = \bar{u}$</th></tr><tr><td>O</td><td>L</td></tr><tr><td>L</td><td>O</td></tr></table>	u	$x = \bar{u}$	O	L	L	O											
u	$x = \bar{u}$																	
O	L																	
L	O																	
Disjunktion	<table><tr><th>u_2</th><th>u_1</th><th>$x = u_1 \vee u_2$</th></tr><tr><td>O</td><td>O</td><td>O</td></tr><tr><td>O</td><td>L</td><td>L</td></tr><tr><td>L</td><td>O</td><td>L</td></tr><tr><td>L</td><td>L</td><td>L</td></tr></table>	u_2	u_1	$x = u_1 \vee u_2$	O	O	O	O	L	L	L	O	L	L	L	L		
u_2	u_1	$x = u_1 \vee u_2$																
O	O	O																
O	L	L																
L	O	L																
L	L	L																
Konjunktion	<table><tr><th>u_2</th><th>u_1</th><th>$x = u_1 \wedge u_2$</th></tr><tr><td>O</td><td>O</td><td>O</td></tr><tr><td>O</td><td>L</td><td>O</td></tr><tr><td>L</td><td>O</td><td>O</td></tr><tr><td>L</td><td>L</td><td>L</td></tr></table>	u_2	u_1	$x = u_1 \wedge u_2$	O	O	O	O	L	O	L	O	O	L	L	L		
u_2	u_1	$x = u_1 \wedge u_2$																
O	O	O																
O	L	O																
L	O	O																
L	L	L																

Eine kontaktlose Realisierung als sog. Logikglieder zeigt Tafel 5.8. Hierbei gelten folgende Bezeichnungen:

Die Realisierung einer Negation wird als *Nicht-Glied* oder *Negator*, die einer Konjunktion als *Und-Glied* und die einer Disjunktion als *Oder-Glied* bezeichnet.

D 5.32

Um Spannungsabfälle von Restströmen und Änderung der Spannungsabfälle von Arbeitsströmen infolge Alterung und sich ändernder Umgebungsbedingungen zu berücksichtigen, werden für O- und L-Signale *Spannungsbereiche* festgelegt, für die in Tafel 5.8 eingezeichneten Schaltungen z. B. 0 bis 0,3 V für das O-Signal und 2,5 bis 5 V für das L-Signal. Offensichtlich ist die Ausgangsspannung x des Oder-Gliedes positiv, sobald u_1 oder u_2 positiv sind, d. h. den Wert L haben. Bei dem Und-Glied

trifft das erst zu, wenn beide Spannungen u_1 und u_2 positiv sind und damit den Stromfluß über die Dioden sperren. Bei dem Negator führt eine positive Eingangsspannung u (L-Signal) des npn-Transistors zu einem Stromfluß durch den Widerstand R und damit zu einem O-Signal der Ausgangsspannung x .

Tafel 5.8. Kontaktlose Logikglieder

Logikglied	Nicht-Glied	Oder-Glied	Und-Glied
Schaltung			
Symbol für Signalfußplan			

Häufig werden zur Herabsetzung des Ausgangswiderstands Und- bzw. Oder-Schaltung mit einer Negatorstufe verbunden. Die Kopplung einer Oder-Schaltung mit einem Negator ergibt ein sog. *Nor-Glied*; die Zusammenschaltung von Und-Glied und Negator realisiert die Nand-Funktion und heißt deshalb *Nand-Glied* (s. Tafel 5.4). Natürlich können auch die kontaktbehafteten Realisierungen von Negation, Disjunktion und Konjunktion als Logikglieder angesehen werden. Der Vorteil der Relais-schaltungen ist die galvanische Trennbarkeit sowie die Unempfindlichkeit gegenüber Temperaturschwankungen und Überlastungen. Ihr Nachteil liegt in der Gefahr des Prellens und in der Abnutzung der Kontakte sowie in dem größeren Raumbedarf. Der Vorzug der kontaktlosen Schaltungen besteht insbesondere in den sehr hohen Schaltgeschwindigkeiten.

Die in Signalfußplänen üblichen Symbole für die genannten Logikglieder sind in Tafel 5.8 angegeben.

Als *Beispiel* betrachten wir die Schaltfunktion

$$x = u_1 \vee (u_2 \wedge u_3). \quad (5.50a)$$

Sie kann gemäß den vorangegangenen Ausführungen offensichtlich durch die Schaltungen von Bild 5.14 realisiert werden.

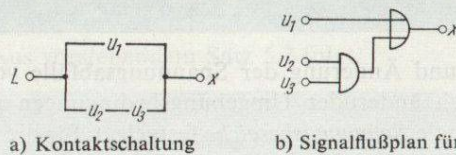
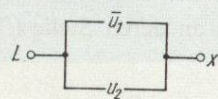


Bild 5.14. Realisierung der Schaltfunktion Gl. (5.50a)

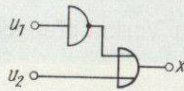
Die Implikation $u_1 \rightarrow u_2$ lautet in disjunktiver Normalform:

$$u_1 \rightarrow u_2 = \bar{u}_1 \vee u_2. \quad (5.50b)$$

Hiervon kann man sich durch die Feststellung überzeugen, daß für die rechte Seite von Gl. (5.50b) die in Tafel 5.4 für die Implikation angegebene Wertezuordnung gilt. Die Realisierung dieser Funktion zeigt Bild 5.15.



a) Kontaktschaltung



b) Signalflußplan für kontaktlose Schaltung

Bild 5.15. Realisierung der Implikation Gl. (5.50b)

Die allgemeine Aufgabe beim Entwurf von Schaltsystemen besteht in der Formulierung einer Schaltfunktion, die das gegebene Problem beschreibt, sowie in der Umformung und Vereinfachung dieser Schaltfunktion – mit Hilfe der für die Schaltalgebra (Boolesche Algebra) gültigen Regeln –, um eine Realisierung mit minimalem Aufwand zu erreichen und evtl. weitere Zusatzbedingungen zu erfüllen. Unser Ziel, der Nachweis der Möglichkeit, diskrete Probleme – insbesondere logische Aufgaben – einer Steuereinrichtung zu übertragen und dafür geeignete Beschreibungsformen vorzustellen, ist für die kombinatorischen Probleme erreicht. Im folgenden Abschnitt soll das bezüglich der sog. sequentiellen Systeme ergänzt werden.

5.3.3. Informationsverarbeitung in sequentiellen Schaltsystemen

5.3.3.1. Begriff und Gleichungen des sequentiellen Schaltsystems

Wir wollen jetzt die mit Definition 5.27 getroffene Einschränkung aufheben und Schaltsysteme betrachten, bei denen das Ausgangssignal auch von den zeitlich zurückliegenden Werten der Eingangssignale abhängt. Ein solches Schaltsystem muß demzufolge irgendwelche Speicher (ein Gedächtnis) aufweisen.

Im Abschn. 2.2.2. ist bereits geklärt worden, daß der Zustandsvektor den Einfluß des zurückliegenden Verlaufs der Eingangssignale auf den künftigen Verlauf des Ausgangssignals (den Einfluß der Vergangenheit auf das zukünftige Verhalten) voll erfaßt. Das gilt nicht nur für die dort betrachteten analogen kontinuierlichen Systeme, sondern auch für diskontinuierliche und diskrete, wie im Abschn. 2.2.5. gezeigt worden ist. Wir können deshalb die Abhängigkeit von zurückliegenden Eingangsbelegungen durch die Zustandsabhängigkeit ersetzen. Diese gegenüber den kombinatorischen Systemen allgemeinere Klasse von zustandsabhängigen Schaltsystemen heißt *sequentielle Schaltsysteme* oder *sequentielle diskrete Automaten*. Wir können deshalb definieren:

Sequentielle Schaltsysteme oder *sequentielle diskrete Automaten* werden informationsverarbeitende Systeme mit diskreten Ein- und Ausgangs- und Zustandssignalen genannt, bei denen sich Ausgangssignale und Folgezustand aus den gegenwärtig vorliegenden Werten von Eingangs- und Zustandssignalen ergeben.

D 5.33

Für den Fall eines *linearen sequentiellen Automaten* sind die Systemgleichungen bereits bestimmt worden, s. die Gln. (2.58), (2.59) mit den dort angegebenen zusätzlichen Bedingungen:

$$\mathbf{q}(k+1) = \mathbf{A}^* \mathbf{q}(k) + \mathbf{B}^* \mathbf{u}(k) \quad (5.51a)$$

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{C}^* \mathbf{q}(k) + \mathbf{D}^* \mathbf{u}(k). \quad (5.51b)$$

Bei den hier einbezogenen nichtlinearen Verknüpfungen treten an deren Stelle (für ein Ausgangssignal) die

Systemfunktionen eines sequentiellen Schaltsystems/Automaten:

die Überföhrungsfunktion

$$\mathbf{q}(k+1) = \mathbf{f}_s[\mathbf{q}(k), \mathbf{u}(k)] \quad (5.52a)$$

die Ausgabefunktion (Ergebnisfunktion)

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{g}_s[\mathbf{q}(k), \mathbf{u}(k)]. \quad (5.52b)$$

Für den Fall der hier ausschließlich betrachteten binären Systeme gilt dabei für das Ausgangssignal $x(k)$, für die Eingangssignale $u_j(k)$ des $(m, 1)$ -Eingangsvektors $\mathbf{u}(k)$ sowie für die Komponenten $q_i(k)$ des $(n, 1)$ -Zustandsvektors $\mathbf{q}(k)$:

$$\text{Wertevorrat } x(k) = \{O, L\}$$

$$\text{Wertevorrat } u_j(k) = \{O, L\}; \quad j = 1, 2 \dots m$$

$$\text{Wertevorrat } q_i(k) = \{O, L\}; \quad i = 1, 2 \dots n. \quad (5.53)$$

Die Überföhrungsfunktion $\mathbf{f}_s$ ist ein $(n, 1)$ -Funktionsvektor, die Ausgabefunktion $\mathbf{g}_s$ ist für den hier betrachteten Fall eines Ausgangssignals eine reellwertige Funktion.

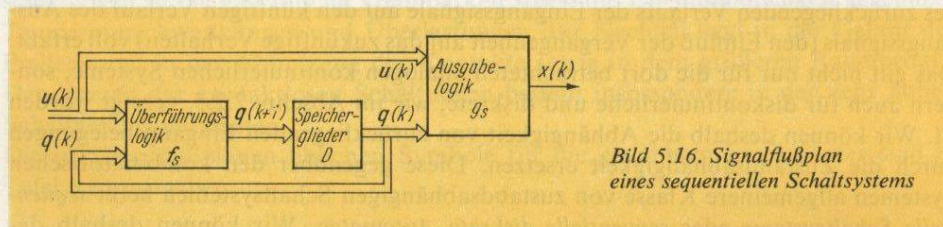


Bild 5.16. Signalflußplan eines sequentiellen Schaltsystems

Der im Bild 5.16 gezeichnete Signalflußplan des durch die Gln. (5.52) definierten sequentiellen Automaten läßt erkennen, daß außer den logischen Schaltungen zur Realisierung von Überföhrungsfunktion $\mathbf{f}_s$ und Ausgabefunktion $\mathbf{g}_s$ noch ein Speicherteil D benötigt wird. Beachtet man, daß die eingezeichneten Doppelpfeile eine kompakte Darstellung von m bzw. n parallelen Signalflußlinien für die m Komponenten des Eingangsvektors $\mathbf{u}$ bzw. für die n Komponenten des Zustandsvektors $\mathbf{q}$ sind, so symbolisiert der Speicherteil D insgesamt n (parallele) elementare Speicherglieder D_i für die n Zustandssignale q_i . Diese haben die Aufgabe, die von der Überföhrungslogik ermittelten Zustandsgrößen $q_i(k+1)$ bis zum nächsten Takt zu speichern, in dem sie als Eingangsgrößen für die Ausgabelogik benötigt werden. Da die Überföhrungs- und Ausgabefunktionen für sich kombinatorische Schaltfunktionen darstellen, gilt:

Für die Realisierung der Gln. (5.52) eines sequentiellen Schaltsystems (eines sequentiellen binären Automaten) ist die Verwendung von kombinatorischen Schaltgliedern (Logikgliedern) und binären Elementarspeichern (zur Speicherung von O- und L-Werten) ausreichend.

S 5.9

Bemerkung. Der durch die Gln. (5.52) beschriebene Automat, bei dem die Ausgabefunktion eine Funktion des Zustands und des Eingabewerts ist, wird als *Mealy-Automat* bezeichnet. Man kann zeigen, daß sich zu jedem Mealy-Automat ein sog. *Moore-Automat* angeben läßt, der das gleiche Übertragungsverhalten hat, bei dem jedoch die Ausgabefunktion nur eine Funktion des Zustands ist.

5.3.3.2. Beschreibung sequentieller Schaltsysteme mittels Automatentabellen und Zustandsgraphen

Im Gegensatz zu analogen Systemen kann bei einem diskreten System der Zustandsvektor nur eine beschränkte Menge von Wertetupeln annehmen. Im Fall eines binären Systems mit m Zustandsvariablen umfaßt diese Menge $N = 2^m$ mögliche Zustände. Fassen wir die möglichen Werte der Zustandsvariablen zu geordneten Paaren zusammen, so erhalten wir für $m = 2$ folgende Zustandsmenge:

$$\begin{aligned} &\text{Menge der Wertepaare von } (q_1, q_2) \\ &= \{(O, O), (O, L), (L, O), (L, L)\}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Entsprechend der Überföhrungsfunktion Gl. (5.52a) wird der im k -ten Takt vorliegende Zustand bei einem Eingangssignal $u(k)$ in den Folgezustand des $k + 1$ -ten Taktes übergeföhrt, der wiederum der in Gl. (5.54) angegebenen Zustandsmenge angehört. Eine Überföhrungsfunktion kann somit durch eine *Überföhrungstabelle* vollständig beschrieben werden, wie das in Tafel 5.9 für ein willkürlich gewähltes Beispiel bei einem Eingangssignal demonstriert wird.

		Vorgängerzustände				
		(O, O)	(O, L)	(L, O)	(L, L)	
Eingangsbelegung	O	(O, O)	(O, L)	(L, L)	(O, O)	Folgezustände
	L	(O, L)	(L, L)	(O, L)	(L, O)	

Tafel 5.9
Überföhrungstabelle
eines binären
sequentiellen Automaten

In diese Tabelle sind die bei Eingangssignal O bzw. L aus den möglichen Vorgängerzuständen sich ergebenden (gemessenen oder geforderten) Folgezustände aufgetragen: In entsprechender Weise kann die Ausgabefunktion Gl. (5.52b) durch eine *Ausgabetablelle* ersetzt werden, s. Tafel 5.10 für ein willkürliches Beispiel.

		Zustände				
		(O, O)	(O, L)	(L, O)	(L, L)	
Eingangsbelegung	O	O	L	L	O	Ausgangsbelegung
	L	L	L	O	L	

Tafel 5.10
Ausgabetablelle eines
sequentiellen Automaten

In diese Tabelle sind für die möglichen Zustände bei Eingangssignal O bzw. L auftretenden Werte des Ausgangssignals eingetragen. Allgemein gilt:

D 5.34

Die Darstellung der Überföhrungsfunktion eines sequentiellen Automaten in Tabellenform heiÖt *Überföhrungstabelle*, die der Ausgabefunktion wird *Ausgabetablelle* genannt. Als Oberbegriff für beide Tabellen wird die Bezeichnung *Automatentabellen* verwendet.

Die Endlichkeit der Menge der Zustände (der Belegungen des Zustandsvektors) ermöglicht außerdem, diese Zustände als Knoten eines endlichen Graphen darzustellen. Das ist im Bild 5.17 geschehen.

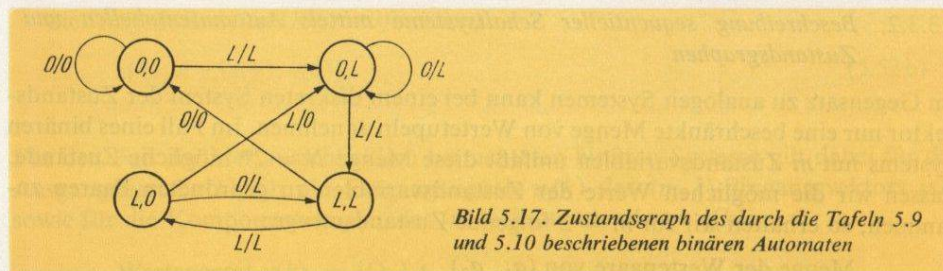


Bild 5.17. Zustandsgraph des durch die Tafeln 5.9 und 5.10 beschriebenen binären Automaten

Die gerichteten Zweige (Bögen) symbolisieren die Zustandsüberföhrungen. Von den beiden an diesen Bögen vermerkten Ziffern (bzw. Binärwörtern bei mehreren Ein- und Ausgangssignalen) bezeichnet die erste die Belegung des Eingangssignals, bei der die betreffende Überföhrung eintritt (s. Tafel 5.9). Die hinter dem Strich vermerkte Ziffer gibt den dabei gemäß Tafel 5.10 auftretenden Wert des Ausgangssignals an.

D 5.35

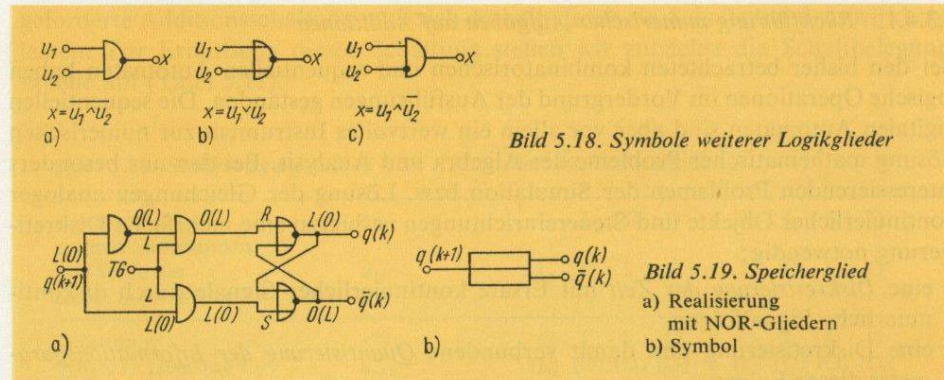
Der Zustandsgraph (Automatengraph, Überföhrungsgraph) eines sequentiellen diskreten Automaten ist eine Graphendarstellung von dessen Zustands- und Übertragungsverhalten, bei der die möglichen Belegungen des Zustandsvektors (die möglichen Zustände) als Knoten und die bei den möglichen Eingangsbelegungen auftretenden Überföhrungen als gerichtete Zweige gezeichnet werden, welche die Knoten der Vorgänger- mit denen der Folgezustände verbinden.

Bemerkung. Bei einem *Wahrscheinlichkeitsautomaten* (stochastischen Automaten) sind bei gegebenem Eingangssignal und Vorgängerzustand mehrere Übergänge zu verschiedenen Folgezuständen möglich, die mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten auftreten.

5.3.3.3. Elementarspeicherglied

Nach Bild 5.16 und Satz 5.9 sind zur Realisierung sequentieller Systeme kombinatorische Schaltungen und elementare Speicherglieder ausreichend. Die Realisierung kombinatorischer Schaltfunktionen ist bereits im Abschn. 5.3.2. gelöst worden. Somit bleibt als Aufgabe die Realisierung eines elementaren Speicherglieds. Diese kann mit

Hilfe einer bistabilen Kippstufe (eines Flip-Flop) erfolgen. Wir wollen das unter Verwendung von Nor-Gliedern tun. Die aus Tafel 5.4 entnehmbaren Gleichungen sowie die Schaltungssymbole dieser Glieder sind im Bild 5.18 angegeben. Ein damit aufgebautes Speicherglied zeigt Bild 5.19.



Im Bild 5.19 sind die Belegungen der Ein- und Ausgänge der Logikglieder eingezeichnet, und zwar links für den Fall, daß das Eingangssignal $q(k+1)$ den Wert L und in Klammern dafür, daß es den Wert O hat. Die beiden rückgekoppelten Nor-Glieder bilden dabei eine Selbsthalteschaltung, insofern, als ihre Ausgangssignale $q(k)$ und $\bar{q}(k)$ aufrechterhalten werden, auch wenn die an deren Eingängen S und R anliegenden Signale verschwinden (d. h. beide O sind).

Die Einspeicherung des Eingangswerts $q(k+1)$ in diese Selbsthalteschaltung erfolgt dadurch, daß durch einen Taktgeber TG zu den Taktzeiten kT an die Und-Glieder ein L-Signal gegeben wird. Ein L-Signal $q(k+1)$ gelangt dann an den Eingang S („Setzen“) und stellt den Ausgang $q(k)$ auf L. Bei O-Signal $q(k+1)$ gelangt ein L-Signal an den Eingang R („Rücksetzen“) und stellt den Ausgang $q(k)$ auf O. Hieraus folgt, daß der zu einem Taktzeitpunkt eingegebene Wert des Eingangssignals über eine Taktperiode gespeichert wird. Als dann wird der neue Eingangswert eingespeichert. Bei L-Dauersignal des Taktgebers (dann können die Und-Glieder entfallen) erfolgt die Umspeicherung, sobald sich der Wert des Eingangssignals ändert. Man spricht in letzterem Fall von einem ungetakteten, in ersterem von einem getakteten Speicher. Erfolgen durch die Taktung aller Speicher alle Operationen eines Automaten im gleichen Takt, so liegt ein *synchroner Automat*, anderenfalls ein *asynchroner Automat* vor.

Diskrete (kombinatorische und sequentielle) Automaten, bei denen alle Operationen einschließlich der Umspeicherungen zu gleichen zentral vorgegebenen Taktzeiten erfolgen, heißen *synchrone Automaten*. Automaten, bei denen die Operationen durch die zu verarbeitenden Signale selbst ausgelöst werden, werden *asynchrone Automaten* genannt.

D 5.36

Das Symbol eines (ungetakteten) Elementarspeicherglieds zeigt Bild 5.19b. Abschließend sei noch vermerkt, daß obiges Speicherglied ausschließlich mit kombinatorischen Gliedern aufgebaut worden ist. Zu seiner Realisierung sind jedoch Rück-

führungen notwendig, während die kombinatorischen Schaltfunktionen ohne solche Rückführungen auskommen.

5.3.4. Numerische digitale Informationsverarbeitung, Digitalrechner

5.3.4.1. Rückführung numerischer Aufgaben auf Additionen

Bei den bisher betrachteten kombinatorischen und sequentiellen Automaten haben logische Operationen im Vordergrund der Ausführungen gestanden. Die sequentiellen digitalen Automaten sind aber vor allem ein wertvolles Instrument zur numerischen Lösung mathematischer Probleme der Algebra und Analysis. Bei den uns besonders interessierenden Problemen der Simulation bzw. Lösung der Gleichungen analoger kontinuierlicher Objekte und Steuereinrichtungen ist hierzu eine mehrfache Diskretisierung notwendig:

- eine *Diskretisierung der Zeit* mit Ersatz kontinuierlicher Signale durch diskontinuierliche Signalfolgen
- eine Diskretisierung und damit verbundene *Quantisierung der Informationsparameter* dieser Folgen
- eine Auflösung der in einem analogen System in dessen Gliedern gleichzeitig ablaufenden Signalumformungen in eine *Folge diskreter Operationen*, die sequentiell, d. h. nacheinander, abgearbeitet werden.

Welches sind nun die für eine numerische Verarbeitung notwendigen Grundrechenoperationen!

Obwohl die erhaltene Antwort auch für andere mathematische Probleme zutrifft, wollen wir uns bei der Beantwortung dieser Frage auf die Probleme beschränken, die im Zusammenhang mit der Lösung der allgemeinen Systemgleichungen (2.31) bzw. der Bewegungsgleichung (2.44) eines analogen kontinuierlichen Systems auftreten. Die für eine numerische Verarbeitung notwendige Überführung dieser Gleichungen in die diskretisierte Form der Gln. (2.58), (2.59), (2.62) zeigt, daß hierbei Differenziation und Integration durch Differenz- und Summenbildung ersetzt werden. Es bleiben somit die Operationen (vorzeichenbehaftete) Addition und Multiplikation. Letztere kann jedoch ebenfalls auf eine wiederholte Addition mit Stellenverschiebung zurückgeführt werden, wie das von den mechanischen Rechenmaschinen bekannt ist. Besonders einfach gestaltet sich die Multiplikation bei dem im folgenden benutzten Dualsystem. Bei diesem wird der Multiplikand entweder mit 0 oder 1 multipliziert, je nachdem, ob die Ziffer der gerade betrachteten Multiplikatorstelle 0 oder 1 ist. Die Teilprodukte sind demzufolge gleich 0 oder gleich dem Multiplikanden. Die Stellenverschiebung erfolgt, indem die in eine Kette von Elementarspeichergliedern, ein sog. *Register*, eingespeicherten Zahlen dadurch verschoben werden, daß jede Ziffer dieser Zahl an das benachbarte Speicherglied übergeben wird (*Schieberegister*). Sehen wir hier dieses Problem als gelöst an, so bleibt als Grundaufgabe bei der maschinellen Bearbeitung numerischer Probleme die Konstruktion einer Addierschaltung.

S 5.10

Bei der numerischen digitalen Informationsverarbeitung werden alle Rechenoperationen auf Addition sowie Speicher- und Verschiebeoperationen zurückgeführt.

5.3.4.2. Binäre Addierschaltung

Bei Verwendung des im Abschn. 5.3.1. vorgestellten Dualkodes wird die numerische Verarbeitung auf die Verarbeitung von Binärsignalen, d. h. auf die bereits behandelte logische Verknüpfung von Binärwerten und die Speicheroperation zurückgeführt. Die geforderte Additionsschaltung muß sich deshalb durch ein Schaltsystem verwirklichen lassen. Zur Ermittlung dieser Schaltung stellen wir zunächst die Schaltbelegungstabelle auf (Tafel 5.11).

Tafel 5.11. Schaltbelegungstabelle einer Addierschaltung für Dualzahlen

r -te Stelle des zweiten Summanden	u_{2r}	L	L	O	O	L	L	O	O
r -te Stelle des ersten Summanden	u_{1r}	L	O	L	O	L	O	L	O
Teilsumme	s_r^*	O	L	L	O	O	L	L	O
Primärer Übertrag für $(r+1)$ -te Stelle	$\ddot{u}_{r+1}^*$	(L)	(O)	(O)	(O)	(L)	(O)	(O)	(O)
Übertrag	$\ddot{u}_r = \ddot{u}_r^* + \ddot{u}_r^{**}$	O	O	O	O	L	L	L	L
Summe	s_r	O	L	L	O	L	O	O	L
Sekundärer Übertrag	$\ddot{u}_{r+1}^{**}$	(O)	(O)	(O)	(O)	(O)	(L)	(L)	(O)

Das mittlere Feld zeigt die Addition der r -ten Stellen zweier Zahlen für den Fall, daß kein Übertrag – von der Addition der niedrigeren, $(r-1)$ -ten Stellen – vorliegt; das rechte Feld zeigt das gleiche für den Fall des Vorhandenseins eines solchen Übertrags. Aus den Werten der beiden Summanden werden zunächst die Teilsumme s_r^* (ohne Berücksichtigung eines Übertrags) und der primäre Übertrag $\ddot{u}_{r+1}^*$ für die nächsthöhere, $(r+1)$ -te Stelle gebildet. Letzterer ergibt sich bei Addition $L + L$. Für den Fall, daß kein Übertrag $\ddot{u}_r$ vorliegt, stimmt die Teilsumme s_r^* mit der endgültigen Summe s_r überein. Liegt ein solcher Übertrag vor (rechtes Feld), so muß in einer zweiten Addierschaltung (Halbadder) die Teilsumme s_r^* mit dem Übertrag $\ddot{u}_r$ addiert werden. Dabei kann erneut ein Übertrag, ein sog. sekundärer Übertrag $\ddot{u}_{r+1}^{**}$, auftreten. Die Summe von primärem und sekundärem Übertrag

$$\ddot{u}_{r+1} = \ddot{u}_{r+1}^* + \ddot{u}_{r+1}^{**} \quad (5.55)$$

muß dann bei der Summation der $(r+1)$ -ten Stellen berücksichtigt werden. Da ein primärer und ein sekundärer Übertrag nicht gleichzeitig auftreten kann (s. Tafel 5.11), sind in dieser Tafel alle möglichen Fälle erfaßt.

Die Realisierung der Schaltbelegungstabelle (s. Tafel 5.11) bei serieller Abarbeitung der einzelnen Ziffern zeigt Bild 5.20. Die Addition der beiden Summanden sowie die der Teilsumme mit dem Übertrag erfolgt in je einer Halbaddierschaltung vom Typ Bild 5.20a. Negator und Oder-Glied werden dabei zu dem durch Bild 5.18c erläuterten Inhibitor zusammengefaßt. Die gesamte Addierschaltung ergibt sich durch Verknüpfung der beiden Halbaddierer, wobei der Übertrag $\ddot{u}_{r+1}$ eine Taktzeit gespeichert werden muß (Bild 5.20b). Nach Bildung des Summenwerts s_r wird dieser in ein Schieberegister gegeben und die Addition der nächsten Stelle begonnen. Auf diese Weise wird nacheinander in dem Register die der gesamten Summe entsprechende

Zahl gespeichert. Bei Subtraktionen wird das Komplement der zu subtrahierenden Zahl addiert, worauf nicht weiter eingegangen werden soll.

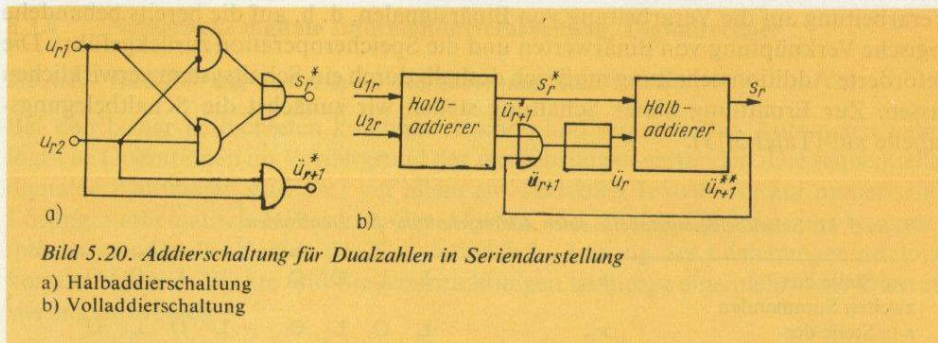


Bild 5.20. Addierschaltung für Dualzahlen in Seriendarstellung

a) Halbaddierschaltung
b) Volladdierschaltung

5.3.4.3. Programmgesteuerter Digitalrechner

In den vorstehenden Abschnitten ist skizziert worden, wie alle numerischen Probleme mit den Operationen Addition und Speicherung bzw. Umspeicherung (Stellenverschiebung) durchgeführt werden können. Für die Organisation eines Rechners ist es notwendig, noch weitere Operationen einzuführen, z. B. die für das Einlesen der Zahlenwerte der Parameter und Anfangswerte eines Problems und für das Ausdrucken von Zwischen- und Endergebnissen. Für die einfache Handhabung ist es außerdem wünschenswert, noch weitere arithmetische und andere Operationen vorzusehen, beispielsweise für alle vier Grundrechnungsarten und für den Vergleich zweier Zahlen. In diesem Sinn kann der Begriff der Operation wie folgt erklärt werden:

D 5.37 Eine *Operation* im Sinn der Informationsverarbeitung ist jede nach definierten Regeln erfolgende Herleitung eines Ergebnisses aus (Durchführung einer Aufgabe an) einem oder mehreren Operanden.

S 5.11 Für die numerische Informationsverarbeitung wichtige Operationen sind

- arithmetische und logische Operationen
- Ein- und Ausgabe- und Speicheroperationen
- Sprung- und Verzweigungsoperationen (s. u.).

Die Operanden werden in der digitalen Informationsverarbeitung gewöhnlich *Daten* genannt:

D 5.38 *Dateneinheit* oder *Datenwort* (Mehrzahl: *Daten* oder *Datensätze*) heißen nach gegebenen Vereinbarungen angeordnete digitale Informationen, mit Ausschluß von Befehlsinformationen (s. u.).

Charakteristisch für die Informationsverarbeitung auf einem Digitalrechner, die auf Grund vorstehender Definition auch *Datenverarbeitung* genannt wird, ist die Auf-

Lösung einer gegebenen Aufgabe in eine Folge von Elementaroperationen. Ein solches eindeutig bestimmtes Verfahren zur schrittweisen Lösung aller Aufgaben einer gegebenen Klasse durch eine endliche Folge von Operationen (genommen aus einer endlichen Menge vereinbarter Grundoperationen) ist bereits mit Definition 4.2 als ein *Algorithmus* bezeichnet worden.

Ein solcher Algorithmus kann in einem sog. *fest programmierten Automaten* durch die Schaltungsstruktur starr vorgegeben sein. Das trifft beispielsweise für die bisher vorgestellten kombinatorischen und sequentiellen Schaltungen zu. Die außerordentliche Flexibilität und nahezu unbegrenzte Anwendungsmöglichkeit der universellen Digitalrechner ist darin begründet, daß nach Vorschlag von K. Zuse und unabhängig davon durch J. v. Neumann jeder zur Lösung von gewünschten Aufgaben (Aufgabenklassen) geeignete Algorithmus einem *frei programmierbaren (programmgesteuerten) Digitalrechner* in Form eines *Programms* eingegeben werden kann.

Ein *Programm* ist eine geordnete Menge von Befehlen zur Abarbeitung eines Algorithmus. Ein *Befehl* im Sinn der Datenverarbeitung ist eine Anweisung zur Ausführung einer Operation an einem oder mehreren im Befehl genannten Operanden (Daten).

D 5.39

Da die Operanden zu Beginn der Problembearbeitung (die Anfangsdaten) sowie die (Zwischen-)Ergebnisse zwecks Verwendung als Operanden weiterer Operationen in einem größeren Speicher bereitgestellt werden, muß eine Möglichkeit geschaffen werden, sie von dort abzurufen. Das geschieht üblicherweise dadurch, daß sie eine *Adresse* erhalten, nämlich die Nummer des ihnen zugewiesenen Speicherplatzes. Deshalb gilt:

Ein Befehlswort enthält die Schlüsselnummer der auszuführenden Operation sowie die Adresse(n) des (der) Operanden.

S 5.12

Während bei den *Einadreßmaschinen* jeweils nur ein Operand aufgerufen oder einem Resultat ein Speicherplatz zugeteilt werden kann, werden bei einer *Dreiadreßmaschine* mit einem Befehl zwei Operanden aufgerufen und die Adresse des Speicherplatzes für das Ergebniswort festgelegt. Diese vereinfachte Programmierung erfordert natürlich einen erhöhten technischen Aufwand.

Nach den vorangegangenen Erklärungen kann nunmehr das Blockschemabild 5.21 vorgestellt werden, das die Wirkungsweise eines Digitalrechners grob beschreibt.

Durch die *Eingabeeinheit* werden Programm und Daten (Parameter, Anfangswerte u. ä.), die gewöhnlich in Form von Lochkarten oder Lochstreifen vorliegen, durch mechanische oder fotoelektrische Abtastung in elektrische Impulsgruppen umgewandelt und zum Speicher weitergeleitet. Auf die peripheren Geräte wird im Abschn. 5.3.6.2. eingegangen werden.

Im *Speicherwerk* werden die Befehle und Daten *eingeschrieben*, d. h. eingespeichert. Zur Auffindung bei späterem Abruf wird ihnen eine Adresse zugeordnet und der Speicher hierzu in adressierbare Speicherplätze aufgeteilt. Die Arbeitsspeicher werden vorzugsweise mit magnetisierbaren Ferritkernen, größere Zusatzspeicher mit Magnetplatten oder Magnetbändern aufgebaut.

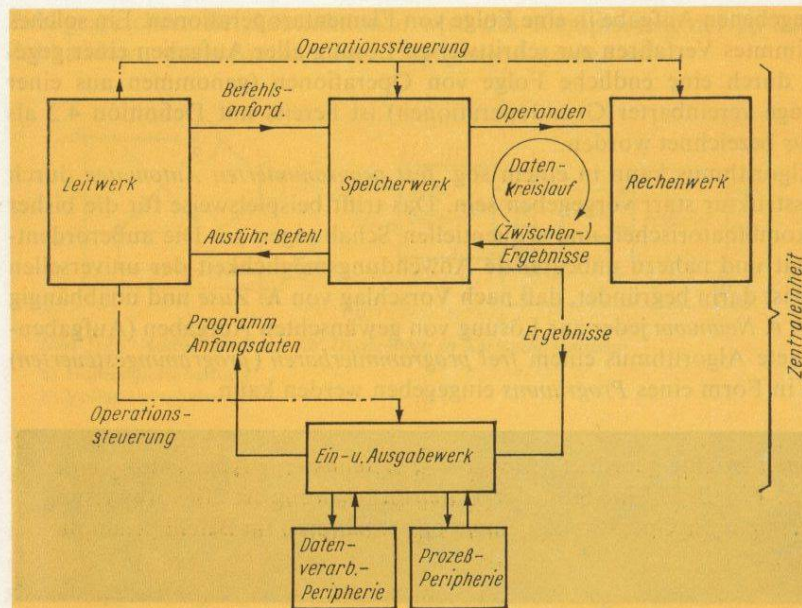
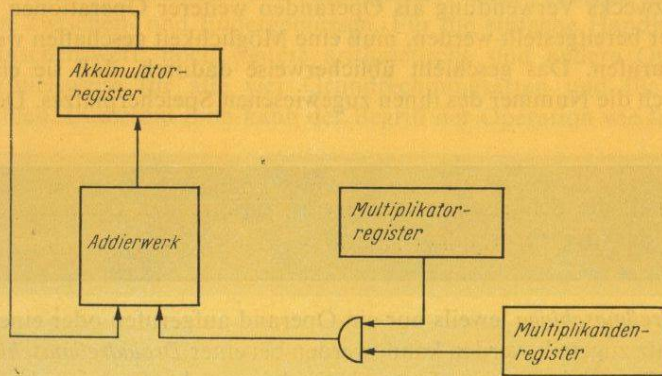


Bild 5.21. Wirkungsschema eines programmgesteuerten Digitalrechners

Bild 5.22
Wirkungsschema
eines Rechenwerkes

Das **Leitwerk** hat die Aufgabe, in der durch das Programm vorgeschriebenen Ordnung die Befehle aus dem Speicher zu *lesen*, d. h. diesem zu entnehmen, die Befehle zu entschlüsseln und die mit ihnen geforderten Operationen auszulösen. Zu diesem Zweck enthält das Leitwerk einen **Befehlszähler**, dessen Inhalt, die Adresse des nächsten Befehls, nach jedem Befehlsaufruf um 1 erhöht wird, soweit nicht durch das Programm Sprünge gefordert werden (s. u.). Der aufgerufene Befehl gelangt in ein **Befehlsregister** zur Entschlüsselung. Durch eine **Operationssteuerung** werden die Operanden mit den im Befehl genannten Adressen aus dem Speicher in entsprechende Register des Rechenwerks transportiert und der im Befehl angeordneten Operation unterworfen. Das Ergebnis wird in einem besonderen Register des Rechenwerks abgespeichert oder (bei einer Dreiadreßmaschine) sofort auf den im Befehl angegebenen Platz in das Speicherwerk zurückgebracht. Bei im Programm enthaltenen Ein- und Ausgabeoperationen greift die Operationssteuerung auch in das Ein- und Ausgabe-

werk ein. Technisch gesehen wirkt die Operationssteuerung dadurch, daß mittels elektrischer Steuersignale über elektrische Torschaltungen (Weichen) bestimmte Bahnen durchgeschaltet werden.

Das *Rechenwerk* hat zwei *Register* zur Aufnahme von *Multiplikand* und *Multiplikator*, das bereits geschilderte *Addierwerk* sowie ein *Akkumulator* genanntes Register zur Aufnahme von Zwischen- und Endergebnissen (Bild 5.22).

5.3.5. Zur Programmierung von Digitalrechnern

In den vorangegangenen Abschnitten ist gezeigt worden, wie der Digitalrechner durch Erstellung eines geeigneten Programms zur Lösung beliebiger algorithmisierbarer Probleme verwendet werden kann. Im Rahmen der automatischen Steuerung tritt dieses Bedürfnis insbesondere bei folgenden Problemen auf:

- digitale Simulation von Objekten zwecks Untersuchung ihres Verhaltens
- digitale Simulation von Objekten und Steuereinrichtungen/Steuerungsalgorithmen zur Ermittlung der optimalen Steuerungseinrichtungen/Steuerungsalgorithmen
- Übertragung der Regelungsfunktion (direkte digitale Regelung) und insbesondere der höheren Steuerungsfunktionen (statische Optimierung der Führungsgrößen, Anpassung der Regelungsparameter u. a.) auf einen digitalen Prozeßrechner
- Ermittlung des kybernetischen Modells eines Objekts durch einen an dieses gekoppelten Prozeßrechner.

Die erste und die zweite Aufgabe werden später im zweiten Band im Zusammenhang mit dem maschinellen Entwurf von Steuerungssystemen näher betrachtet werden, die dritte und vierte bei der Synthese von diskreten Steuerungs- und Optimierungsalgorithmen sowie bei der Identifikation von Objekten. Da verschiedene hierfür übliche methodische Hilfen auch für die weitere Stoffdarbietung nützlich sind, sollen nachfolgend einige mit der Programmierung zusammenhängende grundsätzliche Fragen vorgeklärt werden.

Im letzten Abschnitt ist bereits herausgestellt worden, daß für den Digitalrechner die sequentielle Lösung eines Problems durch eine endliche Folge von Operationen typisch und wesenseigen ist (s. Definitionen 5.39 und 4.2). Für die Erstellung eines dem Rechner verständlichen Programms, d. h. für die *Programmierung*, sind deshalb nach einer allgemeinen mathematischen Problemformulierung noch einige Schritte notwendig bzw. zweckmäßig. Diese sind

- a) Aufstellung eines Algorithmus zur Lösung des gegebenen Problems
- b) grafische Darstellung der Struktur des Algorithmus in Form eines Programmablaufplans
- c) Formulierung des Programms auf der Basis des Programmablaufplans in einer für den Programmierer angemessenen formalen Sprache
- d) Übersetzung des Programms in eine der Maschine unmittelbar verständliche Maschinensprache.

Während die Schritte a und b und mit Einschränkungen auch Schritt c vom konkreten Rechner unabhängig sind, ist der letzte Schritt für den verwendeten Maschinentyp spezifisch.

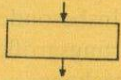
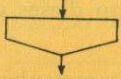
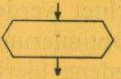
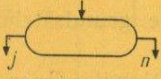
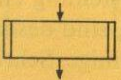
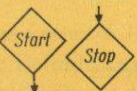
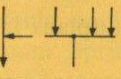
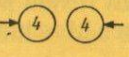
5.3.5.1. Aufstellung eines Lösungsalgorithmus

Diese Aufgabe wird bei der Untersuchung der verschiedenen Steuerungsprobleme berücksichtigt werden, soweit ihre Behandlung auf einem Digitalrechner zweckmäßig erscheint. Sie erfolgt insbesondere in den Kapiteln, die speziell dem Einsatz von Digitalrechnern für die automatische Steuerung gewidmet sind.

5.3.5.2. Programmablaufplan

Zur Verdeutlichung der Struktur des Algorithmus sowie zur Vorbereitung der Formulierung des Rechnerprogramms in einer formalisierten Sprache dienen Programmablaufpläne, häufig auch Flußdiagramme genannt.

Tafel 5.12. Symbole für Programmablaufpläne: Kästchenmethode

Symbol	Bedeutung	Erläuterung
	Operation, allgemein	insbesondere mit Ausnahme der fünf nachfolgend genannten Operationen
	Ein- und Ausgabeoperation	
	Operation von Hand	
	Verzweigeoperation	mit eingetragener Verzweigebedingung <i>j</i> (ja) Bedingung erfüllt; <i>n</i> (nein) nicht erfüllt bei Grobdarstellung auch für mehr als zwei Ausgänge
	Unterprogramm	Wirkungsweise oder Name eingeschrieben
	Start- und Stopoperation	Beginn und Ende des Programmablaufs
	Zusammenführen von Programmlinien	
	Parallellinie für Bemerkung	Zuordnung von Bemerkungen und Parameterangaben
	Konnektoren	Gleichnamige Konnektoren geben Verbindung an, ohne daß Programmlinie gezeichnet wird

Mit *Programmablaufplan (Flußdiagramm)* wird eine grafische Darstellung der Operationen zur Abarbeitung eines Algorithmus einschließlich deren Verkettung bezeichnet.

D 5.40

Die Operationen können hierbei bis auf die vom Rechner ausgeführten elementaren Operationen aufgeschlüsselt sein. In einem größeren Flußbild können auch komplexe (zusammengesetzte) Operationen verwendet werden. In diesem Sinn kann zwischen *maschinen-* und *problemorientierten Programmablaufplänen* unterschieden werden. Bei Grobdarstellung können die Operationen auch textlich formuliert sein.

Bezüglich der Darstellungsform ist zwischen *Kästchen-* und *Programmlinienmethode* zu differenzieren. Nach TGL 22 451 erfolgt bei der Kästchenmethode die Darstellung unter Verwendung der in Tafel 5.12 angegebenen Symbole. Für die vereinfachte Programmlinienmethode dient die in Tafel 5.13 gezeigte Symbolik.

Tafel 5.13. Symbole für vereinfachte Programmablaufpläne: Programmlinienmethode

Symbol	Bedeutung	Erläuterung
	Zuordnung von Operationen zur Programmlinie	Operationen sind rechts neben Programmlinie zu schreiben, auch für Ein- und Ausgabeoperationen
	Verzweigung: Variante A	Verzweigungsbedingung wird in geschweifte Klammern gesetzt P Bedingung erfüllt; $\bar{P}$ Bedingung nicht erfüllt
	Variante B	Verzweigungsbedingung als Frage geschrieben j Bedingung erfüllt; n Bedingung nicht erfüllt
	Unterprogramm	Name ist rechts daneben zu schreiben
	Start- und Stopoperation	Programmanfang und -ende
	Zusammenführen von Programmlinien	
	Parallellinie	Zuordnung von Bemerkungen: Variable, Parameter, Anfangswerte u. a.
	Konnektoren	Gleichnamige Konnektoren gelten als verbunden; mehrere Absprungstellen für eine Einsprungstelle möglich

Zur Beschreibung der sequentiellen Informationsverarbeitung und des damit ggf. verbundenen taktweisen Austausches der Werte in den verschiedenen Variablen zugewiesenen Speicherzellen wird die *Ergibt-Operation* $:=$ eingeführt und anhand eines Beispiels erklärt:

D 5.41*Die Ergibt-Operation*

$$q(k + 1) := aq(k) \quad (5.56)$$

oder, in verkürzter Schreibweise (in Programmiersprachen üblich),

$$q := aq$$

[gesprochen: „ $q(k + 1)$ ergibt sich aus $aq(k)$ “ bzw. „ q wird aq “] bewirkt, daß der Variablen q im $(k + 1)$ -ten Takt der Wert von aq im k -ten Takt zugewiesen wird.

Die häufig benutzte Indexoperation

$$i := i + 1 \quad (5.57)$$

bedeutet demzufolge, daß die neue $[(k + 1)$ -te] Indexnummer sich durch Erhöhung der alten (k -ten) um 1 ergibt.

Zur Erläuterung der Darstellungsweisen von Programmablaufplänen wollen wir ein einfaches Beispiel betrachten, die Berechnung des Zustandsverlaufs eines diskontinuierlichen Systems bei gegebenem Anfangszustand $q(0)$ und verschwindendem Eingangssignal. Nach den Gln. (2.62), (2.63) gilt für die Zustandsbewegung

$$q(k) = A^k q(0). \quad (5.58)$$

Zur schrittweisen Berechnung des Zustandsverlaufs $q(k)$ für $k = 1, 2, \dots, N$ bilden wir einen rekursiven Algorithmus [s. Gl. (2.60)]:

$$\begin{aligned} q(1) &= A^1 q(0) \\ \vdots &\vdots \\ q(k + 1) &= A^k q(k) \\ \vdots &\vdots \\ q(N) &= A^{N-1} q(N - 1). \end{aligned} \quad (5.59)$$

Zugehörige Programmablaufpläne in problemorientierter Darstellung zeigt Bild 5.23. Der im Bild 5.23a gezeigte Plan entspricht einem unverzweigten Programmablauf. Bei großem N ergibt sich eine sehr lange Kette und ein entsprechend langes Programm. Die Verzweigungsoperation ermöglicht die Bildung von Schleifen. Bild 5.23b zeigt, daß hierdurch bei rekursiver Gestaltung der Algorithmen – und ebenso bei Iterationsprozessen – Darstellung und Programm wesentlich vereinfacht werden können. Bild 5.24 zeigt den gleichen Algorithmus bei Darstellung mittels Programmlinienmethode. Daraus sind die zeichnerischen Erleichterungen erkennbar.

Zur Vorbereitung des Programms in einer problemorientierten Sprache ist es zweckmäßig, die hierfür übliche vereinfachte Ergibt-Anweisung zu verwenden. Werden noch die Druckanweisungen in das Programm aufgenommen, dann erhält der Programmablaufplan des betrachteten Beispiels die im Bild 5.25 aufgezeichnete Gestalt.

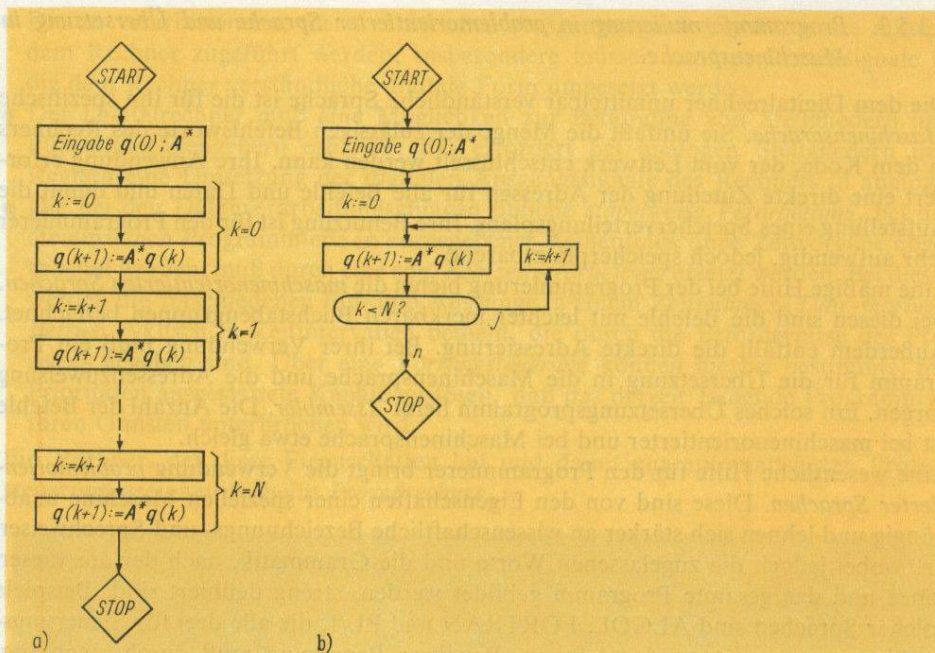


Bild 5.23. Programmablaufpläne für Algorithmus Gl. (5.59) in Kästchenform

- a) unverzweigtes Programm
b) Programm mit Schleife

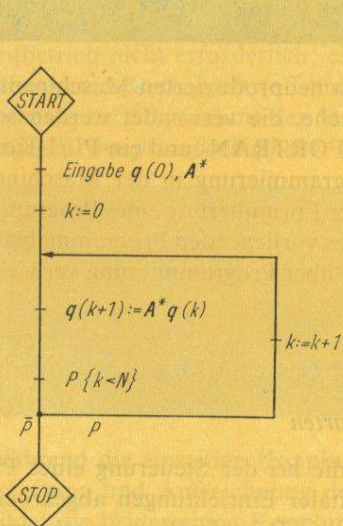


Bild 5.24. Programmablaufplan für Algorithmus Gl. (5.59) in Programmlinienform

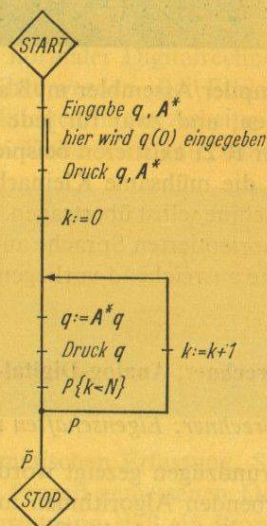


Bild 5.25. Programmierungsorientierter Programmablaufplan für Algorithmus Gl. (5.59)

5.3.5.3. *Programmformulierung in problemorientierter Sprache und Übersetzung in Maschinensprache*

Die dem Digitalrechner unmittelbar verständliche Sprache ist die für ihn spezifische *Maschinensprache*. Sie umfaßt die Menge der zulässigen Befehls Worte des Rechners in dem Code, der vom Leitwerk entschlüsselt werden kann. Ihre Anwendung erfordert eine direkte Zuteilung der Adressen für alle Befehle und Daten und damit die Aufstellung eines Speicherverteilungsplans. Ihre Benutzung ist für den Programmierer sehr aufwendig, jedoch speicherplatzsparend.

Eine mäßige Hilfe bei der Programmierung bieten die *maschinenorientierten Sprachen*. Bei diesen sind die Befehle mit leichter merkbaren Buchstabengruppen bezeichnet. Außerdem entfällt die direkte Adressierung. Bei ihrer Verwendung muß ein Programm für die Übersetzung in die Maschinensprache und die Adressenzuweisung sorgen. Ein solches Übersetzungsprogramm heißt *Assembler*. Die Anzahl der Befehle ist bei maschinenorientierter und bei Maschinensprache etwa gleich.

Eine wesentliche Hilfe für den Programmierer bringt die Verwendung *problemorientierter Sprachen*. Diese sind von den Eigenschaften einer speziellen Maschine unabhängig und lehnen sich stärker an wissenschaftliche Bezeichnungs- und Sprechweisen an, wobei jedoch die zugelassenen Worte und die Grammatik, nach der aus diesen Sätze und das gesamte Programm gebildet werden, streng definiert sind. Beispiele solcher Sprachen sind ALGOL, FORTRAN und PL/1, die alle drei für Steuerungsprobleme verwendet werden können. Bei ihrer Benutzung muß durch einen sog. *Kompiler* das Programm übersetzt und assembliert werden. Somit gilt:

D 5.42

Ein Kompile/Assembler ist ein Programm zur Übersetzung aller in einer problem-/maschinenorientierten Quellsprache formulierten Programme in eine spezielle Maschinensprache.

Ein solcher Kompile/Assembler muß also für jeden neuproduzierten Maschinentyp entwickelt werden, und zwar für jede Quellsprache, die verwendet werden soll. Für den Rechner R 21 existieren beispielsweise ein FORTRAN- und ein PL/1-Kompile. Damit ist die mühsame Kleinarbeit der Programmierung in der Maschinensprache der Maschine selbst übertragen. Bezüglich der Formulierung eines Programms in einer problemorientierten Sprache auf der Basis des vorliegenden Programmablaufplans darf auf die ausreichend vorliegende Literatur über Programmierung verwiesen werden.

5.3.6. **Prozeßrechner, Analog-Digital-Umsetzung**

5.3.6.1. *Prozeßrechner: Eigenschaften und Betriebsarten*

Nachdem in Grundzügen gezeigt worden ist, wie die bei der Steuerung eines Prozesses sich ergebenden Algorithmen mit Hilfe digitaler Einrichtungen abgearbeitet werden können, erhebt sich die Frage, wie ein solcher Digitalrechner zwecks automatischer Erledigung dieser Steuerungsfunktionen mit einem vorwiegend analogen Prozeß gekoppelt werden kann. Einige Bemerkungen hierzu sind bereits im Zusammenhang mit Bild 2.9 und im Abschn. 4.6.2. gemacht worden. Insbesondere ergeben sich die folgenden Probleme:

- Die zu verarbeitenden, meist zahlreichen Ausgangssignale des Prozesses müssen dem Rechner zugeführt werden; insbesondere müssen analoge Prozeßsignale in die dem Rechner verständliche digitale Form umgesetzt werden.
- Der Digitalrechner muß eine Möglichkeit zur Betätigung von Stellgliedern und FührungsgröÙengebern erhalten; das erfordert bei analogen Stellgliedern und Reglern eine Umsetzung der digitalen Ausgangssignale des Rechners in analoge.
- Die bei den Datenverarbeitungsanlagen übliche *stapelweise Verarbeitung*, bei der die einzelnen Programmteile in vorgegebener Reihenfolge ohne Zeitvorgabe abgearbeitet werden, muß durch eine sog. *Echtzeitverarbeitung* ersetzt werden. Bei dieser werden die verschiedenen Ein- und Ausgänge in einem *Zeiteilungs-(Time-sharing-) Betrieb* zyklisch in Zeitintervallen bedient, die durch die Erfordernisse des Prozesses gegeben sind. Über eine *Vorrangsteuerung* können hierbei bestimmte, mit Prioritäten ausgestattete Kanäle auslösen, daß das derzeit laufende Programm zu ihren Gunsten unterbrochen wird.

Ein Rechner, der diese Eigenschaften hat und damit zur automatisierten Prozeßsteuerung geeignet ist, heißt *Prozeßrechner*.

Prozeßrechner wird eine digitale Rechenanlage genannt, die über Einrichtungen zur selbsttätigen Erfassung von Signalen eines Prozesses und zur Ausgabe von Steuersignalen verfügt und diese Erfassung und Verarbeitung im Echtzeitbetrieb leistet.

D 5.43

Echtzeitbetrieb bedeutet hierbei eine Informationserfassungs- und Verarbeitungsweise, die mit dem zeitlichen Ablauf des Prozesses Schritt hält und dessen besonderen Anforderungen (Vorrangsteuerung) genügt.

Für die in der Entwurfsphase (s. Abschn. 4.1.3.) anfallenden Aufgaben ist ein Echtzeitbetrieb nicht erforderlich; es genügt ein normaler Digitalrechner, da diese Aufgaben *prozeßentkoppelt* (off-line) durchgeführt werden. Bei Einsatz eines Prozeßrechners zur Übernahme der Steuerungsfunktionen in der Arbeitsphase spricht man dagegen von *prozeßgekoppelter Betriebsweise*. Dabei wird unterschieden:

Die Betriebsart eines nur auf der Eingangs-(Meß-)Seite mit einem Prozeß verbundenen Prozeßrechners, bei dem die Informationsnutzung durch einen Menschen oder über dessen Vermittlung erfolgt, heißt *einseitig* oder *offen prozeßgekoppelt* (on-line open loop); bei einem auf Meß- und Stellseite mit einem Prozeß verbundenen Rechner spricht man von einer *beidseitig* oder *geschlossen prozeßgekoppelten Betriebsweise* (on-line closed loop).

D 5.44

Während die einseitige Kopplung zur automatischen Erfassung, Speicherung, Verarbeitung und Aufzeichnung der an einem Prozeß gemessenen Daten geeignet ist, bildet die beiderseitige Kopplung die Voraussetzung, daß ein Prozeßrechner die im Bild 4.1 genannten Steuerungsfunktionen übernehmen kann. Diese Kopplung wird insbesondere durch eine sog. *Prozeßperipherie* ermöglicht, die nachfolgend skizziert werden soll.

5.3.6.2. Prozeßperipherie, Analog-Digital-Umsetzung

Das im Bild 5.21 eingezeichnete Ein- und Ausgabewerk hat die Aufgabe, den Informationsaustausch zwischen der Zentraleinheit und den peripheren Geräten zu steuern. Wie die üblichen Datenverarbeitungsanlagen besitzt der Prozeßrechner eine Datenverarbeitungsperipherie, die die Verbindung zum Benutzer herstellt.

Zur *Datenverarbeitungsperipherie* können folgende Geräte gehören:

- Bedienungsschreibmaschine zur manuellen Eingabe von Daten und Anweisungen und Ausgabe von Einzelmeldungen
- Lochkarten- und Lochstreifenstanzer und -leser zum Einlesen von Programmen und zur Ergebnisausgabe
- Drucker zur alphanumerischen Ausgabe
- Plotter (Zeichengeräte) zur visuellen analogen Ausgabe
- alphanumerische und analoge Sichtgeräte zur schnellen elektronischen Ausgabe von alphanumerischen Zeichen und Kurven auf Bildschirmen
- externe Speicher zur Aufnahme von Programmen und Programmübersetzern.

Der Prozeßrechner ist von der Geräteseite vornehmlich durch das Hinzutreten einer zweiten Peripherie, der Prozeßperipherie, gekennzeichnet, die das Bindeglied zwischen der Zentraleinheit und dem Prozeß bildet:

Zur *Prozeßperipherie* zählen Funktionseinheiten für

Analogwerteingabe

Digitalwerteingabe

Zählimpulseingabe

Digitalwertausgabe

Analogwertausgabe (Ganzwert- und Inkrementalwertausgabe).

Wir wollen uns hier auf eine Erläuterung der Funktionseinheiten für Analogwerteingabe und -ausgabe beschränken, da die Kopplung eines Digitalrechners mit analogen Prozeßeingängen und -ausgängen hier besonders interessiert und auch besondere Probleme aufgibt.

Wesentliches Glied einer Funktionseinheit zur Analogwerteingabe ist ein *Analog-Digital-Umsetzer* (A/D-Umsetzer). Von den verschiedenen Realisierungsmöglichkeiten sei hier das Prinzip des Stufenumsetzers als ein Beispiel ausgewählt.

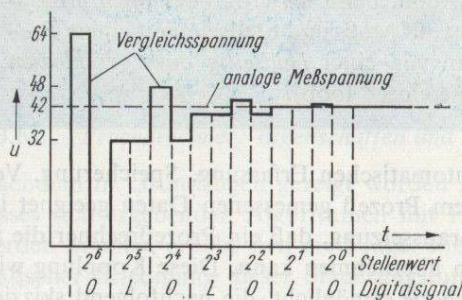


Bild 5.26. Abgleichvorgang eines A/D-Stufenumsetzers

Bei einem A/D-Stufenumsetzer werden mit Hilfe eines Schaltsystems digital abgestufte Spannungswerte – mit dem größten beginnend – addiert und die Summe

jeweils mit dem analogen Spannungssignal verglichen. Ist letzteres größer, wird die zuletzt zugeschaltete Spannungsstufe beibehalten, anderenfalls wieder zurückgenommen. Soll beispielsweise eine analoge Spannung von $0 \leq u \leq 100 \text{ V}$ mit einem maximalen Fehler von $\pm 0,5 \text{ V}$ umgesetzt werden, so werden nacheinander die Stufen 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1 V zugeschaltet. Bei Umsetzung der Spannung 42 V ergibt sich dabei der im Bild 5.26 aufgezeichnete Abgleichsvorgang.

Je nachdem, ob eine zugeschaltete Spannungsstufe zurückgenommen werden muß oder beibehalten werden kann, wird ein O-Signal bzw. L-Signal weitergeleitet. Auf diese Weise wird in vorliegendem Beispiel die Analogspannung von 42 V in ein Digitalsignal OLOLOLO umgesetzt.

Das Blockschaltbild einer gesamten Funktionseinheit für Analogwerteingabe zeigt Bild 5.27.

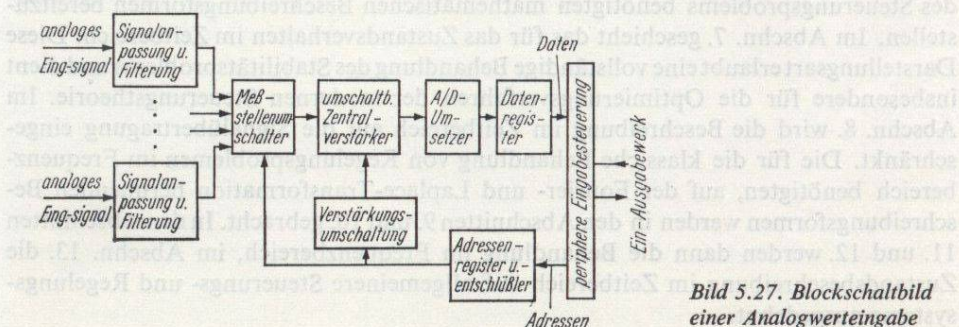


Bild 5.27. Blockschaltbild einer Analogwerteingabe

Nach Widerstandsangepassung und Filterung werden die Analogsignale einem Meßstellenumschalter zugeleitet. Dieser verbindet die in der Adresse genannte Meßstelle mit dem Zentralverstärker. Dessen Verstärkungsfaktor wird gleichzeitig so umgeschaltet, daß die unterschiedlichen Eingangsspannungsbereiche auf den Aussteuerbereich des A/D-Umsetzers gebracht werden. Das umgesetzte Digitalwort wird in einem Datenregister gespeichert, von wo es von der Zentraleinheit abgerufen wird. In ähnlicher Weise vollzieht sich auch die Analogwertausgabe. Deren Kernstück, der Digital-Analog-Umsetzer (D/A-Umsetzer), kann nach dem mit Bild 5.28 erläuterten Prinzip konstruiert werden.

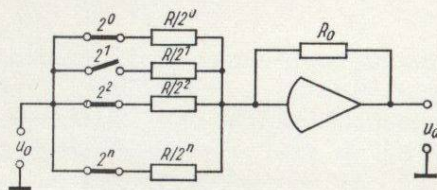


Bild 5.28. Digital-Analog-Umsetzer

Je nachdem, ob die zum Stellenwert 2^i gehörende Ziffer des anstehenden Digitalworts L oder O ist, wird der dieser Stelle zugeordnete Kontakt geschlossen oder bleibt offen. Auf Grund des mit Bild 5.6 und Gl. (5.17) erläuterten Prinzips des Summierverstärkers ergibt sich für die [quasi]analoge (eigentlich fein quantisierte) Ausgangsspannung u_a für das eingezeichnete Beispiel und eine Bezugsspannung u_0

$$u_a = u_0 \frac{R_0}{R} (1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + \dots + 1 \cdot 2^n), \quad (5.60)$$

also ein dem Digitalwort äquivalenter Analogwert. Durch R_0 und R können hierbei Maßstabsfragen gelöst werden.

Mit den Abschnitten 1. bis 5. ist die Zielstellung des Teiles I, die vorzugsweise qualitative Einführung in die Grundlagen der automatischen Steuerung, erreicht. Nach einer Erläuterung wichtiger Begriffe der Kybernetik sind die Stufen bei der Bildung des für die Lösung der Steuerungsaufgabe benötigten Modells eines Prozesses beschrieben worden. Danach wurde eine qualitative Übersicht über Grobstrukturen, Arbeitsweisen und Leistungsvermögen wichtiger Typen von Systemen der (automatischen) Steuerung gegeben. Schließlich sind die Prinzipien gezeigt worden, nach denen die bei der Lösung von Steuerungsproblemen aufgetretenen Informationsverarbeitungsaufgaben gelöst werden können.

Aufgabe des folgenden Teiles II wird es sein, die für eine quantitative Behandlung des Steuerungsproblems benötigten mathematischen Beschreibungsformen bereitzustellen. Im Abschn. 7. geschieht das für das Zustandsverhalten im Zeitbereich. Diese Darstellungsart erlaubt eine vollständige Behandlung des Stabilitätsproblems und dient insbesondere für die Optimierungsverfahren der modernen Steuerungstheorie. Im Abschn. 8. wird die Beschreibung im Zeitbereich auf die Signalübertragung eingeschränkt. Die für die klassische Behandlung von Regelungsproblemen im Frequenzbereich benötigten, auf der Fourier- und Laplace-Transformation beruhenden Beschreibungsformen werden in den Abschnitten 9. und 10. gebracht. In den Abschnitten 11. und 12. werden dann die Behandlung im Frequenzbereich, im Abschn. 13. die Zustandsbeschreibung im Zeitbereich auf allgemeinere Steuerungs- und Regelungssysteme ausgedehnt.



Teil II Grundaufgabe bei der Analyse, Identifikation Beschreibung von Signalübertragung und Zustandsverhalten in linearisierten kontinuierlichen Systemen

6.1. Analyse, Identifikation und Synthese von Steuerungssystemen

Betrachten wir ein beliebiges dynamisches System S (das schließt das statische Problem als vereinfachenden Grenzfall ein), so haben unter kybernetischem Aspekt die nachfolgend formulierten Aufgabenstellungen a, b, c eine grundsätzliche Bedeutung (Bild 6.1):

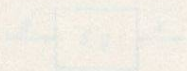


Bild 6.1. Dynamisches System

- a) Gegeben: Eingangssignale $u(t)$ ($0 \leq t \leq T$) und/oder Anfangszustand $q(0)$ sowie kybernetisches Modell des Systems S .

Gesucht: Verlauf der Zustände $q(t)$ und/oder der Ausgangssignale $y(t)$ ($t \geq 0$).

Dies ist das *Analyseproblem*. Von besonderem Interesse ist hierbei die Analyse der Stabilität dieser Bewegung, die *Stabilitätsanalyse*.

- b) Gegeben: Eingangssignale $u(t)$ und Ausgangssignale $y(t)$ ($0 \leq t \leq T$).

Gesucht: a) kybernetisches Modell des Systems S oder
b) Anfangszustand $q(0)$.

Dieses Problem heißt *Identifikationsproblem* und zerfällt in:

- Struktur- und/oder Parameteridentifikation
- Zustandsidentifikation (Zustandsbeobachtung).

Häufig wird die Bestimmung der Struktur auch als *Modellbildung* bezeichnet und der Begriff Identifikation auf die Ermittlung der Parameter bei vorgegebener Struktur eingeschränkt. Wird die Identifikationsaufgabe bei Anwesenheit stochastischer Störungen durchgeführt, so heißt sie mit Rücksicht auf die verwendeten statistischen Methoden *Parameterschätzung bzw. Zustandsschätzung*.

- c) Gegeben: Modell des Systems S , Anfangszustand $q(0)$, evtl. Endzustand $q(T)$, Zielfunktion J [s. Gl. (4.33)]

$$J = \int_0^T J(q(t), u(t)) dt + J(q(T)) \quad (6.1)$$

als ein dem Digitalwort äquivalenter Analogwert. Durch A_n und B kann Teil II

Mit den Abschnitten 1 bis 6 wird der Teil II der Beschreibung von Signalübertragung

der Erklärung wichtiger Begriffe der Signalübertragung und Zustandsverhalten

des für die Lösung der Steuerungsaufgaben notwendigen Informationsverhaltens in linearisierten kontinuierlichen Systemen

nach neuem Prinzip gezeigt werden. Schließlich sind die Prinzipien gezeigt worden, nach denen die bei der Lösung von Steuerungsproblemen auftretenden Informationsverhaltensformen mathematisch beschrieben werden können.

Zur folgenden Teile II wird es sein, die für eine quantitative Behandlung der Steuerungsprobleme benötigten mathematischen Beschreibungsformen herzustellen. Im Abschn. 7 geschieht das für das Zustandsverhalten im Zeitbereich. Diese Darstellung erlaubt eine vollständige Behandlung des Stabilitätsproblems und dient insbesondere für die Optimierungsverfahren der modernen Steuerungstheorie. Im Abschn. 8 wird die Beschreibung im Zeitbereich auf die Signalübertragung eingeschränkt. Die für die klassische Behandlung von Regelungsproblemen im Frequenzbereich benötigten, auf der Fourier- und Laplace-Transformation beruhenden Beschreibungsformen werden in den Abschnitten 9 und 10 gebracht. In den Abschnitten 11 und 12 werden dann die Behandlung im Frequenzbereich, im Abschn. 13 die Zustandsbeschreibung im Zeitbereich auf allgemeinere Steuerungs- und Regelungssysteme ausgedehnt.

6. Grundaufgabe bei der Analyse, Identifikation und Synthese von Steuerungssystemen; Lösungswege

6.1. Analyse, Identifikation und Synthese von Steuerungssystemen

Betrachten wir ein beliebiges dynamisches System S (das schließt das statische Problem als vereinfachenden Grenzfall ein), so haben unter kybernetischem Aspekt die nachfolgend formulierten Aufgabenstellungen a, b, c eine grundsätzliche Bedeutung (Bild 6.1):

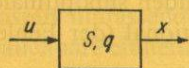


Bild 6.1. Dynamisches System

- a) Gegeben: Eingangssignale $u(\tau)$ in $0 \leq \tau \leq t$ und/oder Anfangszustand $q(0)$ sowie kybernetisches Modell des Systems S .
Gesucht: Verlauf des Zustands $q(t)$ und/oder der Ausgangssignale $x(t)$ in $t \geq 0$.

Das ist das *Analyseproblem*. Von besonderem Interesse ist hierbei die Analyse der Stabilität dieser Bewegung, die *Stabilitätsanalyse*.

- b) Gegeben: Eingangssignale $u(t)$ und Ausgangssignale $x(t)$ in $0 \leq t \leq T$.
Gesucht: α) kybernetisches Modell des Systems S oder
 β) Anfangszustand $q(0)$.

Dieses Problem heißt *Identifikationsproblem*, und zwar im Fall

- α) *Struktur- und/oder Parameteridentifikation*
 β) *Zustandsidentifikation (Zustandsbeobachtung)*.

Häufig wird die Bestimmung der Struktur auch als *Modellbildung* bezeichnet und der Begriff Identifikation auf die Ermittlung der Parameter bei vorgegebener Struktur eingeschränkt. Wird die Identifikationsaufgabe bei Anwesenheit stochastischer Störungen durchgeführt, so heißt sie mit Rücksicht auf die verwendeten statistischen Methoden *Parameterschätzung* bzw. *Zustandsschätzung*.

- c) Gegeben: Modell des Systems S , Anfangszustand $q(0)$, evtl. Endzustand $q(T)$, Zielfunktional I [s. Gl. (4.25)]

$$I = \int_0^T f_0[q(t), u(t)] dt = I[u(t)] \quad (6.1)$$

bzw. bei Parameteroptimierung [s. Gl. (4.34)] mit r als freier Parametervektor

$$I = I_r(r) \quad (6.2)$$

und Menge zulässiger Steuerungen U bzw. steuerbarer Parameterwerte R (Stellgliedbegrenzung u. a.).

Gesucht: optimale Steuerung $u^*(t)$ bzw. optimaler Parametervektor r^* , wobei gilt

$$I_r[u^*(t)] = \min_{u \in U} I[u(t)] \quad (6.3)$$

bzw.

$$I(r^*) = \min_{r \in R} I_r(r). \quad (6.4)$$

In vielen Fällen begnügt man sich auch mit einer zufriedenstellenden suboptimalen Lösung $u(t)$ bzw. $\tilde{r}$. Für diese wird gefordert, daß das Zielfunktional (der Fehler) unter einer gegebenen Schranke zulässiger Werte I_{zul} liegt:

$$I[\tilde{u}(t)] \leq I_{zul} \quad \text{bzw.} \quad I_r(\tilde{r}) \leq I_{zul}. \quad (6.5)$$

Die geschilderte Aufgabe ist die *Syntheseaufgabe*, im erstgenannten strengeren Sinn die *optimale Synthese* oder *Optimierung*.

Praktisch erfolgt die Synthese gewöhnlich nach einer Methode, die einer der drei folgenden, nach steigenden Genauigkeits- und Optimalitätsforderungen gestuften Klassen zugeordnet werden kann:

- a) *Handverfahren zur Parameterbemessung* – diese suboptimalen, auf einfacheren Näherungsbeziehungen basierenden Verfahren können ohne Verwendung technischer Hilfsmittel (ohne Rechenmaschinen) „von Hand“ bewältigt werden
- b) *maschinelle Parameteroptimierung* – Ermittlung optimaler Parameter einer strukturell gegebenen Steuereinrichtung mit Hilfe eines Rechners, insbesondere mittels Suche an dem auf einem Digitalrechner simulierten Prozeß
- c) *analytisch begründete Systemoptimierung* – Berechnung der optimalen Struktur und Parameter der Steuereinrichtung bzw. der optimalen Steuerung $u^*(t)$ auf Grund der modernen Optimalsteuerungstheorie, wobei wegen des Rechenumfanges meist die Verwendung von Rechenmaschinen notwendig ist.

6.2. Beschreibung der Signalübertragung bzw. des Zustandsverhaltens als Grundaufgabe der Behandlung von Steuerungssystemen

Von den im vorangegangenen Abschnitt genannten drei Aufgaben kann die Analyse als die ursprüngliche Aufgabe angesehen werden, aus der die beiden anderen durch Umkehr bzw. Erweiterung hervorgehen: Die Identifikation ist eine Umkehr des Analyseproblems, insofern, als die durch Analyse gefundene Ein-/Ausgangs-Beziehung

bei bekanntem Ausgangssignal nach dem – häufig strukturell vorgegebenen – Übertragungsoperator aufgelöst wird und alsdann dessen Parameter bestimmt werden. Die Synthesaufgabe kann durch eine wiederholte Lösung des Analyseproblems bewältigt werden, wenn das Eingangssignal zielstrebig so lange variiert wird, bis das analysierte Ausgangssignal die geforderten Gütebedingungen erfüllt.

Bei allen drei Aufgaben ist es von untergeordneter Bedeutung, ob das betrachtete Eingangssignal u eine Stellgröße, eine Störgröße oder eine Führungsgröße darstellt. Das im Bild 5.1 mit S bezeichnete System kann ein Übertragungsglied, eine Steuerkette, einen Regelkreis oder ein komplexeres System darstellen. Das Ausgangssignal x symbolisiert deshalb die Ausgangsgrößen aller genannten Glieder und auch bestimmte Zustandsgrößen.

Aus dem Gesagten folgt, daß zunächst die Aufgabe der Berechnung des Ausgangssignals bzw. Zustandsverlaufs eines Systems mit gegebenem kybernetischem Modell und bekanntem Eingangssignal beherrscht werden muß. Zur Lösung dieser Aufgabe wird eine geeignete *mathematische Beschreibung* der Beziehungen zwischen den Ausgangs- und Zustandsgrößen einerseits und den Eingangsgrößen und ggf. dem Anfangszustand andererseits benötigt. Dabei wird sich zeigen, daß eine alle Systemklassen umfassende und für alle Analyse-, Identifikations- und Syntheseprobleme brauchbare einheitliche Beschreibung nicht verfügbar ist. Umfassende Beschreibungsformen – z. B. auf der Ebene algebraischer Strukturen – liefern nur qualitative Aussagen. Darüber hinaus wird es sich als sehr vorteilhaft oder sogar als notwendig erweisen, für ein und dieselbe Systemklasse verschiedene Beschreibungsformen zu haben, mit denen die genannten Aufgaben, insbesondere die verschiedenen Synthesaufgaben, effektiv gelöst werden können.

Wir stellen somit fest:

Voraussetzung und Grundaufgabe bei der Lösung des Analyse-, Identifikations- und Syntheseproblems ist die Bereitstellung *effektiver mathematischer Beschreibungsformen* für die Beziehungen zwischen den Ein- und Ausgangs- und Zustandsgrößen, die durch das betrachtete System verbunden sind.

S 6.1

Dabei wird erstrebt, möglichst wenige, jedoch für die Lösung der verschiedenen Aufgaben gut brauchbare Beschreibungsformen einzuführen. In erster Linie werden sie durch den Charakter des untersuchten Systems bestimmt.

Nachfolgend seien einige wichtige Systemklassen und einige der wesentlichen mathematischen Methoden zu ihrer Beschreibung genannt:

1. Lineare kontinuierliche Systeme

Ihre Behandlung erfolgt über *lineare (vektorielle) Differentialgleichungen*; bei bekannter Übertragungsfunktion wird vorteilhaft die *Laplace-Transformation* benutzt; bei vorliegender Gewichtsfunktion kann das *Faltungsintegral* Verwendung finden.

2. Lineare diskontinuierliche (Abtast-)Systeme

Sie werden durch *lineare (vektorielle) Differenzengleichungen* beschrieben, wofür allgemeine Lösungsmethoden existieren; an die Stelle der Laplace-Transformation und der Übertragungsfunktion treten hier vorteilhaft die *z-Transformation* und die Pulsübertragungsfunktion, an die Stelle des Faltungsintegrals und der Gewichtsfunktion die *Faltungssumme* und die diskrete Gewichtsfunktion (Gewichtsfolge).

3. Nichtlineare kontinuierliche Systeme

Sie werden durch *nichtlineare (vektorielle) Differentialgleichungen* beschrieben; für spezielle Klassen existiert eine große Zahl spezieller Verfahren, von denen hier grafische Methoden in der *Phasenebene* und die *Beschreibungsfunktion*, eine Erweiterung des Frequenzgangs, genannt seien.

4. Diskrete (binäre) Systeme

Sie werden mit Hilfe der *Booleschen Algebra* (kombinatorische Schaltsysteme) und der *Automatentheorie* (sequentielle Systeme) behandelt.

Im Teil II werden wir uns auf *analoge lineare kontinuierliche Systeme* beschränken. Sie haben eine über diese Systeme hinausreichende große Bedeutung, insofern, als sie sich als Grenzfall der diskreten und der diskontinuierlichen Systeme für verschwindende Amplituden- bzw. Zeitquantisierung erweisen. Insbesondere stellen sie den für genügend kleine Aussteuerungen bei Nichtlinearitäten erhaltenen Grenzfall dar, wenn diese in der Umgebung des Arbeitspunktes differenzierbar sind. Die mathematische Behandlung der genannten nichtlinearen, diskontinuierlichen und diskreten Systeme ist – teilweise erheblich – aufwendiger als die der linearen. Insbesondere existieren für die nichtlinearen Systeme keine genügend umfassenden und effektiven Syntheseverfahren, wie sie die lineare Theorie besitzt (von der Simulation und Untersuchung am Analog- und Digitalrechner sei hier abgesehen). Deshalb stellt die im folgenden behandelte lineare Theorie für die Untersuchung dieser komplizierten Systeme eine erste Näherung dar, die auch in das Verhalten dieser Systeme einen vieles Wesentliche erfassenden Einblick und, darauf aufbauend, eine zielgerichtete Behandlung und Synthese fördert.

6.3. Lösungswege zur Beschreibung der Signalübertragung in analogen linearen Systemen

Die Verfahren zur Beschreibung analoger linearer Systeme kann man in *direkte Methoden* und in *indirekte Verfahren*, die auf einer Zerlegung der Eingangssignale unter Ausnutzung des Überlagerungsgesetzes beruhen, einteilen:

6.3.1. Direkte Methoden

Der seit langer Zeit übliche Weg zur Berechnung der Signalübertragung in dynamischen Systemen ist der über die Aufstellung und Lösung der zugehörigen Differentialgleichungen. Handelt es sich – wie im folgenden zunächst vorausgesetzt – um Systeme mit konzentrierten, zeitinvarianten Elementen, so erhält man gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Diese direkte Methode ist in der Zeit des intensiven Ausbaus der Regelungstheorie in den vierziger Jahren weitgehend von Verfahren abgelöst worden, die vom Frequenzgang bzw. der Übertragungsfunktion ihren Ausgang nehmen und die für einen ingenieurmäßigen Entwurf einfacherer Systeme viele Vorzüge aufweisen.

Ausgelöst durch die Untersuchungen optimaler nichtlinearer Systeme, für welche die auf dem Überlagerungsgesetz basierenden Frequenzgang- und Übertragungsfunktionsmethoden nicht geeignet sind, rückten die Differentialgleichungsmethoden in den sechziger Jahren erneut in den Mittelpunkt des Interesses, jedoch unter Einführung

der bereits erläuterten Zustandsvariablen in einer neuen Darstellungsweise als *Vektordifferentialgleichung* und mit darauf begründeten neuen allgemeinen Lösungsmethoden. Diese zeigen Vorteile bei der Behandlung von Systemen mit vielen Eingangs- und miteinander verkoppelten Ausgangsgrößen und erlauben insbesondere eine analytisch fundierte exakte Lösung des Optimierungsproblems bei in weiten Grenzen wählbaren Gütefunktionen und Beschränkungen und beliebigen Anfangs- und Endbedingungen. Diese Darstellungsweise eignet sich für eine Simulation der untersuchten Systeme am Digitalrechner.

6.3.2. Indirekte Methoden mit Zerlegung der Eingangssignale

Während bei der direkten Methode die Zustandsgrößen des Systems in die Beschreibung einbezogen werden (und für die Berechnung von systemoptimalen Steuerungen auch einbezogen werden müssen), ist das bei den folgenden *indirekten Methoden* nicht der Fall. Diese haben deshalb insbesondere für die klassischen Verfahren zur Parameterbemessung und -optimierung Bedeutung erlangt. Die indirekten Methoden beruhen auf der in linearen Systemen zulässigen Anwendung des Superpositions-gesetzes (s. Definition 2.18) und sind dadurch charakterisiert, daß das Eingangssignal in eine – meist unendliche – Menge gleichförmiger Elementarsignale zerlegt wird, für die das jeweils zugehörige elementare Ausgangssignal sich relativ einfach bestimmen läßt. Das gesamte Ausgangssignal erhält man dann durch Zusammen-setzung der elementaren Ausgangssignale (Bild 6.2).

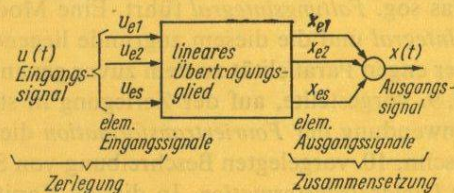


Bild 6.2. Indirekte Methode zur Berechnung von Signalübertragungen mittels Signalzerlegung

Als elementare Eingangssignale bieten sich die Impuls- und die Sprungfunktion sowie die stationäre und exponentiell wachsende Sinusschwingung an. Bei Verwendung der ersten beiden von der Zeit abhängigen Funktionen sprechen wir (s. Abschn. 3.5.) von

Tafel 6.1. Schritte bei den indirekten Methoden zur Berechnung von Signalübertragungen

Zerlegung im	Zeitbereich		Frequenzbereich	
	Impuls	Sprung	Sinusschwingung	Exponential-schwingung
Elementare Eingangssignale				
Elementare Ausgangssignale	Gewichts-funktion	Übergangs-funktion	Sinusschwingung (über Frequenz-gang erhalten)	Exponential-schwingung (mittels Übertragungs-funktion erhalten)
Zerlegung bzw. Zusammen-setzung mit	Faltungs-integral	Duhamelsches Integral	Fourier-transformation	Laplace-transformation

einer *Behandlung im Zeitbereich*, bei Anwendung der beiden letzteren Elementarsignale, in die entsprechend dem Fouriertheorem bzw. dem Laplaceintegral ein Signal zerlegt werden kann, erfolgt die Berechnung im wesentlichen mit komplexen Frequenzen. Man spricht deshalb von einer *Behandlung im Frequenzbereich* (bzw. im Bildbereich der Laplacetransformation). Die einzelnen Schritte bei der indirekten Methode zeigt Tafel 6.1.

In Abhängigkeit von der Art des gegebenen Systems und der vorhandenen Störungen und von der Form der über Systeme und Störungen vorliegenden Informationen, außerdem in Abhängigkeit von der Aufgabenstellung und den gestellten Genauigkeitsforderungen, erweist sich bald das eine, bald das andere Verfahren als brauchbar bzw. für eine effektive ingenieurmäßige Bearbeitung als vorteilhaft. Ebenso wichtig ist, daß jedes geschlossene theoretische Verfahren einen anderen, besonderen Einblick und Überblick gewährt. Nicht selten hat erst ihre Kombination die Lösung eines neuen Problems ermöglicht. Viele der in den späteren Abschnitten vorgestellten leistungsfähigen Verfahren beruhen auf einer solchen Kombination.

Nicht zuletzt veranlaßt uns die Tatsache, daß man in der Literatur zur automatischen Steuerung die verschiedensten Darstellungsweisen vorfindet, dazu, die grundsätzlichen Methoden in ihren wesentlichen Zügen vorzustellen. Für die später behandelten verschiedenen Analyse-, Identifikations- und Syntheseaufgaben werden wir dann unter weitgehender Variantenbeschränkung die für den jeweiligen Aufgabenkomplex besonders effektiven Verfahren auswählen.

Im Abschn. 7. wird das direkte Verfahren, die Darstellung der *Systemgleichungen in Matrixform* und deren Lösung, behandelt. Abschn. 8. enthält die auf der Zerlegung in Impulse beruhende Methode, die auf das sog. *Faltungsintegral* führt. Eine Modifikation dieses Integrals, das *Duhamelsche Integral* und die diesem zugrunde liegende Zerlegung in Sprünge, wollen wir wegen der engen Parallelität zu dem zuvor genannten Verfahren übergehen. Die im Abschn. 9. vorgestellte, auf der Zerlegung in stationäre Sinusschwingungen begründete Anwendung der *Fouriertransformation* dient im wesentlichen als Vorstufe zu der im Abschn. 10. vorgelegten Beschreibung von Signalübertragungsproblemen mit Hilfe der *Laplacetransformation*. In diesem Kapitel werden außerdem wichtige Zusammenhänge zur direkten Methode hergestellt und die Laplacetransformation zur Lösung der Vektordifferentialgleichung verwendet.

Die im Abschn. 10. bereitgestellte Beschreibungsform (Übertragungsfunktion) bietet eine günstige Grundlage für eine *Klassifizierung von Übertragungsgliedern*. Diese wird zusammen mit einer Untersuchung wichtiger Übertragungsglieder im Abschn. 11. vorgenommen. Im Abschn. 12. wird diese Beschreibungsform alsdann zur Berechnung der *Signalübertragungen von Parallel-, Ketten- und Gegenparallelschaltungen* (Rückführung und Regelkreis) angewendet. Der Teil II schließt mit einer Darlegung verschiedener Verfahren zur *Aufstellung der Systemgleichungen in Matrixform* (insbesondere Zustandsgleichung), wenn von den Übertragungsgliedern eines betrachteten Systems die Übertragungsfunktionen bekannt sind (s. Abschn. 13.).

Die folgenden Abschnitte sollen nicht die Berechtigung der entsprechenden streng mathematischen Darstellungen in Frage stellen. Die Erfahrungen zeigen jedoch, daß zur umfassenden Nutzung des von der Mathematik bereitgestellten Apparats dessen Aufbereitung für den Ingenieur, Ökonomen usw. notwendig ist. Insbesondere müssen die mathematischen Beziehungen in einen engeren Zusammenhang zu den betrachteten objektiven Realitäten und Prozessen gebracht werden, um dem Anwender die abstrakte mathematische Formulierung seines konkreten Problems und die Rück-

übersetzung des erhaltenen Ergebnisses in eine praktische technische, ökonomische usw. Nutzung zu erleichtern.

Die mathematische Bearbeitung des in die Sprache der Mathematik übersetzten Problems muß selbstverständlich unter strenger Beachtung der hierfür geltenden Regeln erfolgen. Den Anwender interessieren dabei weniger die Beweise für die einzelnen Sätze als die notwendigen Voraussetzungen für ihre Anwendbarkeit. Deswegen werden wir im folgenden dann häufig auf eine Beweisführung verzichten, wenn diese nicht wesentlich zu einem vertieften Verständnis des verwendeten mathematischen Apparates beiträgt. Im Sinne der hier dargelegten Anliegen werden wir auch zuweilen eine axiomatische Beweisführung durch eine heuristische ersetzen. Wir meinen, daß das berechtigt ist, wenn sie als eine solche ausgewiesen wird.

7. Beschreibung von Zustandsverhalten und Signalübertragung mittels Vektordifferentialgleichung und Lösungsverfahren

In diesem Kapitel wird die direkte Methode zur Berechnung von Signalübertragungen vorgestellt. Zu Beginn wird anhand eines Beispiels die Wahl der Zustandsvariablen und Aufstellung der bereits im Abschn. 2.2.1. formal eingeführten Systemgleichungen in Matrixform erläutert. Deren Lösung für allgemeines Eingangssignal, die Bewegungsgleichung, bringt Abschn. 7.2. Eine wichtige Stellung nimmt hierbei die Übergangsmatrix $\Phi(t)$ ein, deren Eigenschaften im Abschn. 7.3. näher erläutert werden. Für das Lösungsverfahren, insbesondere jedoch für die später erfolgende Klärung einiger grundsätzlicher Fragen (Stabilität, Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit), ist eine kanonische Darstellung der Systemgleichungen von außerordentlicher Bedeutung. Hierzu werden im Abschn. 7.4. die Eigenwerte und Eigenvektoren der Systemmatrix A eingeführt, mit deren Hilfe dann im Abschn. 7.5. die Transformation der System- und Bewegungsgleichungen auf die kanonische Form vorgenommen werden kann. Abschn. 7.6. bringt schließlich einige Methoden zur Berechnung der Übergangsmatrix. Im Abschn. 7.7. sind einige Bemerkungen eingefügt, wie ein System nichtlinearer Differentialgleichungen linearisiert und damit in die hier betrachteten linearen Systemgleichungen übergeführt werden kann. Das Kapitel schließt mit einer Zusammenfassung und Flußbilddarstellung des hier entwickelten Lösungswegs und einem ausführlichen Beispiel, an dem die wichtigen Lösungsschritte erläutert werden.

7.1. Aufstellung der Systemgleichungen in Matrixform

Die Systemgleichungen sind bereits im Abschn. 2.2.1. eingeführt worden. Dort ist ihre Aufstellung für den Fall eines Systems 1. Ordnung mit skalarer Differentialgleichung gezeigt und dann rein formal die Erweiterung auf die für Systeme höherer Ordnung mit vielen Ein- und Ausgängen erhaltenen Systemgleichungen in Matrixform vorgenommen worden. Zur Erläuterung ihrer Aufstellung wollen wir unseren Ausgang von einem Beispiel nehmen, dem im Bild 7.1 dargestellten Gleichstrommotor, der mit konstanter Belastung und Erregung betrieben wird. Da die Aufstellung der Gleichungen und die Ableitung ihrer Lösung, der Bewegungsgleichung, analog dem skalaren Fall erfolgt, wird empfohlen, an dieser Stelle noch einmal den Abschn. 2.2.1. zu wiederholen.

Im Bild 7.1 bedeuten $u_A(t)$ die als Eingangssignal $u(t)$ wirksame Ankerspannung, $n(t)$ die als Ausgangssignal $x(t)$ betrachtete Drehzahl, $u_i(t)$ die im Motor induzierte Spannung und $i_A(t)$ den Ankerstrom. Φ_0 ist die konstante Erregung; R_A und L_A sind Ankerwiderstand bzw. -induktivität; θ ist die Drehträgheit der mit der Welle verbundenen Massen von Anker und Arbeitsmaschine. Das vom Motor erzeugte (innere) Moment wird mit $m_i(t)$ bezeichnet. Das durch die angetriebene Arbeitsmaschine

abverlangte (äußere) Lastmoment sei voraussetzungsgemäß konstant m_{a0} . Die hier vereinbarungsgemäß (s. Definition 3.6) ausschließlich betrachtete Änderung um den Arbeitspunkt m_a ist demzufolge Null.

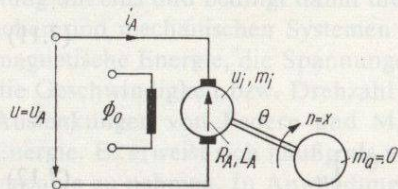


Bild 7.1. Gleichstrommotor mit konstanter Erregung und Belastung

Mit dem Maschensatz und der Gleichgewichtsbedingung für die Momente erhalten wir die folgenden Gleichungen:

für den Ankerkreis

$$u_A - u_i = R_A i_A + L_A \dot{i}_A \quad (7.1)$$

mit

$$u_i = c \Phi_0 n \quad (7.2)$$

für die Welle

$$m_i - m_a = \theta \ddot{n} \quad (7.3)$$

mit

$$m_i = k \Phi_0 i_A \quad (7.4)$$

und

$$m_a = 0. \quad (7.5)$$

Hierbei sind c und k elektromagnetisch und konstruktiv bedingte Konstanten. Durch Einsetzen der Gln. (7.2) bis (7.5) in (7.1) erhält man

$$a_2 \ddot{n} + a_1 \dot{n} + a_0 n = u_A \quad (7.6)$$

mit

$$a_2 = L_A \theta / k \Phi_0, \quad a_1 = R_A \theta / k \Phi_0, \quad a_0 = c \Phi_0. \quad (7.7)$$

Unser Ziel besteht nun darin, diese Differentialgleichung höherer Ordnung in ein System simultaner Differentialgleichungen 1. Ordnung umzuwandeln und diese zu einer Vektordifferentialgleichung 1. Ordnung zusammenzufassen, für die analog dem im Abschn. 2.2.1. behandelten skalaren Fall ein allgemeines Lösungsverfahren ausgearbeitet werden kann.

Die erste Variante besteht darin, daß das Ausgangssignal n und seine erste Ableitung $\dot{n}$ als neue Variable, als Zustandsvariable q_i , eingeführt werden:

$$n = q_1 \quad (7.8)$$

$$\dot{n} = q_2. \quad (7.9)$$

Damit findet man aus Gl. (7.6), wenn das Eingangssignal u_A wie bisher mit u bezeichnet wird:

$$\dot{q}_1 = q_2 \quad (7.10)$$

$$\dot{q}_2 = -\frac{a_0}{a_2} q_1 - \frac{a_1}{a_2} q_2 + \frac{1}{a_2} u. \quad (7.11)$$

In Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0/a_2 & -a_1/a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/a_2 \end{bmatrix} u. \quad (7.12)$$

Mit den bereits in den Gln. (2.30) und (2.32) eingeführten Vektorgrößen und Matrizen erhält man diese als *Zustandsgleichung* bezeichnete Vektordifferentialgleichung in vereinfachter Schreibweise:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{b}u. \quad (7.13)$$

Die *Systemmatrix* ist in diesem Fall

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0/a_2 & -a_1/a_2 \end{bmatrix}. \quad (7.14)$$

Die *Steuermatrix* (*Eingangsmatrix*) ist hier der Vektor

$$\mathbf{b} = [0 \quad 1/a_2]^T. \quad (7.15)$$

Zum vollständigen Ersatz der ursprünglichen Gl. (7.6) muß noch eine einfache algebraische Gleichung ergänzt werden, die die direkte Abhängigkeit des Ausgangssignals x vom Zustandsvektor $\mathbf{q}$ und evtl. vom Eingangssignal u festhält, die *Ausgabe-gleichung* [s. Gl. (2.32b)]

$$x = \mathbf{c}^T \mathbf{q} + du. \quad (7.16)$$

Im vorliegenden Beispiel ist wegen

$$x = n = q_1 \quad (7.17)$$

die *Beobachtungsmatrix*, hier der Zeilenvektor $\mathbf{c}^T$,

$$\mathbf{c}^T = [1 \quad 0] \quad (7.18)$$

und die zu einem Skalar d entartete *Durchgangsmatrix*

$$d = 0. \quad (7.19)$$

In der modernen Theorie der automatischen Steuerung dient die Information über den Zustand zur Optimierung der Steuerungsalgorithmen und damit des Systemverhaltens. Außerdem werden zuweilen innere Prozeßgrößen in die Gütefunktion

einbezogen oder Beschränkungen unterworfen. Deshalb ist es von großem Interesse und von Vorteil, daß meßbare Größen als Zustandsvariable gewählt werden. Jede unabhängige Energiespeichermöglichkeit in einem System erhöht dessen Ordnung um eins und bedingt damit die Einführung einer Zustandsvariablen. In elektrischen und mechanischen Systemen bestimmen die Ströme durch Induktivitäten die magnetische Energie, die Spannungen über den Kapazitäten die elektrische Energie, die Geschwindigkeit bzw. Drehzahl bewegter Massen die kinetische Energie und die Auslenkungen von Federn und Massen (gegen die Erdanziehung) die potentielle Energie. Es erweist sich häufig als vorteilhaft, diese meßbaren Größen als Zustandsvariable zu nehmen. In Anwendung auf unser Beispiel erhalten wir damit die *zweite Variante* durch Wahl von

$$n = q_1 \quad (7.20)$$

$$i_A = q_2. \quad (7.21)$$

Durch Einsetzen von Gl. (7.2) in Gl. (7.1) und von Gl. (7.4) in Gl. (7.3) finden wir unter Verwendung vorstehender Zustandsvariablen:

$$u = u_A = R_A q_2 + L_A \dot{q}_2 + c\Phi_0 q_1 \quad (7.22)$$

und

$$\theta \dot{q}_1 = k\Phi_0 q_2. \quad (7.23)$$

Ordnen und Darstellung in Matrixform führt auf die erstrebte Form der Zustandsgleichung von Gl. (7.13):

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k\Phi_0/\theta \\ -c\Phi_0/L_A & -R_A/L_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L_A \end{bmatrix} u. \quad (7.24)$$

Die Ausgangsgleichung ist gegenüber Variante 1 unverändert.

Zwecks *Verallgemeinerung auf Systeme n-ter Ordnung* machen wir von der aus der Theorie der Differentialgleichungen bekannten Aussage Gebrauch, daß eine lineare Differentialgleichung *n*-ter Ordnung in *n* Differentialgleichungen 1. Ordnung übergeführt werden kann und umgekehrt. Ein Weg, der immer gangbar, aber nach dem bereits Gesagten nicht immer vorteilhaft ist, besteht darin, die Ausgangsgröße und ihre Ableitungen bis zur (*n* - 1)-ten Ableitung als Zustandsvariable einzuführen.

Nehmen wir unseren Ausgang von der nachstehenden Differentialgleichung *n*-ter Ordnung. Bezüglich des Falles, daß auch Ableitungen der Störfunktion (des Eingangssignals *u*) auftreten, sei auf Abschn. 13.2.2. verwiesen.

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{x} + a_0x = b_0u. \quad (7.25)$$

Durch Substitution der Zustandsvariablen

$$x = q_1, \dot{x} = \dot{q}_1, \dots, x^{(n-1)} = \dot{q}_{n-1} \quad (7.26)$$

erhalten wir das erstrebte System von Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= q_2 \\ &\vdots \\ \dot{q}_{n-1} &= q_n \\ \dot{q}_n &= -a_0 q_1 - \dots - a_{n-1} q_n + b_0 u. \end{aligned} \quad (7.27)$$

In Matrixform:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ . & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & 0 & 1 & \dots & . & . \\ . & . & . & . & & 1 & . \\ 0 & 0 & 0 & . & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & . & \dots & . & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{q} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u \quad (7.28)$$

Die Systemmatrix hat hier die sog. Frobeniusform und wird deshalb *Frobeniusmatrix* oder *Begleitmatrix* genannt. Diese ist dadurch gekennzeichnet, daß die Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen alle mit 1, die der letzten Zeile mit den Koeffizienten der Differentialgleichung besetzt sind. Alle anderen Elemente sind Null.

Im *allgemeinsten Fall* eines linearen Systems n -ter Ordnung mit m Eingangsgrößen und r Ausgangsgrößen ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= a_{11}q_1 + \dots + a_{1n}q_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1m}u_m \\ &\vdots \\ \dot{q}_n &= a_{n1}q_1 + \dots + a_{nn}q_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nm}u_m \end{aligned} \quad (7.29)$$

und

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}q_1 + \dots + c_{1n}q_n + d_{11}u_1 + \dots + d_{1m}u_m \\ &\vdots \\ x_r &= c_{r1}q_1 + \dots + c_{rn}q_n + d_{r1}u_1 + \dots + d_{rm}u_m. \end{aligned} \quad (7.30)$$

In Matrixschreibweise sind das die schon im Abschn. 2.2.1. angegebenen Systemgleichungen:

die *Zustandsgleichung*

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (7.31)$$

und die *Ausgabegleichung*

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{q} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (7.32)$$

mit der (n, n) -Systemmatrix $\mathbf{A}$, der (n, m) -Steuermatrix $\mathbf{B}$, der (r, n) -Beobachtungsmatrix $\mathbf{C}$ und der (r, m) -Durchgangsmatrix $\mathbf{D}$ sowie dem $(n, 1)$ -Zustandsvektor $\mathbf{q}$, dem $(m, 1)$ -Eingangsvektor $\mathbf{u}$ und dem $(r, 1)$ -Ausgangsvektor $\mathbf{x}$.

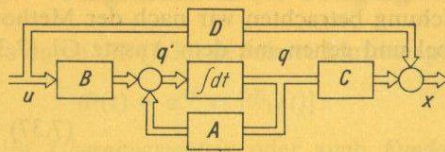


Bild 7.2. Darstellung der Systemgleichungen als Matrixblockdiagramm

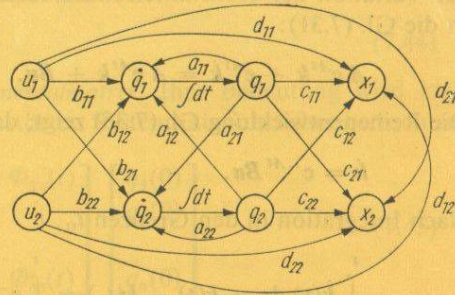


Bild 7.3. Signalflußgraph eines Systems 2. Ordnung mit zwei Ein- und Ausgängen

Die Systemgleichungen können durch das im Bild 7.2 gezeigte Matrixsignalflußbild in Blockdiagrammform dargestellt werden. Für den Fall eines Systems 2. Ordnung mit zwei Ein- und Ausgangsgrößen zeigt Bild 7.3 den zugehörigen üblichen Signalflußgraphen.

7.2. Lösung der Zustands-Vektordifferentialgleichung für allgemeine Eingangssignale

Analog der Vorgehensweise für den skalaren Fall (s. Abschn. 2.2.1.2) gehen wir von der homogenen Zustandsgleichung

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\mathbf{q} \quad (7.33)$$

aus und machen den entsprechenden Ansatz:

$$\mathbf{q} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{k} = \Phi\mathbf{k}. \quad (7.34)$$

Die Matrixexponentialfunktion $\Phi(t)$ ist hierbei durch folgende Reihe definiert:

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} \triangleq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i t^i}{i!} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \dots \quad (7.35)$$

Man kann zeigen, daß $\Phi(t)$ für jedes endliche t und alle quadratischen Matrizen $\mathbf{A}$ gleichmäßig konvergiert. Demzufolge ist Summenbildung und Differentiation vertauschbar, und es gilt:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 t + \mathbf{A}^3 \frac{t^2}{2!} + \dots \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \dots) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} \\ &= (\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \dots) \mathbf{A} = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Damit kann man zeigen, daß der Ansatz Gl. (7.34) die homogene Gleichung erfüllt. Zur Lösung der *inhomogenen* Zustandsgleichung betrachten wir nach der Methode der Variation der Konstanten $\mathbf{k}$ als variabel und gehen mit dem Ansatz Gl. (7.34) in die Gl. (7.31):

$$A e^{At} \mathbf{k} + e^{At} \dot{\mathbf{k}} = A e^{At} \mathbf{k} + B \mathbf{u}. \quad (7.37)$$

Die Reihenentwicklung Gl. (7.35) zeigt, daß $\Phi(t)$ nie singulär ist. Somit ist

$$\dot{\mathbf{k}} = e^{-At} B \mathbf{u}. \quad (7.38)$$

Nach Integration in den Grenzen t_0, t

$$\int_{t_0}^t \dot{\mathbf{k}}(\tau) d\tau = \mathbf{k}(t) - \mathbf{k}(t_0) = \int_{t_0}^t e^{-A\tau} B \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (7.39)$$

und Einsetzen in Gl. (7.34) findet man

$$\mathbf{q}(t) = e^{At} \mathbf{k}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (7.40)$$

Für $t = t_0$ erhält man

$$\mathbf{q}(t_0) = e^{At_0} \mathbf{k}(t_0). \quad (7.41)$$

Damit kann die Konstante $\mathbf{k}(t_0)$ in Gl. (7.40) eliminiert werden.

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &= e^{A(t-t_0)} \mathbf{q}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ &= \Phi(t - t_0) \mathbf{q}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau) B \mathbf{u}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (7.42)$$

Gewöhnlich kann $t_0 = 0$ gesetzt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &= \Phi(t) \mathbf{q}(0) + \int_0^t \Phi(t - \tau) B \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ &= \mathbf{q}_{\text{fr}}(t) + \mathbf{q}_{\text{erzw}}(t). \end{aligned} \quad (7.43)$$

Gl. (7.42) bzw. Gl. (7.43) stellt die *Bewegungsgleichung* des Systems dar. Der erste Summand $\mathbf{q}_{\text{fr}}(t)$ bestimmt dabei die vom Anfangszustand $\mathbf{q}(t_0)$ hervorgerufene freie, der zweite $\mathbf{q}_{\text{erzw}}(t)$ die vom Eingangssignal $\mathbf{u}(t)$ in $[t_0, t]$ verursachte erzwungene Bewegung des Systemzustands. Der Einfluß eines in $t < t_0$ wirksamen Eingangssignals auf den Systemzustand in $t > t_0$ ist vollständig in $\mathbf{q}(t_0)$ enthalten. Diese Folgerung führt zu der Definition 2.8 für den Zustand eines Systems, die man noch einmal nachlesen sollte.

7.3. Eigenschaften der Übergangsmatrix $\Phi(t)$

Die durch Gl. (7.35) definierte Matrixexponentialfunktion

$$\Phi(t) = e^{At} = [\Phi_{ij}(t)] \quad (7.44)$$

heißt *Übergangsmatrix* oder auch *Fundamentalmatrix*. Ihre Bedeutung wird klar, wenn wir die Bewegungsgleichung des ungestörten Systems ausführlicher betrachten:

$$\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) & \cdots & \Phi_{1n}(t) \\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t) & \cdots & \Phi_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{n1}(t) & \Phi_{n2}(t) & \cdots & \Phi_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \\ \vdots \\ q_n(0) \end{bmatrix}. \quad (7.45)$$

Offensichtlich beschreibt das Element $\Phi_{ij}(t)$ dieser Übergangsmatrix den Ausgleichsvorgang der i -ten Zustandsvariablen, wenn die j -te Zustandsvariable den Anfangswert 1 hat und alle anderen Anfangswerte Null sind. Insgesamt beschreibt die Übergangsmatrix den Übergang des ungestörten Systems aus einem Anfangszustand in die nachfolgenden Zustände.

Die Bezeichnung *Fundamentalmatrix* stammt aus der mathematischen Literatur, in der jede Matrix $\Psi(t)$, die der Matrixdifferentialgleichung

$$\dot{\Psi} = A\Psi \quad (7.46)$$

gehört, als Fundamentalmatrix bezeichnet wird.

Eine Reihe weiterer wichtiger Eigenschaften der Übergangsmatrix $\Phi(t)$ erhält man, wenn man von der – hier nicht bewiesenen – Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der homogenen Gl. (7.33), das ist die *Gleichung der ungestörten Bewegung*

$$\dot{q}(t) = Aq(t), \quad (7.47)$$

ausgeht oder wenn man die aus der Reihenentwicklung Gl. (7.35) ableitbare Beziehung

$$e^{A\tau_1} e^{A\tau_2} = e^{A(\tau_1 + \tau_2)} = e^{A\tau_2} e^{A\tau_1} \quad (7.48)$$

benutzt. Für alle t, t_0, t_1, t_2 gilt danach:

$$a) \quad q(t_0) = \Phi(t_0 - t_0) q(t_0). \quad (7.49)$$

Hieraus folgt

$$\Phi(0) = e^{A \cdot 0} = I. \quad (7.50)$$

b) Wird das System aus dem Zustand $q(t_0)$ zunächst in den Zustand $q(t_1)$ und von dort in den Zustand $q(t_2)$ übergeführt und das mit der direkten Überführung in den Zustand $q(t_2)$ verglichen:

$$\begin{aligned} q(t_2) &= \Phi(t_2 - t_1) q(t_1) = \Phi(t_2 - t_1) \Phi(t_1 - t_0) q(t_0) \\ &= \Phi(t_2 - t_0) q(t_0), \end{aligned} \quad (7.51)$$

so findet man:

$$\Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_2 - t_1) \Phi(t_1 - t_0). \quad (7.52)$$

Dieses Ergebnis kann ebenso aus Gl. (7.48) mit $\tau_2 = t_2 - t_1$ und $\tau_1 = t_1 - t_0$ erhalten werden.

- c) Da die Übergangsmatrix, wie ihre Reihenentwicklung Gl. (7.35) zeigt, regulär ist, kann Gl. (7.47) von links mit der inversen Matrix multipliziert werden:

$$\Phi^{-1}(t - t_0) q(t) = q(t_0). \quad (7.53)$$

Demgegenüber gilt mit der vereinbarten Bezeichnungsweise:

$$q(t_0) = \Phi(t_0 - t) q(t). \quad (7.54)$$

Ein Vergleich liefert:

$$\Phi(t_0 - t) = \Phi^{-1}(t - t_0). \quad (7.55)$$

Auch dieses Ergebnis kann mit Gl. (7.48) unmittelbar erhalten werden. Setzt man dort

$$\tau_1 = -\tau_2 = \tau = t - t_0, \quad (7.56)$$

so findet man

$$\Phi(\tau) \Phi(-\tau) = \Phi(0) = I \quad (7.57)$$

und daraus wie in Gl. (7.55)

$$\Phi(-\tau) = \Phi^{-1}(\tau). \quad (7.58)$$

Die durch die Übergangsmatrix vermittelte Zustandstransformation ist also auch entgegen der Zeitrichtung anwendbar. Ist der Zustand des Systems zu einem beliebigen Zeitpunkt t_0 bekannt, so kann die Bewegung des ungestörten Systems für alle $t \geq t_0$ allein aus der Kenntnis von $\Phi(t)$ gefunden werden. Für die Bewegung des gestörten Systems ist nach Gl. (7.42) zusätzlich die Kenntnis des Eingangssignals $u(\tau)$ im Intervall $\tau \in [t_0, t]$ erforderlich.

7.4. Eigenwerte und Eigenvektoren

Im Hinblick auf folgende Untersuchungen wollen wir jetzt die Lösung der homogenen Gl. (7.33) noch mit einem gegenüber Gl. (7.34) geänderten Ansatz durchführen.

Bekanntlich werden skalare homogene Differentialgleichungen mit dem Ansatz $e^{\lambda t}$ gelöst. Das führt auf die charakteristische Gleichung des Systems. Deren Wurzeln λ_i bestimmen die Teilvorgänge $k_i e^{\lambda_i t}$, aus denen sich die gesuchte Lösung zusammensetzt. Die Konstanten k_i sind hierbei über die Anfangsbedingungen festzulegen. Wir

wollen hier analog verfahren und machen deshalb für die homogene Vektordifferentialgleichung

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\mathbf{q} \quad (7.59)$$

den Ansatz

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 e^{\lambda t} \\ k_2 e^{\lambda t} \\ \vdots \\ k_n e^{\lambda t} \end{bmatrix} = \mathbf{k} e^{\lambda t} \quad (7.60)$$

und erhalten

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{k} = \mathbf{0}. \quad (7.61)$$

Zur Verdeutlichung schreiben wir diese Beziehungen noch einmal ausführlich, beginnend mit Gl. (7.59):

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= a_{11}q_1 + \dots + a_{1n}q_n \\ \dot{q}_2 &= a_{21}q_1 + \dots + a_{2n}q_n \\ &\dots \dots \dots \\ \dot{q}_n &= a_{n1}q_1 + \dots + a_{nn}q_n. \end{aligned} \quad (7.62)$$

Einsetzen von Gl. (7.60) und Division durch $e^{\lambda t} \neq 0$ ergeben das Gl. (7.61) äquivalente Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)k_1 + a_{12}k_2 + \dots + a_{1n}k_n &= 0 \\ a_{21}k_1 + (a_{22} - \lambda)k_2 + \dots + a_{2n}k_n &= 0 \\ &\dots \dots \dots \\ a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)k_n &= 0. \end{aligned} \quad (7.63)$$

Dieses homogene Gleichungssystem liefert genau dann nichttriviale Lösungen für k_i , wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet,

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (7.64)$$

oder in Matrixschreibweise bzw. unmittelbar aus Gl. (7.61)

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= (-1)^n (\lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_n) \\ &= (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_{n^*})^{n^*} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n^*} n_i &= n. \end{aligned} \quad (7.65)$$

Diese Gleichung wird *charakteristische Gleichung* genannt. Ihre Wurzeln λ_i heißen *charakteristische Wurzeln* oder *Eigenwerte der Matrix A*. Es gilt also:

D 7.1

Die *Eigenwerte* einer Systemmatrix A sind die Wurzeln λ_i der zugehörigen *charakteristischen Gleichung*

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

In diesem und dem folgenden Abschn. 7.5. wollen wir zur Vereinfachung und besseren Übersicht voraussetzen, daß *alle Eigenwerte voneinander verschieden* sind. Eine (n, n) -Matrix hat dann genau n voneinander verschiedene Eigenwerte λ_i . Der Übergang vom Verhalten von Systemen mit mehrfachen zu dem von Systemen mit benachbarten einfachen Eigenwerten ist stetig. Er wird durch kleine Änderungen von Elementen der Matrix A hervorgerufen. Da in allen realen Systemen die Elemente von A nur mit einem mehr oder minder großen Fehler identifiziert werden können, ist es praktisch gerechtfertigt, mehrfache Wurzeln durch dicht benachbarte einfache Wurzeln zu ersetzen. Deshalb ist die genannte Einschränkung keine wesentliche. Nach der Bestimmung der Eigenwerte machen wir analog der Vorgehensweise bei skalaren Differentialgleichungen zur Lösung der homogenen Differentialgleichung (7.59) den Ansatz

$$q(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + k_n e^{\lambda_n t}. \quad (7.66)$$

Die Lösungsvektoren k_i werden gefunden, indem man diesen Ansatz in Gl. (7.59) einführt:

$$\lambda_1 k_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + \lambda_n k_n e^{\lambda_n t} = A(k_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + k_n e^{\lambda_n t}). \quad (7.67)$$

Diese Gleichung erfordert, daß die bei gleichen Exponentialfunktionen stehenden Koeffizienten übereinstimmen:

$$\lambda_i k_i = A k_i; \quad i = 1, 2 \dots n \quad (7.68)$$

$$k_i = [k_{i1} k_{i2} \dots k_{in}]^T. \quad (7.69)$$

Die vorstehenden Gleichungen genügenden Vektoren werden *Eigenvektoren* genannt. Es gilt:

D 7.2

Jeder die Gleichung

$$(A - \lambda_i I) k_i = 0$$

erfüllende – nicht verschwindende – Vektor k_i heißt *zum Eigenwert λ_i gehörender Eigenvektor der quadratischen Matrix A*.

Offensichtlich erfüllt auch $\alpha \mathbf{k}_i$ mit $\alpha \neq 0$ die Gl. (7.68) und ist demzufolge ein Eigenvektor. Häufig werden deshalb die Eigenvektoren auf die Länge 1 normiert. Für diese normierten Eigenvektoren $\hat{\mathbf{k}}_i$ gilt somit die Zusatzbedingung

$$||\hat{\mathbf{k}}_i|| = \hat{\mathbf{k}}_i^T \hat{\mathbf{k}}_i = 1. \quad (7.70)$$

Gl. (7.66) muß dann durch die folgende ersetzt werden:

$$\mathbf{q}(t) = \alpha_1 \hat{\mathbf{k}}_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + \alpha_n \hat{\mathbf{k}}_n e^{\lambda_n t}. \quad (7.71)$$

Die α_i sind durch die gegebenen Anfangsbedingungen $q_i(0)$ zu bestimmen.

Die die freie Bewegung eines Systems entsprechend Gl. (7.71) konstituierenden Teilvorgänge $\hat{\mathbf{k}}_i e^{\lambda_i t}$ heißen *Modi* oder auch *Eigenvorgänge* des Systems.

D 7.3

Für die numerische Behandlung ist es zuweilen bequemer, von der Normierung Gl. (7.70) abzusehen. Da Gl. (7.68) nur die Verhältnisse der Komponenten der Eigenvektoren (d. h. nur die Richtung der Eigenvektoren) liefert, kann eine Komponente willkürlich festgesetzt werden. An die Stelle der $\alpha_i \hat{\mathbf{k}}_i$ treten dann $\beta_i \tilde{\mathbf{k}}_i$, wobei nun die β_i entsprechend den Anfangsbedingungen zu bestimmen sind.

Für die aus Gl. (7.68) bestimmten Eigenvektoren gilt folgender für das Kommende wichtiger Satz:

Für eine (n, n) -Matrix mit n voneinander verschiedenen Eigenwerten existieren genau n Eigenvektoren, die voneinander linear unabhängig sind und somit eine Basis eines n -dimensionalen Raumes bilden.

S 7.1

7.5. Transformation der Zustands- und Bewegungsgleichung auf kanonische Normalform

7.5.1. Transformation der Systemgleichungen auf Normalform

Wir haben im Abschn. 7.1. gesehen, daß die Wahl der Zustandsvariablen vieldeutig ist. Unser Ziel besteht nun darin, solche Zustandsvariablen $\hat{q}_i$ einzuführen, die auf eine möglichst einfache, eine *kanonische Form* der Zustandsgleichungen führen. Eine solche ist gegeben, wenn es uns gelingt, durch die Transformation die Systemmatrix A in eine Diagonalmatrix zu überführen. Das ist bei den nach Voraussetzung voneinander verschiedenen Eigenwerten immer gewährleistet. Als geeignet für diese Aufgabe erweist sich die Transformation

$$\mathbf{q} = \mathbf{K} \hat{\mathbf{q}}. \quad (7.72)$$

Hierbei ist

$$K \triangleq [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n] \quad (7.73)$$

die aus den n Eigenvektoren [s. Gl. (7.68)] gebildete (n, n) -Eigenvektormatrix. Da nach Satz 7.1. alle Eigenvektoren voneinander linear unabhängig sind, ist K eine reguläre Matrix. Die Transformation Gl. (7.72) ist linear; denn es gilt:

$$K(\alpha \hat{q}_1 + \beta \hat{q}_2) = \alpha K \hat{q}_1 + \beta K \hat{q}_2. \quad (7.74)$$

Durch die Transformation Gl. (7.72) wird jedem n -dimensionalen Zustandsvektor $\hat{q}$ ein n -dimensionaler Zustandsvektor q eindeutig zugeordnet und umgekehrt. Die Menge aller Zustandsvektoren q des Zustandsraums R^n wird durch diese Transformation in die Menge aller Zustandsvektoren $\hat{q}$ abgebildet und umgekehrt, die wieder in R^n liegen. Transformieren wir die homogene Differentialgleichung (7.59) auf die neuen Zustandsvariablen, so erhalten wir

$$K \dot{\hat{q}} = A K \hat{q} \quad (7.75)$$

und, da K nicht singulär ist,

$$\dot{\hat{q}} = K^{-1} A K \hat{q} = \hat{A} \hat{q}. \quad (7.76)$$

Für die durch Gl. (7.76) ausgedrückte wichtige Matrizentransformation ist die folgende Bezeichnung üblich:

D 7.4

Zwei quadratische (n, n) -Matrizen A und $\hat{A}$, die mittels einer regulären Matrix K über die Transformation

$$\hat{A} = K^{-1} A K \quad (7.77)$$

miteinander verbunden sind, heißen einander *ähnlich*.

Die vorstehende Beziehung wird deshalb als *Ähnlichkeitstransformation* bezeichnet. Wichtig ist hierbei folgender Satz:

S 7.2

Bei einer Ähnlichkeitstransformation bleiben die Eigenwerte *unverändert*.

Zum Beweis dieses Satzes ermitteln wir die charakteristische Gleichung für die neue Systemmatrix $\hat{A}$:

$$\begin{aligned} \det(\hat{A} - \lambda I) &= \det(K^{-1} A K - \lambda K^{-1} I K) \\ &= \det(K^{-1}) \det(A - \lambda I) \det(K) = 0. \end{aligned} \quad (7.78)$$

Diese Gleichung ist wegen der Regularität von K (d. h. $\det K \neq 0$) dann und nur dann erfüllt, wenn

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (7.79)$$

Das ist aber wieder die charakteristische Gleichung für A .

Wir wollen nun die neue Systemmatrix $\hat{A}$ genauer bestimmen und ordnen hierzu die n Bestimmungsgleichungen für die Eigenvektoren k_i [s. Gl. (7.68)] zu einer Matrixgleichung:

$$A[k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n] = [\lambda_1 k_1 \ \lambda_2 k_2 \ \dots \ \lambda_n k_n]. \quad (7.80)$$

Unter Verwendung der in Gl. (7.73) definierten Eigenvektormatrix K sowie unter Einführung einer aus den Eigenwerten gebildeten Diagonalmatrix Λ

$$\Lambda \triangleq \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (7.81)$$

finden wir

$$AK = K\Lambda \quad (7.82)$$

und daraus

$$K^{-1}AK = \hat{A} = \Lambda. \quad (7.83)$$

Die Systemmatrix des transformierten Systems ist also die erstrebte Diagonalmatrix. Fassen wir zusammen:

Durch Ähnlichkeitstransformation einer (n, n) -Systemmatrix A mit n voneinander verschiedenen Eigenwerten λ_i mit der Eigenvektormatrix erhält man eine (n, n) -Diagonalmatrix $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$. Eine solche Matrix Λ heißt deshalb *diagonalähnlich*.

S 7.3

Die transformierte homogene Zustandsgleichung (und auch die inhomogene) zeigt keine Verkopplung der Zustandsvariablen. Aus Gl. (7.76) folgt nämlich mit Gl. (7.83)

$$\begin{aligned} \dot{\hat{q}}_1 &= \lambda_1 \hat{q}_1 \\ &\vdots \\ \dot{\hat{q}}_n &= \lambda_n \hat{q}_n. \end{aligned} \quad (7.84)$$

Wegen dieser idealen Form werden die $\hat{q}_i$ als *kanonische Zustandsvariable* bezeichnet, und die Transformation Gl. (7.72) heißt *kanonische Transformation*. Zur Überführung der Systemgleichungen in die kanonische Form transformieren wir die Gln. (7.31), (7.32) mit Gl. (7.72):

$$\dot{\hat{K}}\hat{q} = A\hat{K}\hat{q} + Bu \quad (7.85)$$

$$x = C\hat{K}\hat{q} + Du. \quad (7.86)$$

Mit Gl. (7.83) sowie mit

$$K^{-1}B = \hat{B} \quad (7.87)$$

$$C K = \hat{C} \quad (7.88)$$

lauten die Systemgleichungen in kanonischer Normalform:

$$\dot{\hat{q}} = A\hat{q} + \hat{B}u \quad (7.89)$$

$$x = \hat{C}\hat{q} + Du. \quad (7.90)$$

Das zugehörige Matrixsignalflußbild zeigt Bild 7.4.

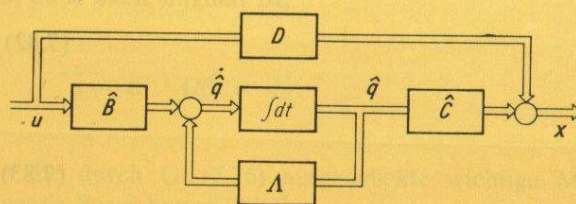


Bild 7.4. Matrixsignalflußbild der kanonischen Systemgleichungen

Die j -te transformierte Zustandsvariable gehorcht der Gleichung

$$\dot{\hat{q}}_j = \lambda_j \hat{q}_j + \hat{b}_{j1}u_1 + \dots + \hat{b}_{jm}u_m. \quad (7.91)$$

Der Signalflußgraph eines Systems mit zwei Ein- und Ausgängen hat deshalb das gegenüber Bild 7.3 vereinfachte Aussehen von Bild 7.5 (wobei zusätzlich $D = 0$ gesetzt worden ist), aus dem die Entkopplung der Zustandsvariablen deutlich sichtbar ist.

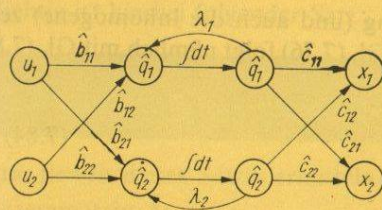


Bild 7.5. Signalflußgraph der kanonischen Systemgleichungen eines Systems 2. Ordnung mit zwei Ein- und Ausgängen

Vermerkt sei abschließend, daß Systemmatrizen mit mehrfachen Eigenwerten meist nicht auf eine Diagonalmatrix A , sondern auf eine sog. *Jordanmatrix* J

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ & J_2 \\ 0 & J_k \end{bmatrix} \quad (7.92)$$

mit den *Jordanblöcken* J_i transformiert werden können. Für den Fall, daß das sog. Minimalpolynom gleich dem charakteristischen Polynom ist, haben diese die Form

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ & \lambda_i & 1 \\ & & 1 \\ 0 & & \lambda_i \end{bmatrix}. \quad (7.93)$$

7.5.2. Transformation der Bewegungsgleichung auf Normalform

Zur Ermittlung der *Bewegungsgleichung in kanonischer Darstellungsweise* ist es wegen der gleichen Struktur der zugrunde liegenden Zustandsgleichungen (7.31) bzw. (7.89) nur erforderlich, die Matrizen A , B in Gl. (7.43) durch die Matrizen $\hat{A}$, $\hat{B}$ auszutauschen:

$$\begin{aligned} \hat{q}(t) &= e^{\hat{A}t} \hat{q}(0) + \int_0^t e^{\hat{A}(t-\tau)} \hat{B} u(\tau) d\tau \\ &= \hat{q}_{tr}(t) + \hat{q}_{erzw}(t). \end{aligned} \quad (7.94)$$

Hierbei ist mit Gl. (7.81)

$$e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} \\ 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (7.95)$$

und

$$\hat{q}(0) = K^{-1} q(0). \quad (7.96)$$

Für die *freie Bewegung* der j -ten kanonischen Variablen gilt:

$$\hat{q}_{tr,j}(t) = e^{\lambda_j t} \hat{q}_j(0). \quad (7.97)$$

Der Anfangszustand bestimmt, welche Eigenvorgänge an der freien Bewegung beteiligt sind und wie stark dies der Fall ist. Den für die *erzwungene Bewegung* maßgebenden zweiten Summanden können wir für den Sonderfall eines konstanten Eingangsvektors

$$u(t) = u_0 \sigma(t) \quad (7.98)$$

noch etwas weiter aufbereiten [mit Gl. (7.36)]:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{q}}_{\text{erzw}}(t) &= e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda \tau} \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u}_0 \, d\tau = -e^{\lambda t} e^{-\lambda \tau} \Big|_0^t \mathbf{A}^{-1} \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u}_0 \\ &= (e^{\lambda t} - \mathbf{I}) \mathbf{A}^{-1} \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} \frac{e^{\lambda_1 t} - 1}{\lambda_1} & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \frac{e^{\lambda_n t} - 1}{\lambda_n} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u}_0. \quad (7.99)\end{aligned}$$

Das Ausgangssignal $\mathbf{x}(t)$ erhält man in allen Fällen über die Ausgabegleichung (7.90).

7.6. Berechnung der Übergangsmatrix $\Phi(t)$

Die Übergangsmatrix kann auf verschiedene Weisen bestimmt werden:

- Der klassische Weg führt über die *Integration der homogenen Differentialgleichung*. Die Integrationskonstanten werden alsdann durch die Anfangswerte ersetzt und die Ergebnisse auf die vektorielle Form der Gleichung für die ungestörte Bewegung [Gl. (7.47)] gebracht, woraus $\Phi(t)$ abgelesen werden kann. Günstiger – insbesondere bei bestimmten Voraussetzungen – erweisen sich die folgenden Wege:
- Eine geschlossene Lösung ermöglicht die Lagrange-Sylvester-Interpolationsformel. Sie ist anwendbar auf Matrizenfunktionen, die sich als (konvergierende) Potenzreihen

$$f(\mathbf{A}) = \sum_0^{\infty} c_i \mathbf{A}^i \quad (7.100)$$

einer Matrix $\mathbf{A}$ mit n voneinander verschiedenen Eigenwerten λ_i darstellen lassen, und entspricht der Lagrangeschen Interpolationsformel für die Approximation von Funktionen durch Polynome. Die Übergangsmatrix $\Phi = \exp \{\mathbf{A}t\}$ stellt eine solche Potenzreihe dar.

Die *Sylvesterformel* lautet:

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) \mathbf{F}_i \quad (7.101)$$

mit

$$\mathbf{F}_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I}}{\lambda_i - \lambda_j}. \quad (7.102)$$

Ihre Anwendung auf die Berechnung der Übergangsmatrix ergibt:

$$\Phi(t) = e^{At} = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} F_i. \quad (7.103)$$

- c) Durch Anwendung der Laplacetransformation auf die homogene Differentialgleichung (7.33) erhält man eine der Sylvesterformel sehr ähnliche, nicht auf einfache Eigenwerte beschränkte Formel. Diese wird im Abschn. 10.5. abgeleitet und ist für eine analytische Behandlung besonders geeignet.
- d) Durch die im Abschn. 7.5. erläuterte Ähnlichkeitstransformation läßt sich eine Matrix mit n durchweg verschiedenen Eigenwerten λ_i auf eine Diagonalmatrix A bringen [s. Gl. (7.83), (7.81)]. Die Auflösung von Gl. (7.83) nach A liefert

$$A = KAK^{-1}. \quad (7.104)$$

Hierbei ist K die durch Gl. (7.73) definierte Eigenvektormatrix. Nach einem Satz der Matrizenrechnung gilt:

Für zwei nach Gl. (7.104) ähnliche Matrizen A und A ist

$$f(A) = Kf(A)K^{-1}. \quad (7.105)$$

S 7.4

Damit kann $\Phi(t)$ nach der Beziehung

$$\Phi(t) = Ke^{At}K^{-1} \quad (7.106)$$

ermittelt werden, wobei bei bekannten Eigenwerten λ_i die Matrix $\exp \{At\}$ sofort angeschrieben werden kann:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ \vdots & \\ 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}. \quad (7.107)$$

Die bisher genannten Verfahren liefern eine analytische Lösung, erfordern jedoch die evtl. aufwendige Bestimmung der Eigenwerte der Matrix A , d. h. der Wurzeln der charakteristischen Gleichung des Systems Gl. (7.65). Bei den noch anzugebenden Verfahren trifft beides nicht zu.

- e) Bei der Berechnung der Übergangsmatrix mit Hilfe der Taylorformel nach Gl. (7.35)

$$\Phi(t) = \sum_{i=0}^{p-1} A^i \frac{t^i}{i!} + R_p \quad (7.108)$$

erhält man für Systeme mit konzentrierten Elementen für die einzelnen Matrizen-elemente Polynome in t , die sich zu Summen von e-Funktionen zusammenfassen lassen müssen. Diese zu erkennen ist jedoch sehr schwierig. Deshalb ist dieser Weg

praktisch nur für numerische Berechnung geeignet, wobei sich die Verwendung eines Digitalrechners als sehr vorteilhaft erweist.

Sollen die Elemente der Übergangsmatrix $\exp \{At\}$ mit einem relativen Fehler $\delta \leq \delta_{\max}$ bestimmt werden, so kann die erforderliche Gliedzahl p für die Taylorformel Gl. (7.108) durch das folgende Abbruchkriterium gefunden werden:

$$p! \geq 2e \frac{R}{\delta_{\max}}. \quad (7.109)$$

Hierbei ist e die natürliche Zahl und

$$R \geq \max_i |\lambda_i t| \quad (7.110)$$

eine Abschätzung des Betrags des größten Eigenwerts der Matrix At .

f) Durch *Programmierung am Analogrechner* können die Elemente der Übergangsmatrix als Kurvenverlauf ermittelt und ggf. numerisch ausgewertet oder analytisch approximiert werden.

7.7. Linearisierung der Zustandsgleichung nichtlinearer Systeme um den Arbeitspunkt

Viele der auftretenden nichtlinearen (zeitinvarianten) Systeme können durch das folgende System nichtlinearer Differentialgleichungen 1. Ordnung beschrieben werden, wobei der Index ges andeuten soll, daß q und u auf einen Nullpunkt, der nicht mit dem Arbeitspunkt übereinstimmt, bezogen sind:

$$\begin{aligned} \dot{q}_{\text{ges}1} &= f_1(q_{\text{ges}1}, \dots, q_{\text{ges}n}, u_{\text{ges}1}, \dots, u_{\text{ges}m}) \\ &\vdots \\ \dot{q}_{\text{ges}n} &= f_n(q_{\text{ges}1}, \dots, u_{\text{ges}1}, \dots). \end{aligned} \quad (7.111)$$

Unter Einführung des Funktionenvektors f der (i. allg.) nichtlinearen Funktionen f_i erhält man die kompakte Schreibweise der

nichtlinearen Zustandsgleichung:

$$\dot{q}_{\text{ges}} = f(q_{\text{ges}}, u_{\text{ges}}). \quad (7.112)$$

Wegen der bereits genannten Vorzüge der linearen Theorie ist es erstrebenswert und für die gewöhnlich vorliegenden kleinen Aussteuerungen um einen Arbeitspunkt häufig zulässig, diese Gleichung im Arbeitspunkt zu linearisieren.

Die bei einem gegebenen konstanten Eingangsvektor u_0 möglichen Gleichgewichtspunkte findet man nach Abschn. 2.3.3. durch Nullsetzen der Ableitung des Zustandsvektors. Ein auf diese Weise gefundener und im folgenden betrachteter Arbeitspunkt sei durch den Zustandsvektor q_0 gekennzeichnet:

$$\dot{q}_{\text{ges}}|_{q_0} = f(q_0, u_0) = 0. \quad (7.113)$$

Die weiterhin untersuchten Abweichungen Δq und Δu von diesem Arbeitspunkt q_0 ,

u_0 wollen wir, wie bereits im Abschn. 3.3.1. grundsätzlich vereinbart, mit q und u bezeichnen. Dann tritt an die Stelle von Gl. (7.112)

$$\dot{q}_0 + \dot{q} = f(q_0 + q, u_0 + u). \quad (7.114)$$

Ist die rechte Seite dieser Gleichung um den Arbeitspunkt in eine Taylorreihe entwickelbar, dann erhalten wir (der Index bezeichnet die Ableitung im Arbeitspunkt $q_{\text{ges}} = q_0, u_{\text{ges}} = u_0$):

$$\dot{q}_0 + \dot{q} \approx f(q_0, u_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial q} \right|_{q_0, u_0} q + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{q_0, u_0} u. \quad (7.115)$$

Hierbei gilt allgemein für die Ableitung eines $(n, -1)$ (Funktionen-) Vektors f nach einem $(m, 1)$ -Vektor u

$$\frac{\partial f}{\partial u} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}, \quad (7.116)$$

wovon man sich im vorliegenden Fall überzeugen kann, wenn man die Taylorentwicklung für die der Gl. (7.114) entsprechenden skalaren Differentialgleichungen einzeln durchführt und die Ergebnisse zu einer Vektorgleichung zusammenfaßt. Nach Abzug Gl. (7.113) findet man die erstrebte *lineare Näherung*

$$\dot{q} \approx Aq + Bu \quad (7.117)$$

mit

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial q} \right|_{q_0, u_0}, [a_{ij}] = \left. \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \right|_{q_0, u_0} \quad (7.118)$$

und

$$B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{q_0, u_0}, [b_{ij}] = \left. \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right|_{q_0, u_0}. \quad (7.119)$$

Zuweilen ist für einen gegebenen Anfangszustand und einen bestimmten Eingangsvektor $u_{\text{ges}}(t) = u_0(t)$ – z. B. mit einem Digitalrechner – die zugehörige Trajektorie $q_{\text{ges}}(t) = q_0(t)$ berechnet worden, für die entsprechend der nichtlinearen Differentialgleichung (7.112) gilt:

$$\dot{q}_0 = f(q_0, u_0). \quad (7.120)$$

Es interessiert die Abweichung $q(t)$ von dieser Trajektorie, wenn die Steuerung um die Größe $u(t)$ von der Sollsteuerung $u_0(t)$ und der Anfangszustand um $q(0)$ von $q_0(0)$ abweicht. Die Bezugsgrößen $q_0(t), u_0(t)$ sind jetzt im Unterschied zur oben untersuchten Aussteuerung um einen Arbeitspunkt nicht mehr konstante Vektoren. Doch behalten weiterhin die Gln. (7.114), (7.115) ihre Gültigkeit. Nach Abzug der Gl.

(7.120) – die diesmal nicht identisch Null ist – von Gl. (7.115) erhält man die als *Störungsgleichung* bezeichnete lineare, jedoch *zeitvariante Differentialgleichung*:

$$\dot{q}(t) \approx A(t) q(t) + B(t) u(t) \quad (7.121)$$

mit

$$A(t) = \partial f / \partial q|_{q_0(t), u_0(t)} \quad (7.122)$$

und

$$B(t) = \partial f / \partial u|_{q_0(t), u_0(t)} \quad (7.123)$$

Die Ableitungen sind jetzt nicht im Arbeitspunkt, sondern entlang der vorher berechneten Bezugstrajektorie zu nehmen. Das ist ein charakteristisches Beispiel eines zeitvariablen linearen Systems. Diese Systeme sollen jedoch hier nicht weiter betrachtet werden.

7.8. Zusammenfassung des Lösungswegs und Anwendungsbeispiel

7.8.1. Zusammenfassung des Lösungswegs

Eine Zusammenfassung des Lösungswegs zur Ermittlung von Signalübertragungen über die Vektordifferentialgleichung in geschlossener Form bringt das in Tafel 7.1 aufgezeichnete Flußbild. Die angegebenen Gleichungen zur Transformation auf kanonische Normalform sowie die Sylvesterformel Gl. (7.103) gelten hierbei für paarweise verschiedene Eigenwerte (s. o.).

7.8.2. Anwendungsbeispiel, Aufgabenstellung und Systemgleichungen

Zur Einübung der in diesem Kapitel vorgestellten Lösungsverfahren sei die Aufgabe gestellt, für den Gleichstrommotor von Bild 7.1 den Drehzahlverlauf

- a) bei einer Anfangsdrehzahl von 25 Umdrehungen/s und verschwindender Ankerspannung (freie Bewegung)
- b) bei Anlegen einer Ankerspannung von 200 V zum Zeitpunkt $t = 0$ an den stillstehenden Motor (erzwungene Bewegung bei verschwindenden Anfangsbedingungen) zu ermitteln.

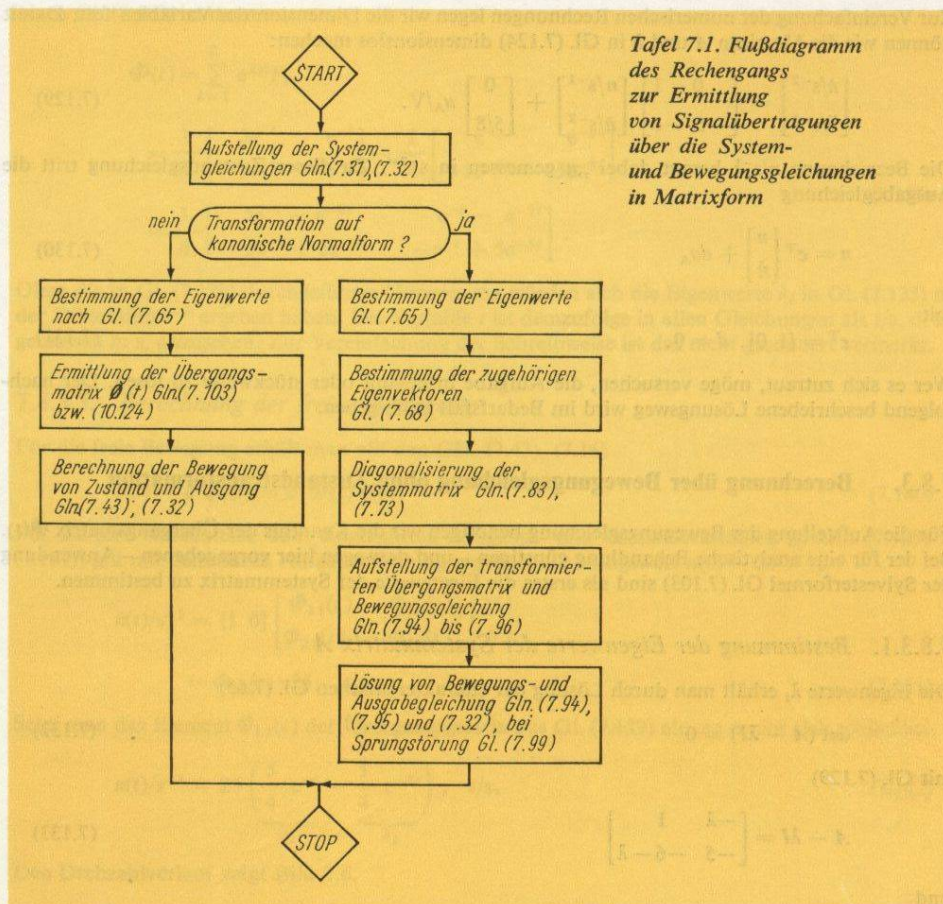
Die Berechnung soll dabei

1. über die Bewegungsgleichung Gl. (7.43) erfolgen, wobei die Übergangsmatrix $\Phi(t)$ über die Sylvesterformel Gl. (7.103) zu bestimmen ist
2. mittels Transformation der Systemmatrix auf Diagonalform und der System- und Bewegungsgleichungen auf kanonische Form vorgenommen werden.

Obwohl von der Übergangsmatrix nur zwei Elemente benötigt werden, soll sie vollständig bestimmt werden.

Als Systemgleichungen sollen die als Variante 1 angegebenen Gln. (7.7) bis (7.19) mit der Drehzahl und deren Ableitung als Zustandsvariable dienen:

$$\begin{bmatrix} \dot{n} \\ \ddot{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{ck\Phi_0^2}{L_A\theta} & -\frac{R_A}{L_A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ \dot{n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k\Phi_0}{L_A\theta} \end{bmatrix} u_A \quad (7.124)$$



Die Größen

$$L_A/R_A = T_{el}, \quad \theta R_A / ck\Phi_0^2 = T_{mech}, \quad (7.125)$$

die die Dimension s haben, können als elektrische Zeitkonstante T_{el} des Ankerkreises bzw. als konstruktiv bedingte mechanische Zeitkonstante T_{mech} der bewegten Teile angesehen werden (s. Abschn. 10.3.4.). Für den hier betrachteten Motor mittlerer Größe sei

$$T_{el} = \frac{1}{6} \text{ s}, \quad T_{mech} = \frac{6}{5} \text{ s}. \quad (7.126)$$

Dann gilt für die Elemente der Systemmatrix A von Gl. (7.124):

$$\begin{aligned} a_{21} &= -\frac{1}{T_{mech}T_{el}} = -5 \text{ s}^{-2} \\ a_{22} &= -\frac{1}{T_{el}} = -6 \text{ s}^{-1}. \end{aligned} \quad (7.127)$$

Der Eingabevektor b [s. Gl. (7.124)] hat die Elemente

$$b_1 = 0, \quad b_2 = \frac{k\Phi_0}{L_A\theta} = \frac{5}{8} \frac{\text{s}^{-3}}{\text{V}}. \quad (7.128)$$

Zur Vereinfachung der numerischen Rechnungen legen wir die Dimension der Variablen fest. Damit können wir die Matrizen A und b in Gl. (7.124) dimensionslos machen:

$$\begin{bmatrix} \dot{n}/s^{-2} \\ \ddot{n}/s^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n/s^{-1} \\ \dot{n}/s^{-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5/8 \end{bmatrix} u_A/V. \quad (7.129)$$

Die Bezeichnung n/s^{-1} besagt dabei „ n gemessen in s^{-1} “. Zu dieser Zustandsgleichung tritt die Ausgabegleichung

$$n = c^T \begin{bmatrix} n \\ \dot{n} \end{bmatrix} + du_A \quad (7.130)$$

mit

$$c^T = [1 \ 0], \quad d = 0. \quad (7.131)$$

Wer es sich zutraut, möge versuchen, die Aufgabe insgesamt oder stückweise zu lösen. Der nachfolgend beschriebene Lösungsweg wird im Bedarfsfall Hilfe geben.

7.8.3. Berechnung über Bewegungsgleichung ohne Zustandstransformation

Für die Aufstellung der Bewegungsgleichung benötigen wir die Kenntnis der Übergangsmatrix $\Phi(t)$. Bei der für eine analytische Behandlung günstigen – und deswegen hier vorgegebenen – Anwendung der Sylvesterformel Gl. (7.103) sind als erstes die Eigenwerte der Systemmatrix zu bestimmen.

7.8.3.1. Bestimmung der Eigenwerte der Systemmatrix A

Die Eigenwerte λ_i erhält man durch Lösung der charakteristischen Gl. (7.65)

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (7.132)$$

mit Gl. (7.129)

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -5 & -6-\lambda \end{bmatrix} \quad (7.133)$$

und

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 6\lambda + 5 = (\lambda + 1)(\lambda + 5). \quad (7.134)$$

Die Eigenwerte sind somit

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -5. \quad (7.135)$$

7.8.3.2. Ermittlung der Übergangsmatrix $\Phi(t)$

Bei Anwendung der Sylvesterformel sind zunächst die F_i nach Gl. (7.102) zu bestimmen:

$$F_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{A - \lambda_j I}{\lambda_i - \lambda_j}; \quad i = 1, 2. \quad (7.136)$$

Mit den beiden Eigenwerten von Gl. (7.135) findet man

$$F_1 = \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \quad (7.137)$$

und

$$F_2 = \frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}. \quad (7.138)$$

Nach Gl. (7.103) ist dann

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \sum_{i=1}^2 e^{\lambda_i t} F_i \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5e^{-t} & e^{-t} \\ -5e^{-t} & -e^{-t} \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} e^{-5t} & e^{-5t} \\ -5e^{-5t} & -5e^{-5t} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5e^{-t} - e^{-5t} & e^{-t} - e^{-5t} \\ -5e^{-t} + 5e^{-5t} & -e^{-t} + 5e^{-5t} \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (7.139)$$

Ohne die in Gl. (7.129) durchgeführte Normierung würden sich die Eigenwerte λ_i in Gl. (7.135) mit der Dimension s^{-1} ergeben haben. Die Variable t ist demzufolge in allen Gleichungen als t/s , d. h. t gemessen in s , anzusehen. Zur Vereinfachung der Schreibweise ist das nicht gesondert vermerkt.

7.8.3.3. Berechnung der freien Bewegung

Für die freie Bewegung erhält man mit den Gln. (7.43), (7.16)

$$x(t) = c^T q_{tr}(t) = c^T \Phi(t) q(0). \quad (7.140)$$

Für die hier betrachteten bzw. eingeführten Ausgangs- und Zustandsvariablen [s. Gln. (7.129) bis (7.131)] gilt mit dem durch Aufgabenstellung gegebenen Anfangswert $n(0) = 25 s^{-1}$:

$$\begin{aligned}n(t)/s^{-1} &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) \\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \Phi_{11}(t) \cdot 25; \quad t/s.\end{aligned}\quad (7.141)$$

Setzt man das Element $\Phi_{11}(t)$ der Übergangsmatrix aus Gl. (7.139) ein, so ergibt sich schließlich

$$n(t)/s^{-1} = 25 \left(\underbrace{\frac{5}{4} e^{-t}}_{n_1} - \underbrace{\frac{1}{4} e^{-5t}}_{n_2} \right); \quad t/s. \quad (7.142)$$

Den Drehzahlverlauf zeigt Bild 7.6.

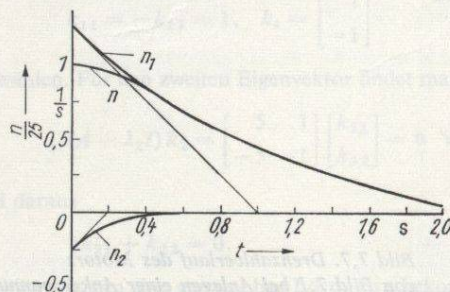


Bild 7.6. Drehzahlverlauf des Motors von Bild 7.1 bei Anfangsdrehzahl $25 s^{-1}$ (freie Bewegung)

7.8.3.4. Erzwungene Bewegung

Für verschwindende Anfangsbedingungen $n(0) = \dot{n}(0) = 0$ und Anlegen einer Ankerspannung

$$u_A(t) = u_0 \sigma(t), \quad u_0 = 200 \text{ V} \quad (7.143)$$

erhält man nach den Gln. (7.43), (7.16)

$$n(t) = c^T q_{erzw}(t) = c^T \int_0^t \Phi(t - \tau) b u_0 d\tau. \quad (7.144)$$

Mit der Variablentransformation

$$t - \tau = \vartheta, \quad d\tau = -d\vartheta \quad (7.145)$$

und den neuen Grenzwerten

$$\tau = 0 \rightarrow \vartheta = t \quad (7.146)$$

$$\tau = t \rightarrow \vartheta = 0$$

kann Gl. (7.144) vereinfacht werden:

$$n(t) = c^T \int_0^t \Phi(\vartheta) d\vartheta b u_0. \quad (7.147)$$

Einsetzen von b und c^T aus Gln. (7.129), (7.131) führt auf

$$\begin{aligned} n(t)/s^{-1} &= [1 \ 0] \int_0^t \begin{bmatrix} \Phi_{11}(\vartheta) & \Phi_{12}(\vartheta) \\ \Phi_{21}(\vartheta) & \Phi_{22}(\vartheta) \end{bmatrix} d\vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 5/8 \end{bmatrix} 200 \\ &= \int_0^t \Phi_{12}(\vartheta) d\vartheta \frac{5}{8} 200; \quad t/s. \end{aligned} \quad (7.148)$$

Mit dem Element Φ_{12} aus Gl. (7.139) ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} n/s^{-1} &= \int_0^t (e^{-\vartheta} - e^{-5\vartheta}) d\vartheta \cdot 5/4 \cdot 25 \\ &= 25 \left(\underbrace{1}_{n_\infty} - \underbrace{\frac{5}{4} e^{-t}}_{n_1} + \underbrace{\frac{1}{4} e^{-5t}}_{n_2} \right); \quad t/s. \end{aligned} \quad (7.149)$$

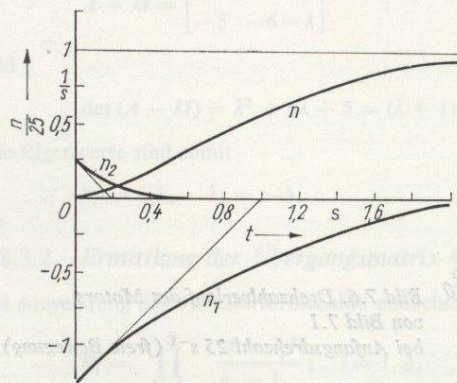


Bild 7.7. Drehzahlverlauf des Motors von Bild 7.1 bei Anlegen einer Ankerspannung (erzwungene Bewegung)

Den Drehzahlverlauf erläutert Bild 7.7. Ein Vergleich mit Bild 7.6 macht deutlich, daß für den Sonderfall der Sprungstörung und der freien Bewegung aus einem Anfangszustand $n(0) = n_\infty$; $\dot{n}(0) = \ddot{n}(0) = \dots = 0$ gilt:

$$n_{\text{erzw}}(t) = 1 - n_{\text{fr}}(t). \quad (7.150)$$

7.8.4. Berechnung mittels kanonischer Transformation der Systemgleichungen

Soll der im Abschn. 7.5. vorgestellte Lösungsweg über die kanonische Transformation mit der Eigenvektormatrix eingeschlagen werden, so müssen zunächst die zu den Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren bestimmt werden.

7.8.4.1. Bestimmung der Eigenvektoren

Nach Gl. (7.68) ergeben sich die Eigenvektoren k_i aus der Bedingung

$$(A - \lambda_i I) k_i = 0. \quad (7.151)$$

Für den Eigenwert $\lambda_1 = -1$ findet man

$$\begin{bmatrix} 0+1 & 1 \\ -5 & -6+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{bmatrix} = 0 \quad (7.152)$$

und daraus

$$k_{11} + k_{12} = 0. \quad (7.153)$$

Hieraus ist nur das Verhältnis der Komponenten, d. h. die Richtung des Eigenvektors, bestimmbar. Normiert man den Eigenvektor auf die Länge 1, so gilt nach Gl. (7.70) für die normierten Komponenten

$$\hat{k}_{11}^2 + \hat{k}_{12}^2 = 1 \quad (7.154)$$

und außerdem natürlich entsprechend Gl. (7.153)

$$\hat{k}_{11} + \hat{k}_{12} = 0. \quad (7.155)$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$\hat{k}_{11} = -\hat{k}_{12} = 1/\sqrt{2}. \quad (7.156)$$

Für die numerischen Berechnungen ist es im vorliegenden Fall bequemer, die Normierungsbeziehung Gl. (7.154) fallenzulassen und

$$k_{11} = -k_{12} = 1, \quad k_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (7.157)$$

zu wählen. Für den zweiten Eigenvektor findet man mit dem Eigenwert $\lambda_2 = -5$

$$(A - \lambda_2 I) k_2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{21} \\ k_{22} \end{bmatrix} = 0 \quad (7.158)$$

und daraus

$$5k_{21} + k_{22} = 0. \quad (7.159)$$

Wählen wir, um eine ganzzahlige Lösung zu bekommen, $k_{21} = -1$, dann wird

$$k_{21} = -1, \quad k_{22} = 5, \quad k_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}. \quad (7.160)$$

7.8.4.2. Diagonalisierung der Systemmatrix

Zur Diagonalisierung der Systemmatrix entsprechend Gl. (7.83) bestimmen wir zunächst die Eigenvektormatrix

$$K = [k_1 \ k_2] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \quad (7.161)$$

und die invertierte Eigenvektormatrix

$$\mathbf{K}^{-1} = \frac{\text{adj } \mathbf{K}}{\det \mathbf{K}} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.162)$$

Durch Ähnlichkeitstransformation mit der Eigenvektormatrix

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{K} &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \end{aligned} \quad (7.163)$$

erhalten wir die erstrebte Diagonalmatrix $\mathbf{A} = \text{diag}(\lambda_i)$ mit den Eigenwerten λ_i in der Hauptdiagonalen.

7.8.4.3. Ermittlung der Übergangsmatrix $\Phi(t)$ aus $e^{\mathbf{A}t}$ (zum Vergleich)

Zum Vergleich mit dem im Abschn. 7.8.3. erhaltenen Ergebnis wollen wir jetzt die Übergangsmatrix $\Phi(t)$ über die Beziehung Gl. (7.106) berechnen. Unter Berücksichtigung von Gl. (7.107) finden wir

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \mathbf{K} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{K}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5e^{-t} & e^{-t} \\ e^{-5t} & e^{-5t} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5e^{-t} - e^{-5t} & e^{-t} - e^{-5t} \\ -5e^{-t} + 5e^{-5t} & -e^{-t} + 5e^{-5t} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.164)$$

Das Ergebnis ist in der erwarteten Übereinstimmung mit dem über die Sylvesterformel erhaltenen [s. Gl. (7.139)].

7.8.4.4. Freie Bewegung mit Anfangsdrehzahl 25 U/s

Zur Berechnung des ungestörten Verhaltens in den neuen Zustandskoordinaten $\hat{\mathbf{q}}_t$ gehen wir von Gl. (7.94) aus und erhalten mit Gl. (7.96)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}_{tr}(t) &= e^{\mathbf{A}t} \hat{\mathbf{q}}(0) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{q}(0) \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{25}{4} = \begin{bmatrix} 5e^{-t} \\ e^{-5t} \end{bmatrix} \frac{25}{4}; \quad t/s. \end{aligned} \quad (7.165)$$

Mit den Gln. (7.90), (7.88) folgt daraus ($d = 0$)

$$\begin{aligned} n(t)/s^{-1} = x(t) &= \hat{\mathbf{c}}^T \hat{\mathbf{q}}_{tr}(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{K} \hat{\mathbf{q}}_{tr}(t) \\ &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}_{tr}(t) \\ &= [1 \ -1] \begin{bmatrix} 5e^{-t} \\ e^{-5t} \end{bmatrix} \frac{25}{4} = 25 \left(\frac{5}{4} e^{-t} - \frac{1}{4} e^{-5t} \right); \quad t/s. \end{aligned} \quad (7.166)$$

Das ist erwartungsgemäß das gleiche Ergebnis wie in Gl. (7.142).

7.8.4.5. Erzwungene Bewegung bei Anlegen einer Ankerspannung von 200 V

Nach kanonischer Transformation können wir für den hier vorliegenden Sonderfall einer Sprungstörung die hierfür aufbereitete Bewegungsgleichung Gl. (7.99) verwenden:

$$\hat{q}_{\text{erzw}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{e^{\lambda_1 t} - 1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{e^{\lambda_2 t} - 1}{\lambda_2} \end{bmatrix} \hat{b} u_0. \quad (7.167)$$

Mit den Gl. (7.87), (7.129) finden wir, wenn wir u_0 in V einsetzen,

$$\hat{b} = K^{-1}b = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5/8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{5}{8 \cdot 4}. \quad (7.168)$$

Damit wird

$$\hat{q}_{\text{erzw}}(t) = \begin{bmatrix} 1 - e^{-t} \\ \frac{1}{5}(1 - e^{-5t}) \end{bmatrix} \frac{5 \cdot 200}{4 \cdot 8}; \quad t/s. \quad (7.169)$$

Die gesuchte Drehzahl erhalten wir schließlich nach Gl. (7.90) mit dem schon in Gl. (7.166) bestimmten Wert für $\hat{c}^T$ zu

$$\begin{aligned} n(t)/s^{-1} &= \hat{c}^T \hat{q}_{\text{erzw}}(t) \\ &= [1 \quad -1] \begin{bmatrix} 1 - e^{-t} \\ \frac{1}{5}(1 - e^{-5t}) \end{bmatrix} \frac{5}{4} \cdot 25 \\ &= 25 \left(1 - \frac{5}{4} e^{-t} + \frac{1}{4} e^{-5t} \right); \quad t/s \end{aligned} \quad (7.170)$$

in Übereinstimmung mit Gl. (7.149).

8. Beschreibung von Signalübertragungen mittels Zerlegung in Impulse: Faltungsintegral

In diesem Kapitel soll das Ausgangssignal dadurch berechnet werden, daß das Eingangssignal in impulsförmige Elementarsignale zerlegt wird (s. Abschn. 8.1.), daß die zu den einzelnen Impulsen gehörenden elementaren Ausgangssignale bestimmt (s. Abschn. 8.3.) und daß diese durch Überlagerung zu dem gesamten Ausgangssignal zusammengesetzt werden (s. Abschn. 8.4.).

8.1. Zerlegung des Eingangssignals in impulsförmige Elementarsignale; Faltungsintegral

Zur Verdeutlichung des kybernetischen Tatbestands, der durch die im folgenden zu entwickelnden mathematischen Beziehungen beschrieben werden soll, wollen wir das Eingangssignal $u(t)$ zunächst durch eine Folge von Pulsen $i(t - k\Delta\vartheta)$ (Bild 8.1) mit endlicher Breite $\Delta\vartheta$ und der Amplitude $1/\Delta\vartheta$, also mit der Fläche 1, grob approximieren, wie es Bild 8.2 zeigt.

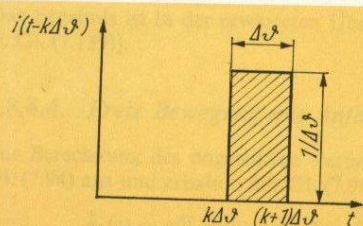


Bild 8.1. Puls $i(t - k\Delta\vartheta)$

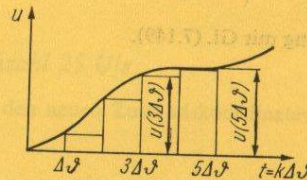


Bild 8.2. Approximation des Eingangssignals durch eine Folge von Pulsen endlicher Breite

Damit jeder Puls $i(t - k\Delta\vartheta)$ entsprechend Bild 8.2 die Amplitude erhält, die das Eingangssignal $u(t)$ zu Beginn seines Auftretens $t = k\Delta\vartheta$ hat, muß er offensichtlich mit $u(k\Delta\vartheta)\Delta\vartheta$ multipliziert werden. Für die Approximation des Eingangssignals im Intervall $-T \leq t \leq T$ erhalten wir mit $N = T/\Delta\vartheta$ auf diese Weise

$$u(t) \approx \sum_{k=-N}^N u(k\Delta\vartheta) \Delta\vartheta i(t - k\Delta\vartheta); \quad (8.1)$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \pm N.$$

Zur Verbesserung der Approximation verringern wir die Pulsbreite. Im Grenzfall $\Delta\vartheta \rightarrow +0$ können wir die diskrete Variable $k\Delta\vartheta$ durch die kontinuierliche ϑ , die

Pulsfunktion $i(t)$ entsprechend der im Abschn. 3.4.2. getroffenen Vereinbarung durch die Impulsfunktion (Stoßfunktion) $\delta(t)$, die Differenz $\Delta\vartheta$ durch das Differential $d\vartheta$ und die Summe durch das Integral ersetzen:

$$u(t) = \int_{-T}^T u(\vartheta) \delta(t - \vartheta) d\vartheta; \quad t \in [-T, T]. \quad (8.2)$$

Bei konstantem $T = N\Delta\vartheta$ streben hierbei $\Delta\vartheta \rightarrow +0$ und $N \rightarrow \infty$. Für zeitlich unbegrenzte Eingangssignale dehnen wir den Definitionsbereich auf die gesamte t -Achse aus und erhalten

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\vartheta) \delta(t - \vartheta) d\vartheta; \quad t \in (-\infty, \infty). \quad (8.3)$$

Die auf heuristische Weise hergeleitete Beziehung Gl. (8.3) stellt ein sog. *Faltungsintegral* dar. Genauer gesagt, handelt es sich um die Faltung der Funktion $u(t)$ mit der Impulsfunktion $\delta(t)$, wofür folgende Symbolik üblich ist:

$$u(t) = u(t) * \delta(t) \quad (8.4)$$

Das Rechnen mit der δ -Funktion hat in der Vergangenheit viele Diskussionen ausgelöst, da sie – wie schon im Abschn. 3.4.2. vermerkt – keine Funktion im Sinn der klassischen Analysis darstellt. Durch die nach 1945 entwickelte *Distributionentheorie* haben derartige – *Distributionen* genannte – verallgemeinerte Funktionen, wie die δ -Funktion eine darstellt, mathematisch exakt definiert und die für das Rechnen mit ihnen geltenden Regeln exakt begründet werden können. Wegen der Bedeutung, die die δ -Funktion für kybernetische Untersuchungen hat, sollen diese Regeln im folgenden Abschnitt angegeben werden.

8.2. Regeln für das Rechnen mit δ -Funktionen

Die von *Mikusinski* gegebene Begründung der Distributionentheorie beruht auf der Betrachtung von Folgen stetiger Funktionen $\{f_k(t)\}$, deren i -fache Integralfunktionen $\{f_k^{(-i)}(t)\}$ wieder (differenzierbare) Folgen bilden, die für $k \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen ein und dieselbe (stetige) Funktion $f^{(-i)}(t)$ konvergieren. Das sind stets Mengen von vielen Folgen, die zu einer Klasse äquivalenter Folgen zusammengefaßt werden können. Durch solche Klassen äquivalenter Folgen $\{f_k(t)\}$ werden die Distributionen definiert. Durch sie können unstetige Funktionen mathematisch anschaulich beschrieben werden. Betrachten wir beispielsweise Funktionen, für die gilt

$$p(t) \geq 0 \quad (8.5)$$

$$p(t) = 0 \quad \text{in } |t| > T \quad (8.6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt = 1. \quad (8.7)$$

Die Funktion

$$p_k(t) = kp(kt); \quad k \geq 1 \quad (8.8)$$

ist in der Amplitude um den Faktor k vergrößert; der zeitliche Verlauf erfolgt k -mal schneller. Sie erfüllt also ebenfalls vorstehende Bedingungen und verschwindet darüber hinaus schon bei $|t| > T/k$. Bild 8.3 bringt ein Beispiel einer solchen Funktion.

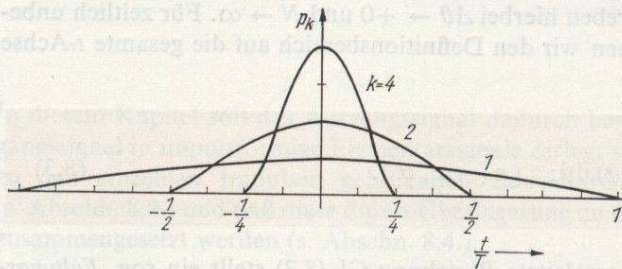


Bild 8.3
Funktionenfolge $p_k(t)$

Für veränderliches k erhält man eine Funktionenfolge. Für $k \rightarrow \infty$ erreicht $p_k(t)$ die δ -Funktion:

$$p_k(t) \rightarrow \delta(t) \quad \text{für } k \rightarrow \infty. \quad (8.9)$$

Die Bedingung Gl. (8.6) kann dabei durch die schwächere Bedingung

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} p(t) = 0 \quad (8.10)$$

ersetzt werden, was die Angabe einfacher analytischer Ausdrücke für $p_k(t)$ erleichtert.

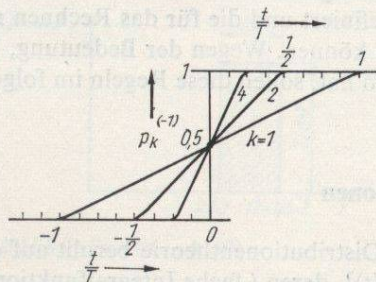


Bild 8.4. Folge der Integralfunktionen $p_k^{(-1)}(t)$
zur Funktionenfolge von Bild 8.3

Aus der im Bild 8.4 dargestellten Folge der Integralfunktionen (der Stammfunktionen) zur Funktionenfolge von Bild 8.3 erkennt man, daß diese für $k \rightarrow \infty$ die Sprungfunktion erreichen:

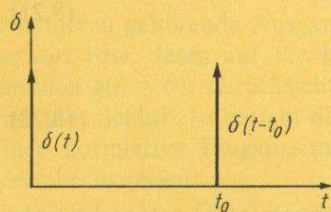
$$p_k^{(-1)}(t) \rightarrow \sigma(t) \quad \text{für } k \rightarrow \infty \quad (8.11)$$

mit

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0. \end{cases} \quad (8.12)$$

Die durch zweifache Integration erhaltene Folge von Funktionen $p_k^{(-2)}(t)$ konvergiert für $k \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen die stetige Rampenfunktion.

Mit Hilfe der zur Definition von Distributionen verwendeten Folgen von stetigen Funktionen bzw. von differenzierbaren Integralfunktionen können die für das Rechnen mit Distributionen gültigen Regeln abgeleitet werden. Von ihnen interessieren uns die für das Rechnen mit δ -Funktionen und deren Ableitungen gültigen Vorschriften. Sie seien ohne Beweise angegeben. Im voraus sei vermerkt, daß $\delta(t - t_0)$ einen zur Zeit $t = t_0$ auftretenden Einheitsimpuls (Stoß) darstellt, wie es Bild 8.5 zeigt.

Bild 8.5. Darstellung der Distribution $\delta(t - t_0)$

Regeln für das Rechnen mit δ -Funktionen

1. Addition von δ -Funktionen und deren Ableitungen:

$$a\delta(t) + b\delta(t) = (a + b)\delta(t) \quad (8.13)$$

$$a\delta^{(i)}(t) + b\delta^{(i)}(t) = (a + b)\delta^{(i)}(t). \quad (8.14)$$

2. Differentiation von δ -Funktionen und der Sprungfunktion

Distributionen sind beliebig oft differenzierbar. Damit existiert

$$\delta^{(i)}(t) = \frac{d^i}{dt^i} \delta(t); \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (8.15)$$

Durch Differentiation der Sprungfunktion erhält man die δ -Funktion

$$\frac{d}{dt} \sigma(t) = \delta(t). \quad (8.16)$$

3. Multiplikation einer δ -Funktion bzw. ihrer Ableitung mit einer in t bzw. t_0 stetigen Funktion $f(t)$:

$$f(t) \delta(t) = f(0) \delta(t) \quad (8.17)$$

$$f(t) \delta(t - t_0) = f(t_0) \delta(t - t_0). \quad (8.18)$$

Diese Ergebnisse sind einzusehen, wenn man bedenkt, daß $\delta(t - t_0)$ für $t \neq t_0$ verschwindet. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [f(t) \delta(t)] &= f(0) \dot{\delta}(t) \\ &= \dot{f}(t) \delta(t) + f(t) \dot{\delta}(t). \end{aligned} \quad (8.19)$$

Die erste Zeile folgt mit Gl. (8.17), die zweite durch Anwendung der Kettenregel.

Damit findet man

$$f(t) \dot{\delta}(t) = f(0) \dot{\delta}(t) - \dot{f}(0) \delta(t) \quad (8.20)$$

für $\dot{f}(t)$ stetig in $t = 0$.

4. Integral der δ -Funktion

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(t - t_0) dt = \begin{cases} 1 & t_1 < t_0 < t_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (8.21)$$

$$\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = \sigma(t) \quad (8.22)$$

5. Faltung von δ -Funktionen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\vartheta) \delta(t - \vartheta) d\vartheta = f(t) * \delta(t) = f(t) \quad (8.23)$$

für $f(\vartheta)$ stetig in $\vartheta = t$.

Diese oben heuristisch abgeleitete Beziehung [s. Gl. (8.3)] dient auch zuweilen als Definitionsgleichung für die δ -Funktion. Durch Substitution $t - \vartheta = \tau$ findet man

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) f(t - \tau) d\tau = \delta(t) * f(t) = f(t). \quad (8.24)$$

Die Faltung ist somit kommutativ:

$$f(t) * \delta(t) = \delta(t) * f(t) = f(t). \quad (8.25)$$

In Erweiterung dieser Beziehungen gilt

$$f^{(i)}(t) * \delta(t) = \delta^{(i)}(t) * f(t) = f^{(i)}(t) \quad (8.26)$$

für $f^{(i)}(\tau)$ stetig an der Stelle $\tau = t$ und

$$f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0). \quad (8.27)$$

Für die *Faltung mit der Sprungfunktion* finden wir schließlich

$$f(t) * \sigma(t) = \sigma(t) * f(t) = \int_{-0}^t f(\tau) d\tau. \quad (8.28)$$

Bei Einschränkung des Integrationsintervalls von Gl. (8.24) gilt

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(\tau) f(t - \tau) d\tau = \begin{cases} f(t) & \text{für } t_1 < t < t_2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (8.29)$$

8.3. Ermittlung der elementaren Ausgangssignale: Gewichtsfunktion

Als nächstes müssen wir das zu einem elementaren Eingangssignal $u_\delta(t)$ gehörende elementare Ausgangssignal $x_\delta(t)$ bestimmen. Das erstere ist gemäß Gl. (8.3) ein zur Zeit $t = \vartheta$ auftretender Impuls der Amplitude $u(\vartheta)$:

$$u_\delta(t) = \underbrace{u(\vartheta) d\vartheta}_{\text{Impulsfläche}} \underbrace{\delta(t - \vartheta)}_{\text{Einheitsimpuls zur Zeit } t = \vartheta}. \quad (8.30)$$

Das hierzu gehörende Ausgangssignal ist die im Abschn. 3.4.2. eingeführte *Impulsantwort* bzw. deren auf die Impulsstärke $u(\vartheta) d\vartheta$ normierte Form, die *Gewichtsfunktion* $g(t - \vartheta)$. Berücksichtigen wir die Impulsstärke und Zeitverschiebung $-\vartheta$ erst zum Schluß, so besteht die Aufgabe, die Gewichtsfunktion $g(t)$ als Antwort auf einen normierten Eingangsimpuls $\delta(t)$ zu berechnen. Hierzu eignen sich folgende Verfahrensweisen:

- Bei bekannter Übertragungsfunktion des Übertragungsglieds erfolgt das vorteilhaft mit Hilfe der im Abschn. 10. eingeführten Laplacetransformation.
- Liegen die Systemgleichungen in der Standardform Gln. (7.13), (7.16) vor, so kann man die allgemeine Lösungsformel, die Bewegungsgleichung (7.43), verwenden. Für den hier vorliegenden Fall der gestörten Bewegung mit verschwindendem Anfangszustand erhält man für das normierte Eingangssignal u_δ

$$u_\delta(t) = \delta(t) \quad (8.31)$$

den normierten Zustandsverlauf

$$q_\delta(t) = \int_{-0}^t \Phi(t - \tau) b \delta(\tau) d\tau. \quad (8.32)$$

Wegen des bei $\tau = 0$ auftretenden Impulses $\delta(\tau)$ muß das Integrationsintervall in diesem Fall von -0 an genommen werden. Unter Beachtung der Regel Gl. (8.29) ergibt sich

$$q_\delta(t) = \begin{cases} \Phi(t) b & \text{in } t \geq 0 \\ 0 & t < 0. \end{cases} \quad (8.33)$$

Das gleiche Ergebnis erhielte man auch, wenn man die freie Bewegung für den Anfangszustand $q(0) = b$ berechnete:

$$q_\delta(t) = \Phi(t) q(0) = \Phi(t) b; \quad t \geq 0. \quad (8.34)$$

Dieser Weg ist einfacher, wenn man von der skalaren Differentialgleichung ausgeht und nicht die im Abschn. 2. für Vektordifferentialgleichungen vorbereiteten Lösungen benutzt.

Die *Gewichtsfunktion* findet man durch Einsetzen von Gl. (8.33) in die Ausgangsgleichung (7.16)

$$\begin{aligned} g(t) = x_\delta(t) &= c^T q_\delta(t) + d u_\delta(t) \\ &= c^T \Phi(t) b + d \delta(t) \quad \text{in } t \geq 0. \end{aligned} \quad (8.35)$$

Für die Bestimmung des zu Gl. (8.30) gehörenden *elementaren Ausgangssignals* $x_\vartheta(t)$ muß man noch die Zeitverschiebung des Eingangsimpulses und dessen Stärke berücksichtigen:

$$\begin{aligned} x_\vartheta(t) &= u(\vartheta) d\vartheta g(t - \vartheta) \\ &= u(\vartheta) d\vartheta [c^T \Phi(t - \vartheta) b + d\delta(t - \vartheta)]. \end{aligned} \quad (8.36)$$

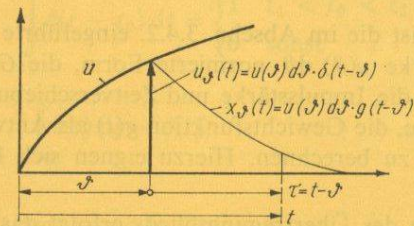


Bild 8.6. Elementares Ein- und Ausgangssignal bei Impulszerlegung

Aus Bild 8.6 ist ersichtlich, daß $g(t - \vartheta) = g(\tau)$ das Gewicht bestimmt, mit dem der zur Zeit $t = \vartheta$ auftretende Eingangsimpuls $u_\vartheta(t)$ zu dem zum Zeitpunkt t ermittelten Ausgangssignal beiträgt. Wegen des differentiellen $d\vartheta$ gilt hierbei $x_\vartheta(t) \rightarrow 0$, wobei die Integration über eine unendliche Menge elementarer Ausgangssignale ein endliches Gesamtausgangssignal ergibt. In den Bildern 8.6 und 8.7 sind für u und x_ϑ verschiedene Maßstäbe verwendet worden.

- c) Ein weiterer Weg zur Ermittlung der Gewichtsfunktion besteht in der Messung der Impulsantwort und der Approximation der erhaltenen Meßkurve durch einen geeigneten analytischen Ausdruck.

8.4. Überlagerung der elementaren Ausgangssignale mittels Faltungsintegral

Das gesamte Ausgangssignal $x(t)$ erhält man wegen des für lineare Systeme gültigen Superpositionsgesetzes durch Überlagerung der elementaren Ausgangssignale $x_\vartheta(t)$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\vartheta) g(t - \vartheta) d\vartheta. \quad (8.37)$$

Da die Wirkung nicht der Ursache zuvorkommen kann, gilt (s. Abschn. 3.4.3.)

$$\begin{aligned} g(t - \vartheta) &= g(\tau) \equiv 0 \quad \text{in} \quad \tau < 0 \\ &\quad \vartheta > t. \end{aligned} \quad (8.38)$$

Die obere Integrationsgrenze kann deshalb auf t herabgesetzt werden. Der rechtsseitige Grenzwert $+t$ muß genommen werden, wenn in der Gewichtsfunktion δ -Funktionen enthalten sind, die bei $\tau = 0$, d. h. $\vartheta = t$, auftreten. Sie würden anderenfalls nicht erfaßt.

Bei der deterministischen Behandlung kybernetischer Systeme werden gewöhnlich

nur Eingangssignale betrachtet, die für $t < 0$ verschwinden. Dann kann die untere Integrationsgrenze $\vartheta = 0$ gesetzt werden. (Enthält das Eingangssignal eine δ -Funktion bei $\vartheta = 0$, so gilt als untere Grenze -0 .)

$$x(t) = \int_0^+ u(\vartheta) g(t - \vartheta) d\vartheta \quad (8.39)$$

für $u(\vartheta) \equiv 0$ in $\vartheta < 0$.

Substituieren wir

$$t - \vartheta = \tau, \quad (8.40)$$

so finden wir die hierzu gleichwertige Beziehung

$$x(t) = \int_{-0}^t g(\tau) u(t - \tau) d\tau. \quad (8.41)$$

Beide Gleichungen bestätigen die mit Gl. (8.25) behauptete Gültigkeit des kommutativen Gesetzes für Faltungen. Mit der bereits vereinbarten Notierung können wir für sie schreiben:

$$x(t) = u(t) * g(t) = g(t) * u(t). \quad (8.42)$$

Damit erhält die im Bild 2.10 eingeführte Symbolik einen klaren mathematischen Sinn.

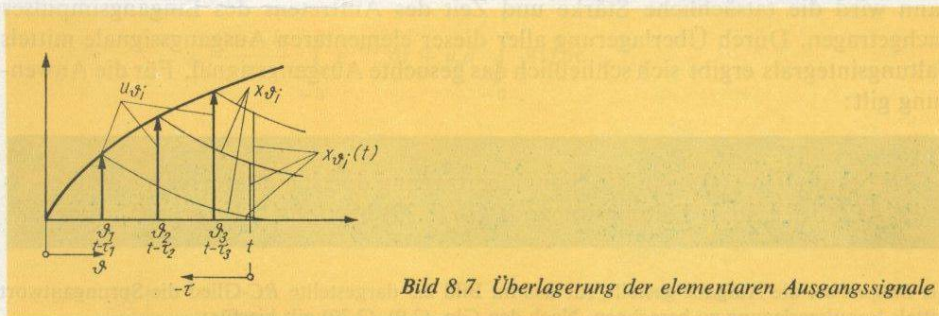


Bild 8.7. Überlagerung der elementaren Ausgangssignale

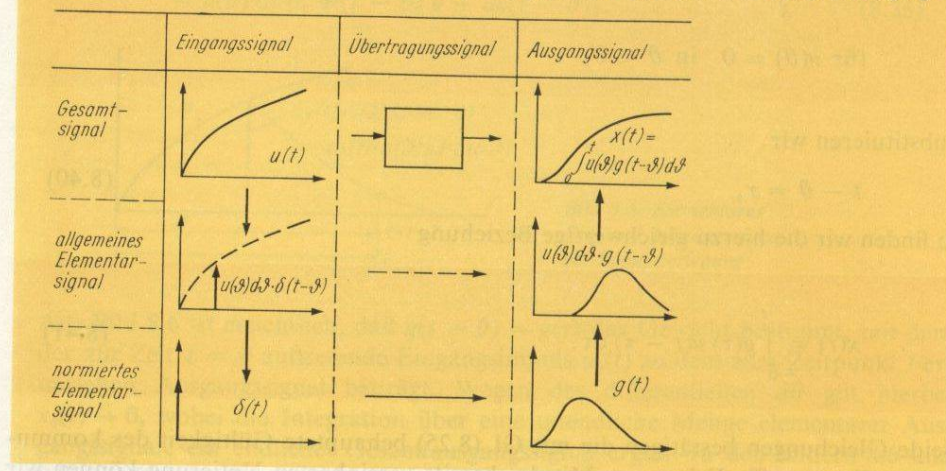
Bild 8.7 soll erläutern, wie die einzelnen Eingangssignale u_{ϑ_i} entsprechend ihrer Stärke und entsprechend dem durch die Gewichtsfunktion bewerteten Zeitintervall $\tau_i = t - \vartheta_i$ zum Ausgangssignal x im Zeitpunkt t beitragen.

Das Faltungsintegral wird bei der Behandlung stochastisch gestörter Systeme größere Bedeutung erlangen. Da bei diesen das Eingangssignal auch für negative t existiert, muß man dabei auf das durch Gl. (8.37) gegebene Integral zurückgreifen. Für die Untersuchung determiniert gestörter Systeme sind die in den Abschnitten 7. und 10. vorgelegten Methoden vorzuziehen.

8.5. Zusammenfassung des Lösungswegs und Beispiel

Eine Zusammenfassung des Lösungswegs bringt Tafel 8.1. Aus ihr ist ersichtlich, daß das Eingangssignal $u(t)$ zunächst [mit Gl. (8.3)] in Elementarsignale zerlegt wird.

Tafel 8.1. Rechengang ($\rightarrow$) bei Beschreibung von Signalübertragungen mittels Impulszerlegung



Für die Ermittlung der zugehörigen elementaren Ausgangssignale wird jedoch nur das normierte Elementarsignal $\delta(t)$ weiter betrachtet. Die zugehörige Systemantwort, die Gewichtsfunktion $g(t)$, findet man aus der gemessenen Impulsantwort, durch Laplacetransformation der Übertragungsfunktion $G(p)$ (s. Abschn. 10.3.) oder über die skalare oder vektorielle Differentialgleichung für Impulsstörung $u(t) = \delta(t)$. Als dann wird die tatsächliche Stärke und Zeit des Auftretens des Eingangsimpulses nachgetragen. Durch Überlagerung aller dieser elementaren Ausgangssignale mittels Faltungsintegrals ergibt sich schließlich das gesuchte Ausgangssignal. Für die Anwendung gilt:

S 8.1

Bei bekanntem $g(t)$ kann die Signalübertragung durch ein lineares kontinuierliches Glied mittels Faltungsintegrals Gl. (8.39) bzw. (8.41) berechnet werden.

Als *Beispiel* sei die Aufgabe gestellt, für das im Bild 2.3 dargestellte *RC*-Glied die Sprungantwort mittels Impulszerlegung zu berechnen. Nach den Gln. (2.9), (2.20) gilt hierfür:

$$\begin{aligned} a &= -1/T, \quad b = 1/T, \quad c = 1 - d, \\ d &= R_2/(R_1 + R_2), \quad T = (R_1 + R_2)C \end{aligned} \quad (8.43)$$

und

$$\Phi(t) = e^{at} = e^{-t/T} \quad (8.44)$$

Mit Gl. (8.33) findet man

$$q_\delta(t) = \Phi(t)b = e^{-t/T} \frac{1}{T}, \quad t \geq 0 \quad (8.45)$$

und mit Gl. (8.35)

$$\begin{aligned} g(t) &= c\Phi(t)b + d\delta(t) \\ &= \frac{1-d}{T} e^{-t/T} + d\delta(t); \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (8.46)$$

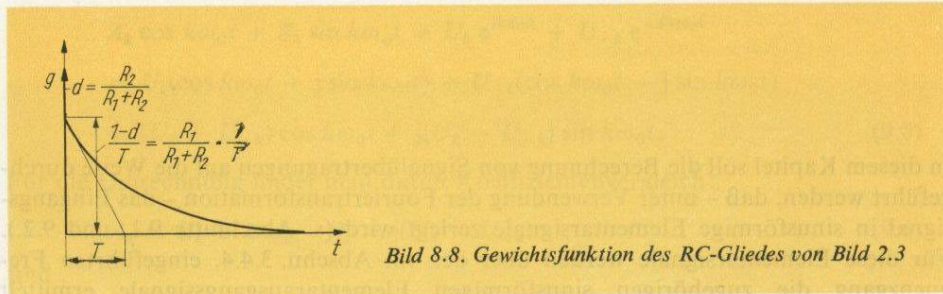


Bild 8.8. Gewichtsfunktion des RC-Gliedes von Bild 2.3

Die Gewichtsfunktion zeigt Bild 8.8. Das Ausgangssignal für die Sprungstörung

$$u = u_0 \sigma(t) \quad (8.47)$$

ermittelt man nach Gl. (8.41):

$$x(t) = \int_{-0}^t g(\tau) u_0 \sigma(t - \tau) d\tau.$$

Beachtet man, daß im Integrationsintervall $\sigma(t - \tau) = 1$ ist oder bedient man sich der Regel Gl. (8.28), so wird (Bild 8.9)

$$\begin{aligned} x(t) &= u_0 \int_{-0}^t g(\tau) d\tau \\ &= u_0 \frac{(1-d)}{T} \int_{-0}^t e^{-\tau/T} d\tau + u_0 d \int_{-0}^t \delta(\tau) d\tau \\ &= u_0 (1-d) [1 - e^{-t/T}] + u_0 d \sigma(t) \\ &= u_0 [1 - (1-d) e^{-t/T}] = u_0 \left[1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-t/T} \right]; \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (8.48)$$

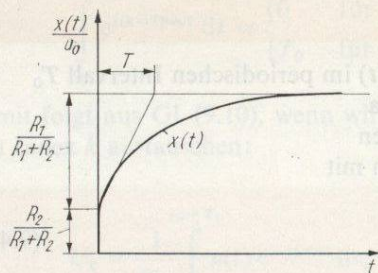


Bild 8.9. Sprungantwort des RC-Gliedes von Bild 2.3

9. Beschreibung von Signalübertragungen mittels Zerlegung in Sinusschwingungen: Fouriertransformation

In diesem Kapitel soll die Berechnung von Signalübertragungen auf die Weise durchgeführt werden, daß – unter Verwendung der Fouriertransformation – das Eingangssignal in sinusförmige Elementarsignale zerlegt wird (s. Abschnitte 9.1. und 9.2.). Für diese Elementarsignale werden über den im Abschn. 3.4.4. eingeführten Frequenzgang die zugehörigen sinusförmigen Elementarausgangssignale ermittelt (s. Abschn. 9.3.), durch deren Überlagerung sich das vollständige Ausgangssignal ergibt (s. Abschn. 9.4.). Betrachten wir zunächst die Zerlegung periodischer Eingangssignale und danach die hier stärker interessierenden nichtperiodischen Signale.

9.1. Zerlegung periodischer Signale in sinusförmige Elementarsignale mittels Fourierreihe

Nach dem *Fouriertheorem* kann ein mit der Periode T_0 periodisches Signal

$$u(t) = u(t + iT_0); \quad i = \pm 0, 1, 2, \dots \quad (9.1)$$

bei Erfüllung der sog. Dirichletschen Bedingungen in eine Folge von Sinusschwingungen mit den Frequenzen

$$\omega_k = k\omega_0 = k 2\pi/T_0; \quad (9.2)$$

$k = 1$: Grundwelle ω_0

$k = 2, 3, \dots$: Oberwellen

zerlegt werden:

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos k\omega_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin k\omega_0 t. \quad (9.3)$$

Die *Dirichletschen Bedingungen* fordern, daß $u(t)$ im periodischen Intervall T_0

1. eine endliche Zahl von Maxima und Minima
2. eine abzählbare Zahl endlicher Unstetigkeiten
3. eine endliche Zahl von Unendlichkeitsstellen mit

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |u(t)| dt \leq N; \quad N < \infty \quad (9.4)$$

aufweist. Diese Forderungen sind bei periodischen Signalen, die in den betrachteten

technischen, ökonomischen und biologischen Systemen auftreten, als erfüllt anzusehen.

Im Hinblick auf die bei den später betrachteten nichtperiodischen Signalen bevorzugte Darstellungsweise wollen wir die Sinus- und Kosinusfunktion mit Hilfe der Eulerschen Formel durch Exponentialfunktionen ersetzen:

$$\begin{aligned} A_k \cos k\omega_0 t + B_k \sin k\omega_0 t &= U_k e^{jk\omega_0 t} + U_{-k} e^{-jk\omega_0 t} \\ &= U_k (\cos k\omega_0 t + j \sin k\omega_0 t) + U_{-k} (\cos k\omega_0 t - j \sin k\omega_0 t) \\ &= (U_k + U_{-k}) \cos k\omega_0 t + j(U_k - U_{-k}) \sin k\omega_0 t. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Für die Umrechnung findet man durch Koeffizientenvergleich:

$$A_k = U_k + U_{-k}, \quad B_k = j(U_k - U_{-k}) \quad (9.6)$$

und

$$U_k = (A_k - jB_k)/2, \quad U_{-k} = (A_k + jB_k)/2. \quad (9.7)$$

Damit gilt für die Zerlegung des Eingangssignals in ungedämpfte Exponentialsignale (in Sinussignale):

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k e^{jk\omega_0 t}. \quad (9.8)$$

Zur Bestimmung der (komplexen) Amplituden U_k multiplizieren wir beide Seiten mit $e^{-jl\omega_0 t}$ und integrieren über eine Periode T_0 :

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} u(t) e^{-jl\omega_0 t} dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{-jl\omega_0 t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k e^{jk\omega_0 t} dt; \quad t_0 \text{ beliebig.} \quad (9.9)$$

Nach Vertauschung von Summation und Integration, was wir wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe tun dürfen, ergibt sich

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} u(t) e^{-jl\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j(k-l)\omega_0 t} dt. \quad (9.10)$$

Für das Integral auf der rechten Seite erhält man unter Beachtung von Gl. (9.2)

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j(k-l)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq l \\ T_0 & \text{für } k = l. \end{cases} \quad (9.11)$$

Somit folgt aus Gl. (9.10), wenn wir mit Rücksicht auf Gl. (9.8) den Index l durch den Index k austauschen:

$$U_k = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} u(t) e^{-jk\omega_0 t} dt; \quad k = \pm 0, 1, 2, \dots \quad (9.12)$$

Die U_k sind im allgemeinen Fall komplex, weshalb wir sie *komplexe Amplitude* nennen wollen. Aus Gl. (9.12) kann man ablesen, daß

$$U_{-k} = U_k^*, \quad (9.13)$$

wobei mit U_k^* die zu U_k konjugiert komplexe Größe bezeichnet werden soll. Daraus folgt wiederum, daß $|U_k|$ eine gerade und $\arg U_k$ eine ungerade Funktion in k ist. Wir führen folgenden Begriff ein:

D 9.1

Die grafische Darstellung des Betrags $|U_k|$ der [nach Gl. (9.12) berechneten] komplexen Amplitude eines entsprechend Gl. (9.8) zerlegten periodischen Signals in Abhängigkeit von $k = \omega/\omega_0$ als (ganzen) Vielfachen der Grundwelle heißt *Amplitudenspektrum*; die Darstellung ihres Winkels $\arg U_k$ über k heißt *Phasenspektrum* des periodischen Signals $u(t)$.

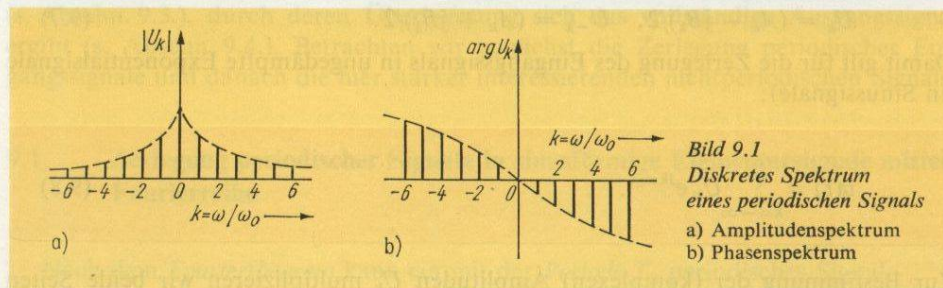


Bild 9.1
Diskretes Spektrum
eines periodischen Signals
a) Amplitudenspektrum
b) Phasenspektrum

Bild 9.1 zeigt Amplituden- und Phasenspektrum eines periodischen Signals mit der Periode $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Eine aus der vorstehenden Ableitung resultierende wichtige Erkenntnis ist die folgende:

S 9.1

Periodische Signale haben ein diskretes Amplituden- und Phasenspektrum.

Als ein weiterhin noch benötigtes Beispiel betrachten wir eine Pulsfolge gemäß Bild 9.2.

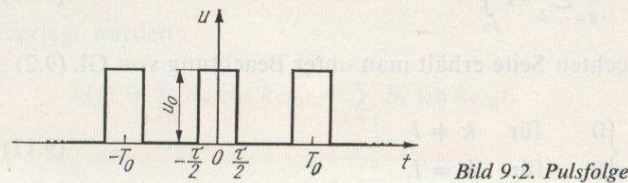


Bild 9.2. Pulsfolge

Für die komplexen Amplituden dieses Signals findet man nach Gl. (9.12), wenn man das Integrationsintervall $[-T_0/2, T_0/2]$ wählt und beachtet, daß $\tau < T_0$ ist:

$$\begin{aligned} U_k &= \frac{u_0}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{u_0}{T_0} \frac{e^{jk\omega_0 T_0/2} - e^{-jk\omega_0 T_0/2}}{jk\omega_0 \tau/2} \tau/2 \\ &= u_0 \frac{\tau}{T_0} \frac{\sin k\omega_0 \tau/2}{k\omega_0 \tau/2} = u_0 \frac{\tau}{T_0} \frac{\sin k\pi \tau/T_0}{k\pi \tau/T_0}. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Da U_k reell ist, genügt es, das Amplitudenspektrum aufzuzeichnen (Bild 9.3). Dieses hat die Hüllkurve (mit $k\omega_0 \rightarrow \omega$)

$$U_\omega = u_0 \frac{\tau}{T_0} \frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2}. \quad (9.15)$$

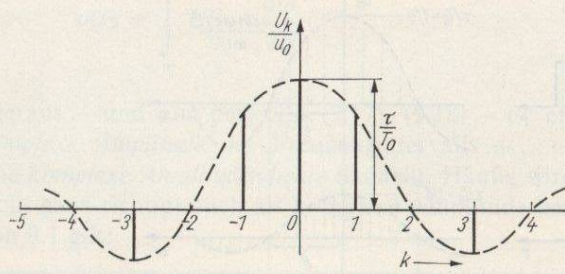


Bild 9.3. Spektrum der Pulsfolge von Bild 9.2 für $\tau = T_0/2$
 $k = \omega/\omega_0$

Wählen wir als Amplitude der Impulse statt u_0 den Wert $1/\tau$ und lassen dann τ gegen Null gehen, so erhalten wir eine Folge von δ -Impulsen. Für deren Amplitudenspektrum erhält man aus dem der oben betrachteten Impulsfolge durch Grenzübergang

$$U_k = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{T_0} \frac{\sin k\omega_0\tau/2}{k\omega_0\tau/2} = \frac{1}{T_0}. \quad (9.16)$$

Eine δ -Impulsfolge hat also ein konstantes Amplitudenspektrum (Bild 9.4).

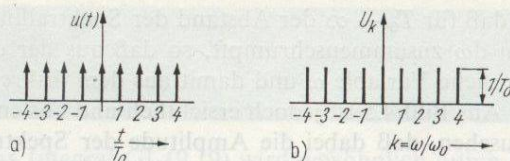


Bild 9.4. δ -Impulsfolge
a) Zeitverlauf
b) Amplitudenspektrum

Abschließend sei ohne Beweis vermerkt, daß bei Abbruch der Fourierreihe nach dem r -ten Glied diese endliche Reihe das tatsächliche Signal mit dem kleinsten mittleren quadratischen Fehler approximiert, der mit r harmonischen Schwingungen erzielbar ist.

9.2. Zerlegung nichtperiodischer Signale in sinusförmige Elementarsignale mittels Fourierintegrals

9.2.1. Einführung des Fourier- und Fourierumkehrintegrals und Zerlegung des Eingangssignals

Während periodische Signale unter den oben angegebenen Bedingungen durch ein diskretes Spektrum dargestellt werden können, erhält man bei nichtperiodischen Signalen, die ähnliche Voraussetzungen erfüllen [s. Gl. (9.21)], ein kontinuierliches Spektrum. Wir wollen uns das an der bereits betrachteten Impulsfolge (Bild 9.2) klarzumachen suchen. Hierzu vergrößern wir bei konstant gehaltener Impulsbreite die Periodendauer T_0 , bis schließlich ein einziger Impuls zurückbleibt und somit ein nichtperiodisches Signal vorliegt.

Bild 9.5 zeigt, daß die Form der Hüllkurve des Spektrums über der Frequenz ω dabei unverändert bleibt [s. Gl. (9.15)]. Bei einer Verdoppelung der Periodendauer T_0

halbiert sich jedoch der Abstand $\omega_0 = 2\pi/T_0$ zwischen den Spektrallinien. Ebenso halbieren sich deren Amplituden, die nach Gl. (9.14) proportional τ/T_0 sind.

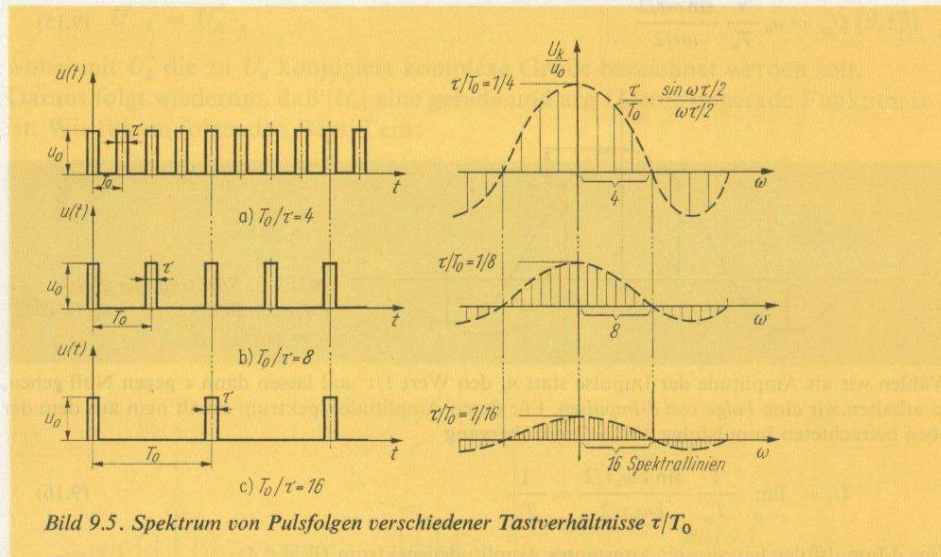


Bild 9.5. Spektrum von Pulsfolgen verschiedener Tastverhältnisse τ/T_0

Durch Extrapolation schließen wir, daß für $T_0 \rightarrow \infty$ der Abstand der Spektrallinien $\omega_0 = 2\pi/T_0$ zu einem differentiellen $d\omega$ zusammenschrumpft, so daß aus der diskreten Variablen $k\omega_0$ eine kontinuierliche Variable ω und damit aus dem diskreten Spektrum ein kontinuierliches wird. Aus Bild 4.5 ist jedoch ersichtlich und aus energetischen Überlegungen leicht einzusehen, daß dabei die Amplitude der Spektrallinien gegen Null gehen muß. Wir führen deshalb als neue Größe die auf das Frequenzintervall ω_0 bezogene komplexe Amplitude $U(jk\omega_0)$ ein. Aus Gl. (9.12) erhalten wir dann mit $t_0 = -T_0/2$

$$U(jk\omega_0) = \frac{U_k}{\omega_0/2\pi} = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} u(t) e^{-jk\omega_0 t} dt. \quad (9.17)$$

Lassen wir nun ω_0 gegen $d\omega$ gehen, so ergibt sich die als *Fourierintegral* bekannte Beziehung

$$U(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (9.18)$$

In Analogie zum periodischen Fall können wir nun die Zerlegung eines nichtperiodischen Signals vornehmen.

Hierzu ersetzen wir in der für periodische Funktionen gültigen Gl. (9.8) die Amplitude U_k durch die auf das Frequenzintervall bezogene von Gl. (9.17):

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{U_k}{\omega_0/2\pi} e^{jk\omega_0 t} \omega_0/2\pi. \quad (9.19a)$$

Den Übergang zum nichtperiodischen Fall bewerkstelligen wir wiederum, indem wir $\omega_0 \rightarrow d\omega$ und $k\omega_0 \rightarrow \omega$ gehen lassen und die Summierung über die diskreten Spektrallinien durch Integration über das erhaltene kontinuierliche Spektrum ersetzen:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(j\omega) \frac{d\omega}{2\pi} e^{j\omega t}. \quad (9.19b)$$

Hieraus – und aus den Gln. (9.17), (9.18) – ist ersichtlich, daß $U(j\omega) d\omega/2\pi$ die *komplexe Amplitude* des Frequenzintervalls $\omega \dots \omega + d\omega$ und $U(j\omega)$ demzufolge eine *komplexe Amplitudendichte* darstellt. Häufig wird jedoch $U(j\omega)$ vereinfacht (und nicht ganz richtig) auch als komplexe Amplitude bezeichnet. In Analogie zu Definition 9.1 gilt:

Die grafische Darstellung des Betrags $U(j\omega)$ der nach Gl. (9.18) bestimmten komplexen Amplitudendichte in Abhängigkeit von der Frequenz ω wird *Amplituden[dichte]spektrum*, deren Phase $\arg U(j\omega)$ wird *Phasenspektrum* des nichtperiodischen Signals $u(t)$ genannt.

D 9.2

Aus der vorstehenden Herleitung folgt:

Nichtperiodische Signale haben ein kontinuierliches Amplituden[dichte]- und Phasenspektrum.

S 9.2

Das Integral Gl. (9.19) wird gewöhnlich durch Integration in der komplexen Ebene bestimmt. Deshalb wird es zweckmäßig mit j erweitert. Man erhält dann die als *Fourierumkehrintegral* bekannte Beziehung

$$u(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} U(j\omega) e^{j\omega t} dj\omega. \quad (9.20)$$

Damit ist die erwünschte Zerlegung in Sinusschwingungen durchgeführt. Die vorstehende Herleitung von Fourierintegral und Umkehrintegral erfolgte heuristisch durch Rückgriff auf den periodischen Fall. *Fouriers* Begründung beruht allerdings auf ähnlichen Gedankengängen. Bei einer strengen axiomatischen Begründung wird das Fourierintegral als Definitionsgleichung genommen und dann bewiesen, daß das Umkehrintegral unter bestimmten Bedingungen wieder auf die ursprüngliche Funktion führt. Diese Bedingungen sind die im Abschn. 9.1. genannten Dirichletschen Bedingungen, wobei Gl. (9.4) – entsprechend dem Übergang $T_0 \rightarrow \infty$ – durch die Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| dt \leq N, \quad N < \infty \quad (9.21)$$

zu ersetzen ist. Diese Bedingung ist sehr einschränkend. Sie verhindert insbesondere die Transformation der Ausgangssignale instabiler Systeme. Deshalb dienen diese Betrachtungen im wesentlichen der gedanklichen Vorbereitung der Laplacetransformation, bei der diese Einschränkungen überwunden werden (s. Abschn. 10.1.).

D 9.3

Im Rahmen einer axiomatisch begründeten Fouriertransformation wird $U(j\omega)$ als die *Fouriertransformierte* von $u(t)$ und $u(t)$ als die *Fourierrücktransformierte* von $U(j\omega)$ bezeichnet und hierfür die folgende Symbolik verwendet:

$$U(j\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\}, \quad u(t) = \mathcal{F}^{-1}\{U(j\omega)\}. \quad (9.22)$$

Das Symbol $\mathcal{F}^{-1}$ soll hierbei die zu $\mathcal{F}$ inverse Transformation, nämlich die Rücktransformation, bezeichnen.

Bei der Anwendung der Fouriertransformation werden die benötigten Fouriertransformierten bzw. -umkehrtransformierten einer Tabelle entnommen. Um mit dem Fourierintegral und -umkehrintegral vertrauter zu werden, wollen wir jedoch einige wenige Transformationen selbst durchführen.

9.2.2. Beispiele

Als erstes Beispiel wollen wir das Amplitudendichtespektrum eines *Pulses*

$$u(t) = \begin{cases} u_0 & -\tau/2 \leq t \leq \tau/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (9.23)$$

bestimmen. Mit dem Fourierintegral Gl. (9.18) erhält man

$$\begin{aligned} U(j\omega) &= u_0 \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{u_0}{j\omega} (e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}) = u_0 \tau \frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2}. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Zeitverlauf und Amplitudenspektrum zeigt Bild 9.6.

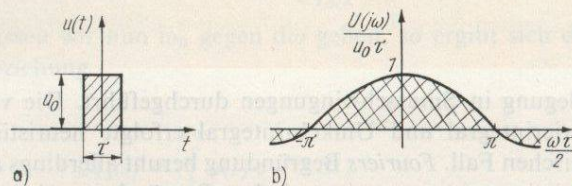


Bild 9.6. Einzelpuls

a) Zeitverlauf

b) Amplitudendichtespektrum

Als zweites Beispiel wollen wir einen δ -Impuls transformieren. Mit Gln. (8.17), (8.21) finden wir

$$U(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (9.25)$$

Das Spektrum ist also konstant. Das gleiche Ergebnis erhielte man aus Gl. (9.24) mit $u_0 = 1/\tau$, wenn $\tau \rightarrow 0$ geht.

Als letztes Beispiel betrachten wir eine *periodische Exponentialfunktion*:

$$u(t) = e^{j\omega_0 t}. \quad (9.26)$$

Die Fouriertransformierte ist ein an der Stelle $\omega = \omega_0$ auftretender δ -Impuls der Stärke 2π :

$$U(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0). \quad (9.27)$$

Wir beweisen das durch Einsetzen in das Fourierumkehrintegral Gl. (9.20):

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_0 t}. \quad (9.28)$$

Hierbei wird von den Regeln Gl. (8.18), (8.21) Gebrauch gemacht.

Bei Verwendung von δ -Funktionen lassen sich also auch periodische Signale mit dem Fourierintegral transformieren. Das Amplitudendichtespektrum hat an der Stelle $|\omega| = \omega_0$ eine Unendlichkeitsstelle.

9.3. Bestimmung der elementaren Ausgangssignale mittels Frequenzgangs

Im vorangehenden Abschnitt ist es gelungen, ein nichtperiodisches Eingangssignal $u(t)$ in eine kontinuierliche Folge sinusförmiger Elementarsignale

$$U(j\omega) \frac{d\omega}{2\pi} e^{j\omega t} \quad (9.29)$$

zu zerlegen. Bei Durchgang dieser Elementarsignale durch ein lineares Übertragungsglied ändert sich nicht die Frequenz. Deshalb reduziert sich die Aufgabe der Berechnung des zugehörigen elementaren Ausgangssignals auf die Ermittlung von dessen komplexer Amplitude:

$$X(j\omega) \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (9.30)$$

Das führt genau auf die Aufgabe der Bestimmung des Frequenzgangs $G(j\omega)$ des Übertragungsglieds, die bereits im Abschn. 3.4.4. betrachtet worden ist.

Danach gilt

$$X(j\omega) = G(j\omega) U(j\omega). \quad (9.31)$$

Dabei kann der komplexe Frequenzgang $G(j\omega)$ in elektrischen Netzwerken direkt mit Hilfe der Widerstandsoperatoren $j\omega L$ und $1/j\omega C$, in anderen Systemen entsprechend Abschn. 3.4.7. über die Differentialgleichung durch Aufstellung der Übertragungsfunktion und Ersatz von p durch $j\omega$ gefunden werden. Ein anderer Weg besteht in der Frequenzgangmessung und Approximation der gemessenen Ortskurven oder Frequenzkennlinien mittels gebrochener rationaler Funktionen.

9.4. Überlagerung der elementaren Ausgangssignale mittels Fourierumkehrintegrals

Die nun noch erforderliche Summation der unendlich vielen elementaren Ausgangssignale

$$X(j\omega) \frac{d\omega}{2\pi} e^{j\omega t}; \quad -\infty < \omega < +\infty \quad (9.32)$$

leistet das Fourierumkehrintegral Gl. (9.20):

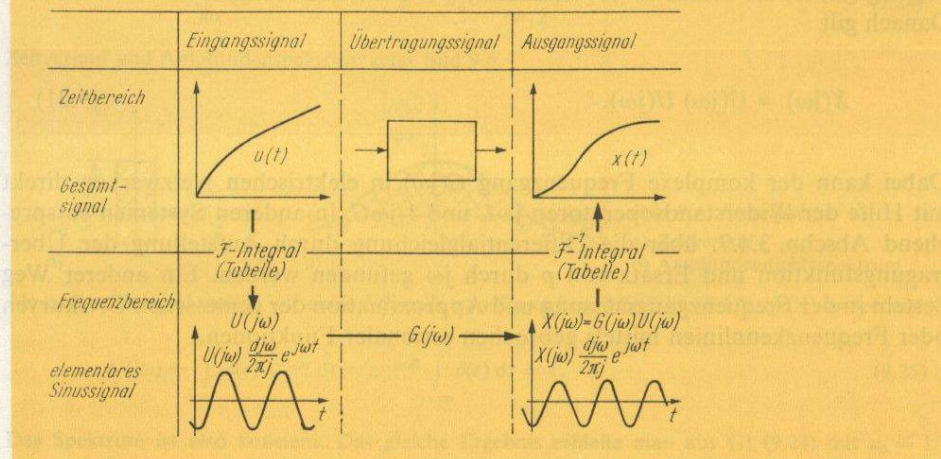
$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} dj\omega. \quad (9.32)$$

Zur Auswertung dieses Integrals wird gewöhnlich der Integrationsweg entlang der imaginären Achse durch einen für $t > 0$ die linke, für $t < 0$ die rechte p-Halbebene ($p = \delta + j\omega$) umfassenden Halbkreis zu einem geschlossenen Integrationsweg ergänzt (s. Abschn. 10.1.2.). Das Integral wird dann unter Verwendung des Residuensatzes ausgewertet.

9.5. Zusammenfassung der Berechnung von Signalübertragungen mittels Spektralzerlegung

Der durch Spektralzerlegung ermöglichte Berechnungsgang für Signalübertragungen ist in Tafel 9.1 zusammengefaßt.

Tafel 9.1. Rechengang bei Beschreibung der Signalübertragung mittels Fouriertransformation



Das Eingangssignal $u(t)$ wird in elementare Sinussignale zerlegt, deren komplexe Amplituden[dichten] mit dem Fourierintegral Gl. (9.18) berechnet werden. Die kom-

plexen Amplituden[dichten] der von diesen erzeugten elementaren sinusförmigen Ausgangssignale (gleicher Frequenz) erhält man durch Multiplikation mit dem Frequenzgang $G(j\omega)$. Dieser wird durch Messung, durch Berechnung aus der Differentialgleichung oder mit komplexer Rechnung (in elektrischen Netzwerken) bestimmt. Die Überlagerung des Ausgangsspektrums $X(j\omega)$ zum Ausgangssignal $x(t)$ erfolgt mit dem Fourierumkehrintegral Gl. (9.33).

Wesentlich ist, daß der erste und letzte Schritt unter Verwendung von vorbereiteten Tabellen erfolgt. Damit schrumpft der scheinbare Umweg über den Frequenzbereich praktisch zu einem Schritt zusammen: zur (evtl. noch notwendigen) Bestimmung des Frequenzgangs und einfachen Multiplikation dieses Frequenzgangs mit den Eingangsamplituden. Hierin – und in später bei der Synthese ersichtlichen Vorzügen der spektralen Betrachtung – liegt der Vorteil dieser Beschreibungsweise.

Betrachtet man nun $U(j\omega)$ nicht als eine zu einer festen Frequenz ω gehörige komplexe Amplitudengröße, sondern als eine im Intervall $\omega \in (-\infty, \infty)$ definierte Frequenzfunktion, so repräsentiert $U(j\omega)$ die Summe aller elementaren Sinussignale und damit das gesamte Signal $u(t)$. Entsprechendes gilt für das Ausgangsspektrum $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$. In dieser Betrachtungsweise sind die beiden im Bild 9.7 dargestellten Blockdiagramme gleichwertig.

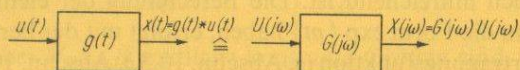


Bild 9.7. Gleichwertige Darstellungen einer Signalübertragung im Zeit- und Frequenzbereich

Die nachfolgend beschriebene Berechnung von Signalübertragungen unter Verwendung der Laplacetransformation ist völlig analog dem hier geschilderten Rechengang. Die Laplacetransformation vermeidet jedoch die mit Gl. (9.21) gegebene einschneidende Beschränkung. Deshalb soll hier auf die Durchrechnung von Beispielen verzichtet werden und die vorstehende Darstellung insbesondere als Vorbereitung für die im folgenden Kapitel vorgestellte Beschreibungsform dienen.

10. Beschreibung von Signalübertragungen mittels Zerlegung in Exponentialsignale: Laplace transformation

Analog dem in Tafel 9.1 dargestellten Rechnungsgang wird bei Verwendung der Laplace transformation das Eingangssignal in Exponentialsignale des Typs $\exp \{pt\}$ mit der komplexen Frequenz $p = \delta + j\omega$ zerlegt. Das ermöglicht durch Wahl $\delta > 0$ auch solche Signale in die Untersuchung einzubeziehen, für die die Bedingung der Fouriertransformierbarkeit Gl. (9.21) nicht erfüllt ist. Diese Zerlegung wird zusammen mit einer heuristischen Ableitung des Laplaceintegrals und Laplaceumkehrintegrals aus den entsprechenden Fourierintegralen im Abschn. 10.1. vorgenommen. Abschnitt 10.2. bringt dann einige wichtige Beziehungen der Laplace transformation, deren Kenntnis für die später behandelten Analyse-, Identifikations- und Synthesaufgaben notwendig und i. allg. auch hinreichend ist. Die Berechnung der elementaren Ausgangssignale, die wiederum die Form $\exp \{pt\}$ haben, erfolgt mit der bereits im Abschn. 3.4.7. eingeführten Übertragungsfunktion (s. Abschn. 10.3.). Abschn. 10.4. betrifft die Zusammensetzung der Ausgangssignale mittels Laplaceumkehrintegrals und enthält günstige Methoden für die Durchführung dieser Rücktransformation. Die beiden letzten Abschnitte erweisen bereits die Vorzüge der Verwendung der Laplace transformation. Im Abschn. 10.5. wird die Laplace transformation auf die im Abschn. 7. mit der direkten Methode aufgestellten Systemgleichungen angewandt. Dabei ergeben sich Beziehungen zur Ermittlung der Übergangsmatrix mit Hilfe der Laplace transformation sowie zur Bestimmung der Übertragungsfunktionen aus den Systemgleichungen. Im Abschn. 11. werden zur Übung Übergangsfunktionen wichtiger Übertragungsglieder ermittelt. Die dort erhaltenen Ergebnisse dienen außerdem zu einer Klassifizierung linearer Übertragungsglieder.

10.1. Zerlegung des Eingangssignals in exponentielle Elementarsignale: Laplace transformation

10.1.1. Einführung des Laplaceintegrals und Laplaceumkehrintegrals und Zerlegung des Eingangssignals

Die für die Anwendung der Fouriertransformation notwendige Bedingung Gl. (9.21)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| dt < \infty \quad (10.1)$$

besagt, daß alle für große t nicht verschwindenden Signale nicht transformiert werden können; denn eine für die Existenz dieses Integrals notwendige Bedingung ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0. \quad (10.2)$$

Damit ist eine Untersuchung instabiler Systeme auf diese Weise nicht möglich. Zur Behebung dieser Schwierigkeit ersetzen wir das Signal $u(t)$ durch das modifizierte $\hat{u}(t)$:

$$\hat{u}(t) = u(t) e^{-\delta t}; \quad \delta \geq 0, \quad (10.3)$$

wobei wir die positive Konstante δ so groß wählen, daß entsprechend obiger Forderung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| e^{-\delta t} dt < \infty. \quad (10.4)$$

Vorstehendes Integral existiert beispielsweise für die für uns wichtigen Signaltypen

$$u(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N a_i t^i & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (10.5)$$

und

$$u(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N a_i e^{\beta_i t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0, \end{cases} \quad (10.6)$$

wobei N, a_i, β_i endliche konstante Größen sind.

Wählt man im ersten Fall $\delta > 0$, im letzten

$$\delta > \max \{\beta_i\}, \quad (10.7)$$

so haben die modifizierten Signale eine Fouriertransformierte, die wir unter Verwendung der Gl. (9.18) berechnen wollen:

$$\begin{aligned} \hat{U}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-(\delta + j\omega)t} dt = U(\delta + j\omega). \end{aligned} \quad (10.8)$$

An die Stelle von $j\omega$ tritt dabei $\delta + j\omega$, so daß wir statt $(\hat{U}/j\omega)$ auch $U(\delta + j\omega)$ schreiben können. Führen wir wie schon im Abschn. 3.4.7. die komplexe Frequenz

$$p = \delta + j\omega \quad (10.9)$$

ein, so lautet das Integral

$$U(p) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-pt} dt = \mathcal{L}_{II}\{u(t)\}. \quad (10.10)$$

Dieses Integral heißt *zweiseitiges Laplaceintegral*; die Transformation $\mathcal{L}_{II}$ wird *zweiseitige Laplacetransformation* genannt. Sie stellt eine durch Übergang von $p = j\omega$ auf $p = \delta + j\omega$ analytisch erweiterte Fouriertransformation dar.

Für die deterministische Untersuchung kybernetischer Systeme ist es meist ohne Schwierigkeiten einzurichten, daß die determinierten Eingangssignale erst zu einer Zeit $t \geq 0$ einsetzen, so daß

$$u(t) \equiv 0; \quad t < 0. \quad (10.11)$$

Ebenso können ungestörte Systeme als zur Zeit $t = -0$ in einem bekannten Anfangszustand befindlich betrachtet werden. Deshalb kann man Gl. (10.10) normalerweise durch die folgende ersetzen:

$$U(p) = \int_{-0}^{\infty} u(t) e^{-pt} dt = \mathcal{L}_1\{u(t)\} = \mathcal{L}\{u(t)\}. \quad (10.12)$$

Dieses uneigentliche Parameterintegral heißt *einseitiges Laplaceintegral* oder kurz *Laplaceintegral*; die Transformation $\mathcal{L}$ wird als *einseitige Laplacetransformation* oder kurz als *Laplacetransformation* bezeichnet. Hierbei ist die untere Grenze mit -0 markiert worden, um deutlich zu machen, daß evtl. bei $t = 0$ auftretende δ -Funktionen in die Transformation einzubeziehen sind.

Um die Existenz des $\mathcal{L}$ -Integrals nachzuweisen, sind Konvergenzuntersuchungen notwendig. Insbesondere interessiert die absolute Konvergenz des $\mathcal{L}$ -Integrals. Eine wichtige Bedeutung hat in diesem Zusammenhang die absolute Konvergenzabszisse. Für diese gilt:

D 10.1 Ist $\delta_{\min}$ der minimale Wert von $\delta = \operatorname{Re}\{p\}$, so daß für alle $\delta > \delta_{\min}$ das Laplaceintegral für $|u(t)|$ konvergiert, dann heißt $\delta_{\min}$ *absolute Konvergenzabszisse*.

Man kann zeigen:

S 10.1 Das Laplaceintegral konvergiert in der Halbebene $\delta > \delta_{\min}$ absolut und gleichmäßig; $U(p)$ ist in der Konvergenzhalbebene eine analytische Funktion.

Damit sind die Ergebnisse der Funktionentheorie, insbesondere zur Integration, auf diese Funktion anwendbar. Das modifizierte Signal $\hat{u}(t)$ kann nun mit Hilfe des Fourierumkehrintegrals Gl. (9.20) in elementare Sinussignale zerlegt werden:

$$u(t) = u(t) e^{-\delta t} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \hat{U}(j\omega) e^{j\omega t} dj\omega. \quad (10.13)$$

Mit Gl. (10.8) folgt daraus:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} U(\delta + j\omega) e^{(\delta + j\omega)t} dj\omega. \quad (10.14)$$

Führen wir als Integrationsvariable entsprechend Gl. (10.9) wieder p ein, so erhalten wir mit

$$\delta = \text{konst.} > \delta_{\min}, \quad dp = dj\omega \quad (10.15)$$

und den neuen Integrationsgrenzen $\delta \pm j\infty$:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\delta - j\infty}^{\delta + j\infty} U(p) e^{pt} dp. \quad (10.16)$$

Das ist das *Laplaceumkehrintegral*¹⁾. Der Integrationsweg verläuft hierbei in einem festen Abstand δ parallel zur $j\omega$ -Achse. Aus dem Umkehrintegral ist ersichtlich, daß das Eingangssignal $u(t)$ in eine kontinuierliche Folge von Exponentialsignalen (ge- oder entdämpfte Sinusschwingungen)

$$\underbrace{U(p) \frac{dp}{2\pi j}}_{\text{komplexe Amplitude}} \quad \underbrace{e^{pt}}_{\text{Zeitverlauf}} \quad (10.17)$$

zerlegt worden ist (s. Abschn. 3.4.7.). Fassen wir die für die Berechnung von Signalübertragungen wesentlichen Ergebnisse dieses Abschnitts zusammen, so gilt:

Ein Eingangssignal $u(t)$ kann mit Hilfe des Laplaceumkehrintegrals Gl. (10.16) in elementare Exponentialschwingungen e^{pt} zerlegt werden. Die gesuchten komplexen Amplituden[dichten] $U(p)$ dieser Schwingungen werden über das Laplaceintegral Gl. (10.12) erhalten.

S 10.2

10.1.2. Verallgemeinerung des Laplaceumkehrintegrals

Bei einer axiomatischen Begründung der Laplacetransformation kann man das Laplaceintegral als Definition für $U(p)$ nehmen und dann beweisen, daß das Umkehrintegral gegen die Originalfunktion konvergiert. Während bei der vorstehenden heuristischen Herleitung des Laplace- aus dem Fourierintegral der Dämpfungsfaktor δ in der komplexen Frequenz p konstant gehalten worden ist, kann bei einer allgemeineren Begründung die Laplacetransformierte wirklich als Funktion der komplexen Frequenz p betrachtet werden. Dann ist auch der Integrationsweg beim Umkehrintegral nicht mehr auf eine Parallele zur $j\omega$ -Achse beschränkt. Er kann vielmehr

¹⁾ Da die Herleitung aus dem zweiseitigen Fourierintegral erfolgt, ist das Laplaceumkehrintegral von Gl. (10.16) strenggenommen das Umkehrintegral der zweiseitigen Laplacetransformation. Bei Anwendung zur Rücktransformation von Laplacetransformierten der einseitigen Laplacetransformation muß nachgeprüft werden, daß die erhaltene Funktion die Ausgangsfunktion als Laplacetransformierte besitzt. Für die im folgenden verwendeten Zeitfunktionen trifft das zu.

in der Halbebene rechts der Konvergenzabszisse beliebig gewählt werden. Damit lautet das *Laplaceumkehrintegral*:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_C U(p) e^{pt} dp = \mathcal{L}^{-1}\{U(p)\}. \quad (10.18)$$

Hierbei verläuft C im Bereich der absoluten Konvergenz des Laplaceintegrals von $c - j\infty$ bis $c + j\infty$, $c > \delta_{\min}$.

Da der Integrand für die hier ausschließlich betrachteten $t \geq 0$ auf einem Halbkreis mit Radius $\rho \rightarrow \infty$ um die linke p -Halbebene nach dem Jordanschen Lemma verschwindet, bleibt das Integral unverändert, wenn der Integrationsweg durch diesen Halbkreis zu einer geschlossenen Kurve (Ringintegral) ergänzt wird (Bild 10.1).

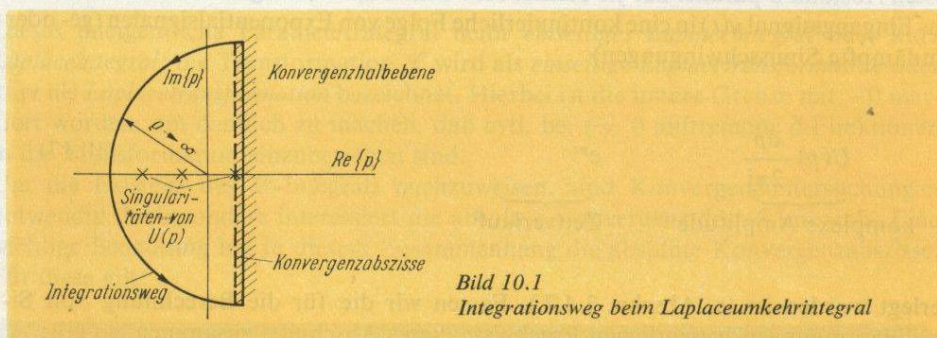


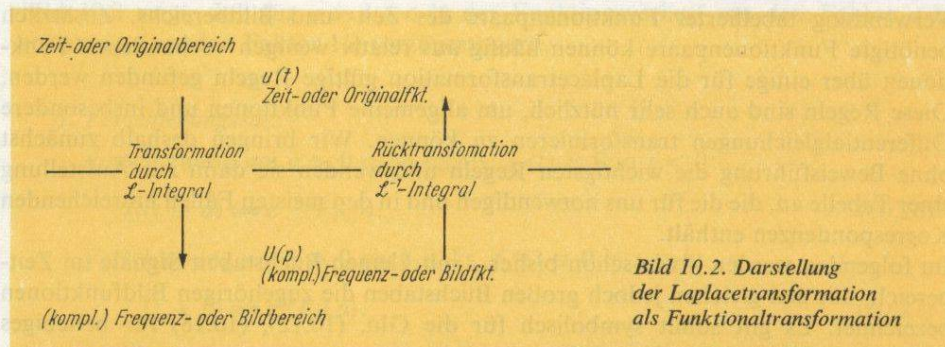
Bild 10.1
Integrationsweg beim Laplaceumkehrintegral

Das ermöglicht die Auswertung des Umkehrintegrals mit Hilfe des *Residuensatzes*. Für die praktische Anwendung ist es von großer Bedeutung, daß die i. allg. benötigten Funktionenpaare $u(t)$ und $U(p)$ in Büchern über Laplacetransformation tabelliert sind. Deshalb kann hier auf eine weitergehende Darlegung verzichtet und auf die einschlägige mathematische Literatur verwiesen werden.

10.1.3. Verallgemeinerte Betrachtung als Transformation einer Zeit- in eine Bildfunktion

Auf Grund vorstehender Darlegungen ist eine gegenüber Satz 10.2 verallgemeinerte Betrachtungsweise der Laplacetransformation möglich und üblich. Bei dieser wird $U(p)$ weniger als Amplitude der Exponentialschwingung einer bestimmten (festen) komplexen Frequenz p , sondern vielmehr als eine in der gesamten p -Ebene – mit Ausnahme der singulären Stellen von $U(p)$ – definierte *Funktion* von p angesehen. Sie repräsentiert dann die Menge aller bei der Zerlegung erhaltenen Elementarsignale und ist damit eine andere Beschreibung des *gesamten* Signals $u(t)$.

In dieser allgemeineren Betrachtungsweise wird durch das Laplaceintegral eine *Transformation* einer *Zeitfunktion/Originalfunktion* aus dem *Zeitbereich/Originalbereich* in eine (komplexe) *Frequenzfunktion/Bildfunktion* des (komplexen) *Frequenzbereichs/Bildbereichs* vermittelt. Das Laplaceumkehrintegral bewirkt eine *Rücktransformation* aus dem Bild- in den Zeitbereich (Bild 10.2). Die Funktion $U(p)$ ist dann ein Bild des gesamten Eingangssignals $u(t)$.



Da durch $\mathcal{L}$ -Integral bzw. $\mathcal{L}^{-1}$ -Integral $u(t)$ und $U(p)$ einander eindeutig zugeordnet sind, gilt in Erweiterung von Satz 10.2:

Die Bildfunktion $U(p)$ ist für alle laplacetransformierbaren Zeitfunktionen eine äquivalente Beschreibung des gesamten Zeitsignals $u(t)$.

S 10.3

10.1.4. Beispiele

Zur Übung des Laplaceintegrals [s. Gl. (10.12)] und zur Vorbereitung der aufzustellenden Tabellen seien abschließend drei Zeitfunktionen transformiert.

Beispiel 1: $u(t) = \sigma(t)$

Mit dem $\mathcal{L}$ -Integral erhält man für $\delta > 0$ (Konvergenzabszisse ist $\delta = 0$) unter Berücksichtigung, daß $\sigma(t)$ im Intervall $t \in [0, \infty]$ gleich eins ist,

$$U(p) = \int_{-0}^{\infty} \sigma(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p}. \quad (10.19)$$

Beispiel 2: $u(t) = \delta(t)$

Mit den Regeln Gln. (8.17), (8.21) findet man

$$U(p) = \int_{-0}^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = \int_{-0}^{\infty} \delta(t) e^0 dt = 1. \quad (10.20)$$

Beispiel 3: $u(t) = e^{at}\sigma(t)$

Für $\delta > \delta_{\min} = a$ ergibt sich

$$\begin{aligned} U(p) &= \int_{-0}^{\infty} e^{at}\sigma(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-a)t} dt \\ &= \frac{-1}{p-a} e^{-(\delta-a)t} e^{-j\omega t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-a}. \end{aligned} \quad (10.21)$$

10.2. Einige Regeln und Korrespondenzen der Laplacetransformation

Die Auswertung des Laplaceintegrals bzw. -umkehrintegrals, d. h. die Transformation in bzw. aus dem Bildbereich, erfolgt – wie bereits erwähnt – im Normalfall unter

Verwendung tabellierter Funktionenpaare des Zeit- und Bildbereichs. Zusätzlich benötigte Funktionenpaare können häufig aus relativ wenigen vorhandenen Funktionen über einige für die Laplacetransformation gültige Regeln gefunden werden. Diese Regeln sind auch sehr nützlich, um allgemeine Funktionen und insbesondere Differentialgleichungen transformieren zu können. Wir bringen deshalb zunächst ohne Beweisführung die wichtigsten Regeln und wenden sie dann zur Aufstellung einer Tabelle an, die die für uns notwendigen und in den meisten Fällen hinreichenden Korrespondenzen enthält.

Im folgenden werden – wie schon bisher – mit kleinen Buchstaben Signale im Zeitbereich, mit den gleichen jedoch großen Buchstaben die zugehörigen Bildfunktionen bezeichnet. Es gilt somit symbolisch für die Gln. (10.12), (10.18) für beliebiges laplacetransformierbares Signal $f(t)$:

$$\begin{aligned} F(p) &= \mathcal{L}\{f(t)\} & \text{oder} & & F(p) \rightleftharpoons f(t) \\ f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} & \text{oder} & & f(t) \rightleftharpoons F(p). \end{aligned} \quad (10.22)$$

Wegen dieser eindeutigen Vereinbarung können keine Irrtümer entstehen, wenn wir später in längeren Rechnungen die Argumente zur Vereinfachung fortlassen und verkürzt schreiben:

$$F = \mathcal{L}\{f\}, \quad f = \mathcal{L}^{-1}\{F\}. \quad (10.23)$$

Bezeichnet $F_i(p)$ die zu $f_i(t)$ gehörende Bildfunktion, so gelten folgende Regeln:

1. Linearitätssatz

$$\sum_{i=1}^N c_i f_i(t) \rightleftharpoons \sum_{i=1}^N c_i F_i(p); \quad (10.24)$$

c_i konstante Koeffizienten (reell und komplex).

2. Ähnlichkeitssatz

$$f(at) \rightleftharpoons \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right); \quad a > 0. \quad (10.25)$$

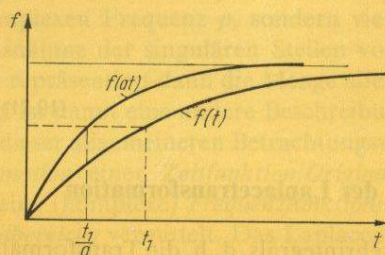


Bild 10.3. Zum Ähnlichkeitssatz:
Komprimierung (Dehnung) einer Zeitfunktion

Bild 10.3 zeigt, daß für $a > 1$ (< 1) der Funktionsverlauf um den Faktor a beschleunigt (um den Faktor $1/a$ verzögert) wird.

3. Verschiebungssatz

Verschiebung um $a > 0$ nach rechts, $f_1(t) \equiv 0$ in $t < 0$:

$$f_1(t - a) \Leftrightarrow e^{-ap} F_1(p). \quad (10.26)$$

Verschiebung um $b > 0$ nach links, $f_2(t) \equiv 0$ in $t < b$:

$$f_2(t + b) \Leftrightarrow e^{bp} F_2(p). \quad (10.27)$$

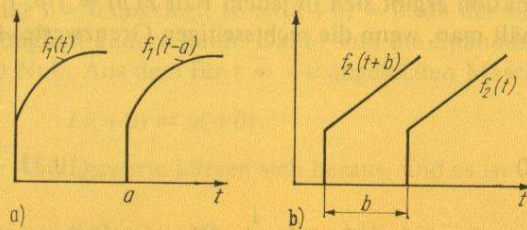


Bild 10.4. Zum Verschiebungssatz:
Verschiebung einer Zeitfunktion

a) Verschiebung nach rechts
b) Verschiebung nach links

Bild 10.4 erläutert diese Verschiebung. Zu beachten ist, daß bei einer Linksverschiebung die Funktion auf Grund der angegebenen Bedingungen nicht über den Nullpunkt hinaus verschoben werden darf. Anderenfalls ergibt sich eine kompliziertere Regel. (Da bei der einseitigen Laplacetransformation nur Funktionen in $t \geq 0$ betrachtet werden, ginge der Anfangsverlauf mit $t < 0$ dabei verloren.)

4. Dämpfungssatz

$$e^{at} f(t) \Leftrightarrow F(p + a); \quad a \text{ beliebig.} \quad (10.28)$$

5. Differentiationssatz

1. Ableitung:

$$\frac{df(t)}{dt} \Leftrightarrow pF(p) - f(-0). \quad (10.29)$$

k -te Ableitung:

$$\frac{d^k f(t)}{dt^k} \Leftrightarrow p^k F(p) - p^{k-1} f(-0) - p^{k-2} \dot{f}(-0) \dots - f^{(k-1)}(-0). \quad (10.30)$$

Bemerkungen. In der einschlägigen mathematischen Literatur werden statt der hier verwendeten linksseitigen Anfangswerte

$$f^{(i)}(-0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f^{(i)}(0 - \varepsilon); \quad \varepsilon > 0 \quad (10.31)$$

die rechtsseitigen $f^{(i)}(+0)$ benutzt, in Übereinstimmung damit, daß dort das Laplaceintegral für $t \in [0, \infty]$ definiert wird. Diese Verfahrensweise bringt jedoch Schwierig-

keiten, wenn die zu transformierenden Signale δ -Funktionen bei $t = 0$ enthalten, was bei einer mathematischen Behandlung auch physikalischer Probleme durchaus auftreten kann. Deshalb ist hier die untere Grenze des Laplaceintegrals Gl. (10.12) zu -0 festgesetzt und die Differentiationsregel Gl. (10.30) damit in Übereinstimmung gebracht worden.

Die Bedeutung dieser Maßnahme wird an folgendem Beispiel der Transformation der Sprungfunktion und ihrer Ableitung deutlich:

$$f(t) = \sigma(t), \quad \dot{f}(t) = \frac{d}{dt} \sigma(t) = \delta(t). \quad (10.32)$$

Für die Bildfunktion der Sprungfunktion ergibt sich in jedem Fall $F(p) = 1/p$. Für die Bildfunktion der δ -Funktion erhält man, wenn die rechtsseitigen Grenzwerte $+0$ Verwendung finden, über das Laplaceintegral:

$$\dot{F}_+(p) = \int_{+0}^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = 0 \quad (10.33)$$

und über die Differentiationsregel aus der Sprungfunktion in Übereinstimmung damit:

$$pF(p) - f(+0) = p \frac{1}{p} - 1 = 0. \quad (10.34)$$

Bei der hier vereinbarten Benutzung des linksseitigen Grenzwertes ergibt sich über das Laplaceintegral:

$$\check{F}(p) = \int_{-0}^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = 1 \quad (10.35)$$

und über die Differentiationsregel wieder in Übereinstimmung damit:

$$pF(p) - f(-0) = 1 - 0 = 1. \quad (10.36)$$

Dieses Ergebnis ist nicht überraschend, da für $t > 0$ die Ableitung der Sprungfunktion und damit auch deren Bildfunktion tatsächlich verschwindet. Mit dem rechtsseitigen Grenzwert wird also die δ -Funktion nicht miterfaßt, es sei denn, es werden zusätzliche Rechenvereinbarungen getroffen.

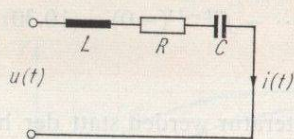


Bild 10.5. Reihenresonanzkreis

Ein zweiter mit der hier eingeführten Verfahrensweise verbundener Vorteil ergibt sich bei der Transformation von Differentialgleichungen, die das Verhalten der uns interessierenden linearen Übertragungsglieder beschreiben. Das sei am Beispiel des im Bild 10.5 dargestellten Reihenresonanzkreises erläutert. Eingangssignal sei die Eingangsspannung u , Ausgangssignal der Strom i .

Die Differentialgleichung dieses Kreises lautet:

$$L\ddot{i}(t) + R\dot{i}(t) + \frac{1}{C}i(t) = \dot{u}(t). \quad (10.37)$$

Mit dem Differentiationssatz findet man bei Verwendung der rechtsseitigen Grenzwerte:

$$\left. \begin{aligned} p^2 LI(p) + pRI(p) + \frac{1}{C}I(p) \\ - pLi(+0) - Li(+0) - Ri(+0) \end{aligned} \right\} = \begin{cases} pU(p) \\ -u(+0). \end{cases} \quad (10.38)$$

Wird das Eingangssignal $u(t)$ an den strom- und spannungslosen Kreis erst zum Zeitpunkt $t = 0$ angelegt, so ist $i(+0) = 0$, da der Strom sich in der Induktivität nicht sprunghaft ändern kann. Damit sind die Spannungen über R und C zum Zeitpunkt $+0$ Null. Aus dem für $t = +0$ angesetzten Maschensatz folgt dann

$$Li(+0) = u(+0). \quad (10.39)$$

Die Anfangswerte kürzen sich heraus, und es ist

$$I(p) = \frac{1}{R + pL + \frac{1}{pC}} U(p). \quad (10.40)$$

Gl. (10.40), die den Stromverlauf bei Anlegen eines Spannungsverlaufes im Bildbereich beschreibt, erhält man schneller, wenn man entsprechend Gl. (10.30) die linksseitigen Grenzwerte verwendet.

Offensichtlich ist

$$i^{(k)}(-0) = u^{(k)}(-0) = 0; \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (10.41)$$

wenn an den zuvor im Arbeitspunkt ($i = 0$, $u_c = 0$) befindlichen Kreis vom Zeitpunkt $t = 0$ an eine Spannung angelegt wird. Die Anfangswerte brauchen dann bei der Transformation nicht beachtet werden.

Diese Erkenntnisse lassen sich verallgemeinern, wie Föllinger nachgewiesen hat. Berücksichtigt man, daß gemäß Definition 3.6 alle Signale auf den Arbeitspunkt bezogen werden, so gilt:

Bei Laplacetransformation der Differentialgleichung eines linearen Systems, das sich für $t < 0$ im Arbeitspunkt ($q = 0$) befindet und für $t \geq 0$ ein Eingangssignal erhält, sind alle linksseitigen Anfangswerte Null, während nicht alle auftretenden rechtsseitigen Anfangswerte zu verschwinden brauchen. Diese rechtsseitigen Anfangswerte heben sich jedoch insgesamt auf.

S 10.4

6. Integrationssatz

$$\int_{-0}^t f(\tau) d\tau \longleftrightarrow \frac{1}{p} F(p). \quad (10.42)$$

7. Multiplikation mit t^k (Differentiation der Bildfunktion)

$$t^k f(t) \longleftrightarrow (-1)^k \frac{d^k F(p)}{dp^k}. \quad (10.43)$$

8. Faltungssatz

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-0}^{+t} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \longleftrightarrow F_1(p) F_2(p). \quad (10.44)$$

Während die Signalübertragung im Zeitbereich durch das Faltungsintegral Gl. (8.37) beschrieben wird, vereinfacht sich auf Grund dieses Satzes die Beschreibung im Unterbereich zu einer Multiplikation der entsprechenden Bildfunktionen (s. Abschn. 10.3.3.). Auf dieser Eigenschaft der Laplacetransformation beruhen in erster Linie ihre Vorzüge und ihre häufige Anwendung in der Systemtheorie und automatischen Steuerung.

9. Produkt zweier Zeitfunktionen (Faltung im Bildbereich)

$$f_1(t) f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(p - q) F_2(q) dq. \quad (10.45)$$

10. Grenzwertsätze

Anfangswert:

Falls $f(+0)$ existiert, so gilt

$$f(+0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p). \quad (10.46)$$

Endwert:

Falls $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ existiert, so ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p). \quad (10.47)$$

Aus diesen wichtigen Sätzen ist der gegenläufige Charakter von t und p zu erkennen. Im folgenden werden nur Signale und Systemfunktionen auftreten, deren Bildfunktionen – bis auf den Verschiebeoperator e^{-ap} – rationale Funktionen sind. Diese können im Bedarfsfall durch Partialbruchzerlegung auf einfachere Funktionen zurückgeführt werden. Für den normalen Bedarf erscheinen die in Tafel 10.1 aufgeführten Korrespondenzen ausreichend.

Aus der mit Gl. (10.19) zur Sprungfunktion ermittelten Bildfunktion 2 erhält man mit dem Differentiationssatz die Bildfunktion 1, mit dem Dämpfungssatz die Bildfunktionen 3 und 4 und mit dem Integrationssatz die Funktion 5. Aus der letzten findet man mit dem Dämpfungssatz die Funktion 6, aus der Bildfunktion 4 mit dem Integrationssatz die Funktion 7. Die Bildfunktion 8 kann durch Partialbruchzerle-

gung auf die Typen 2 und 4 zurückgeführt werden. Die Bildfunktionen 10 bis 13 haben komplexe Pole. Da die Bildfunktionen $F(p)$ für reelle p stets reell sind, treten komplexe Pole stets paarweise konjugiert komplex auf.

Tafel 10.1. Tabelle gebräuchlicher Korrespondenzen der Laplacetransformation

Nr.	$F(p)$	$f(t)$ in $t \geq 0$ [$f(t) = 0, t < 0$]
1	1	$\delta(t)$
2	$\frac{1}{p}$	$\sigma(t)$
3	$\frac{1}{p + \delta}$	$e^{-\delta t}$
4	$\frac{1}{1 + pT}$	$\frac{1}{T} e^{-t/T}$
5	$\frac{1}{p^2}$	t
6	$\frac{1}{(p + \delta)^2}$	$t e^{-\delta t}$
7	$\frac{1}{p(1 + pT)}$	$1 - e^{-t/T}$
8	$\frac{1}{p(1 + pT_1)(1 + pT_2)}$	$1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2}$
9	$\frac{1}{p^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
10	$\frac{1}{p(1 + pT)^n}$	$1 - e^{-t/T} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t/T)^i}{i!}$
11	$\frac{k}{p + \delta - j\omega} + \frac{k^*}{p + \delta + j\omega};$ k^* konjugiert komplex zu k	$2 k e^{-\delta t} \cos(\omega t + \arg k)$ $\arg k = \arctan \operatorname{Im} \{k\} / \operatorname{Re} \{k\}$
12	$\frac{\omega}{(p + \delta)^2 + \omega^2}$	$e^{-\delta t} \sin \omega t$
13	$\frac{p + \delta}{(p + \delta)^2 + \omega^2}$	$e^{-\delta t} \cos \omega t$
14	$\frac{1}{p(1 + 2DpT_0 + p^2T_0^2)}$	$1 - \frac{1}{\sqrt{1 - D^2}} e^{-D t/T_0}$ $\sin(\sqrt{1 - D^2} t/T_0 + \arccos D)$

10.3. Ermittlung der elementaren exponentiellen Ausgangssignale: Übertragungsfunktion

10.3.1. Ermittlung der Amplituden der elementaren exponentiellen Ausgangssignale mittels Übertragungsfunktion

Im Abschn. 10.1.1. ist gezeigt worden, daß durch die Laplacetransformation eine Zerlegung des Eingangssignals $u(t)$ in Elementarsignale des Typs

$$U(p) \frac{dp}{2\pi j} e^{pt} \quad (10.48)$$

ermöglicht wird [s. Gl. (10.17)]. Nach den Untersuchungen im Abschn. 3.4.7. ändert sich die Zeitfunktion $\exp\{pt\}$ bei Durchgang durch ein lineares Glied nicht. Somit bleibt als Aufgabe, die komplexe Amplitude

$$X(p) \frac{dp}{2\pi j} \quad (10.49)$$

des zugehörigen elementaren Ausgangssignals zu berechnen. Dieser Zusammenhang wird durch die im Abschn. 3.4.7. definierte Übertragungsfunktion $G(p)$ vermittelt, wobei gilt

$$X(p) = G(p) U(p). \quad (10.50)$$

Dabei wird $G(p)$ auf die im Abschn. 3.4.7. angegebene Weise aus der Differentialgleichung des Übertragungsglieds durch Bestimmung der stationären Lösung für das Eingangssignal $\exp\{pt\}$ gefunden.

Bei elektrischen Netzwerken kann $G(p)$ durch Einführung von Widerstandsoperatoren (s. Abschn. 3.4.9.) erhalten werden.

10.3.2. Ermittlung der Bildfunktion des Ausgangssignals durch Transformation der Differentialgleichung; erweiterte Definition der Übertragungsfunktion

Während vorstehende Ermittlung von $X(p)$ auf der im Abschn. 10.1.1. dargelegten Zerlegung des Eingangssignals beruht, basieren die folgenden Überlegungen auf der im Abschn. 10.1.3. vorgestellten verallgemeinerten Betrachtungsweise. Nach dieser sind $U(p)$ und $X(p)$ äquivalente Bildfunktionen der gesamten Zeitsignale $u(t)$ bzw. $x(t)$; ihr Zusammenhang kann demzufolge durch Transformation der Differentialgleichung des Übertragungsglieds gefunden werden.

Diese Differentialgleichung sei

$$\begin{aligned} x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_0x(t) \\ = b_mu^{(m)}(t) + \dots + b_0u(t). \end{aligned} \quad (10.51)$$

Unter Anwendung des Differentiationssatzes Gl. (10.30) erhalten wir

$$\begin{aligned}
& X(p) [p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_0] \\
& - \{x(-0)p^{n-1} + [x^{(1)}(-0) + a_{n-1}x(-0)]p^{n-2} + \dots \\
& + [x^{(n-1)}(-0) + \dots + a_1x(-0)]\} = U(p) [b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_0] \\
& - \{b_m u(-0)p^{m-1} + [b_m u^{(1)}(-0) + b_{m-1}u(-0)]p^{m-2} + \dots \\
& + [b_m u^{(m-1)}(-0) + \dots + b_1 u(-0)]\}. \quad (10.52)
\end{aligned}$$

Bezeichnet man den auf der linken Seite in geschweiften Klammern stehenden, nur von den Anfangsbedingungen von $x(t)$ abhängigen Ausdruck mit $A_x(p)$, den auf der rechten Seite stehenden entsprechenden Ausdruck mit den Anfangswerten von $u(t)$ mit $A_u(p)$, so folgt

$$X(p) = \frac{b_m p^m + \dots + b_0}{p^n + \dots + a_0} U(p) + \frac{A_x(p) - A_u(p)}{p^n + \dots + a_0}. \quad (10.53)$$

Der erste Summand ist offensichtlich nur vom transformierten Eingangssignal $U(p)$ und vom Übertragungsglied (Parameter a_i, b_i), der zweite nur von den Anfangsbedingungen $A = A_x - A_u$ und vom Übertragungsglied abhängig. Dabei stimmt die bei $U(p)$ stehende Funktion mit der bereits im Abschn. 3.4.7. auf andere Weise ermittelten Übertragungsfunktion $G(p)$ überein [s. Gl. (3.90)].

Um das Signalübertragungsverhalten zu bestimmen, dürfen wir nur den Einfluß des Eingangs- auf das Ausgangssignal berücksichtigen und müssen die Vorgeschichte dadurch ausschalten, daß wir das System aus der Ruhelage $q = 0$ heraus stören. Dann sind nach Satz 10.4 alle linksseitigen Anfangswerte Null, und es verschwindet der zweite Summand. Wir können damit die ursprüngliche Definition 3.13 der Übertragungsfunktion durch die folgende erweiterte ersetzen:

Die Übertragungsfunktion ist der das Signalübertragungsverhalten eines linearen Übertragungsglieds kennzeichnende Operator, durch dessen Multiplikation mit der Bildfunktion des Eingangssignals sich das transformierte Ausgangssignal des vorher im Arbeitspunkt $q = 0$ befindlichen Gliedes ergibt.

D 10.2

Hierbei gilt auf Grund der drei letzten Gleichungen:

Die Übertragungsfunktion wird durch Transformation der Differentialgleichungen des Übertragungsglieds bei verschwindenden Anfangsbedingungen und Bildung des Quotienten der Laplacetransformierten von Ausgangs- zu Eingangssignal erhalten:

S 10.5

$$G(p) = \frac{X(p)}{U(p)} = \frac{\mathcal{L}\{x(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}}. \quad (10.54)$$

Die Verträglichkeit mit der alten Definition ergibt sich aus der Tatsache, daß $X(p)$ und $U(p)$ als komplexe Amplituden einer Schwingung $\exp\{pt\}$ angesehen werden

können. Die Erweiterung gegenüber der alten Definition besteht darin, daß $X(p)$ und $U(p)$ als Bildfunktionen allgemeine laplacetransformierbare Signale $x(t)$ und $u(t)$ darstellen und nicht auf Exponentialschwingungen beschränkt sind.

Der Zusammenhang mit der im Abschn. 3.4.9. eingeführten Berechnung der Übertragungsfunktion mittels Widerstandsoperatoren (pL , $1/pC$) ist dadurch gegeben, daß bei verschwindenden Anfangsbedingungen die Laplacetransformation einer Differentialgleichung sich zu der schon von *Heaviside* eingeführten Operatorenrechnung vereinfacht, bei der d^k/dt^k durch p^k ersetzt wird. Die darauf basierende, von *Heaviside* angegebene Methode zur Berechnung von Ausgleichsvorgängen versagt genau dann, wenn von Null verschiedene Anfangsbedingungen vorliegen. Ihr Anwendungsbereich ist erst im Rahmen der Laplacetransformation exakt geklärt worden.

Für die Ermittlung der Übertragungsfunktion aus der Differentialgleichung sei noch folgender wichtiger Hinweis gegeben: Gewöhnlich liegt ursprünglich nicht die Differentialgleichung des Gesamtsystems vor, sondern ein System simultaner Differentialgleichungen niedrigerer Ordnung. Dabei erweist es sich als einfacher, diese simultanen Differentialgleichungen einzeln zu transformieren, im Bildbereich zusammenzufassen und zwecks Bestimmung der Übertragungsfunktion nach dem Quotienten der Bildfunktionen von Ausgangs- zu Eingangssignal aufzulösen. Es ist gerade ein Vorteil der Laplacetransformation, daß diese Zusammenfassung nur algebraische Operationen erfordert, s. hierzu die im Abschn. 10.3.4. folgenden Beispiele.

10.3.3. Übertragungsfunktion und Gewichtsfunktion

Im Abschn. 8.4. haben wir für die Signalübertragung im Zeitbereich erhalten

$$x(t) = \int_{-0}^t g(\tau) u(t - \tau) d\tau. \quad (10.55)$$

Wenden wir auf diese Beziehung den Faltungssatz Gl. (10.44) an, so finden wir

$$X(p) = G(p) U(p), \quad (10.56)$$

wobei

$$G(p) = \mathcal{L}\{g(t)\}. \quad (10.57)$$

Aus einem Vergleich mit Gl. (10.54) ist ersichtlich, daß $G(p)$ mit der bereits definierten Übertragungsfunktion übereinstimmt. Somit gilt:

S 10.6

Die Übertragungsfunktion $G(p)$ ist mit der Laplacetransformierten der Gewichtsfunktion $g(t)$ identisch.

Dieses Ergebnis folgt auch aus der Überlegung, daß

$$X(p) = G(p) \quad (10.58)$$

für $U(p) = 1$.

Die Bildfunktion 1 gehört zur δ -Funktion. Somit besagt die vorstehende Gleichung, daß $G(p)$ die Laplacetransformierte der Impulsantwort – also der Gewichtsfunktion – darstellt.

10.3.4. Beispiele zur Ermittlung von Übertragungsfunktionen aus Differentialgleichungen

10.3.4.1. Übertragungsfunktion eines RC-Gliedes

Für das mit Bild 2.3 vorgestellte RC-Glied gelten die Gleichungen

$$u = i(R_1 + R_2) + q; \quad i = C \frac{dq}{dt} \quad (10.59)$$

$$x = iR_2 + q.$$

Durch Transformation mit verschwindenden Anfangsbedingungen erhält man

$$U = I(R_1 + R_2) + Q; \quad I = pCQ \quad (10.60)$$

$$X = IR_2 + Q.$$

Durch Eliminierung der inneren Größe I und Division der letzten durch die erste Gleichung findet man für die Übertragungsfunktion

$$G = \frac{X}{U} = \frac{(pCR_2 + 1)Q}{[pC(R_1 + R_2) + 1]Q} = \frac{1 + pT_D}{1 + pT}; \quad (10.61)$$

$$T_D = CR_2, \quad T = C(R_1 + R_2) \quad (10.62)$$

in Übereinstimmung mit dem früheren Ergebnis [s. Gl. (3.113)].

10.3.4.2. Übertragungsfunktion eines Gleichstrommotors

Für den im Bild 7.1 dargestellten Gleichstrommotor sind im Abschn. 7.1. folgende simultane Differentialgleichungen und Gleichungen mit den dort angegebenen Bedeutungen aufgestellt worden:

Ankerkreis

$$u_A - u_i = R_A i_A + L_A \dot{i}_A, \quad u_i = c\Phi_0 n. \quad (10.63)$$

Welle für $m_a = 0$

$$m_i = \theta \dot{n}, \quad m_i = k\Phi_0 i_A. \quad (10.64)$$

Bezeichnen wir mit den entsprechenden großen Buchstaben die zu den Zeitfunktionen gehörenden Bildfunktionen, so erhalten wir nach Transformation mit verschwindenden Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} \text{a) } U_A - U_i &= R_A I_A + pL_A I_A, & \text{b) } U_i &= c\Phi_0 N, \\ \text{c) } M_i &= p\theta N, & \text{d) } M_i &= k\Phi_0 I_A. \end{aligned} \quad (10.65)$$

Zur Ermittlung der Übertragungsfunktion eliminieren wir die inneren Signale U_i , I_A und M_i durch Einsetzen der Gleichungen b, d, c in Gleichung a:

$$\begin{aligned} U_A &= c\Phi_0 N + R_A \frac{p\theta N}{k\Phi_0} + p^2 L_A \frac{\theta N}{k\Phi_0} \\ &= Nc\Phi_0 \left[1 + p \frac{R_A \theta}{ck\Phi_0^2} + p^2 \frac{L_A}{R_A} \frac{R_A \theta}{ck\Phi_0^2} \right]. \end{aligned} \quad (10.66)$$

Mit der durch den elektrischen Ankerkreis bestimmten Zeitkonstante T_{el} , der vornehmlich durch die konstruktiven mechanischen Eigenschaften bedingten Zeitkonstante T_{mech} und dem Übertragungsfaktor K

$$T_{el} = \frac{L_A}{R_A}, \quad T_{mech} = \frac{\theta R_A}{ck\Phi_0^2}, \quad K = \frac{1}{c\Phi_0} \quad (10.67)$$

ergibt sich für die gesuchte Übertragungsfunktion

$$G = \frac{N}{U_A} = \frac{K}{1 + pT_{mech} + p^2T_{el}T_{mech}} \quad (10.68)$$

Beachtet man, daß gewöhnlich $T_{mech} \gg T_{el}$ ist, so gilt näherungsweise

$$G(p) \approx \frac{K}{(1 + pT_{el})(1 + pT_{mech})} \quad (10.69)$$

Das ist ein sog. Trägheits- oder Verzögerungsglied 2. Ordnung, das im Abschn 11.2. näher betrachtet werden wird.

10.4. Überlagerung der elementaren Ausgangssignale, Rücktransformation mittels $\mathcal{L}^{-1}$ -Integral

10.4.1. Überlagerung der elementaren Ausgangssignale mittels Umkehrintegrals

Mit den Ergebnissen des Abschnitts 10.3.1. liegen nunmehr die elementaren exponentiellen Ausgangssignale vor:

$$X(p) \frac{dp}{2\pi j} e^{pt} = G(p) U(p) \frac{dp}{2\pi j} e^{pt} \quad (10.70)$$

Ihre Überlagerung zum Gesamtsignal $x(t)$ muß durch Integration, und zwar – nach den Ausführungen im Abschn. 10.1.1. – durch das Umkehrintegral Gl. (10.16) bzw. Gl. (10.18), erfolgen:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} G(p) U(p) e^{pt} dp \quad (10.71)$$

Nach der im Abschn. 10.1.3. dargelegten verallgemeinerten Betrachtungsweise besteht die Aufgabe, die zur Bildfunktion $X(p)$ gehörende Zeitfunktion $x(t)$ zu bestimmen. Das geschieht in den seltensten Fällen durch direkte Auswertung des vorstehenden Umkehrintegrals, sondern erfolgt vielmehr durch Rückgriff auf tabellierte Korrespondenzen. Bei den meist vorliegenden rationalen Bildfunktionen kann durch Partialbruchzerlegung die Zahl der benötigten Korrespondenzen wesentlich eingeschränkt werden. Bevor wir ein günstiges Rücktransformationsverfahren vorstellen, wollen wir den erhaltenen Lösungsweg zusammenfassen.

10.4.2. Zusammenfassung des Lösungswegs zur Berechnung von Signalübertragungen mittels Laplacetransformation

Die in den Abschnitten 10.1.1., 10.3.1. und 10.4.1. formulierte Beschreibung der Signalübertragung als Zerlegung und Zusammenfassung von Exponentialsignalen fügt sich zu dem im Bild 10.6 aufgezeichneten Lösungsweg zusammen.

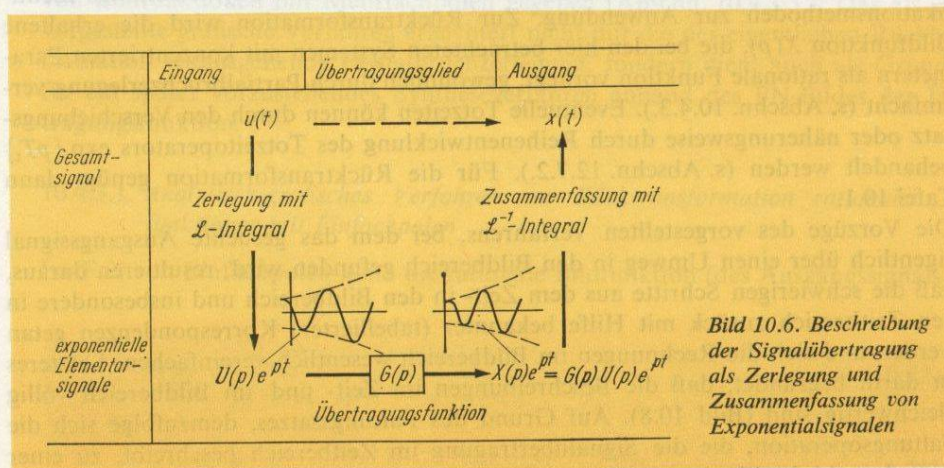


Bild 10.6. Beschreibung der Signalübertragung als Zerlegung und Zusammenfassung von Exponentialsignalen

Diese Darstellungsform dient vornehmlich der Herleitung der benötigten Beziehungen, insbesondere des $\mathcal{L}$ - und $\mathcal{L}^{-1}$ -Integrals und der Interpretation von $U(p)$ als Amplitude einer Exponentialschwingung. Diese Interpretation wird später für eine Reihe von Syntheseverfahren noch besondere Bedeutung erlangen. Für die praktische Durchführung der Berechnung ist es zweckmäßig, der Beschreibung die in den Abschnitten 10.1.3. und 10.3.2. vorgenommene Erweiterung der Betrachtungsweise zugrunde zu legen. Dann ergibt sich die Darstellung von Bild 10.7.

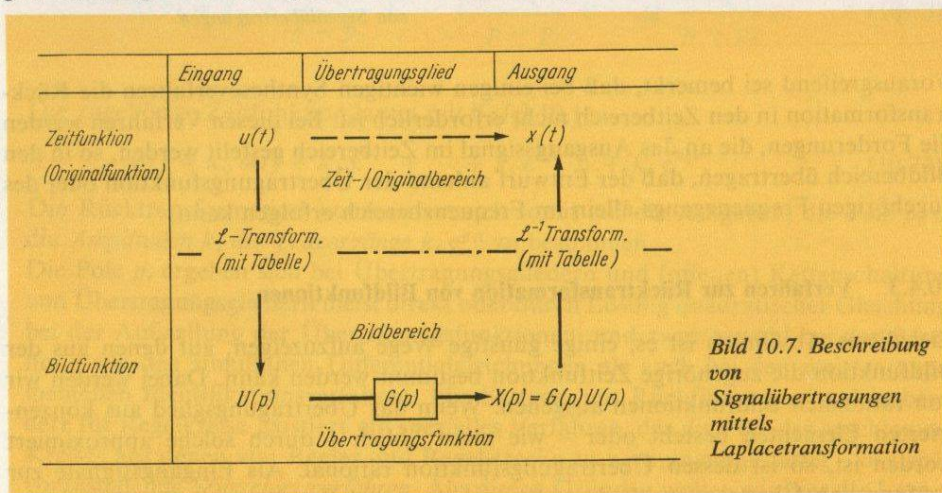
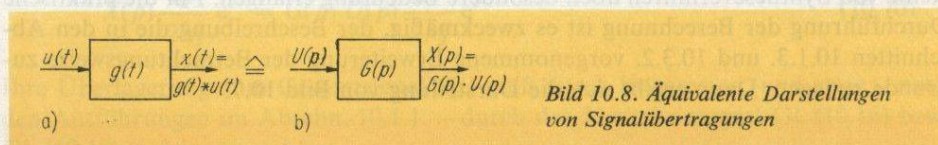


Bild 10.7. Beschreibung von Signalübertragungen mittels Laplacetransformation

Zunächst wird das Eingangssignal transformiert. Hierzu ist meist Tafel 10.1 (ggf. unter Hinzuziehung einiger Regeln der Laplacetransformation) ausreichend. Die

Bildfunktion $U(p)$ wird alsdann mit der Übertragungsfunktion multipliziert. Letztere kann bei elektrischen Schaltungen unter Einführung von Widerstandsoperatoren unmittelbar aus diesen bestimmt werden und wird i. allg. Fall aus den Differentialgleichungen des Systems gewonnen. Die Laplacetransformation vereinfacht sich dabei wegen der verschwindenden Anfangsbedingungen zu einer Operatorenrechnung, bei der d^k/dt^k durch p^k ersetzt wird. Bei unbekanntem Objekt kommen Identifikationsmethoden zur Anwendung. Zur Rücktransformation wird die erhaltene Bildfunktion $X(p)$, die bei den hier betrachteten Systemen mit konzentrierten Parametern als rationale Funktion vorliegt, gewöhnlich durch Partialbruchzerlegung vereinfacht (s. Abschn. 10.4.3.). Eventuelle Totzeiten können durch den Verschiebungssatz oder näherungsweise durch Reihenentwicklung des Totzeitoperators $\exp\{pT_t\}$ behandelt werden (s. Abschn. 12.7.2.). Für die Rücktransformation genügt dann Tafel 10.1.

Die Vorzüge des vorgestellten Verfahrens, bei dem das gesuchte Ausgangssignal eigentlich über einen Umweg in den Bildbereich gefunden wird, resultieren daraus, daß die schwierigen Schritte aus dem Zeit- in den Bildbereich und insbesondere in den Zeitbereich zurück mit Hilfe bekannter (tabellierter) Korrespondenzen getan werden und sich die Rechnungen im Bildbereich wesentlich vereinfachen. Letzteres ist darin begründet, daß die Beschreibungen im Zeit- und im Bildbereich völlig gleichwertig sind (Bild 10.8). Auf Grund des Faltungssatzes, demzufolge sich die Faltungsoperation, die die Signalübertragung im Zeitbereich beschreibt, zu einer einfachen Multiplikation im Bildbereich vereinfacht [s. Gl. (10.55) und (10.56)], erweist sich jedoch die Beschreibung im Bildbereich als wesentlich günstiger. Diese Vorteile werden besonders eindrucksvoll, wenn es sich um die Berechnung von Systemen mit vielen Gliedern handelt. Das wird im Abschn. 12. deutlich werden.



Vorausgreifend sei bemerkt, daß bei einigen wichtigen Syntheseverfahren die Rücktransformation in den Zeitbereich nicht erforderlich ist. Bei diesen Verfahren werden die Forderungen, die an das Ausgangssignal im Zeitbereich gestellt werden, so in den Bildbereich übertragen, daß der Entwurf anhand der Übertragungsfunktion oder des zugehörigen Frequenzgangs allein im Frequenzbereich erfolgen kann.

10.4.3. Verfahren zur Rücktransformation von Bildfunktionen

Ziel dieses Abschnitts ist es, einige günstige Wege aufzuzeigen, auf denen aus der Bildfunktion die zugehörige Zeitfunktion bestimmt werden kann. Dabei werden wir von rationalen Bildfunktionen ausgehen. Wenn das Übertragungsglied aus konzentrierten Elementen besteht oder – wie meist üblich – durch solche approximiert worden ist, so ist dessen Übertragungsfunktion rational. Als Eingangssignale zur Prüfung von Übertragungsgliedern, Steuerketten und Regelkreisen dienen gewöhnlich Sprung-, Impuls- und Rampenfunktion. Diese und die meisten anderen noch benutzten Eingangssignale haben ebenfalls rationale Bildfunktionen. In diesen Fällen

ist dann auch die Bildfunktion des Ausgangssignals rational. Der Rücktransformation rationaler Bildfunktionen kommt deshalb eine besondere Bedeutung zu.

Im Abschn. 10.4.3.1. wollen wir uns auf rationale Bildfunktionen beschränken, die nur Pole 1. Ordnung aufweisen. Dann ist die Rücktransformation besonders einfach. Nach einem Beispiel in 10.4.3.2. werden dann einige Hinweise zur Rücktransformation von Bildfunktionen mit Mehrfachpolen gegeben (Abschn. 10.4.3.3.). Das als erstes vorgestellte grafische Verfahren erleichtert nicht nur die der eigentlichen Rücktransformation vorausgehende Partialbruchzerlegung, sondern dient auch als Grundlage für ein später vorzustellendes Syntheseverfahren anhand des PN-Bildes der Übertragungsfunktion.

10.4.3.1. Analytisch-grafisches Verfahren zur Rücktransformation rationaler Bildfunktionen mit Einfachpolen

Im Fall von Einfachpolen kann die rationale Bildfunktion (des Ausgangssignals)

$$X(p) = \frac{d_m p^m + \dots + d_1 p + d_0}{p^n + c_{n-1} p^{n-1} + \dots + c_0} \quad (10.72a)$$

$$= K \frac{(p - p_{D1})(p - p_{D2}) \dots (p - p_{Dm})}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}; \quad (10.72b)$$

$$m \leq n, p_i \neq p_j \quad \text{für } i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n$$

wie folgt zerlegt werden:

$$X(p) = k_0 + \frac{k_1}{p - p_1} + \dots + \frac{k_i}{p - p_i} + \dots + \frac{k_n}{p - p_n}. \quad (10.73)$$

Die zugehörige Zeitfunktion lautet mit Tafel 10.1:

$$x(t) = k_0 \delta(t) + k_1 e^{p_1 t} + \dots + k_i e^{p_i t} \dots + k_n e^{p_n t}. \quad (10.74)$$

Die Rücktransformation konzentriert sich somit auf die Aufgaben, die *Pole* p_i und die *Amplituden* k_i der *Teilvorgänge* $k_i e^{p_i t}$ zu bestimmen.

Die Pole p_i ergeben sich bei Übertragungsgliedern und (offenen) Kettenschaltungen von Übertragungsgliedern meist direkt oder durch Lösung quadratischer Gleichungen bei der Aufstellung der Übertragungsfunktionen, und zwar sowohl bei der Berechnung aus den simultanen Differentialgleichungen als auch bei den meisten experimentellen Identifikationsverfahren. Für Systeme mit Rückführungen und insbesondere für Regelkreise existiert ein spezielles Verfahren, das die Pole des geschlossenen Kreises aus denen von Regler und Regelstrecke zu bestimmen gestattet – das später vorzustellende *Wurzelortungsverfahren*. Aus diesen Gründen wollen wir hier die Lage der Pole als bekannt voraussetzen.

Mit Satz 3.7 ist bereits festgestellt worden, daß die Pole von Gl. (10.72) entweder reell oder konjugiert komplex sind.

Für die Rücktransformation ergibt sich

für einen *reellen* Pol $p_i = \delta_i$:

$$\frac{k_i}{p - \delta_i} \longleftrightarrow k_i e^{\delta_i t} \quad (10.75)$$

für ein *konjugiert komplexes* Polpaar $p_i = \delta_i \pm j\omega_i$ (s. Tafel 10.1):

$$\frac{k_i}{p - \delta_i - j\omega_i} + \frac{k_i^*}{p - \delta_i + j\omega_i} \longleftrightarrow 2|k_i| e^{\delta_i t} \cos(\omega_i t + \arg k_i). \quad (10.76)$$

Wir stellen also fest:

10.7

Die *Pole* p_i einer rationalen Bildfunktion bedingen das Auftreten von Teilvorgängen $k_i e^{p_i t}$ in der zugehörigen Zeitfunktion. Sie bestimmen *Dämpfungsfaktor* und *Frequenz* dieser Teilvorgänge.

Zur Bestimmung der *Amplituden* k_i der Teilvorgänge [das sind die Residuen von $X(p)$ in den Polen p_i] gehen wir von Gl. (10.73) aus. Der Koeffizient k_0 , der im Fall $m = n$ auftritt und für $m < n$ verschwindet, bleibt auf der rechten Seite allein stehen, wenn dort $p \rightarrow \infty$ geht. Also ist

$$k_0 = \lim_{p \rightarrow \infty} X(p). \quad (10.77)$$

Die Amplituden k_i der anderen Teilvorgänge findet man, indem man beide Seiten von Gl. (10.73) mit $(p - p_i)$ multipliziert und dann p gegen p_i gehen läßt. Dann verschwinden rechts alle Summanden bis auf k_i .

Somit gilt:

$$k_i = \lim_{p \rightarrow p_i} [(p - p_i) X(p)]. \quad (10.78)$$

Substituiert man $X(p)$ durch den Ausdruck von Gl. (10.72b), so erhält man als *Vorschrift zur Bestimmung der Amplituden* k_i :

$$k_i = K \frac{\prod_{j=1}^m (p_i - p_{Dj})}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (p_i - p_j)}. \quad (10.79)$$

In Worten:

Die Amplitude k_i des von einem einfachen Pol p_i hervorgerufenen Teilvorgangs ist

S 10.8

$$k_i = K \frac{\text{Produkt der Zeiger von allen endlichen Nullstellen zum Pol } p_i}{\text{Produkt der Zeiger von allen anderen Polen zum Pol } p_i}.$$

Liegen keine endlichen Nullstellen vor ($m = 0$), so tritt an die Stelle der Zeiger von den Nullstellen der Faktor 1.

Ersetzen wir noch die Zeiger durch ihre Beträge und Winkel:

$$p_i - p_j = r_{ij} e^{j\varphi_{ij}}, \quad (10.80)$$

so erhält Gl. (10.79) die Form

$$k_i = K \frac{\prod_{j=1}^m r_{iDj}}{\prod_{j=1, j \neq i}^n r_{ij}} e^{j \left(\sum_{j=1}^m \varphi_{iDj} - \sum_{j=1, j \neq i}^n \varphi_{ij} \right)} = KR_i e^{j\psi_i}. \quad (10.81)$$

Wir können damit den Betrag von k_i

$$|k_i| = KR_i = K \prod_{j=1}^m r_{iDj} / \prod_{j=1, j \neq i}^n r_{ij} \quad (10.82)$$

und dessen Winkel

$$\arg k_i = \psi_i = \sum_{j=1}^m \varphi_{iDj} - \sum_{j=1, j \neq i}^n \varphi_{ij} \quad (10.83)$$

getrennt auswerten. Betrachten wir zunächst den Winkel ψ_i des zu einem reellen Pol p_i gehörigen Residuums k_i am Beispiel des Poles p_1 von Bild 10.9. Daraus ist ablesbar:

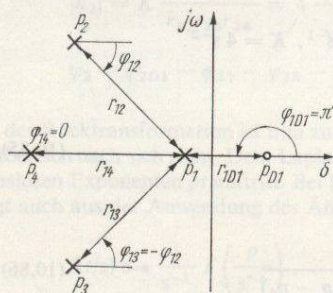


Bild 10.9. Grafische Bestimmung des zum Pol p_1 gehörenden Residuums k_1

Der Beitrag φ_{iDj} bzw. φ_{ij} zum Winkel ψ_i (im Beispiel $i = 1, j = 2, 3, Dj = D1$) ist:

für eine *reelle Nullstelle* p_{Dj} *rechts (links)* von p_i :

$$\varphi_{iDj} = \pi (= 0)$$

für einen *reellen Pol* p_j *rechts (links)* von p_i :

$$\varphi_{ij} = -\pi (= 0)$$

für ein *konjugiert komplexes Polpaar* p_j, p_{j+1} *rechts oder links* von p_i :

$$\varphi_{ij} + \varphi_{i,j+1} = 0.$$

Hieraus resultiert folgender Satz:

S 10.9

Die zu *reellen Polen* gehörenden *Amplituden* (Residuen) sind reell. Ihr Vorzeichen ist positiv (negativ), wenn eine gerade (ungerade) Zahl von reellen Polen und Nullstellen rechts vom betrachteten Pol liegt. Konjugiert komplexe Pole tragen zum Winkel nichts bei.

Mit dieser Vorzeichenregel vereinfacht sich die Bestimmung von k_i zu der des Betrags. Für diesen gilt nach Gl. (10.82), wenn mit *Abstand* der Betrag des betroffenen Zeigers bezeichnet wird:

S 10.10

$$|k_i| = K \frac{\text{Produkt der Abstände von allen endlichen Nullstellen zum Pol } p_i}{\text{Produkt der Abstände von allen anderen Polen zum Pol } p_i}.$$

K wird der Ausgangsgleichung (10.72b) entnommen.

Bei *komplexen Polen* muß für den in der *oberen p-Halbebene* gelegenen Pol zusätzlich der Winkel ψ_i nach Gl. (10.83) bestimmt und in die zugehörige Zeitfunktion Gl. (10.76) eingesetzt werden.

10.4.3.2. Beispiel zur Rücktransformation

Gegeben sei ein Übertragungsglied mit der Übertragungsfunktion

$$G(p) = K \frac{p - p_{D1}}{(p - p_2)(p - p_3)(p - p_4)}; \quad (10.84)$$

$$p_{D1} = -1 \text{ s}^{-1}, p_{2,3} = -1 \text{ s}^{-1} \pm j \text{ s}^{-1}, p_4 = -2 \text{ s}^{-1}, K = 4 \text{ s}^{-2}.$$

Auf dieses wird ein Sprungsignal $u(t) = \sigma(t)$ gegeben:

$$U(p) = \frac{1}{p} = \frac{1}{p - p_1}; \quad p_1 = 0. \quad (10.85)$$

Die Bildfunktion des Ausgangssignals lautet somit:

$$X(p) = G(p) U(p) = K \frac{p - p_{D1}}{(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3)(p - p_4)}. \quad (10.86)$$

Vereinbaren wir zur Vereinfachung, daß in diesem Beispiel die komplexen Frequenzen p und die Nullstellen und Pole auf die Dimension s^{-1} normiert werden, so gilt

$$X(p) = 4 \frac{p+1}{p(p+1-j)(p+1+j)(p+2)}. \quad (10.87)$$

Zur grafischen Bestimmung der Amplitude k_i ist im Bild 10.10 das zu dieser Gleichung gehörende PN-Bild aufgezeichnet worden.

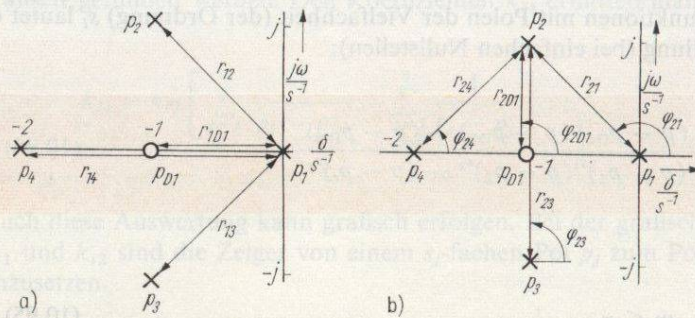


Bild 10.10. Grafische Bestimmung von k_1 und k_2 [s. Gl. (10.87)]

a) Auswertung von k_1

b) Auswertung von k_2

Der Koeffizient k_0 ist Null, weil $m < n$. Das zu k_1 gehörende Vorzeichen ist nach Satz 10.9 positiv, da eine gerade Zahl (nämlich Null) von Polen und Nullstellen rechts von p_1 liegt. Damit findet man $k_1 = |k_1|$ nach Satz 10.10 zu

$$k_1 = K \frac{r_{1D1}}{r_{12}r_{13}r_{14}} = 4 \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2} \cdot 2} = 1. \quad (10.88)$$

Auch das Vorzeichen der Amplitude k_4 des von p_4 verursachten Teilvorgangs ist positiv, da eine reelle Nullstelle und ein reeller Pol (insgesamt also eine gerade Zahl) rechts von p_4 liegt. Für den Betrag erhält man

$$k_4 = K \frac{r_{4D1}}{r_{41}r_{42}r_{43}} = 4 \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = 1. \quad (10.89)$$

Zur Bestimmung der Amplitude des von dem konjugiert komplexen Polpaar hervorgerufenen Teilvorgangs ist nach der Korrespondenz Gl. (10.76) das zu dem Pol p_2 in der oberen p -Halbebene gehörende Residuum auszuwerten.

Nach den Gln. (10.82), (10.83) findet man anhand von Bild 10.10b

$$|k_2| = K \frac{r_{2D1}}{r_{21}r_{23}r_{24}} = 4 \frac{1}{\sqrt{2}2\sqrt{2}} = 1 \quad (10.90)$$

$$\psi_2 = \varphi_{2D1} - \varphi_{21} - \varphi_{23} - \varphi_{24} = 90^\circ - 135^\circ - 90^\circ - 45^\circ = -180^\circ. \quad (10.91)$$

Bei der Rücktransformation ist nun zu beachten, daß eine Normierung im Bildbereich eine solche im Zeitbereich nach sich zieht. Dem Laplaceintegral Gl. (10.71) entnimmt man, daß t nur in dem dimensionslosen Exponenten pt auftritt. Bei Normierung gilt entsprechend $p/s^{-1} \cdot t/s$. Das gleiche Ergebnis folgt auch aus der Anwendung des Ähnlichkeitssatzes Gl. (10.25). Für $a = s^{-1}$ lautet dieser:

$$f(t/s) \Leftrightarrow \frac{1}{s^{-1}} F\left(\frac{p}{s^{-1}}\right). \quad (10.92)$$

Die Zeitfunktion wird also in t/s erhalten. Mit den oben bestimmten k_i und p_i und den Gln. (10.74), (10.76) lautet das Ausgangssignal für normiertes t in $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} x(t) &= 1e^{0t} + 2|1|e^{-1t} \cos(1t - 180^\circ) + 1e^{-2t} \\ &= 1 - 2e^{-t} \cos t + e^{-2t}. \end{aligned} \quad (10.93)$$

10.4.3.3. Rücktransformation von rationalen Bildfunktionen mit Mehrfachpolen

Bei rationalen Bildfunktionen mit Polen der Vielfachheit (der Ordnung) s_i lautet die faktorisierte Darstellung (bei einfachen Nullstellen):

$$X(p) = K \frac{(p - p_{D1})(p - p_{D2}) \cdots (p - p_{Dm})}{(p - p_1)^{s_1}(p - p_2)^{s_2} \cdots (p - p_r)^{s_r}}, \quad (10.94)$$

wobei

$$\sum_{i=1}^r s_i = n; \quad m \leq n. \quad (10.95)$$

Die Partialbruchzerlegung führt in diesem Fall auf einen Ausdruck

$$X(p) = k_0 + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{s_i} \frac{k_{ij}}{(p - p_i)^j}. \quad (10.96)$$

Für die zugehörige Zeitfunktion findet man mit Korrespondenz 9 der Tafel 10.1 und dem Dämpfungssatz

$$x(t) = k_0 \delta(t) + \sum_{i=1}^r e^{p_i t} \sum_{j=1}^{s_i} k_{ij} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}. \quad (10.97)$$

Die allgemeine Formel zur Bestimmung der Partialbruchkoeffizienten lautet in diesem Fall:

$$k_{ij} = \frac{1}{(s_i - j)!} \lim_{p \rightarrow p_i} \left\{ \frac{d^{s_i-j}}{dp^{s_i-j}} [(p - p_i)^{s_i} X(p)] \right\}. \quad (10.98)$$

Für einen Pol der Ordnung $s_i = 1$ erhält man daraus die oben abgeleitete Formel Gl. (10.78). Da meist $s_i \leq 2$ ist, interessiert hier besonders der Anteil eines Poles 2. Ordnung p_i an der Zerlegung Gl. (10.96). Dieser und die zugehörige Zeitfunktion sind

$$\frac{k_{i1}}{p - p_i} + \frac{k_{i2}}{(p - p_i)^2} \longleftrightarrow e^{p_i t} (k_{i1} + k_{i2} t). \quad (10.99)$$

Der Koeffizient

$$k_{i2} = \lim_{p \rightarrow p_i} [(p - p_i)^2 X(p)] \quad (10.100)$$

kann hierbei wie das Residuum eines einfachen Poles nach der Vorschrift Satz 10.8 grafisch gefunden werden. Den Koeffizienten k_{i1} ermittelt man nach der Beziehung

$$k_{i1} = k_{i2} \left[\sum_{j=1}^m \frac{1}{p_i - p_{Dj}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{p_i - p_j} \right]. \quad (10.101)$$

Auch diese Auswertung kann grafisch erfolgen. Bei der grafischen Bestimmung von k_{i1} und k_{i2} sind die Zeiger von einem s_j -fachen Pol p_j zum Pol p_i natürlich s_j -fach anzusetzen.

10.5. Ermittlung von Übergangsmatrix und Übertragungsfunktion mittels Laplacetransformation aus den Systemgleichungen

Nachdem die auf der Laplacetransformation basierende Beschreibung von Signalübertragungen in den vorangegangenen Abschnitten entwickelt worden ist, soll nun deren Zusammenhang mit den anderen Beschreibungsweisen hergestellt werden. Für die Beziehung zur Beschreibung mittels Faltungsintegrals ist das schon im Abschnitt 10.3.3. geschehen. In diesem Abschnitt sollen die Zusammenhänge mit der im Abschnitt 7. dargelegten direkten Beschreibung näher betrachtet werden. Hierzu werden zunächst die Systemgleichungen in den Bildbereich transformiert (s. Abschn. 10.5.1.). Das ermöglicht, ein günstiges Verfahren zur Berechnung der Übergangsmatrix $\Phi(t)$ anzugeben (s. Abschn. 10.5.2.) und die Übertragungsfunktion aus den Systemgleichungen unmittelbar zu bestimmen (s. Abschn. 10.5.3.).

10.5.1. System- und Bewegungsgleichungen im Bildbereich

Transformiert man die im Abschn. 7.1. [s. Gl. (7.31)] erhaltenen Zustandsgleichungen

$$\dot{q}(t) = Aq(t) + Bu(t) \quad (10.102)$$

in den Bildbereich, so erhält man mit

$$Q(p) = \begin{bmatrix} Q_1(p) \\ \vdots \\ Q_n(p) \end{bmatrix} = \mathcal{L}\{q(t)\} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}\{q_1(t)\} \\ \vdots \\ \mathcal{L}\{q_n(t)\} \end{bmatrix} \quad (10.103)$$

und entsprechend

$$U(p) = \begin{bmatrix} U_1(p) \\ \vdots \\ U_m(p) \end{bmatrix}, X(p) = \begin{bmatrix} X_1(p) \\ \vdots \\ X_r(p) \end{bmatrix} \quad (10.104)$$

die transformierten Zustandsgleichungen:

$$pQ(p) - q(-0) = A Q(p) + B U(p). \quad (10.105)$$

Zur Ermittlung des Zustandsverhaltens im Bildbereich lösen wir nach Q auf:

$$(pI - A) Q(p) = q(-0) + B U(p) \quad (10.106)$$

$$Q(p) = (pI - A)^{-1} q(-0) + (pI - A)^{-1} B U(p). \quad (10.107)$$

Diese Gleichung, die den Zustandsverlauf im Bildbereich bei gegebenem Anfangszustand $q(-0)$ und Eingangsvektor $U(p)$ beschreibt, entspricht der Bewegungsgleichung Gl. (7.43). Sie soll daher *transformierte Bewegungsgleichung* genannt werden.

Zusammen mit der durch Transformation der Ausgabegleichung [s. Gl. (7.32)]

$$x(t) = C q(t) + D u(t) \quad (10.108)$$

erhaltenen *transformierten Ausgabegleichung*

$$X(p) = C Q(p) + D U(p) \quad (10.109)$$

beschreibt die transformierte Bewegungsgleichung das Zustands- und Übertragungsverhalten des betrachteten Systems im Bildbereich.

Bei Transformation der Systemgleichungen in kanonische Normalform [s. Gln. (7.89), (7.90)]

$$\dot{\hat{q}}(t) = A \hat{q}(t) + \hat{B} u(t) \quad (10.110)$$

$$x(t) = \hat{C} \hat{q}(t) + D u(t) \quad (10.111)$$

erhält man den Gln. (10.107), (10.109) entsprechend die *transformierte kanonische Bewegungsgleichung*

$$\hat{Q}(p) = (pI - A)^{-1} \hat{q}(-0) + (pI - A)^{-1} \hat{B} U(p) \quad (10.112)$$

und die zugehörige Ausgabegleichung

$$X(p) = \hat{C} \hat{Q}(p) + D U(p), \quad (10.113)$$

wobei für paarweise verschiedene Eigenwerte λ_i gilt

$$(pI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p - \lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{p - \lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{p - \lambda_n} \end{bmatrix}. \quad (10.114)$$

10.5.2. Berechnung der Übergangsmatrix mittels Laplacetransformation

10.5.2.1. Bildfunktion der Übergangsmatrix

Die Übergangsmatrix $\Phi(t)$ beschreibt den Übergang eines Systems aus einem Anfangszustand $q(0)$ in einen späteren Zustand $q(t)$. Zu ihrer Bestimmung setzen wir deshalb in der laplacetransformierten Bewegungsgleichung (10.107) das Eingangssignal $U(p)$ gleich Null und erhalten

$$Q(p) = (pI - A)^{-1} q(-0). \quad (10.115)$$

Die Rücktransformation liefert

$$q(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(pI - A)^{-1}\} q(-0). \quad (10.116)$$

Aus einem Vergleich mit der früher mit Gl. (7.43) erhaltenen Beziehung

$$q(t) = \Phi(t) q(-0) \quad (10.117)$$

folgt

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(pI - A)^{-1}\} \quad (10.118)$$

und als transformierte Übergangsmatrix

$$\Phi(p) = \mathcal{L}\{\Phi(t)\} = (pI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(pI - A)}{\det(pI - A)}. \quad (10.119)$$

Mit $\text{adj}(pI - A)$ wird hierbei die Adjungierte der Matrix $(pI - A)$, das ist die transponierte Matrix der Adjunkten von $(pI - A)$, bezeichnet.

Die Elemente der Matrix $\Phi(p)$ sind hierbei die Laplacetransformierten der entsprechenden Elemente von $\Phi(t)$ [s. Gl. (7.45)]:

$$\phi_{ij}(p) = \mathcal{L}\{\phi_{ij}(t)\}. \quad (10.120)$$

Bei Ausgang von der kanonischen Darstellung Gl. (10.112) erhält man analog zu Gl. (10.118)

$$\hat{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(pI - A)^{-1}\} \quad (10.121)$$

und mit Gl. (10.114)

$$\hat{\Phi}(p) = \mathcal{L}\{\hat{\Phi}(t)\} = (pI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p - \lambda_1} & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \frac{1}{p - \lambda_n} \end{bmatrix}. \quad (10.122)$$

Die Rücktransformation liefert in Bestätigung von Gl. (7.95)

$$\hat{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ & \dots \\ 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}. \quad (10.123)$$

Dieses Ergebnis ist besonders einfach. Es erfordert jedoch, daß die Systemgleichungen zuvor auf Normalform transformiert worden sind. Bei praktischen Steuerungsproblemen sind außerdem die kanonischen Zustandsvariablen $\hat{q}_i(t)$ nicht immer die interessierenden und meßbaren. Deshalb wollen wir uns im folgenden noch näher mit der Rücktransformation der allgemeinen transformierten Übergangsmatrix befassen.

10.5.2.2. Verfahren von Faddejew zur Berechnung der transformierten Übergangsmatrix

Die mit Gl. (10.119) geforderte Matrixinversion wird bei Systemen höherer Ordnung schwierig und dann günstig mit Hilfe eines von Faddejew angegebenen Algorithmus durchgeführt. Hierbei wird

$$\Phi(p) = (pI - A)^{-1} = \frac{M(p)}{m(p)} \quad (10.124)$$

als Quotient eines Matrixpolynoms

$$M(p) = Ip^{n-1} + M_1p^{n-2} + \dots + M_{n-1} \quad (10.125)$$

und eines Polynoms

$$m(p) = p^n - m_1p^{n-1} - \dots - m_n \quad (10.126)$$

angesetzt. Deren Koeffizienten werden nach dem folgenden Algorithmus rekursiv berechnet:

$$\begin{array}{lll} A_1 = A & m_1 = 1/1 \cdot \text{sp } A_1 & M_1 = A_1 - m_1 I \\ A_2 = AM_1 & m_2 = 1/2 \cdot \text{sp } A_2 & M_2 = A_2 - m_2 I \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_n = AM_{n-1} & m_n = 1/n \cdot \text{sp } A_n & M_n = A_n - m_n I = 0. \end{array} \quad (10.127)$$

Mit $\text{sp } A_i$ wird hierbei die Spur der Matrix A_i , das ist die Summe der in der Hauptdiagonale von A_i stehenden Elemente, bezeichnet.

Die letzte Beziehung wird nicht mehr benötigt und dient ausschließlich zur Rechenkontrolle.

10.5.2.3. Beispiel: Übergangsmatrix des Gleichstrommotors

Zur Übung wollen wir die in den Abschnitten 7.8.2. und 7.8.3. vorgenommene Berechnung der Übergangsmatrix eines Gleichstrommotors unter Verwendung des vorstehenden Verfahrens wiederholen: Bei Normierung der Zustandsvariablen entsprechend Gl. (7.129), die eine Normierung der Zeitvariablen t/s einschloß, ergab sich eine dimensionslose Systemmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}. \quad (10.128)$$

Die Anwendung des Faddejewischen Algorithmus Gl. (10.127) liefert

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}; \quad m_1 = -6 \quad (10.129)$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}; \quad m_2 = -\frac{10}{2} = -5 \quad (10.130)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = 0.$$

Damit erhält man für die transponierte Übergangsmatrix

$$\Phi(p) = \frac{Ip + M_1}{p^2 - m_1p - m_2} = \frac{\begin{bmatrix} p+6 & 1 \\ -5 & p \end{bmatrix}}{p^2 + 6p + 5}. \quad (10.131)$$

Für deren Elemente findet man mit den Sätzen 10.9 und 10.10 auf Grund der im Bild 10.11 aufgezeichneten PN-Bilder

$$\begin{aligned} \text{a) } \Phi_{11}(p) &= \frac{p+6}{(p+1)(p+5)} = \frac{5/4}{p+1} - \frac{1/4}{p+5} \\ \text{b) } \Phi_{12}(p) &= \frac{1}{(p+1)(p+5)} = \frac{1/4}{p+1} - \frac{1/4}{p+5} \\ \text{c) } \Phi_{21}(p) &= \frac{-5}{(p+1)(p+5)} = -\frac{5/4}{p+1} + \frac{5/4}{p+5} \\ \text{d) } \Phi_{22}(p) &= \frac{1/4}{(p+1)(p+5)} = -\frac{1/4}{p+1} + \frac{5/4}{p+5} \end{aligned} \quad (10.132)$$

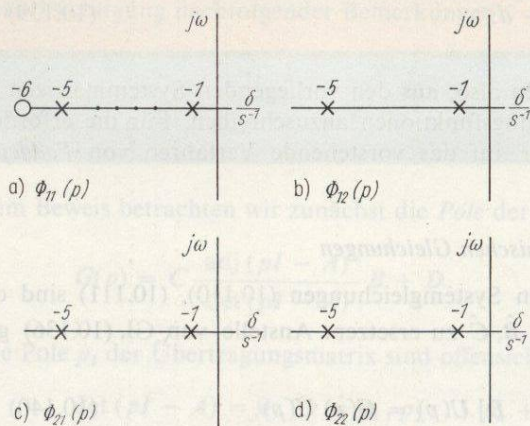


Bild 10.11. PN-Bilder der transformierten Übergangsmatrizen Gl. (10.132)

Durch Rücktransformation erhält man die gesuchte Übergangsmatrix in Übereinstimmung mit dem früheren Ergebnis Gl. (7.139):

$$\Phi(t) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5e^{-t} - e^{-5t} & e^{-t} - e^{-5t} \\ -5e^{-t} + 5e^{-5t} & -e^{-t} + 5e^{-5t} \end{bmatrix}. \quad (10.133)$$

10.5.3. Berechnung der Übertragungsfunktionen aus den Systemgleichungen

10.5.3.1. Berechnung aus den allgemeinen Systemgleichungen

Durch Laplacetransformation der Systemgleichungen haben wir die transformierte Bewegungsgleichung Gl. (10.107) gefunden. Zur Ermittlung der Übertragungsfunktionen müssen wir zunächst beachten, daß diese die Eingangs-Ausgangssignalübertragungen bei verschwindenden Anfangsbedingungen beschreiben (s. Satz 10.5). Setzen wir in der genannten Gleichung $q(-0) = 0$, so erhalten wir

$$Q(p) = (pI - A)^{-1} B U(p). \quad (10.134)$$

Einsetzen in die Ausgabegleichung

$$X(p) = C Q(p) + D U(p) \quad (10.135)$$

liefert

$$X(p) = [C(pI - A)^{-1} B + D] U(p) = G(p) U(p). \quad (10.136)$$

Hierbei ist

$$G(p) = C(pI - A)^{-1} B + D \quad (10.137)$$

die Übertragungsmatrix (die Matrix der Übertragungsfunktionen). Ihre Elemente

$$G_{ij}(p) = X_i(p)/U_j(p) \quad (10.138)$$

sind die Übertragungsfunktionen zwischen dem Eingangssignal U_j und dem Ausgangssignal X_i . Für Eingrößensysteme mit einem Ein- und Ausgangssignal wird daraus die Übertragungsfunktion

$$G(p) = c^T(pI - A)^{-1} b + d. \quad (10.139)$$

Die Gln. (10.137), (10.139) gestatten also, aus den vorliegenden Systemmatrizen A , B , C , D unmittelbar die Übertragungsfunktionen anzuschreiben. Für die erforderliche Matrizeninversion sei wieder auf das vorstehende Verfahren von Faddejew verwiesen.

10.5.3.2. Berechnung aus den kanonischen Gleichungen

Bei Ausgang von den kanonischen Systemgleichungen (10.110), (10.111) sind die Systemmatrizen A , B , C durch $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ zu ersetzen. Anstelle von Gl. (10.136) gilt dann

$$X(p) = [\hat{C}(pI - \hat{A})^{-1} \hat{B} + D] U(p) = G(p) U(p). \quad (10.140)$$

Bei Vorliegen der kanonischen Systemgleichungen ergibt sich somit unmittelbar die Übertragungsmatrix

$$G(p) = \hat{C}(pI - A)^{-1} \hat{B} + D. \quad (10.141)$$

Führen wir noch die *Spaltenvektoren* $\hat{c}_i$ der Matrix $\hat{C}$ und die *Zeilenvektoren* $\hat{b}_i^T$ der Matrix $\hat{B}$ ein, so erhalten wir für voneinander verschiedene Eigenwerte unter Berücksichtigung von Gl. (10.114)

$$G(p) = [\hat{c}_1 \dots \hat{c}_n] \begin{bmatrix} \frac{1}{p - \lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{p - \lambda_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_1^T \\ \vdots \\ \hat{b}_n^T \end{bmatrix} + D \quad (10.142)$$

$$G(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\hat{c}_i \hat{b}_i^T}{p - \lambda_i} + D = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{p - \lambda_i} + D \quad (10.143)$$

mit den dyadischen Produkten

$$K_i = \hat{c}_i \hat{b}_i^T. \quad (10.144)$$

Bei Ausgang von der kanonischen Darstellung wird also die Berechnung der Übertragungsmatrix beträchtlich vereinfacht.

10.5.3.3. Pole der Übertragungsfunktion und Eigenwerte

Im Abschn. 3.4.8. haben wir die Pole p_i einer Übertragungsfunktion, im Abschn. 7.4. die Eigenwerte λ_i einer Matrix A definiert. Bezüglich ihres Zusammenhangs gilt bei Berücksichtigung nachfolgender Bemerkungen:

Die Pole p_i der Übertragungsfunktionen eines Systems und die Eigenwerte λ_i der Systemmatrix A des gleichen Systems sind identisch. S 10.11

Zum Beweis betrachten wir zunächst die *Pole* der Übertragungsmatrix [Gl. (10.137)]

$$G(p) = C \frac{\text{adj}(pI - A)}{\det(pI - A)} B + D. \quad (10.145)$$

Die Pole p_i der Übertragungsmatrix sind offensichtlich die Wurzeln der Gleichung

$$\det(pI - A) = 0; \quad p = p_1, p_2, \dots, p_n. \quad (10.146)$$

Werden die Pole auf andere Weise als durch Gl. (10.146) berechnet, so ist es in Ausnahmefällen, wenn ein Pol p_i mit einer Nullstelle $p_{Di} = p_i$ übereinstimmt, möglich, daß bei der Aufstellung der Übertragungsfunktionen dieser Pol gegen die Nullstelle herausgekürzt wird. Eine solche Kürzung oder Polkompensation muß man ausschließen, wenn alle Pole der Übertragungsfunktionen eines Systems betrachtet werden sollen.

Die Eigenwerte λ_i einer Matrix A findet man nach Gl. (7.65) aus

$$\det(A - \lambda I) = 0; \quad \lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n. \quad (10.147)$$

Für eine Matrix A der Dimension $n \times n$ gilt nun

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n \det(\lambda I - A). \quad (10.148)$$

Ein Vergleich der rechten Seite dieser Gleichung mit Gl. (10.146) bestätigt obige Behauptung, wonach

$$p_i = \lambda_i; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (10.149)$$

Der interessierende Zusammenhang und die Bedingungen, unter denen Eigenwerte nicht mehr als Pole in der Übertragungsmatrix auftreten, werden deutlicher, wenn wir – unter Beschränkung auf Systeme mit voneinander verschiedenen Eigenwerten – von der kanonischen Darstellung ausgehen. Aus Gl. (10.143)

$$G(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\hat{c}_i \hat{b}_i^T}{p - \lambda_i} + D \quad (10.150)$$

ist unmittelbar ersichtlich, daß die Eigenwerte λ_i die Pole der Übertragungsmatrix bilden. Der Eigenwert λ_i tritt genau dann nicht als Pol in $G(p)$ auf, wenn für dieses i gilt

$$\hat{c}_i = 0 \quad \text{oder} \quad \hat{b}_i^T = 0^T. \quad (10.151)$$

Für Eingrößensysteme gilt analog zu Gl. (10.150)

$$G(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\hat{c}_i \hat{b}_i}{p - \lambda_i} + d. \quad (10.152)$$

Die Bedingung dafür, daß keine Pole verschwinden, ist hier

$$\hat{c}_i \neq 0, \quad \hat{b}_i \neq 0; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (10.153)$$

Auf diese Problematik werden wir später bei der Untersuchung der Steuer- und Beobachtbarkeit von Systemen zurückkommen.

10.5.3.4. Beispiele

Beispiel 1: Übertragungsfunktion RC-Glied

Für das im Bild 2.3 dargestellte RC-Glied erhalten wir [s. Gl. (2.9)]:

$$A = a = -\frac{1}{T}, \quad b = b = \frac{1}{T}, \quad (10.154)$$

$$c^T = 1 - \alpha, \quad d = \alpha,$$

wobei

$$T = C(R_1 + R_2), \quad \alpha = R_2/(R_1 + R_2). \quad (10.155)$$

Durch Einsetzen in Gl. (10.139) finden wir für die gesuchte Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned} G &= c^T (pI - A)^{-1} b + d \\ &= (1 - \alpha) \frac{1}{p + 1/T} \frac{1}{T} + \alpha \\ &= \frac{1 - \alpha}{1 + pT} + \frac{\alpha(1 + pT)}{(1 + pT)} = \frac{1 + p\alpha T}{1 + pT} = \frac{1 + pT_D}{1 + pT}. \end{aligned} \quad (10.156)$$

Hierbei ist

$$T_D = \alpha T = R_2 C. \quad (10.157)$$

Das ist in Übereinstimmung mit dem oben aus der skalaren Differentialgleichung gewonnenen Ergebnis Gl. (10.61).

Beispiel 2: Übertragungsfunktion Gleichstrommotor

Für den Gleichstrommotor Bild 7.1 ergab sich bei der Variante 2 mit Drehzahl n und Ankerstrom i_A als Zustandsvariablen die Zustandsgleichung Gl. (7.24). Dieser und Gl. (7.18) entnimmt man:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & k\Phi_0/\theta \\ -c\Phi_0/L_A & -R_A/L_A \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L_A \end{bmatrix}, \\ c^T &= [1 \ 0], \quad d = 0. \end{aligned} \quad (10.158)$$

Zur Ermittlung der Übertragungsfunktion auf Grund von Gl. (10.139) berechnen wir:

$$pI - A = \begin{bmatrix} p & -k\Phi_0/\theta \\ c\Phi_0/L_A & p + R_A/L_A \end{bmatrix} \quad (10.159)$$

$$\det(pI - A) = p^2 + pR_A/L_A + \frac{ck\Phi_0^2}{L_A\theta} \quad (10.160)$$

$$c^T \operatorname{adj}(pI - A) b = [1 \ 0] \begin{bmatrix} p + \frac{R_A}{L_A} & \frac{k\Phi_0}{\theta} \\ -\frac{c\Phi_0}{L_A} & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_A} \end{bmatrix} = \frac{k\Phi_0}{L_A\theta}. \quad (10.161)$$

Damit wird

$$\begin{aligned} G &= \frac{c^T \operatorname{adj}(pI - A) b}{\det(pI - A)} = \frac{k\Phi_0/L_A\theta}{p^2 + pR_A/L_A + ck\Phi_0^2/L_A\theta} \\ &= \frac{1/c\Phi_0}{1 + p \frac{R_A\theta}{ck\Phi_0^2} + p^2 \frac{L_A}{R_A} \frac{R_A\theta}{ck\Phi_0^2}}. \end{aligned} \quad (10.162)$$

Das ist das schon mit den Gln. (10.68), (10.67) durch Transformation der Differentialgleichungen gewonnene Ergebnis. Das gleiche Ergebnis erhielte man auch bei der Wahl der Drehzahl n und deren Ableitung $\dot{n}$ als Zustandsvariable (Variante 1) und Ausgang von den Gln. (7.7), (7.14), (7.15); denn die Übertragungsfunktion ist natürlich unabhängig von der Wahl der (inneren) Zustandsgrößen. Diese Rechnung sei dem Leser als Übung überlassen.

11. Grundtypen von Übertragungsgliedern: Klassifizierung nach Übertragungsfunktion, Übergangsfunktion und Kennlinie

In den vorangegangenen Kapiteln des Teiles II sind verschiedene Beschreibungsweisen für das (dynamische) Signalübertragungsverhalten von linearisierten Übertragungsgliedern vorgestellt worden. Es ist nun erwünscht, diese und andere Übertragungsglieder unter kybernetischem Aspekt so zu charakterisieren und zu klassifizieren, daß eine Verständigung über ihre Struktur erleichtert und eine qualitative oder grob quantitative Aussage über ihre Eigenschaften als Elemente von Steuerungssystemen in möglichst einfacher und klarer Weise ermöglicht wird.

Für eine exakte Klassifikation dynamischer Glieder empfiehlt es sich, von der Übertragungsfunktion auszugehen, für die Begründung jedoch die zugehörigen Übergangsfunktionen mit heranzuziehen. Das wird in den Abschnitten 11.1. und 11.2. geschehen. Das erfordert jedoch eine Einschränkung auf lineare und darüber hinaus auf solche Glieder, deren Übertragungsfunktionen – bis auf eine evtl. vorhandene Totzeit – durch rationale Funktionen gebildet werden. Für Glieder mit konzentrierten Elementen, die bekanntlich durch gewöhnliche Differentialgleichungen des Typs Gl. (10.51) beschrieben werden, ist das zutreffend, wie die Transformation dieser Differentialgleichung beweist [s. Gl. (10.53)]. Derartige Glieder wollen wir *rationale Glieder* nennen:

D 11.1 Übertragungsglieder, deren Übertragungsfunktion eine rationale Funktion ist, heißen *rationale Übertragungsglieder*.

Auch für Glieder mit verteilten Parametern, bei denen das Ausgangssignal an einem definierten Ort abgegriffen wird, ist es weitgehend üblich und möglich, das Übertragungsverhalten durch eine rationale Funktion zu approximieren. Vergleichsweise hoch wird dieser Approximationsaufwand, wenn das Übertragungsglied eine sog. Totzeit hat. Da das nicht selten zutrifft, soll dieser Fall im folgenden gesondert betrachtet werden.

Zunächst beabsichtigen wir, die Übertragungsglieder nach ihrem stationären Verhalten grob zu klassifizieren (s. Abschn. 11.1.). Im Abschn. 11.2. soll dann das Übertragungsverhalten einbezogen werden, was eine verfeinerte Klassifizierung ermöglicht. Diese beiden Abschnitte dienen gleichzeitig dazu, eine engere Vertrautheit mit dem Übertragungscharakter der verschiedenen Typen von Übertragungsgliedern zu erreichen, was sich später bei der Behandlung des Entwurfs von Regelungssystemen als nützlich erweisen wird.

Im Abschn. 11.3. werden dann einige Kenngrößen angegeben, die eine Grobbeschreibung grafisch vorliegender (gemessener) Übergangsfunktionen und, darauf aufbauend, eine Grobklassifizierung dynamischer Übertragungsglieder erlauben. Diese

hat insbesondere für eine Grobabschätzung der Regelbarkeit industrieller Regelstrecken Bedeutung. Im Abschn. 11.4. werden schließlich wichtige Typen von Kennlinien statischer nichtlinearer Glieder und Parameter zu ihrer Beschreibung vorgestellt.

11.1. Klassifizierung linearer Übertragungsglieder bezüglich des stationären Verhaltens auf Grund der Übertragungsfunktion

11.1.1. Polynomform, Pol-Nullstellen-Form und Zeitkonstantenform einer rationalen Übertragungsfunktion

Zunächst wollen wir eine für unser Vorhaben günstige Darstellungsweise für die Übertragungsfunktionen der betrachteten rationalen Glieder gewinnen. Die bereits mit Gl. (10.53) erhaltene Übertragungsfunktion soll als *Polynomform* bezeichnet werden:

$$G(p) = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} \quad (11.1)$$

Mit bekannten Polen p_i und Nullstellen p_{Dj} und mit $b_m = K$ erhält man daraus die *Pol-Nullstellen-Form* (PN-Form) der Übertragungsfunktion:

$$G(p) = K \frac{(p - p_{D1})(p - p_{D2}) \dots (p - p_{Dm})}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)} \quad (11.2)$$

Beachtet man, daß möglicherweise $(\mu - 1)$ Nullstellen oder $(\nu - 1)$ Pole im Ursprung der p -Ebene liegen, und setzt man für alle nicht im Ursprung liegenden Nullstellen bzw. Pole

$$\begin{aligned} p_{Dj} &= -1/T_{Dj}; \quad j = \mu, \dots, m \\ p_i &= -1/T_i; \quad i = \nu, \nu + 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (11.3)$$

so erhält man schließlich die *Zeitkonstantenform* einer rationalen Übertragungsfunktion:

$$G(p) = K_l p^l \frac{(1 + pT_{D\mu})(1 + pT_{D\mu+1}) \dots (1 + pT_{Dm})}{(1 + pT_\nu)(1 + pT_{\nu+1}) \dots (1 + pT_n)}; \quad l = \mu - \nu. \quad (11.4)$$

Aus bald einleuchtenden Gründen gelten hierbei folgende Benennungen:

Die Zeitkonstanten T_{Dj} des Zählers einer Übertragungsfunktion in Zeitkonstantenform heißen *Vorhaltzeitkonstanten*, die Zeitkonstanten T_i des Nenners werden *Trägheitszeitkonstanten* genannt.

D 11.2

Für die Übertragungsfaktoren K_l findet man mit den Gln. (11.2), (11.4)

$$K_l = \lim_{p \rightarrow 0} p^{-l} G(p) = K \prod_{j=\mu}^m (-p_{Dj}) / \prod_{i=r}^n (-p_i). \quad (11.5)$$

Als Ausgangspunkt für die nachfolgenden Betrachtungen zerlegen wir schließlich $G(p)$ in ein Produkt zweier Übertragungsfunktionen:

$$G(p) = G_I(p) G_{II}(p); \quad (11.6)$$

$$G_I(p) = K_l p^l \quad (11.7)$$

$$G_{II}(p) = \frac{(1 + pT_{D\mu}) \cdots (1 + pT_{Dm})}{(1 + pT_r) \cdots (1 + pT_n)}. \quad (11.8)$$

11.1.2. Ermittlung des für das stationäre Verhalten maßgebenden Teiles der Übertragungsfunktion

Beginnen wir für die vorzuschlagende Klassifizierung unsere Betrachtungen im Zeitbereich, so ist es berechtigt, von der wichtigsten Kennfunktion dieses Zeitbereichs, der Übergangsfunktion, auszugehen. Für diese gilt bekanntlich

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\{1/p G(p)\}. \quad (11.9)$$

Auf Grund des Grenzwertsatzes der Laplacetransformation Gl. (10.47) findet man den stationären Wert der Übergangsfunktion (falls er existiert) nach der Beziehung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pH(p) = \lim_{p \rightarrow 0} G(p). \quad (11.10)$$

Der gesuchte stationäre Wert ist also mit der Signalübertragung der Frequenz Null (d. h. eines „Gleichstrom“-signals) identisch. Betrachten wir zunächst die Teilübertragungsfunktion $G_{II}(p)$ [s. Gl. (11.8)], so finden wir

$$\lim_{p \rightarrow 0} G_{II}(p) = 1. \quad (11.11)$$

Aus Gl. (11.6) folgt dann

$$\lim_{p \rightarrow 0} G(p) = \lim_{p \rightarrow 0} G_I(p). \quad (11.12)$$

Es gilt also unter Bezugnahme auf die Gln. (11.6) bis (11.8):

S 11.1

Das stationäre Übertragungsverhalten eines stabilen Übertragungsglieds bei Sprungstörung wird – unabhängig von Struktur und Parametern der Teilübertragungsfunktion G_{II} – allein durch die Teilübertragungsfunktion G_I , d. h. durch die Pole bzw. Nullstellen im Ursprung, bestimmt.

Das erlaubt, eine Klassenbildung von Übertragungsgliedern auf Grund ihres stationären Verhaltens vorzunehmen. Als Klassifizierungsmerkmal dient hierbei die ganze

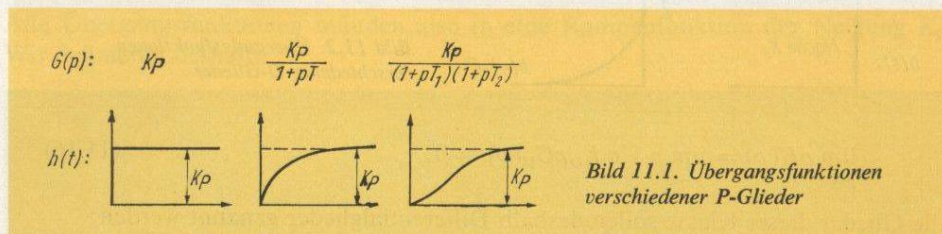
Zahl l , die die Anzahl der Pole bzw. Nullstellen im Ursprung festlegt. Nachfolgend seien die drei wichtigsten Klassen betrachtet, die sich für $l = 0, -1, +1$ ergeben.

11.1.3. Klasse der Proportionalglieder (P-Glieder)

Beginnen wir mit $l = 0$, so sind in den Gln. (11.3) bis (11.8) $\mu = \nu = 1$ und

$$G_1(p) = K_0 = K_p. \quad (11.13)$$

Im Bild 11.1 sind drei zu dieser Klasse gehörende Übertragungsfunktionen, die sich nur in G_{II} unterscheiden, und ihre zugehörigen Übergangsfunktionen aufgezeichnet. Letztere können der Tafel 10.1 entnommen werden; sie werden teilweise später noch genauer betrachtet.



Aus diesem Bild ist ersichtlich, daß die verschiedenen Glieder unterschiedliches Übergangsverhalten, jedoch den gleichen endlichen und von Null verschiedenen stationären Wert K_p haben. Das gilt allgemein; denn mit Gl. (11.13) folgt aus Gl. (11.10)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{p \rightarrow 0} G(p) = K_p. \quad (11.14)$$

Da diese Glieder im stationären Zustand eine dem (konstanten) Eingangssignal proportionale Übertragung aufweisen, sollen sie *Proportionalglieder* oder kurz *P-Glieder* genannt werden:

Lineare Übertragungsglieder, deren Übertragungsfunktion keine Nullstelle und keinen Pol im Ursprung der p -Ebene hat, heißen *Proportionalglieder* (*P-Glieder*). Der durch Gl. (11.13) definierte Übertragungsfaktor K_p heißt *proportionaler Übertragungsfaktor* des P-Gliedes.

D 11.3

Schließlich wollen wir noch das mit Gl. (11.14) gefundene Ergebnis in folgendem Satz festhalten:

Proportionalglieder haben einen von Null verschiedenen endlichen stationären Wert der Übergangsfunktion.

S 11.2

11.1.4. Klasse der Differentialglieder (D-Glieder)

Setzen wir nun $l = 1$, so werden $\mu = 2$, $\nu = 1$ und die für das stationäre Verhalten maßgebende Teilübertragungsfunktion [s. Gl. (11.7)]

$$G_1(p) = K_1 p = K_D p. \quad (11.15)$$

Die Übergangsfunktionen der zu dieser Klasse gehörenden Glieder haben wegen des differenzierenden Charakters von G_1 einen verschwindenden stationären Wert, wie Bild 11.2 demonstriert und die nachfolgende Beziehung beweist:

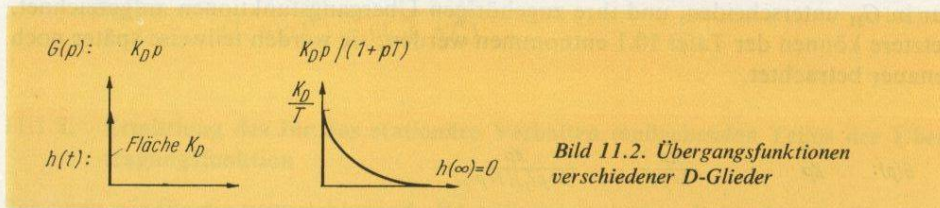


Bild 11.2. Übergangsfunktionen verschiedener D-Glieder

$$\lim_{p \rightarrow 0} p H(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p} K_D p G_{II}(p) = 0. \quad (11.16)$$

Alle Glieder dieser Klasse sollen deshalb Differentialglieder genannt werden:

- D 11.4** Lineare Übertragungsglieder, deren Übertragungsfunktion genau eine Nullstelle im Ursprung der p -Ebene hat, heißen *Differentialglieder (D-Glieder)*. Der durch Gl. (11.15) definierte Faktor K_D heißt *differentialer Übertragungsfaktor* des D-Gliedes.

Vorstehende Gleichung besagt:

- S 11.3** Differentialglieder haben einen verschwindenden stationären Wert ihrer Übergangsfunktion.

11.1.5. Klasse der Integralglieder (I-Glieder)

Die dritte für uns wichtige Klasse von Übertragungsgliedern erhalten wir mit $l = -1$. Dann sind $\mu = 1$, $\nu = 2$ und

$$G_1(p) = \frac{K_{-1}}{p} = \frac{K_I}{p}. \quad (11.17)$$

Das ist ein Integrator. Die Glieder dieser Klasse haben Übergangsfunktionen, die für große t in eine Rampenfunktion einmünden. Bild 11.3 zeigt zwei Beispiele.

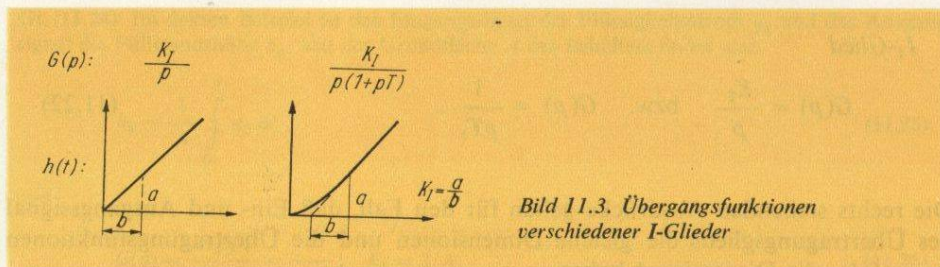


Bild 11.3. Übergangsfunktionen verschiedener I-Glieder

Zum Beweis vorstehender Aussage bestimmen wir den stationären Endwert der Ableitung der Übergangsfunktion, da die Übergangsfunktion selbst keinen Grenzwert hat:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{h}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p p H(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{K_I}{p} G_{II}(p) = K_I. \quad (11.18)$$

Alle Übergangsfunktionen münden also in eine Rampenfunktion der Neigung K_I . Wir definieren deshalb:

Lineare Übertragungsglieder, deren Übertragungsfunktion im Ursprung genau einen Pol hat, heißen *integrale Übertragungsglieder (I-Glieder)*. Der durch Gl. (11.17) definierte Faktor K_I heißt *integraler Übertragungsfaktor* des I-Gliedes.

D 11.5

Dabei gilt:

Bei integralen Übertragungsgliedern strebt die Übergangsfunktion für große t einer (zeitlinearen) Rampenfunktion zu.

S 11.4

11.1.6. P_1 -, D_1 - und I_1 -Glieder

Ist in den vorstehenden Fällen

$$G_{II}(p) = 1, \quad G(p) = G_I(p), \quad (11.19)$$

so werden aus den Klassen der P-, D- und I-Glieder die reinen P-, D- bzw. I-Glieder ausgewählt, die mit P_1 -, D_1 - und I_1 -Glieder (zuweilen auch mit P_0 -, D_0 -, I_0 -Glieder) bezeichnet werden:

P_1 -Glieder

$$G(p) = K_P \quad \text{bzw.} \quad G(p) = V_P. \quad (11.20)$$

D_1 -Glieder

$$G(p) = K_D p \quad \text{bzw.} \quad G(p) = p T_D. \quad (11.21)$$

I_1 -Glieder

$$G(p) = \frac{K_I}{p} \quad \text{bzw.} \quad G(p) = \frac{1}{pT_I} \quad (11.22)$$

Die rechts stehenden Ausdrücke gelten für den Fall, daß Ein- und Ausgangssignal des Übertragungsglieds die gleiche Dimensionen und die Übertragungsfunktionen demzufolge die Dimension 1 haben.

D 11.6

Die durch die Gln. (11.21), (11.22) eingeführten Zeitkonstanten heißen *Differentialzeit* T_D eines D_1 -Gliedes und *Integralzeit* T_I eines I_1 -Gliedes.

Bild 11.4 zeigt Übergangsfunktion und Beispiele eines D_1 -Gliedes. Der Index e kennzeichnet das Eingangs- und der Index a das Ausgangssignal. Im zweiten Beispiel ist der Winkel φ_e das Eingangssignal, die Ankerspannung u_a (bei vernachlässigbarer Ankerinduktivität) das Ausgangssignal. Für diese gilt (c Generatorkonstante)

$$u_a = c \frac{d\varphi_e}{dt} \quad (11.23)$$

und

$$G(p) = U_a(p)/\Phi_e(p) = pc; \quad c = K_D. \quad (11.24)$$

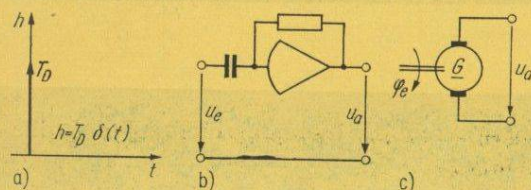


Bild 11.4. Übergangsfunktion und Beispiele eines D_1 -Gliedes $G(p) = pT_D$

- a) Übergangsfunktion
b) Differenziervverstärker
c) Tachogenerator

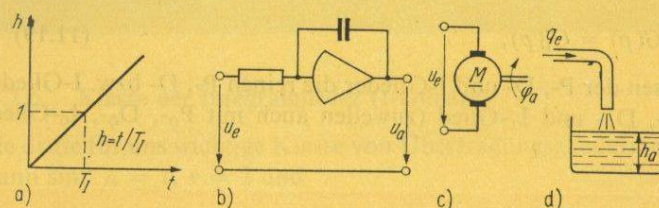


Bild 11.5. Übergangsfunktion und Beispiele eines I_1 -Gliedes $G(p) = 1/pT_I$

- a) Übergangsfunktion
b) Integrationsverstärker
c) Integrationsmotor
d) Flüssigkeitsbehälter

Im Bild 11.5 sind im zweiten Beispiel elektrische und mechanische Trägheiten des Motors als vernachlässigbar angesehen worden. Die Übertragungsfunktion ergibt sich dann durch Umkehr von

Gl. (11.24). Im dritten Beispiel ist das Eingangssignal der Flüssigkeitsstrom q_e und das Ausgangssignal die Füllstandshöhe h_a . Mit der Grundfläche A des Behälters findet man

$$h_a = \frac{1}{A} \int_0^t q_e dt \quad (11.25)$$

und

$$G(p) = \frac{H_a(p)}{Q_e(p)} = \frac{1}{pA}; \quad K_I = 1/A. \quad (11.26)$$

Die Übertragungsfunktionen des Integrierverstärkers und des Differenzierverstärkers in den Bildern 11.4, 11.5 werden später im Abschn. 12.3. berechnet werden.

Zweckmäßig wird nun ein Glied mit zweifacher Integration als I_2 -Glieder bezeichnet. Für dieses gilt:

$$G(p) = \frac{K_{I2}}{p^2} \text{ bzw. } \frac{1}{(pT_I)^2} \approx \frac{t^2}{2T_I^2}. \quad (11.27)$$

In konsequenter Weiterführung kann man ein D_2 -Glieder, ein I_3 -Glieder usw. definieren.

11.2. Verfeinerte Klassifizierung linearer Glieder auf Grund der Übertragungsfunktion durch Einbeziehung des Übergangsverhaltens, zugehörige Übergangsfunktionen

Für eine verfeinerte Klassifizierung von Übertragungsgliedern auf Grund der Struktur ihrer Übertragungsfunktion soll nun der zweite Term $G_{II}(p)$ von Gl. (11.6) herangezogen werden, der das Übergangsverhalten bestimmt. Zieht man konjugiert komplexe Pole zu einem quadratischen Term zusammen [s. Gl. (3.103)], so hat G_{II} die Form

$$G_{II}(p) = \frac{(1 + pT_{D1}) \cdots (1 + pT_{Dm})}{(1 + pT_1) \cdots (1 + 2DpT_0 + p^2T_0^2) \cdots (1 + pT_n)}. \quad (11.28)$$

Man sieht, daß $G_{II}(p)$ aus wenigen elementaren Gliedern aufgebaut ist. In einfachen Fällen besteht $G_{II}(p)$ nur aus einem solchen Elementarausdruck. Deshalb erweist es sich als zweckmäßig, folgende Glieder zu definieren:

11.2.1. Trägheits- (Verzögerungs-) Glied 1. Ordnung

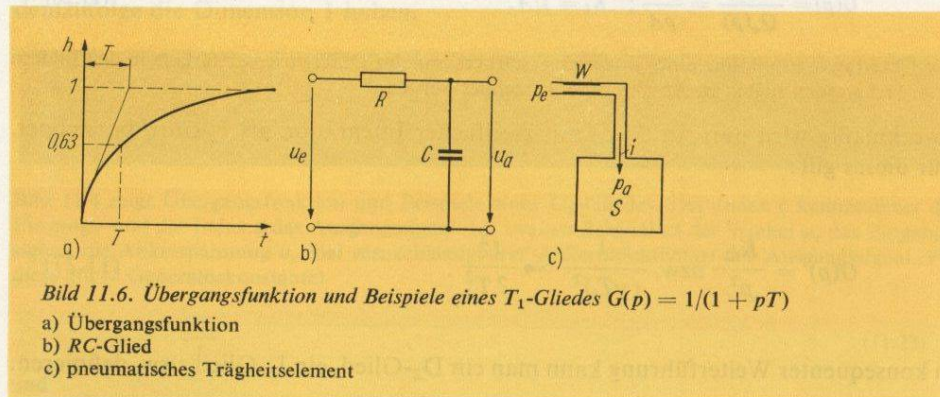
Das *Trägheits- oder Verzögerungsglied 1. Ordnung*, kurz als T_1 -Glieder bezeichnet, ist durch die folgende Übertragungsfunktion definiert:

$$G(p) = \frac{1}{1 + pT}. \quad (11.29)$$

Die der Tafel 10.1 zu entnehmende Übergangsfunktion

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p(1 + pT)} \right\} = 1 - e^{-t/T} \quad (11.30)$$

ist im Bild 11.6 aufgetragen und erklärt die gewählte Bezeichnung.



Dieses Bild zeigt auch zwei Beispiele: Für das RC-Glied erhält man Übertragungsfunktion und Zeitkonstante $T = RC$ leicht mit dem im Abschn. 3.4.9. eingeführten Widerstandsoperator $1/pC$. Für das pneumatische Glied gilt im Bereich laminarer Strömung mit p_e und p_a als Ein- und Ausgangsdruck, i als Luftstrom, W als pneumatischer Widerstand (Drossel) und S als pneumatisches Speichervolumen

$$i = (p_e - p_a)/W; \quad i = S \dot{p}_a. \quad (11.31)$$

Die Transformation liefert

$$I = (P_e - P_a)/W; \quad I = p P_a S. \quad (11.32)$$

Einsetzen und Auflösen nach dem Quotienten Ausgangs- zu Eingangssignal ergibt schließlich

$$G(p) = \frac{P_a}{P_e} = \frac{1}{1 + pSW} = \frac{1}{1 + pT}. \quad (11.33)$$

11.2.2. Trägheitsglieder 2. und höherer Ordnung

Als Trägheitsglied 2. Ordnung, kurz T_2 -Glieder, definieren wir ein Übertragungsglied mit der Übertragungsfunktion

$$G(p) = \frac{1}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)}; \quad T_{1,2} > 0, \text{ reell.} \quad (11.34)$$

Die zugehörige Übergangsfunktion (s. Tafel 10.1)

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p(1 + pT_1)(1 + pT_2)} \right\} \quad (11.35)$$

$$= 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2} = 1 - h_1(t) + h_2(t)$$

ist für $T_1 > T_2$ im Bild 11.7 aufgezeichnet.

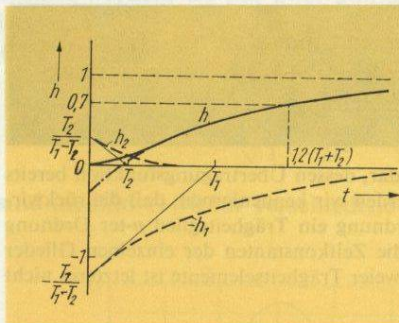


Bild 11.7. Übergangsfunktion eines T_2 -Gliedes

Für die Neigung des Anfangsverlaufs der Übergangsfunktion findet man mit dem Anfangswertsatz [s. Gl. (10.46)]

$$\lim_{t \rightarrow 0} \dot{h}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \left\{ p \frac{1}{p} G(p) \right\} = 0. \quad (11.36)$$

Definiert man als ein *Trägheitsglied n-ter Ordnung* (T_n -Glieder) ein solches mit der Übertragungsfunktion

$$G(p) = \frac{1}{(1 + pT_1)(1 + pT_2) \cdots (1 + pT_n)}; \quad (11.37)$$

$$T_i > 0, \text{ reell, } i = 1, 2, \dots, n,$$

so erhält man Übergangsfunktionen des gleichen Charakters. Bild 11.8 zeigt das für den Sonderfall eines Gliedes mit n gleichen Zeitkonstanten:

$$G(p) = \frac{1}{(1 + pT)^n}; \quad T > 0 \text{ reell.} \quad (11.38)$$

Die zugehörigen Übergangsfunktionen lauten (s. Tafel 10.1):

$$h(t) = 1 - e^{-t/T} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t/T)^i}{i!}. \quad (11.39)$$

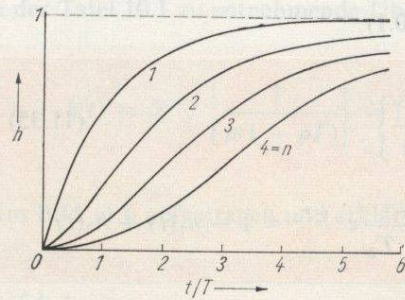


Bild 11.8. Übergangsfunktionen des Übertragungsglieds Gl. (11.38)

Allgemein gilt folgender Satz, der hier nicht bewiesen werden soll:

S 11.5

Die Übergangsfunktionen von Trägheitsgliedern sind monoton. Bei Trägheitsgliedern n -ter Ordnung verschwinden an der Stelle $t = +0$ die Übergangsfunktion und alle Ableitungen bis zur $(n - 1)$ -ten Ableitung.

Ein Beispiel eines T_2 -Glieds stellt der Gleichstrommotor dar, dessen Übertragungsfunktion bereits mit Gl. (10.69) bestimmt worden ist. Im Abschn. 12.1. werden wir kennenlernen, daß die rückwirkungsfreie Kettenschaltung von n Trägheitsgliedern 1. Ordnung ein Trägheitsglied n -ter Ordnung mit der Übertragungsfunktion Gl. (11.37) ergibt, wobei die Zeitkonstanten der einzelnen Glieder erhalten bleiben. Bei nichtrückwirkungsfreier Kopplung zweier Trägheitselemente ist letzteres nicht der Fall, wie das Beispiel von Bild 11.9 zeigt.

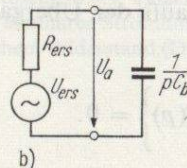
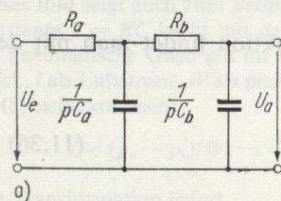


Bild 11.9. T_2 -Glied aus zwei gekoppelten RC-Gliedern
a) Schaltung
b) Ersatzschaltung gemäß Zweipoltheorie

Auf dem Weg über die Zweipolersatzschaltung mit der Ersatzspannungsquelle

$$U_{\text{ers}} = U_e \frac{1/pC_a}{R_a + 1/pC_a} = \frac{1}{1 + pT_a} U_e \quad (11.40)$$

und dem Ersatzwiderstand

$$R_{\text{ers}} = \frac{R_a \cdot 1/pC_a}{R_a + 1/pC_a} + R_b = \frac{R_a}{1 + pT_a} + R_b \quad (11.41)$$

erhält man mit den Zeitkonstanten der gekoppelten RC-Glieder

$$T_a = R_a C_a, \quad T_b = R_b C_b, \quad T_{ab} = R_a C_b \quad (11.42)$$

$$\begin{aligned} U_a &= U_{\text{ers}} \frac{1/pC_b}{R_{\text{ers}} + 1/pC_b} = U_e \frac{1}{1 + pT_a} \frac{1}{1 + pT_b + pT_{ab}/(1 + pT_a)} \\ &= U_e \frac{1}{(1 + pT_a)(1 + pT_b) + pT_{ab}} = U_e \frac{1}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)} \end{aligned} \quad (11.43)$$

Zwei rückwirkend gekoppelte T_1 -Glieder ergeben also ein T_2 -Glied. Dessen Zeitkonstanten T_1, T_2 sind jedoch (wegen T_{ab}) nicht mit denen der gekoppelten Glieder T_a, T_b identisch.

11.2.3. Schwingungsglied

Als *Schwingungsglied* oder T_2^* *Glied* soll ein Übertragungsglied mit der Übertragungsfunktion

$$G(p) = \frac{1}{1 + 2DpT_0 + p^2T_0^2}; \quad (11.44)$$

$T_0 > 0$, reell, $0 < D < 1$ gedämpfte ($D=0$ ungedämpfte) Schwingung

erklärt werden. Es hat zwei konjugiert komplexe Pole [s. Gl. (3.103)]. Für $D \geq 1$ liegt ein T_2 -Glied mit zwei reellen Polen vor. Die Übergangsfunktionen des T_2^* -Gliedes (s. Tafel 10.1)

$$h(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-D^2}} e^{-Dt/T_0} \sin(\sqrt{1-D^2} t/T_0 + \arccos D) \quad (11.45)$$

sind im Bild 11.10 für verschiedene Dämpfungsgrade aufgezeichnet.

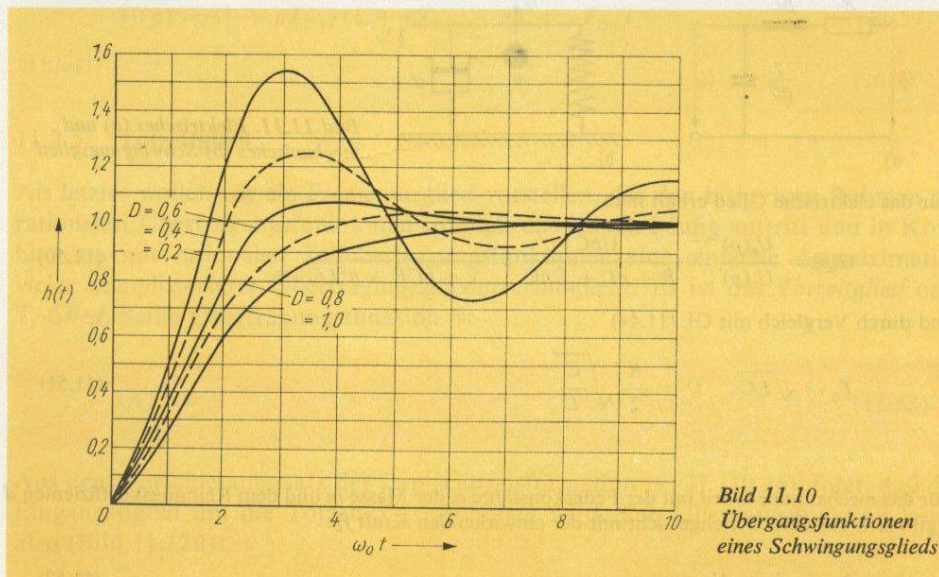


Bild 11.10
Übergangsfunktionen
eines Schwingungsglieds

Folgende Größen dienen zur Charakterisierung des Übergangsverhaltens und werden später bei der Regelkreissynthese Bedeutung erlangen (sie seien ohne Ableitung angegeben):

Zeit T_m bis zum ersten Maximum der Übergangsfunktion, kurz *Einschwingzeit* genannt:

$$T_m = \pi T_0 / \sqrt{1-D^2}; \quad (11.46)$$

Beruhigungszeit $T_{2\%}$, das ist die Zeit, zu der die exponentielle Hüllkurve an die Schwingung in ein Toleranzband von $\pm 2\%$ um den stationären Wert eintaucht, so daß die Übergangsfunktion für $t > T_{2\%}$ innerhalb dieses Toleranzbands verbleibt:

$$T_{2\%} = 4T_0/D; \quad (11.47)$$

Überschwingweite Δh der Übergangsfunktion:

$$\Delta h = \exp \{ -\pi D / \sqrt{1 - D^2} \}. \quad (11.48)$$

Einige ausgewählte Wertepaare sind in folgender Tabelle eingetragen:

D	1	0,8	0,7	0,5	0,25	0,1
$\Delta h/\%$	0	1,5	5	15	40	75

(11.49)

Ein elektrisches und ein mechanisches *Beispiel* eines Schwingungsglieds zeigt Bild 11.11.

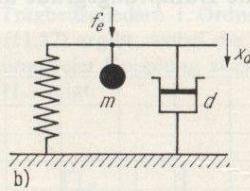
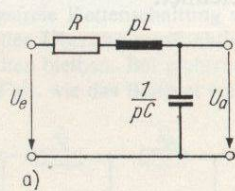


Bild 11.11. Elektrisches (a) und mechanisches (b) Schwingungsglied

Für das elektrische Glied erhält man

$$G(p) = \frac{U_a(p)}{U_e(p)} = \frac{1/pC}{R + pL + 1/pC} = \frac{1}{1 + pCR + p^2LC} \quad (11.50)$$

und durch Vergleich mit Gl. (11.44)

$$T_0 = \sqrt{LC}, \quad D = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (11.51)$$

Für das mechanische Glied mit der Federkonstante c , der Masse m und dem Reibungskoeffizienten d ergibt sich aus dem Gleichgewicht mit der einwirkenden Kraft f_e :

$$f_e = m\ddot{x}_a + d\dot{x}_a + cx_a. \quad (11.52)$$

Durch Transformation findet man

$$F_e = p^2mX_a + pdX_a + cX_a \quad (11.53)$$

und für die gesuchte Übertragungsfunktion

$$G(p) = \frac{X_a}{F_e} = \frac{1/c}{1 + pd/c + p^2m/c}; \quad (11.54)$$

$$T_0 = \sqrt{\frac{m}{c}}, \quad D = \frac{d}{2\sqrt{mc}}.$$

11.2.4. Vorhaltglied 1. und höherer Ordnung

Als *Vorhaltglied 1. Ordnung* oder T_{D1} -Glieder soll ein Glied mit der Übertragungsfunktion

$$G(p) = 1 + pT_D \quad (11.55)$$

bezeichnet werden. Die zugehörige Übergangsfunktion ist

$$h(t) = \sigma(t) + T_D \delta(t). \quad (11.56)$$

Dieses Glied tritt gewöhnlich nicht isoliert auf, sondern in Verbindung mit Trägheitsgliedern. Eine Ausnahme bildet der PD-Regler, der im Abschn. 12.4. vorgestellt werden wird.

Ein *Vorhaltglied m-ter Ordnung* oder T_{Dm} -Glieder ist (formal) durch die Übertragungsfunktion

$$G(p) = (1 + pT_{D1})(1 + pT_{D2}) \cdots (1 + pT_{Dm}) \quad (11.57)$$

erklärt.

11.2.5. Totzeitglied

Als letztes wollen wir ein Elementarglied vorstellen, das den bisherigen Rahmen der rationalen Übertragungsfunktionen sprengt, das jedoch häufig auftritt und in Kombination mit rationalen Teilübertragungsfunktionen eine einfache Approximation vieler komplizierterer Übertragungsglieder ermöglicht. Es ist das *Totzeitglied* oder T_t -Glieder. Seine Übertragungsfunktion ist

$$G(p) = e^{-pT_t}. \quad (11.58)$$

Aus dem Verschiebungssatz der Laplacetransformation [s. Gl. (10.26)] folgt, daß das Eingangssignal um die Totzeit T_t verschoben wird. Die Übergangsfunktion lautet also (Bild 11.12a):

$$h(t) = \sigma(t - T_t). \quad (11.59)$$

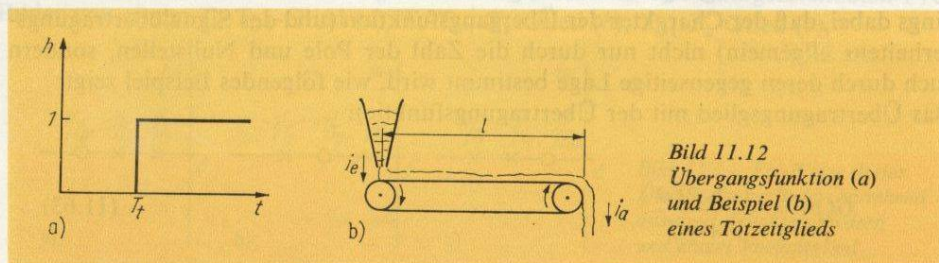


Bild 11.12
Übergangsfunktion (a)
und Beispiel (b)
eines Totzeitglieds

Eine solche Totzeit tritt dann auf, wenn das Signal an die endliche Geschwindigkeit eines Trägers gebunden ist, der durch ein Kontinuum transportiert wird bzw. strömt. Ein Beispiel ist die Förderbandeinrichtung von Bild 11.12b. Die dort auftretende Totzeit ist $T_t = l/v$, wobei v die Bandgeschwindigkeit und l die dort eingezeichnete Länge darstellt. Andere Beispiele sind elektrische Freileitungen und Rohrleitungen für Flüssigkeiten, z. B. für Warmwasserheizung oder als Erdölleitung.

11.2.6. Beschreibung komplizierterer Glieder als Kombinationsglieder

Diese Grundtypen von linearen Übertragungsgliedern sind vorwiegend aus formalen, systematischen Gründen eingeführt worden. Reale Glieder weisen häufig eine kompliziertere Struktur auf. Mit Hilfe der bisher definierten Grundtypen lassen sich jedoch allgemeine rationale Glieder zuzüglich Totzeit beschreiben, wenn man von der Zeitkonstantendarstellung des rationalen Teiles der Übertragungsfunktion Gl. (11.4) ausgeht, das Gesamtglied als eine Kombination von Grundgliedern betrachtet und folgendes vereinbart:

S 11.6

Zur Beschreibung der Struktur rationaler Übertragungsglieder zuzüglich Totzeit werden die Symbole der in der Übertragungsfunktion des Gesamtglieds als Faktoren enthaltenen Übertragungsfunktionen von Grundgliedern – durch Bindestrich getrennt – aneinandergefügt.

Die Übertragungsfunktion

$$G(p) = \frac{K(1 + pT_{D1})}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)(1 + pT_3)} \quad (11.60)$$

ist demnach die eines P_1 - T_{D1} - T_3 -Gliedes; die Übertragungsfunktion

$$G(p) = \frac{K_1}{p^2(1 + pT_1)} e^{-pT_t} \quad (11.61)$$

beschreibt ein I_2 - T_1 - T_t -Glieder, und die Übertragungsfunktion

$$G(p) = \frac{K_D p}{(1 + 2DpT_0 + p^2T_0^2)(1 + pT_3)} \quad (11.62)$$

stammt von einem D_1 - T_2^* - T_1 -Glieder.

Durch diese Symbolik kann also ein lineares Übertragungsglied bezüglich der Struktur seiner Übertragungsfunktion, d. h. strukturell hinsichtlich seines statischen und dynamischen Übertragungsverhaltens, gekennzeichnet werden. Zu beachten ist allerdings dabei, daß der Charakter der Übergangsfunktion (und des Signalübertragungsverhaltens allgemein) nicht nur durch die Zahl der Pole und Nullstellen, sondern auch durch deren gegenseitige Lage bestimmt wird, wie folgendes Beispiel zeigt:

Das Übertragungsglied mit der Übertragungsfunktion

$$G(p) = \frac{1 + pT_D}{1 + pT} \quad (11.63)$$

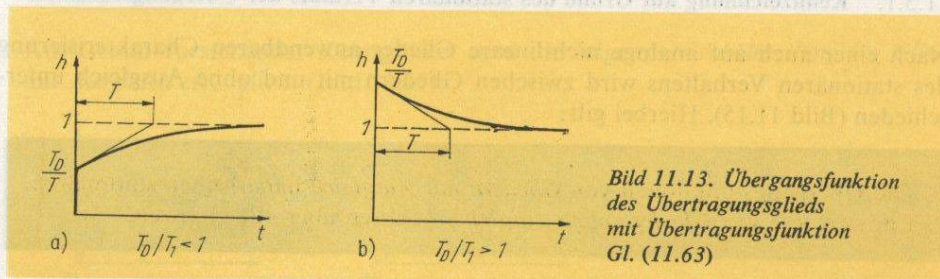
hat die Übergangsfunktion

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p(1+pT)} + \frac{pT_D}{p(1+pT)} \right\} = 1 + \left(\frac{T_D}{T} - 1 \right) e^{-t/T} \quad (11.64)$$

mit den Grenzwerten

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} G(p) = \frac{T_D}{T} \quad (11.65)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{p \rightarrow 0} G(p) = 1.$$



Aus Bild 11.13 ist ersichtlich, daß bei Überwiegen des Poles gegenüber der Nullstelle

$$p_1 = -\frac{1}{T} > p_{D1} = -\frac{1}{T_D}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{T_D}{T} < 1, \quad (11.66)$$

das Übertragungsglied Verzögerungscharakter, bei Überwiegen der Nullstelle

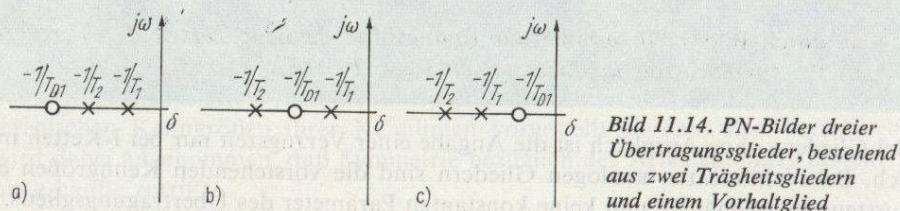
$$p_{D1} = -\frac{1}{T_D} > p_1 = -\frac{1}{T}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{T_D}{T} > 1, \quad (11.67)$$

dieses Glied Vorhaltcharakter hat. Deshalb soll das Glied Bild 11.13a mit $T > T_D$ als T_1 - T_{D1} -Glied und das von Bild 11.13b mit $T_D > T$ als T_{D1} - T_1 -Glied bezeichnet werden. Allgemein soll vereinbart werden:

Für eine präzisierte Beschreibung werden die Symbole der Grundglieder nach der Größe ihrer Trägheits- bzw. Vorhaltzeitkonstanten geordnet angegeben. Hierbei werden nebeneinander stehende Grundglieder niedrigerer zu solchen höherer Ordnung zusammengefaßt.

S 11.7

Entsprechend dieser Vereinbarung stammen die im Bild 11.14 aufgezeichneten PN-Bilder von einem T_2 - T_{D1} -Glied (a), T_1 - T_{D1} - T_1 -Glied (b), T_{D1} - T_2 -Glied (c).



11.3. Kennzeichnung analoger Glieder auf Grund der grafisch vorliegenden Übergangsfunktion

Während die vorstehende Einteilung von Übertragungsgliedern von der Übertragungsfunktion ausgegangen ist, sollen im folgenden einige von der Übergangsfunktion abgenommene Kenngrößen vorgestellt werden, die eine grobe Charakterisierung und Klassifizierung des Übertragungsverhaltens analoger Glieder ermöglichen.

11.3.1. Kennzeichnung auf Grund des stationären Verlaufs der Übergangsfunktion

Nach einer auch auf analoge nichtlineare Glieder anwendbaren Charakterisierung des stationären Verhaltens wird zwischen Gliedern mit und ohne Ausgleich unterschieden (Bild 11.15). Hierbei gilt:

D 11.7 Die Übergangsfunktionen von *Gliedern mit Ausgleich* haben einen stationären Endwert, die von *Gliedern ohne Ausgleich* wachsen über alle Grenzen.

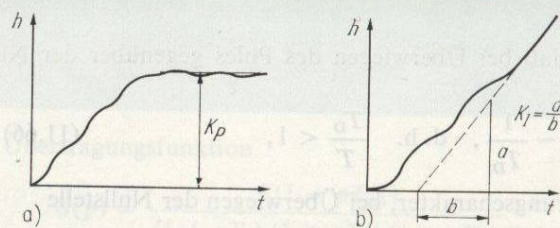


Bild 11.15. Übergangsfunktionen analoger Glieder

a) mit Ausgleich
b) ohne Ausgleich

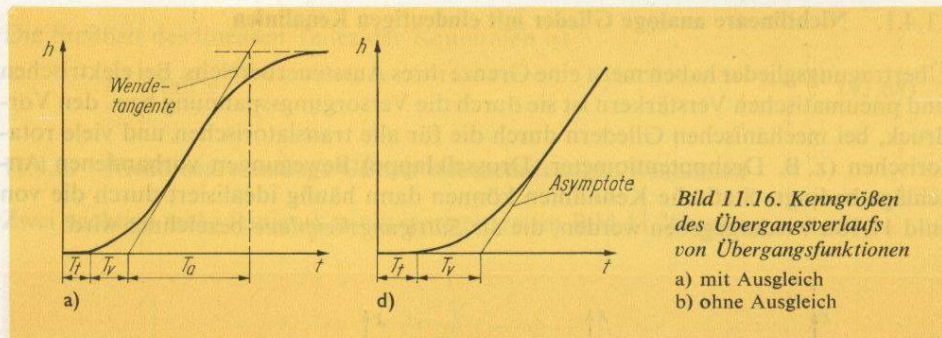
Offensichtlich sind lineare Glieder mit Ausgleich P-Glieder, während rationale lineare Glieder ohne Ausgleich I-Glieder oder Glieder sind, die ein I_l -Glieder mit $l > 1$ enthalten. Handelt es sich um nichtlineare Glieder, so sind die bereits definierten Übertragungsfaktoren K_p und K_I (s. Bild 11.15 und Definitionen 11.3 und 11.5) i. allg. keine konstanten Parameter des Übertragungsglieds, sondern von der Sprunghöhe des Eingangssignals abhängig. Ein K_I kann außerdem nur dann entnommen werden, wenn die Übergangsfunktion in eine zeitlineare Anstiegsfunktion einmündet.

11.3.2. Kennzeichnung auf Grund des Übergangsverlaufs der Übergangsfunktion

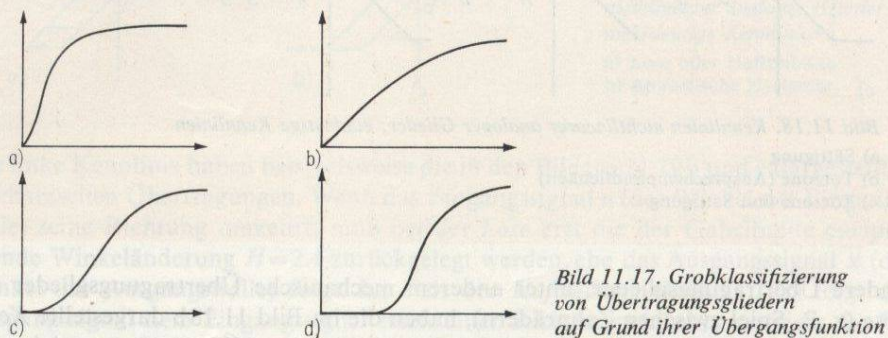
Für eine Charakterisierung und gröbere Beschreibung des Übergangsverlaufs führen wir einige Kenngrößen ein (Bild 11.16), die für monotone Übergangsfunktionen geeignet sind.

D 11.8 Die durch Bild 11.16 erläuterten Kenngrößen heißen: *Totzeit* T_t , *Verzugszeit* T_v , *Ausgleichszeit* T_a , *Ersatztotzeit* $T_{te} = T_t + T_v$.

Bei Gliedern ohne Ausgleich ist die Angabe einer Verzugszeit nur bei I-Ketten möglich. Bei nichtlinearen analogen Gliedern sind die vorstehenden Kenngrößen evtl. aussteuerungsabhängig und keine konstanten Parameter des Übertragungsglieds.



Auf Grund vorstehender Kenngrößen wird die folgende *Grobeinteilung* für *Glieder mit Ausgleich* ermöglicht (Bild 11.17):



- a) *verzögerungsarme Glieder* – diesen Charakter haben Regelstrecken für Stellung, Weg, Wirkspannung und Wirkstrom, Durchfluß und Druck (kurze Leitung)
- b) *Glieder mit Ausgleichszeit* – sie treten unter anderem bei Strecken für Drehzahl-, Druck- und Spannungsregelung auf
- c) *Glieder mit Ausgleichs- und Ersatztotzeit* – Regelstrecken für Temperaturen, Feuchte und Konzentration haben solche Eigenschaften
- d) *Glieder mit überwiegender Ersatztotzeit* – Glieder, die mit Transportvorgängen verbunden sind, haben diesen Charakter, z. B. Strecken für Gemisch- und Dickenregelung, Kohlenfeuerungen, längere Gasleitungen, Warmwasserheizungen.

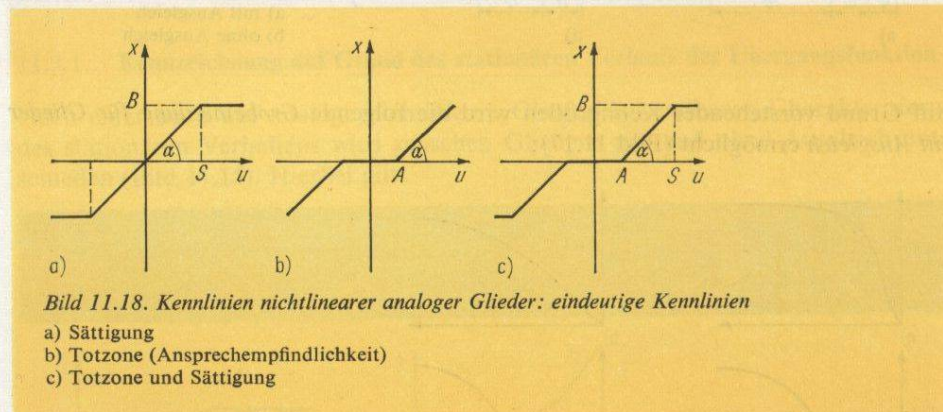
Bei *Gliedern ohne Ausgleich* sind die beiden Klassen die *ohne* und die *mit Ersatztotzeit*.

11.4. Kennzeichnung statischer nichtlinearer Glieder anhand der Kennlinie

Im Abschn. 3.3.2. ist erläutert worden, wie allgemeine nichtlineare Glieder häufig in lineare dynamische und nichtlineare statische zerlegt werden können. Nach der vorstehenden Klassifizierung linearer dynamischer Glieder sollen deshalb im folgenden noch einige idealisierte Typen nichtlinearer statischer Glieder zusammen mit charakteristischen Kenngrößen ihrer Kennlinien vorgestellt werden. Zur Vereinfachung wird dabei angenommen, daß Symmetrie bezüglich des Arbeitspunktes besteht, was auch häufig zutrifft.

11.4.1. Nichtlineare analoge Glieder mit eindeutigen Kennlinien

Übertragungsglieder haben meist eine Grenze ihres Aussteuerbereichs. Bei elektrischen und pneumatischen Verstärkern ist sie durch die Versorgungsspannung bzw. den Vor-
druck, bei mechanischen Gliedern durch die für alle translatorischen und viele rota-
torischen (z. B. Drehpotentiometer, Drosselklappe) Bewegungen vorhandenen An-
schläge bedingt. Statische Kennlinien können dann häufig idealisiert durch die von
Bild 11.18a wiedergegeben werden, die als *Sättigungskennlinie* bezeichnet wird.



Andere Übertragungsglieder, unter anderem mechanische Übertragungsglieder mit
Lose (z. B. Spiel zwischen Zahnrädern), haben die im Bild 11.18b dargestellte *Kenn-
linie mit Totzone (Ansprechempfindlichkeit)*. Bei der im Bild 11.19a gezeichneten
Hebelübertragung beispielsweise wird die Ausgangswelle erst dann mitgenommen,
wenn die Eingangswelle aus der Ruhelage um einen Winkel verstellt wird, der wenig-
stens der halben Breite der dort eingezeichneten Gabel entspricht. Bild 11.18c zeigt
schließlich die Kennlinien eines Gliedes, das beide Phänomene aufweist.

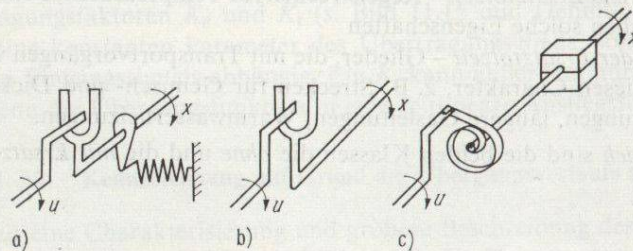


Bild 11.19. Mechanische Übertragungen

- a) Lose, als Totzone wirkend
b) Lose
c) Haftreibung

Zur einfachen Verständigung wollen wir vereinbaren:

D 11.9

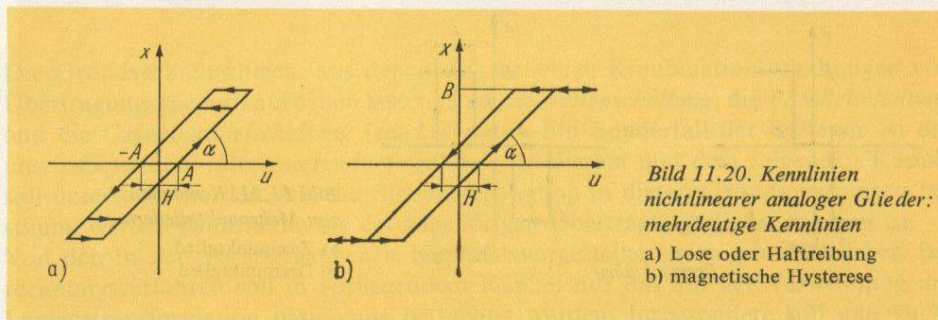
Statische Übertragungsglieder, deren Kennlinien – bei zulässiger Vereinfachung – die in den Bildern 11.18a, b und c aufgezeichneten Kennlinien haben, werden *Sättigungsglied*, *Totzoneglied* bzw. *Glied mit Totzone und Sättigung* genannt. Die an den Kennlinien eingetragenen Kennwerte heißen *Ansprechschwelle A*, *Sättigungsgrenze S* und *Begrenzungswert B*.

Die Steilheit des linearen Teiles der Kennlinien ist

$$k = \tan \alpha. \quad (11.68)$$

11.4.2. Nichtlineare analoge Glieder mit mehrdeutigen Kennlinien

Zwei wichtige mehrdeutige Kennlinien werden im Bild 11.20 gezeigt.



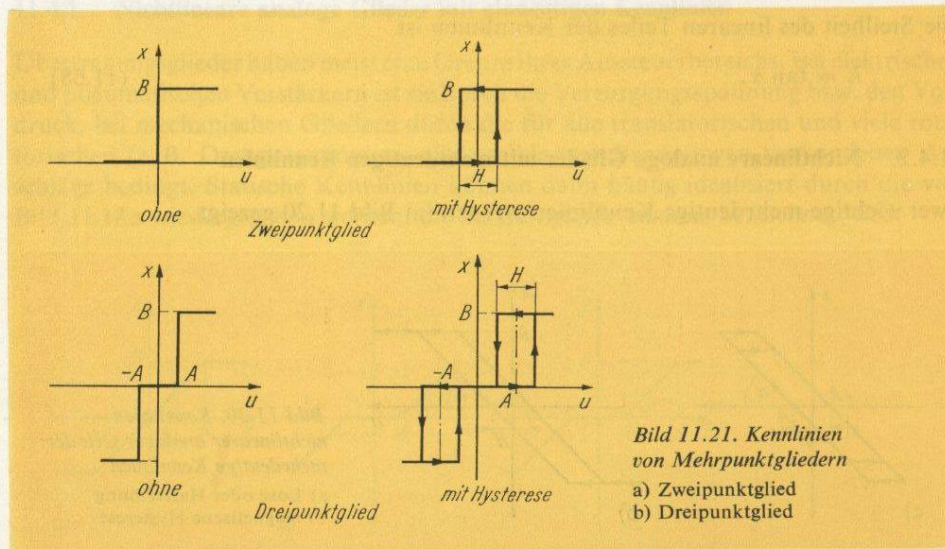
Die linke Kennlinie haben beispielsweise die in den Bildern 11.19b und c dargestellten mechanischen Übertragungen. Wenn das Eingangssignal u (der Winkel der Eingangswelle) seine Richtung umkehrt, muß bei der *Lose* erst die der Gabelbreite entsprechende Winkeländerung $H=2A$ zurückgelegt werden, ehe das Ausgangssignal x (der Winkel der Ausgangswelle) folgt. Im Fall der *Haftreibung* (Bild 11.19c) folgt das Ausgangssignal dem Eingangssignal nach einer Richtungsumkehr, nachdem die Feder entspannt und in entgegengesetzter Richtung erneut um den Winkel $|\Delta u| = A$ vorgespannt worden ist, bei dem das von der Feder erzeugte Drehmoment das Moment der Haftreibung überwindet. H wird *Hysteresebreite*, das entsprechende Glied *Hystereseglied* genannt. Der Winkel α bestimmt wiederum den *Anstiegsgrad* k .

Einen ähnlichen, jedoch nicht gleichen Charakter zeigt die *magnetische Hysteresekennlinie* (Bild 11.20b). Während bei der im Bild 11.19 skizzierten *Lose* und *Haftreibung* die Kenngrößen H und α konstante Parameter darstellen, sind diese Größen bei einem magnetischen Glied aussteuerungsabhängig, solange nicht bis zur Sättigungsgrenze angesteuert wird. Ein besonders wichtiger Unterschied besteht darin, daß das magnetische Glied immer eine Sättigungsgrenze hat, was für die genannten mechanischen Beispiele nicht zutrifft, wie die entsprechenden Bilder andeuten.

11.4.3. Nichtlineare diskrete Übertragungsglieder: Mehrpunktglieder

Abschließend seien noch die Kennlinien einiger wichtiger nichtlinearer diskreter Übertragungsglieder vorgestellt, die zu den *Mehrpunktgliedern* gehören (s. Definition 5.7).

Die im Bild 11.21 gezeigten *Zwei-* bzw. *Dreipunktkennlinien* (das Ausgangssignal kann nur zwei bzw. drei diskrete Zustände annehmen) haben z. B. einfache bzw. polarisierte Relais. Je nachdem, ob die Hysterese vernachlässigbar ist oder nicht, gilt die linke oder rechte Kennlinie. Als Kenngrößen dienen die bereits definierten Parameter: Ansprechschwelle A und Hysteresebreite H .



Wegen ihres einfachen Aufbaus und der möglichen hohen Leistungsverstärkung finden derartige Glieder breite Anwendung als *Zwei- und Dreipunktregler* in einfacheren Regelkreisen. Als Elemente komplizierterer nichtlinearer Regler (Mehrpunktregler mit Rückführungen) dienen sie auch zur Lösung anspruchsvollerer Regelungsaufgaben.

12. Berechnung der Signalübertragung elementarer Verknüpfungen von Übertragungsgliedern mittels Übertragungsfunktionen und Kennlinien

Die Grundverknüpfungen, aus denen sich beliebige Kombinationsschaltungen von Übertragungsgliedern aufbauen lassen, sind die *Kettenschaltung*, die *Parallelschaltung* und die *Gegenparallelschaltung* (*Rückführung*). Ein Sonderfall der letzteren ist der uns insbesondere interessierende *Regelkreis*. In diesem und dem folgenden Kapitel soll untersucht werden, wie die Signalübertragung in diesen Grundsaltungen bestimmt werden kann, wenn die der zugehörigen Übertragungsglieder bekannt ist.

Von den in den vorangegangenen Kapiteln vorgestellten vier grundsätzlichen Berechnungsverfahren soll in vorliegendem Kapitel nur das auf der Verwendung der Laplacetransformation basierende betrachtet werden. Insbesondere soll untersucht werden, wie sich die Übertragungsfunktionen der Kombinationsschaltungen aus denen der beteiligten Glieder ergeben. Durch Übergang $p \rightarrow j\omega$ erhält man aus den Übertragungsfunktionen leicht die Frequenzgänge der Grundsaltungen.

Mit dem im Abschn. 10.2. angegebenen Faltungssatz und den für die Faltung gültigen distributiven, assoziativen und kommutativen Gesetzen können die für die Übertragungsfunktion erhaltenen Ergebnisse auf entsprechende Faltungsoperationen zurückgeführt werden, wenn die Übertragungsfunktionen der Einzelglieder durch deren Gewichtsfunktionen ersetzt werden. Für die Rechnung ist das jedoch unzumutbar. Deshalb werden wir auf diese Rechenmethode erst bei der Behandlung stochastisch gestörter Systeme näher zurückkommen.

Im vorliegenden Abschn. 12. werden die Übertragungsfunktionen der genannten Grundverknüpfungen aufgestellt (s. Abschnitte 12.1. bis 12.3.). Danach werden zwei besonders interessierende Anwendungsfälle, Regler mit Rückführungen und Regelkreise, betrachtet (s. Abschnitte 12.4. bis 12.6.). Im Abschn. 12.7. folgt eine Erweiterung auf Regelkreise mit Totzeit. Die Konstruktion der (statischen) Kennlinien von Verknüpfungen nichtlinearer Übertragungsglieder schließt das Kapitel ab. Die Frage der Aufstellung von Zustandsgleichungen von Kombinationsschaltungen wird, insbesondere für den Fall gegebener Übertragungsfunktionen der Einzelglieder oder der Kombinationsschaltung, zusammen mit weiteren Fragen im Abschn. 13. untersucht.

12.1. Übertragungsfunktion von Kettenschaltungen

Es sei (Bild 12.1)

$$X_i = G_i U_i \quad (12.1)$$

die Signalübertragung eines Einzelglieds mit der Übertragungsfunktion G_i im Bildbereich und

$$X = G_0 U \quad (12.2)$$

die Gleichung für die Signalübertragung der im Bild 12.2 dargestellten Kettenschaltung (Reihenschaltung). G_0 sei die resultierende Übertragungsfunktion dieser offenen Kette.

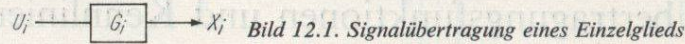


Bild 12.1. Signalübertragung eines Einzelglieds

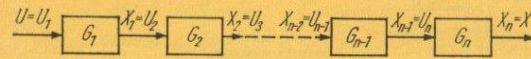


Bild 12.2. Signalübertragung einer Kettenschaltung (Reihenschaltung) von Übertragungsgliedern

Unter Beachtung, daß

$$\begin{aligned} U_i &= X_{i-1}; \quad i = 1, 2, \dots, n \\ U_1 &= U; \quad X_n = X, \end{aligned} \quad (12.3)$$

erhält man

$$X = X_n = G_n U_n = G_n G_{n-1} U_{n-1} = G_n G_{n-1} \dots G_2 G_1 U. \quad (12.4)$$

Der Vergleich mit Gl. (12.2) ergibt die Übertragungsfunktion der Kettenschaltung:

$$G_0 = \prod_{i=1}^n G_i. \quad (12.5)$$

Diese Aussage ist auch auf die Frequenzgänge übertragbar, die man durch Grenzübergang $p \rightarrow j\omega$ erhält. Somit gilt:

S 12.1

Die Übertragungsfunktion (den Frequenzgang) einer *Kettenschaltung* erhält man als Produkt der Übertragungsfunktionen (der Frequenzgänge) der in Kette geschalteten Übertragungsglieder.

Unter Verwendung des Faltungssatzes [s. Gl. (10.44)] würde man mit den Gewichtsfunktionen

$$g_0(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G_0(p)\}, \quad g_i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G_i(p)\} \quad (12.6)$$

im Zeitbereich

$$x(t) = g_0(t) * u(t) = g_1(t) * g_2(t) * \dots * g_n(t) * u(t), \quad (12.7)$$

in ausführlicher Schreibweise

$$x(t) = \int_{-0}^t \int_{-0}^{\tau_1} \dots \int_{-0}^{\tau_{n-1}} g_1(t - \tau_1) g_2(\tau_1 - \tau_2) \dots g_n(\tau_{n-1} - \tau_n) u(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n, \quad (12.8)$$

erhalten. Hieraus sind die großen Vorzüge der Rechnung mit Übertragungsfunktionen bei Zusammenschaltung bereits bekannter Übertragungsglieder ersichtlich.

12.2. Übertragungsfunktion von Parallelschaltungen

Für die im Bild 12.3 dargestellte Parallelschaltung findet man im Bildbereich der Laplacetransformation auf Grund des im Abschn. 10.2. angegebenen Linearitätssatzes unter Beachtung, daß das Eingangssignal aller Übertragungsglieder dasselbe, nämlich U , ist,

$$X = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n G_i U. \quad (12.9)$$

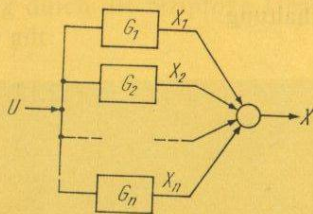


Bild 12.3. Parallelschaltung von Übertragungsgliedern

Bezeichnen wir die Übertragungsfunktion der Parallelschaltung mit G_P , so gilt

$$G_P = \sum_{i=1}^n G_i. \quad (12.10)$$

Die Übertragungsfunktion (der Frequenzgang) einer Parallelschaltung ergibt sich als Summe der Übertragungsfunktionen (der Frequenzgänge) der parallelgeschalteten Einzelglieder.

S 12.2

Bei Berechnung über die entsprechenden Gewichtsfunktionen gemäß Gl. (12.6) erhielt man

$$g_P(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G_P(p)\} = \sum_{i=1}^n g_i(t). \quad (12.11)$$

12.3. Übertragungsfunktion von Gegenparallelschaltungen (Schaltungen mit Rückführung)

Die dritte Schaltung, die man als Grundbaustein in kybernetischen Systemen vorfindet, ist die Gegenparallelschaltung. Sie ist nach Bild 12.4 durch ein Rückführglied G_r gekennzeichnet, das in Gegenparallelschaltung zu einem Vorwärtsglied G_v liegt.

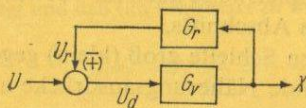


Bild 12.4. Gegenparallelschaltung (Rückführschaltung)

Das durch Abzweigung vom Ausgangssignal X über das Rückführglied erhaltene Rückführsignal U_r wird mit dem Eingangssignal U gemischt. Im Fall einer Subtraktion (Minuszeichen) erhält man eine *negative Rückführung*, eine *Gegenkopplung*, im Fall einer Addition (Pluszeichen) eine *positive Rückführung*, eine *Mitkopplung*. Während die Mitkopplung ein wichtiges Mittel zur Schwingungserzeugung bzw. für eine selektive Verstärkungserhöhung darstellt, finden wir in Steuerungssystemen gewöhnlich eine (stabilisierende) Gegenkopplung vor. Wenn nicht ausdrücklich anders erwähnt, wollen wir deshalb unter Rückführung eine Gegenkopplung verstehen. Das Eingangssignal des Vorwärtsglieds ist dann ein *Differenzsignal* U_d . Vorwärts- und Rückführglied bilden zusammen eine (in sich geschlossene) *Schleife*. Sie ist das neue strukturelle Element gegenüber Ketten- und Parallelschaltung.

Aus Bild 12.4 liest man ab:

$$\begin{aligned} X &= G_v U_d = G_v (U_{(+)} - U_r) \\ &= G_v U_{(+)} - G_v G_r X. \end{aligned} \quad (12.12)$$

Hieraus erhält man

$$X = \frac{G_v}{1 - G_v G_r} U. \quad (12.13)$$

Definiert man als *Übertragungsfunktion* der von Vorwärts- und Rückwärtsglied gebildeten *offenen Schleife* (der offenen Kette) G_0 :

$$G_0 = G_v G_r, \quad (12.14)$$

so erhält man für die *Übertragungsfunktion der Gegenparallelschaltung* (Rückführschaltung) G_{Rf} :

$$G_{Rf} = \frac{G_v}{1 - G_0}. \quad (12.15)$$

S 12.3

Die *Übertragungsfunktion einer Gegenparallelschaltung* (Rückführschaltung) enthält im Zähler die Übertragungsfunktion des Vorwärtsglieds. Der Nenner lautet: eins + (−) Übertragungsfunktion der von Vorwärts- und Rückwärtsglied gebildeten offenen Schleife. Das positive (negative) Vorzeichen gilt für Gegen-(Mit-)Kopplung.

Bemerkt sei, daß die zur Gegenkopplung erforderliche Vorzeichenumkehr nicht notwendig an der Summierstelle erfolgen muß, sondern beispielsweise auch im Vorwärtsglied liegen kann, s. hierzu das Beispiel am Ende dieses Abschnitts.

Für den Fall, daß die Übertragungsfunktion der offenen Schleife groß (klein) gegen eins ist, lassen sich mit den Gln. (12.14), (12.15) folgende Näherungsausdrücke angeben:

$$G_{\text{Rf}} \approx \frac{1}{G_r} \quad \text{für } |G_0| \gg 1 \quad (12.16)$$

$$\approx G_v \quad |G_0| \ll 1.$$

Wird eine Rückführung absichtlich angebracht, so wird gewöhnlich in dem für das Verhalten des Systems maßgebenden Frequenzbereich die Einhaltung der Bedingung $|G_0| \gg 1$ erstrebt und gewährleistet. Dann wird die Übertragungsfunktion der Schaltung durch die reziproke Übertragungsfunktion des Rückführglieds bestimmt. Somit gilt:

Eine Rückführung ist geeignet, dem resultierenden Übertragungsglied ein von den – evtl. veränderlichen – Eigenschaften des Vorwärtsglieds weitgehend unabhängiges, durch die reziproke Übertragungsfunktion des Rückführglieds maßgebend bestimmtes Übertragungsverhalten zu verleihen.

S 12.4

Rückführungen werden in der Technik häufig benutzt, insbesondere wenn ein definiertes, zeitinvariantes Übertragungsverhalten erzielt werden muß, z. B. bei Meßgliedern, Meßumformern, Reglerverstärkern, Stellantrieben und Stellgliedern. Ein weiteres wichtiges Beispiel sind die im Abschn. 5.2. vorgestellten Rechenverstärker.

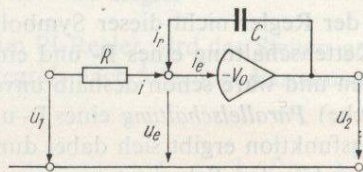


Bild 12.5. Integrierverstärker

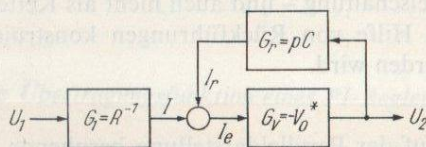


Bild 12.6. Blockdiagramm des Integrierverstärkers Bild 12.5, Variante 1

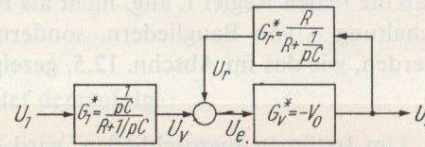


Bild 12.7. Blockdiagramm des Integrierverstärkers Bild 12.5, Variante 2

Für den im Bild 12.5 dargestellten Integrierverstärker als Beispiel erhält man mit

$$u_e \approx 0, V_0^* = -u_2/i_e \quad (12.17)$$

das im Bild 12.6 gezeigte Blockdiagramm.

Für $V_0^*/\Omega \rightarrow \infty$ ist $G_v G_r \gg 1$, und man erhält nach Gl. (12.16) für die Übertragungsfunktion des Integrierverstärkers G_1 , wenn man beachtet, daß das Glied G_1 mit der Rückführschaltung in Kette liegt und daß (im Gegensatz zu Bild 12.4) die Vorzeichenumkehr im Vorwärtsglied erfolgt:

$$G_1 \approx -G_1 \frac{1}{G_r} = -\frac{1}{R} \frac{1}{pC} = -\frac{1}{pT}, \quad \text{mit } T = RC. \quad (12.18)$$

Das ist die Übertragungsfunktion eines Integrators mit der Integralzeit T .

Will man V_0 als eine Spannungsverstärkung ansehen, so erhält man mit

$$V_0 = -u_2/u_e, i_e \approx 0 \quad (12.19)$$

das Blockdiagramm Bild 12.7. Hierbei werden die Spannungen U_v und U_r durch Spannungsteilung von U_1 bzw. U_2 über den von R und $1/pC$ gebildeten Spannungsteiler berechnet und U_e als Überlagerung dieser Spannungen bestimmt. Für $V_0 \rightarrow \infty$ erhält man wie vorher

$$G_1 = -G_1^* \frac{1}{G_r^*} = -\frac{1}{pT}; T = RC. \quad (12.20)$$

Da R und C als passive Schaltelemente sehr genau ausgewählt und konstant gehalten werden können, ist der Integrierverstärker von den schwierig vermeidbaren Verstärkungsschwankungen des Vorwärtsglieds praktisch unabhängig, solange nur die Schleifenverstärkung groß gegen eins ist.

12.4. Übertragungsfunktionen und Kennlinien linearer Regler: Darstellung als Parallelschaltung

Bei der im Abschn. 11.2.6. vorgestellten Symbolik zur Bezeichnung von Übertragungsgliedern erhält man die Übertragungsfunktion eines Kombinationsglieds als Produkt der Übertragungsfunktionen der in der Bezeichnung genannten Elementarglieder. Die Übertragungsfunktion eines I_1 - T_1 -Glieds beispielsweise ergibt sich als Produkt der Übertragungsfunktion eines I_1 -Glieds mit der eines T_1 -Glieds. Nach den Ausführungen im Abschn. 12.1. entspricht das der Kettenschaltung der beteiligten Glieder. Ein T_n -Glieder kann so als eine Kettenschaltung von n T_1 -Gliedern aufgefaßt werden.

Aus historischen Gründen folgt die Bezeichnung der Regler nicht dieser Symbolik. Ein PI-Regler beispielsweise bedeutet nicht die Kettenschaltung eines P- und eines I-Glieds. Das würde insgesamt ein I-Glied ergeben und wäre schon deshalb unvernünftig. Mit PI-Regler ist vielmehr die (gedankliche) *Parallelschaltung* eines P- und eines I-Glieds gemeint. Die gesamte Übertragungsfunktion ergibt sich dabei durch *Addition* der Übertragungsfunktionen der beteiligten Glieder. Schon jetzt sei gesagt, daß die realen Regler i. allg. nicht als Parallelschaltung – und auch nicht als Kettenschaltung – von Baugliedern, sondern mit Hilfe von Rückführungen konstruiert werden, wie das im Abschn. 12.5. gezeigt werden wird.

Um Irrtümer auszuschließen, wird die auf der Paralleldarstellung beruhende Symbolik – dem internationalen Brauch entsprechend – auf Regler und nur auf diese angewandt.

Die Symbole der Elementarglieder werden dabei ohne Bindestrich nebeneinander gestellt, z. B. PI-Regler oder PID-Regler. Hingegen werden bei der auf der Darstellung als Kettenschaltung basierenden Bezeichnungsweise die Symbole der Elementarglieder durch Bindestrich verbunden, z. B. D_1 - T_2 -Glieder oder I_1 - T_{D_1} - T_2 -Glieder. Schließlich sei nochmals hervorgehoben, daß die Interpretation als Ketten- oder Parallelschaltung nur gedanklich erfolgt und daß beide Bezeichnungsweisen die Struktur der Übertragungsfunktion des Gesamtglieds unabhängig von dessen innerer Struktur eindeutig beschreiben. Bei der für die Regler verwandten Bezeichnungsweise ist jedoch die Menge der beschreibbaren Strukturen sehr eingeschränkt.

12.4.1. P- und I-Regler

P- und I-Regler sind hinsichtlich ihrer Übertragungsfunktion mit dem im Abschnitt 11.1.6. definierten P_1 -Glied bzw. I_1 -Glied identisch. Die Reglerparameter erhalten den Index R. Somit gilt:

Übertragungsfunktion eines P-Reglers

$$G_R(p) = K_R. \quad (12.21)$$

Übertragungsfunktion eines I-Reglers

$$G_R(p) = \frac{K_{IR}}{p} \quad \text{bzw.} \quad G_R = \frac{1}{pT_{IR}}. \quad (12.22)$$

Hierbei ist K_R bzw. K_{IR} der *proportionale* bzw. *integrale Reglerübertragungsfaktor*. T_{IR} ist die *Integralzeit* des Reglers, wenn G_R die Dimension eins hat.

Bei beiden Übertragungsfunktionen handelt es sich um idealisierte Regler. Bei realen Reglern treten zusätzliche Trägheiten auf, die jedoch bei der Regelkreissynthese meist gegenüber den wesentlich größeren Trägheiten der Strecke vernachlässigt werden dürfen.

12.4.2. PI-Regler

Beim PI-Regler wird das Steuersignal u auf Grund der Regelabweichung e und ihres Integrals nach folgender Beziehung berechnet:

$$u = K_R \left(e + \frac{1}{T_n} \int_0^t e \, dt \right). \quad (12.23)$$

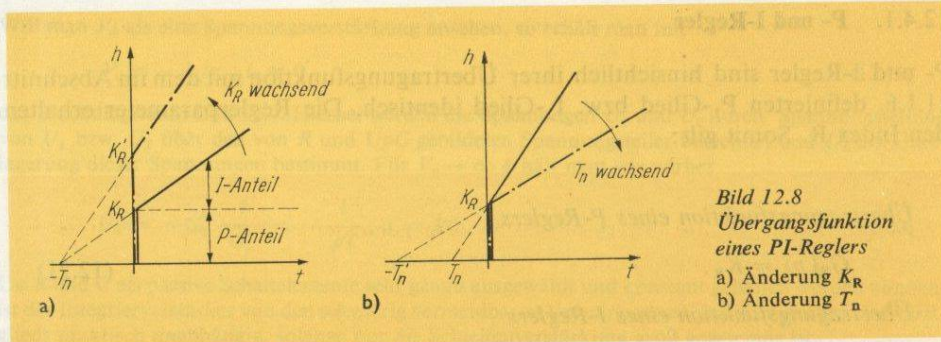
Die Übertragungsfunktion eines PI-Reglers lautet demzufolge:

$$G_{PI}(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K_R \left(1 + \frac{1}{pT_n} \right). \quad (12.24)$$

Die Übergangsfunktion ist in $t \geq 0$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K_R}{p} \left(1 + \frac{1}{pT_n} \right) \right\} = K_R \left(1 + \frac{t}{T_n} \right). \quad (12.25)$$

Sie ist für verschiedene Parameter im Bild 12.8 aufgezeichnet. Dieses Bild verdeutlicht, daß sich das Ausgangssignal des PI-Reglers aus einem dem Eingangssignal proportionalen P-Anteil und einem dem Integral des Eingangssignals entsprechenden I-Anteil additiv zusammensetzt.



K_R heißt – wie schon beim P-Regler – *Reglerübertragungsfaktor* oder (falls er die Dimension eins hat) *Reglerverstärkungsfaktor*. Er beeinflusst sowohl den P- als auch den I-Anteil. Der Parameter T_n kann auf die im Bild 12.8 gezeigte Weise als Schnittpunkt der extrapolierten Übergangsfunktion mit der Abszissenachse bestimmt werden. T_n heißt *Nachstellzeit*, weil bis zu dieser Zeit das Steuersignal auf Grund des I-Anteils um den Betrag nachgestellt wird, um den es durch den P-Anteil sofort ausgelenkt wird.

Bild 12.8b ist zu entnehmen, daß mit wachsendem T_n der I-Anteil vermindert wird, während der P-Anteil unverändert bleibt.

Durch Umformung der Übertragungsfunktion des PI-Reglers

$$G_{PI}(p) = K_R \left(1 + \frac{1}{pT_n} \right) = \frac{K_R}{pT_n} (1 + pT_n) = \frac{K_I}{p} (1 + pT_D); \quad (12.26)$$

$$K_I = K_R/T_n, \quad T_D = T_n \quad (12.27)$$

erkennt man, daß der PI-Regler ein I_1 - T_{D1} -Glied ist.

Für manche Bemessungsverfahren und Reglerschaltungen ist es günstiger, von K_I und T_D als einstellbaren Reglerparametern auszugehen. Eine Umrechnung auf die Parameter K_R und T_n ist durch Gl. (12.27) ermöglicht.

12.4.3. PD-Regler

Bei einem idealen PD-Regler wird das Steuersignal von der Regelabweichung und deren Differential nach folgender Beziehung gebildet:

$$u = K_R \left(e + T_v \frac{de}{dt} \right). \quad (12.28)$$

Dem entspricht die Übertragungsfunktion des PD-Reglers:

$$G_{PD}(p) = U(p)/E(p) = K_R(1 + pT_v). \quad (12.29)$$

Es handelt sich also um die Parallelschaltung eines P- und eines D-Gliedes bzw. nach der Terminologie von Abschn. 11.2.6. um ein P_1-T_{D1} -Glied mit $T_D = T_v$. Die Übergangsfunktion lautet in $t \geq 0$:

$$h(t) = K_R(1 + T_v \delta(t)). \quad (12.30)$$

Da die δ -Funktion durch die bei einem realen Regler vorhandenen Begrenzungen abgeschnitten wird und ein Impuls schwierig gemessen werden kann, empfiehlt es sich, den PD-Regler mittels einer Rampenfunktion

$$E(p) = \frac{1}{p^2 T} \Leftrightarrow \frac{t}{T} \quad (12.31)$$

zu testen. Die Rampenantwort ist

$$u_r(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ K_R(1 + pT_v) \frac{1}{p^2 T} \right\} = K_R \left(\frac{t}{T} + \frac{T_v}{T} \right). \quad (12.32)$$

K_R ist wieder der Reglerübertragungsfaktor (Verstärkungsfaktor). Die Vorhaltzeit T_v kann auf die im Bild 12.9 eingezeichnete Weise als die Zeit bestimmt werden, zu der die ideale Rampenantwortfunktion das Doppelte ihres Anfangswerts erreicht. Eine andere Möglichkeit besteht in der Extrapolation der Anstiegsfunktion bis zum Schnitt mit der Abszissenachse.

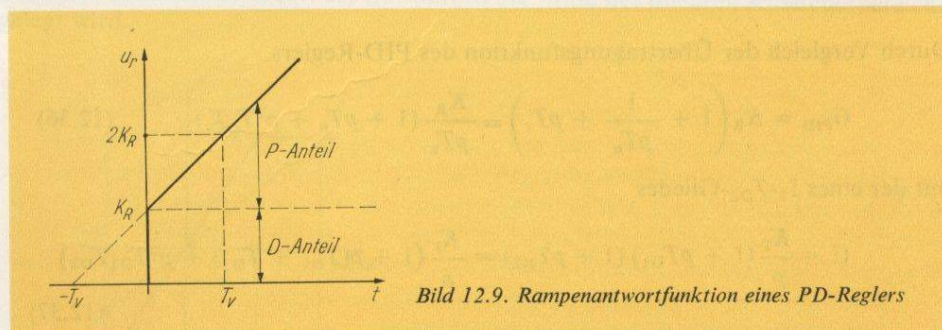


Bild 12.9. Rampenantwortfunktion eines PD-Reglers

Zu beachten ist, daß mit K_R sowohl P- als auch D-Anteil erhöht werden. Hingegen wird durch Erhöhung von T_v nur der D-Anteil vergrößert.

12.4.4. PID-Regler

Der PID-Regler stellt formal eine Parallelschaltung eines P-, I- und D-Gliedes dar. Seine Gleichung lautet:

$$u = K_R \left(e + \frac{1}{T_n} \int_0^t e \, dt + T_v \frac{de}{dt} \right). \quad (12.33)$$

Die Übertragungsfunktion des PID-Reglers ist somit

$$G_{\text{PID}} = K_R \left(1 + \frac{1}{pT_n} + pT_v \right). \quad (12.34)$$

T_n heißt wiederum *Nachstellzeit*, T_v *Vorhaltzeit* des Reglers.

Die Übergangsfunktion eines idealen PID-Reglers

$$h(t) = K_R \left(1 + \frac{t}{T_n} + T_v \delta(t) \right); t \geq 0 \quad (12.35)$$

zeigt Bild 12.10.

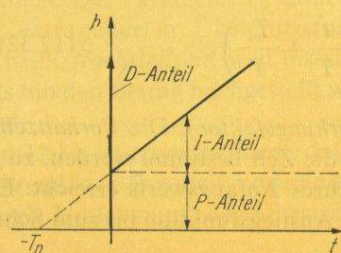


Bild 12.10. Übergangsfunktion eines idealen PID-Reglers

Durch Vergleich der Übertragungsfunktion des PID-Reglers

$$G_{\text{PID}} = K_R \left(1 + \frac{1}{pT_n} + pT_v \right) = \frac{K_R}{pT_n} (1 + pT_n + p^2 T_n T_v) \quad (12.36)$$

mit der eines I_1 - T_{D2} -Gliedes

$$G = \frac{K_I}{p} (1 + pT_{D1}) (1 + pT_{D2}) = \frac{K_I}{p} (1 + p(T_{D1} + T_{D2}) + p^2 T_{D1} T_{D2}) \quad (12.37)$$

erkennt man, daß die beiden im Bild 12.11 gezeigten Signalflußbilder äquivalent bezüglich der Signalübertragung sind.

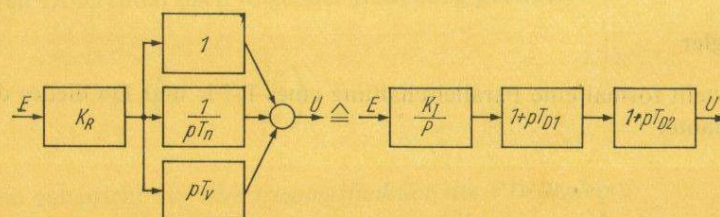


Bild 12.11. Signalflußbilder eines PID-Reglers

Darstellung als Parallelschaltung (links) und Darstellung als Kettenschaltung (rechts)

Für manche Bemessungsverfahren ist es jedoch günstiger, von der Gl. (12.37) mit den Parametern K_I , T_{D1} , T_{D2} auszugehen. Für die Umrechnung folgt aus Koeffizientenvergleich:

$$K_I = \frac{K_R}{T_n}, \quad T_n = T_{D1} + T_{D2}, \quad T_v = \frac{T_{D1}T_{D2}}{T_{D1} + T_{D2}}. \quad (12.38)$$

12.4.5. Beschreibung nichtlinearer Kennlinien von Reglern

Wenn auch die vorstehenden Reglergleichungen linear sind, so muß doch beachtet werden, daß der linearisierbare Aussteuerbereich nicht unbeschränkt ist. Die härteste Einschränkung ist i. allg. durch die Anschläge des Stellglieds gegeben. Für die Wahl von Regler und Stellglied sowie für die Abschätzung, ob ein Regelkreis unter gegebenen Bedingungen noch als linear betrachtet und danach bemessen werden kann, ist es notwendig, die Grenzen dieses Aussteuerbereichs anzugeben. Hierbei ist zwischen Reglern ohne und mit I-Anteil zu unterscheiden.

12.4.5.1. Regler ohne I-Anteil

Bei P- und PD-Reglern ist der Aussteuerbereich für die Ausgangsgröße, die Stellgröße u , beschränkt. Bei idealisierender Vereinfachung ergibt sich die im Bild 12.12 gezeichnete Kennlinie, wenn der Sollwert in die Mitte des linearen Aussteuerbereichs gelegt wird.

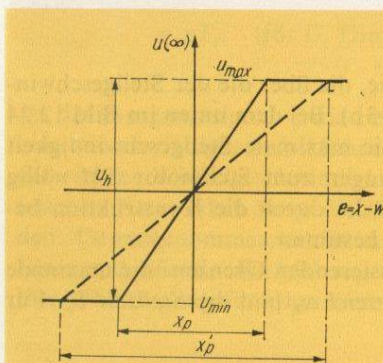


Bild 12.12. Idealisierte Kennlinie eines P- oder PD-Reglers

Für die eingezeichneten Kenngrößen u_h und x_p gelten die Definitionen:

Der *Stellbereich* u_h ist der Bereich, in dem sich die Stellgröße u ändern kann.

D 12.1

Der *Proportionalbereich (P-Bereich)* x_p ist der Bereich, um den sich die Regelgröße x ändern muß, um bei einem P- oder PD-Regler die Stellgröße u über den gesamten Stellbereich u_h zu verstellen.

D 12.2

Offensichtlich hängt der Proportionalbereich von dem eingestellten Reglerübertragungsfaktor K_R ab. Der im Bild eingezeichnete P-Bereich $x_p' > x_p$ entspricht einem Verstärkungsfaktor $K_R' < K_R$. Der Übertragungsfaktor K_R ergibt sich aus

$$K_R = u_h/x_p. \quad (12.39)$$

Bei älteren Reglern ist statt K_R gewöhnlich der *bezogene P-Bereich* X_p angegeben worden:

$$X_p = x_p/u_h = 1/K_R. \quad (12.40)$$

12.4.5.2. Regler mit I-Anteil

Bei einem Regler mit I-Anteil (I-, PI- und PID-Regler) besäße die normale Kennlinie die im Bild 12.13a eingezeichnete Gestalt und den angegebenen Stellbereich u_h .

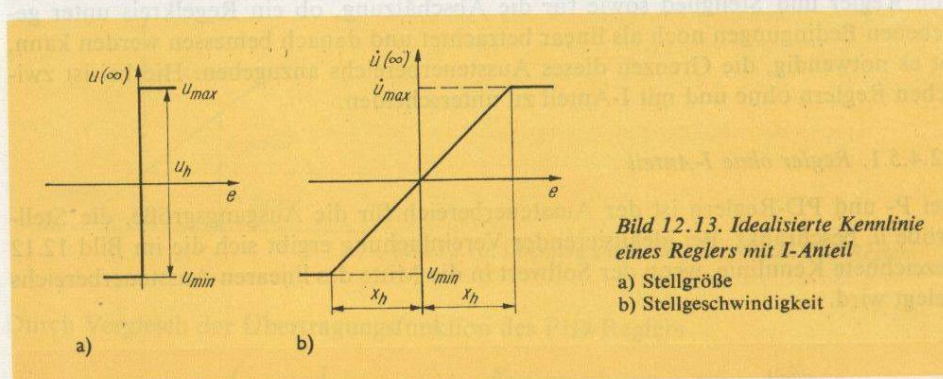


Bild 12.13. Idealierte Kennlinie eines Reglers mit I-Anteil

a) Stellgröße
b) Stellgeschwindigkeit

Von großer Bedeutung ist hier eine zweite Kennlinie, die über die der Stellgeschwindigkeit gesetzten Grenzen Aufschluß gibt (Bild 12.13b). Bei dem unten im Bild 12.24 gezeigten hydraulischen Regler beispielsweise ist die maximale Stellgeschwindigkeit erreicht, wenn der Steuerschieber *StS* die Zuleitungen zum Stellmotor *SM* völlig freigegeben hat. Sie wird durch den Öldruck und die durch die Konstruktion bedingten hydraulischen Widerstände und Volumina bestimmt.

Drei Größen dienen zur Kennzeichnung der interessierenden Grenzen: die maximale Stellgeschwindigkeit $\dot{u}_{max}$ (s. Bild 12.13), der Laufbereich x_h und die Stellzeit T_u . Für letztere gilt:

- D 12.3 Der Laufbereich x_h einer I-Regeleinrichtung ist derjenige Bereich, um den sich die Regelgröße ändern muß, um die Stellgeschwindigkeit vom Wert Null auf ihren Maximalwert zu bringen.
- D 12.4 Die Stellzeit T_u ist die Zeit, in der die Stellgröße u bei maximaler Stellgeschwindigkeit $\dot{u}_{max}$ den Stellbereich u_h durchläuft.

12.5. Aufbau linearer analoger Regler mittels Rückführung

Rückführungen leisten wertvolle Dienste bei der (näherungsweise) Realisierung der im Abschn. 12.4. vorgestellten idealen Reglertypen. Betrachten wir hierzu zunächst einige wichtige Typen von Rückführgliedern.

12.5.1. Wichtige Rückführglieder

Die einfachste Rückführung ist die *proportionale oder starre Rückführung*. Die zweite Bezeichnung stammt aus der Zeit, da bei mechanisch wirkenden Reglern (mit Auslenkungen als Ein- und Ausgangsgröße) die Rückführung durch ein starres Gestänge gebildet wurde.

Die Übertragungsfunktion eines starren Rückführglieds lautet:

$$G_r = K_r. \quad (12.41)$$

Seine Übergangsfunktion ist ein Sprung der Höhe K_r .

Ein weiterer wichtiger Typ ist die *differenzierende oder Geschwindigkeitsrückführung*. Die Übertragungsfunktion ist in diesem Fall die eines differenzierenden Gliedes (s. Abschn. 11.1.6.):

$$\begin{aligned} G_r &= K_{Dr} p \\ &= p T_r \quad (\text{für } G_r \text{ Dimension Eins}). \end{aligned} \quad (12.42)$$

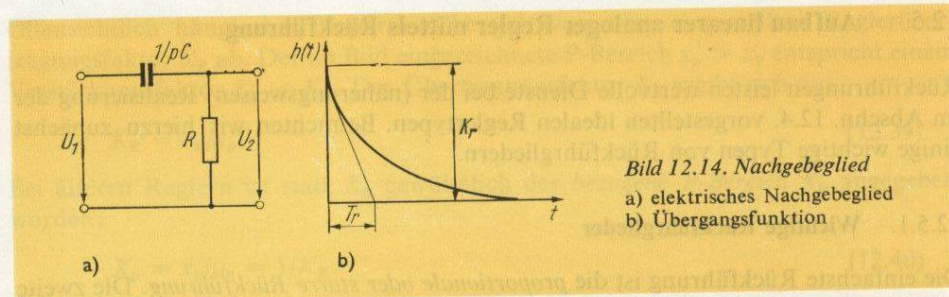
Ist das Ausgangssignal – wie bei einem elektrischen Stellmotor – ein Winkel, kann eine Geschwindigkeitsrückführung durch einen Tachogenerator realisiert werden, der ein der Winkelgeschwindigkeit proportionales Rückführsignal abgibt. Mit elektrischen Netzwerken kann die Differentiation nur näherungsweise verwirklicht werden. Genaugenommen erhält man mit ihnen eine nachgebende Rückführung. Eine *nachgebende Rückführung* dient insbesondere zum Aufbau von PI-Reglern. Ihre Übertragungsfunktion lautet:

$$G_r = \frac{K_r p T_r}{1 + p T_r}. \quad (12.43)$$

Ein elektrisches Nachgebeglied zeigt Bild 12.14. Die zugehörige Übergangsfunktion

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p} G_r(p) \right\} = K_r e^{-t/T_r}; \quad t \geq 0 \quad (12.44)$$

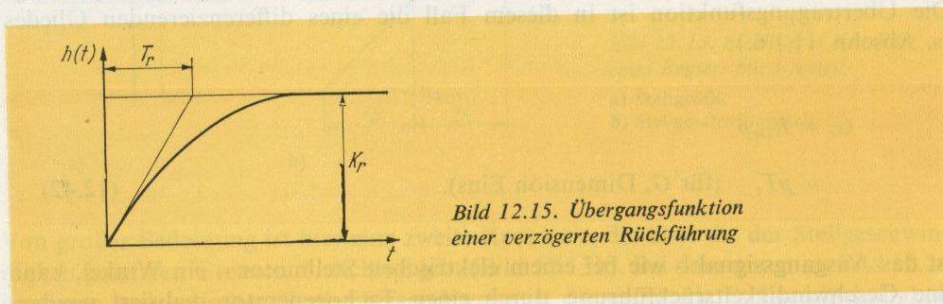
bestätigt, daß das Rückführsignal zunächst voll wirksam ist und dann „nachgebend“ verschwindet.



Eine letzte hier genannte ist die *verzögerte Rückführung*. Sie wird durch das bereits im Abschn. 11.2.1. vorgestellte Verzögerungsglied gebildet und hat die Übertragungsfunktion

$$G_r = \frac{K_r}{1 + pT_r} \quad (12.45)$$

Die zugehörige Übergangsfunktion zeigt Bild 12.15.



12.5.2. P-Regler auf Grund starrer Rückführung

Legt man dem nachfolgend beschriebenen Reglertyp eine Struktur gemäß Bild 12.4 zugrunde, so gilt für die Übertragungsfunktion des Reglers G_R , die die Regelabweichung E in das Stellsignal U transformiert, entsprechend Gl. (12.15):

$$G_R = U/E = \frac{G_v}{1 + G_v G_r} = \frac{1}{1/G_v + G_r} = \frac{1/G_r}{1 + 1/G_v G_r} \quad (12.46)$$

Für den Fall eines *proportionalen Vorwärtsglieds*

$$G_v = K_v \quad (12.47)$$

erhält man mit der starren Rückführung

$$G_r = K_r = 1/K_R \quad (12.48)$$

die Reglerübertragungsfunktion

$$G_R = \frac{K_R}{1 + K_R/K_V} = K_{RV} \approx K_R. \quad (12.49)$$

Die zuletzt genannte Näherung gilt für den Fall, daß das Verhältnis von (näherungsweise) äußerer (durch den Reziprokwert der Rückführungsverstärkung bestimmter) Verstärkung K_R zu innerer Verstärkung (des Vorwärtsverstärkers) K_V klein gegen eins ist.

Wird – den realen Verhältnissen besser Rechnung tragend – ein *verzögertes Vorwärtsglied* mit der Übertragungsfunktion

$$G_V = \frac{K_V}{1 + pT_V} \quad (12.50)$$

vorausgesetzt, so findet man nach Rechnung unter Verwendung der Gln. (12.46), (12.49)

$$G_R = \frac{K_{RV}}{1 + pT_V K_{RV}/K_V}. \quad (12.51)$$

Der Verstärkungsfaktor ist gegenüber dem proportionalen Vorwärtsglied unverändert. Der Regler hat jedoch Verzögerungsverhalten, allerdings mit einer um den Faktor K_{RV}/K_V von äußerer zu innerer Verstärkung reduzierten Zeitkonstanten (Bild 12.16a).

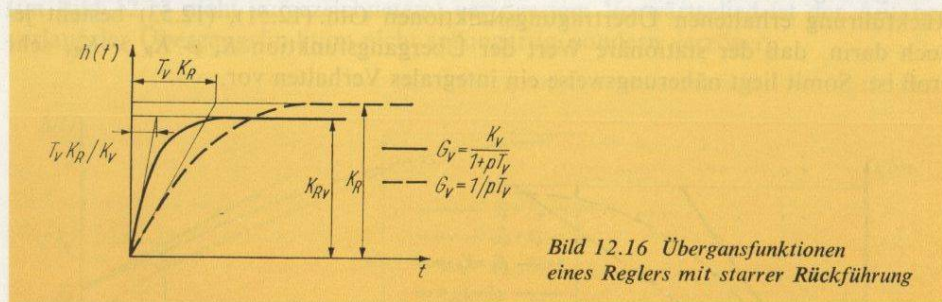


Bild 12.16 Übergangsfunktionen eines Reglers mit starrer Rückführung

Bei Verwendung eines *integralen Vorwärtsglieds* (z. B. eines Stellmotors)

$$G_V = 1/pT_V \quad (12.52)$$

findet man schließlich mit Gl. (12.46)

$$G_R = \frac{K_R}{1 + pT_V K_R} \quad (12.53)$$

mit der Übergangsfunktion von Bild 12.16b.

Allgemein gilt:

- S 12.5** Durch eine *starre Rückführung* zu einem P- oder I-Glied ergibt sich ein P-Glied. Hat das Vorwärtsglied Verzögerungs- oder integrales Verhalten, so weist das resultierende Glied Verzögerungscharakter auf.

Da im stationären Zustand stets eine proportionale Übertragung vorliegt (die im Fall eines Vorwärtsglieds mit unendlich großem Verstärkungsfaktor oder mit integralem Verhalten den Reziprokwert der Rückführverstärkung K_R exakt erreicht), heißen alle diese Regler P-Regler.

12.5.3. I-Regler auf Grund differenzierender Rückführung

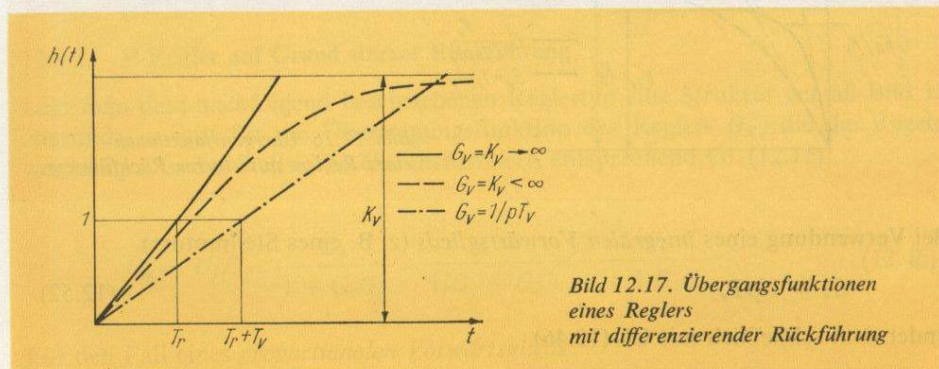
Mit der differenzierenden Rückführung Gl. (12.42) und einem *proportionalen Vorwärtsglied* gemäß Gl. (12.47) erhält man mit Gl. (12.46)

$$G_R = \frac{K_v}{1 + pT_r K_v}. \quad (12.54)$$

Für $K_v \rightarrow \infty$ ergibt sich der ideale I-Regler mit der Integralzeit $T_r = T_I$

$$G_R = \frac{1}{pT_r} = \frac{1}{pT_I}. \quad (12.55)$$

Die Übertragungsfunktion Gl. (12.54) ist zwar wiederum die eines P-Gliedes mit Verzögerungsverhalten (Bild 12.17), der wesentliche Unterschied zu den mit starrer Rückführung erhaltenen Übertragungsfunktionen Gln. (12.51), (12.53) besteht jedoch darin, daß der stationäre Wert der Übergangsfunktion $K_v \gg K_R > K_{Rv}$ sehr groß ist. Somit liegt näherungsweise ein integrales Verhalten vor.



Bei *integralem Vorwärtsglied* [s. Gl. (12.52)] ergäbe sich

$$G_R = \frac{1}{1/G_v + G_r} = \frac{1}{p(T_v + T_r)} \quad (12.56)$$

mit der im Bild 12.17 dargestellten Übergangsfunktion.

Allgemein gilt somit:

Eine differenzierende Rückführung zu einem P- oder I-Glied ergibt (näherungsweise) ein I-Glied. Für ein P-Glied ist dabei ein genügend großer Übertragungsfaktor zu fordern.

S 12.6

12.5.4. PI-Regler auf Grund nachgebender Rückführung

Für ein Vorwärtsglied mit sehr hohem Verstärkungsfaktor und einer nachgebenden Rückführung entsprechend Gl. (12.43) erhält man

$$G_R \approx \frac{1}{G_r} = \frac{1}{K_r} \left(1 + \frac{1}{pT_r} \right) = K_R \left(1 + \frac{1}{pT_n} \right). \quad (12.57)$$

Das ist die Übertragungsfunktion eines idealen PI-Reglers mit dem Verstärkungsfaktor $K_R = 1/K_r$ und der Nachstellzeit $T_n = T_r$. Zum besseren Verständnis des Verhaltens realer Regler sind im Bild 12.18 die Übergangsfunktionen aufgezeichnet, die man bei einer nachgebenden Rückführung an verschiedenen Vorwärtsgliedern erhält. Allgemein kann gesagt werden, daß durch das zunächst starke Rückführsignal eine Dämpfung des Ausgangssignals bewirkt wird, die jedoch mit verschwindendem Rückführsignal allmählich aufgehoben wird. Bei einem Vorwärtsglied mit unendlich hohem Verstärkungsgrad oder mit integralem Charakter strebt das Ausgangssignal dabei gegen Unendlich. Bei endlicher Verstärkung K_v des Vorwärtsglieds nähert es sich asymptotisch dem Wert K_v . Da K_v sehr groß ist, hat der Regler trotz endlicher Verstärkung einen quasiintegralen Charakter. Bei integralem und bei (im Bild 12.18 nicht aufgezeichnetem) verzögertem Vorwärtsglied ist der Anfangsverlauf der Übergangsfunktion nicht sprunghaft, sondern verzögert.

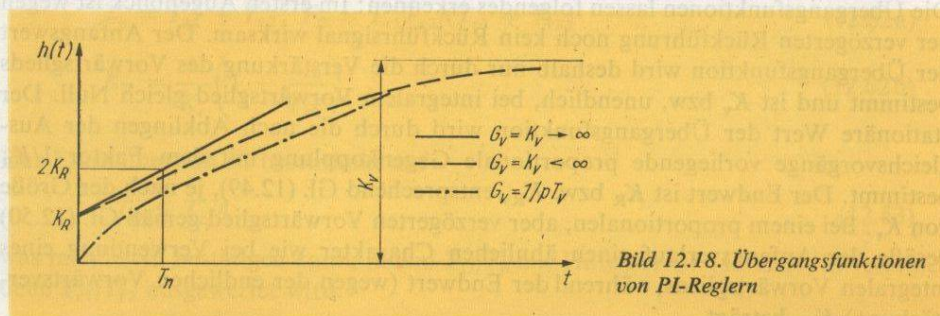


Bild 12.18. Übergangsfunktionen von PI-Reglern

Allgemein gilt also:

Durch eine nachgebende Rückführung erhält ein P- oder I-Glied mit genügend großem Übertragungsfaktor die Eigenschaften eines PI-Reglers.

S 12.7

Obwohl der Charakter des Verlaufs der Übergangsfunktion durch physikalische Überlegungen vermutet werden kann, ermöglicht erst die Benutzung der Übertra-

gungsfunktion eine einfache und schnelle quantitative Bestimmung des Zeitverhaltens.

12.5.5. PD-Regler auf Grund verzögerter Rückführung

Bringt man an einen Verstärker mit sehr hohem Verstärkungsfaktor eine verzögerte Rückführung mit der Übertragungsfunktion Gl. (12.45), so erhält man einen PD-Regler:

$$G_R \approx \frac{1}{G_r} = \frac{1}{K_r} (1 + pT_r) = K_R(1 + pT_D). \quad (12.58)$$

Hierbei ist $K_R = 1/K_r$ der Übertragungsfaktor und $T_D = T_r$ die Vorhaltzeit.

Die Übergangsfunktion dieses idealen Reglers sowie die Übergangsfunktionen, die mit endlichem proportionalem bzw. mit integralem Vorwärtsglied erhalten werden, zeigt Bild 12.19. K_{Rv} ist hierbei die nach Gl. (12.49) bestimmte äußere Verstärkung bei endlicher innerer Verstärkung.

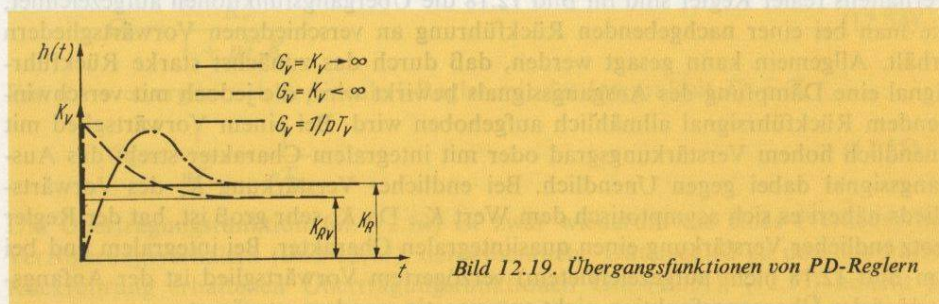


Bild 12.19. Übergangsfunktionen von PD-Reglern

Die Übergangsfunktionen lassen folgendes erkennen: Im ersten Augenblick ist wegen der verzögerten Rückführung noch kein Rückführsignal wirksam. Der Anfangswert der Übergangsfunktion wird deshalb nur durch die Verstärkung des Vorwärtsglieds bestimmt und ist K_v bzw. unendlich, bei integralem Vorwärtsglied gleich Null. Der stationäre Wert der Übergangsfunktion wird durch die nach Abklingen der Ausgleichsvorgänge vorliegende proportionale Gegenkopplung mit dem Faktor $1/K_R$ bestimmt. Der Endwert ist K_R bzw. K_{Rv} entsprechend Gl. (12.49), je nach der Größe von K_v . Bei einem proportionalen, aber verzögerten Vorwärtsglied gemäß Gl. (12.50) besäße der Anfangsverlauf einen ähnlichen Charakter wie bei Verwendung eines integralen Vorwärtsglieds, während der Endwert (wegen der endlichen Vorwärtsverstärkung) K_{Rv} beträgt.

Wir fassen zusammen:

S 12.8

Eine verzögerte Rückführung verleiht einem P- oder I-Glied mit genügend großem Übertragungsfaktor und hinreichend kleiner Verzögerung den Charakter eines PD-Reglers.

12.5.6. PID-Regler auf Grund nachgebender und verzögerter Rückführung

Der Einfachheit wegen soll das Vorwärtsglied hier als ideal mit unendlichem Verstärkungsfaktor angenommen werden. Betrachtet seien zwei technisch gebräuchliche Varianten von Rückführungen, die beide einen PID-Regler ergeben:

Variante 1: nachgebendes und verzögertes Rückführglied in Kettenschaltung

Für die im Bild 12.20 dargestellte Variante erhält man:

$$G_R = \frac{1}{G_r} = \frac{1}{pK_r T_{r1}} (1 + pT_{r1}) (1 + pT_{r2}). \quad (12.59)$$

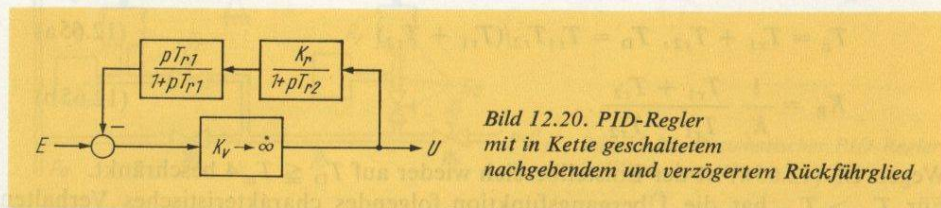


Bild 12.20. PID-Regler mit in Kette geschaltetem nachgebendem und verzögertem Rückführglied

Ein Vergleich mit der Gleichung eines idealen PID-Reglers:

$$G_{PID} = \frac{1}{pT_I} (1 + pT_{D1}) (1 + pT_{D2}) = K_R \left(1 + pT_D + \frac{1}{pT_n} \right) \quad (12.60)$$

liefert

$$T_I = K_r T_{r1}, \quad T_{D1} = T_{r1}, \quad T_{D2} = T_{r2} \quad (12.61)$$

zw.

$$T_n = T_{r1} + T_{r2}, \quad T_D = T_{r1} T_{r2} / (T_{r1} + T_{r2}) \quad (12.62a)$$

$$K_R = \frac{1}{K_r} \left(1 + \frac{T_{r2}}{T_{r1}} \right). \quad (12.62b)$$

Der Einstellbereich ist beschränkt auf

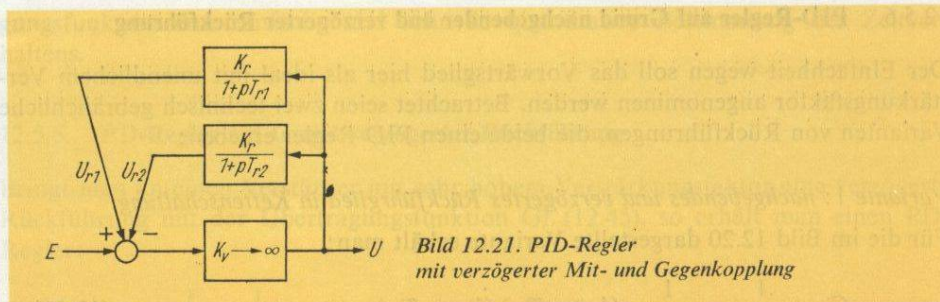
$$T_D \leq T_n/4, \quad (12.63)$$

was man leicht bestätigen kann, indem T_D/T_n mit Hilfe der Gl. (12.62a) für verschiedene T_{r1}/T_{r2} ausgewertet wird.

Variante 2: Parallelschaltung von verzögerter Mitkopplung mit verzögerter Gegenkopplung

Die Übertragungsfunktion der im Bild 12.21 dargestellten Variante eines PID-Reglers lautet:

$$G_R = \frac{1}{G_r} = \frac{1}{\frac{K_r}{1+pT_{r2}} - \frac{K_r}{1+pT_{r1}}} = \frac{(1+pT_{r1})(1+pT_{r2})}{pK_r(T_{r1} - T_{r2})}. \quad (12.64)$$



Der Vergleich mit Gl. (12.60) liefert

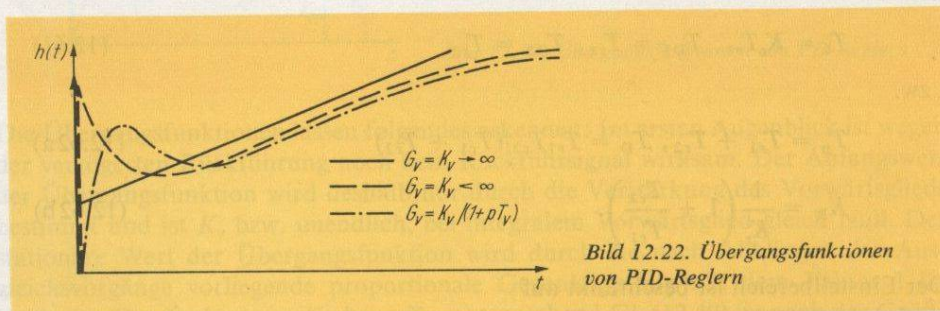
$$T_n = T_{r1} + T_{r2}, \quad T_D = T_{r1}T_{r2}/(T_{r1} + T_{r2}) \quad (12.65a)$$

$$K_R = \frac{1}{K_r} \frac{T_{r1} + T_{r2}}{T_{r1} - T_{r2}}. \quad (12.65b)$$

Wegen Gl. (12.65a) ist der Einstellbereich wieder auf $T_D \leq T_n/4$ beschränkt.

Für $T_{r1} > T_{r2}$ hat die Übergangsfunktion folgendes charakteristisches Verhalten (Bild 12.22):

Wegen der Verzögerungen in beiden Rückführgliedern ist im Anfangszeitpunkt nur der Vorwärtskanal wirksam. Dann setzt als erstes die Gegenkopplung (T_{r2}) ein und bewirkt eine Verminderung des Ausgangssignals. Dieser Effekt wird allmählich durch das Wirksamwerden der Mitkopplung (T_{r1}) aufgehoben.



Die für alle PID-Regler charakteristischen Verläufe – mit den Modifikationen, die sich durch endlichen Verstärkungsfaktor und Verzögerung des Vorwärtsglieds ergeben – sind im Bild 12.22 dargestellt.

Die Gln. (12.62), (12.65) zeigen, daß die Reglerparameter K_R , T_n , T_D über die einstellbaren Parameter T_{r1} , T_{r2} miteinander verkoppelt sind. Das erschwert die Bemessung eines Reglers. Werden dem Bemessungsverfahren die Reglerparameter T_1 , T_{D1} , T_{D2} zugrunde gelegt, so ist nach Gl. (12.61) diese Kopplung geringer.

12.5.7. Beispiele für Regler mit Rückführungen

Einen *pneumatischen PID-Regler*, der nach dem im Bild 12.21 angegebenen Prinzip arbeitet, zeigt Bild 12.23. Der der Regelgröße x proportionale Eingangsdruck p_x des Reglers erzeugt über einen Balg eine Kraft f_x und über den Hebelarm l_x ein Moment $m_x = f_x l_x$. In gleicher Weise bewirkt

der dem Sollwert w proportionale Druck p_w ein Moment m_w . Das der Regelabweichung entsprechende resultierende Moment $m_e = m_x - m_w$ verursacht in Abhängigkeit von den Federkonstanten der Bälge und der Nullpunktfeder eine Auslenkung des Balkens, wodurch sich der Abstand der Düse von der Prallplatte und damit der Ausströmwiderrstand W_D ändert. Auf Grund des veränderten pneumatischen Druckteilers $W - W_D$ für den Vordruck p_v stellt sich ein neuer, dem Eingangssignal p_x (bei kleinen Auslenkungen) etwa proportionaler Ausgangsdruck (Steuerdruck) p_u ein. Das Vorwärtsglied ist somit ein P-Glied.

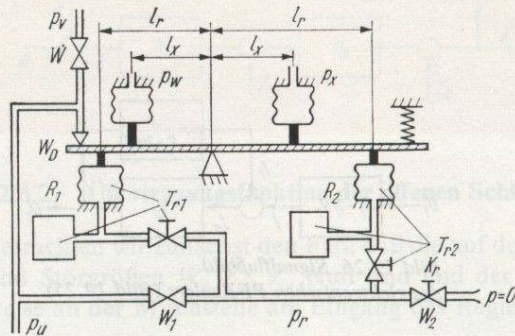


Bild 12.23. Pneumatischer PID-Regler in Wippenbauweise

Die Rückführung besteht aus zwei, jeweils von Drossel (Widerstand) und Balg- und Speichervolumen (Kapazität) gebildeten, parallelgeschalteten Verzögerungsgliedern. Dabei werden die Rückführsignale als Momente am Waagebalken vorzeichenbehaftet addiert. Das von der Rückführung R_1 aufgebrachte Moment unterstützt das Eingangsmoment m_x (Mitkopplung); das von R_2 stammende Moment wirkt dem Eingangsmoment entgegen (Gegenkopplung). Die Rückführzeitkonstanten T_{r1} bzw. T_{r2} sind über die entsprechenden Drosseln einstellbar. Die Einstellung des Übertragungsfaktors K_r der Rückführung erfolgt über den pneumatischen Druckteiler W_1 und W_2 .

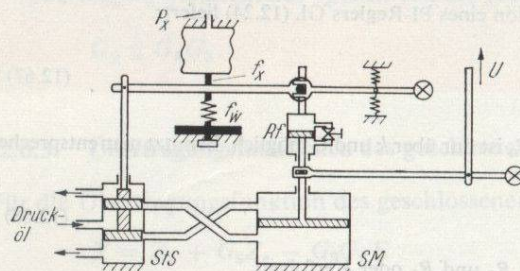


Bild 12.24. Hydraulischer PI-Regler mit nachgebender Rückführung

Bild 12.24 zeigt einen hydraulischen PI-Regler. Betrachten wir zunächst das Vorwärtsglied ohne die Rückführung Rf . Eingangssignal ist der (der Regelgröße x proportionale) Druck p_x , der in dem Wellrohr in eine Kraft f_x umgewandelt wird. Durch Auslenkung des Balkens und Spannung der (verstellbaren) Sollwertfeder wird eine Kraft f_w erzeugt, welche f_x das Gleichgewicht hält. Die einer Erhöhung des Druckes p_x proportionale Auslenkung des Balkens nach unten wird auf den Kolben des Steuerschiebers SfS übertragen, der den Zufluß des unter Druck stehenden Öles zum Stellmotor SM freigibt. Der Kolben des Stellmotors bewegt sich deshalb mit konstanter Geschwindigkeit nach unten. Diese wird mechanisch auf das Ausgangssignal, die Stellgröße u , übertragen. Die Zuordnung einer Geschwindigkeit du/dt zu einem Eingangssignal p_x bedeutet, daß das Vorwärtsglied integrales Verhalten zeigt.

Ein der Ausgangsgröße u proportionales Signal wird auf den Kolben des mit Öl gefüllten Zylinders der Rückführung Rf gegeben. Um deren Übertragungsverhalten zu bestimmen, verändern wir (in Gedanken) die Kolbenstellung sprungartig nach unten. Dabei wird der ölgefüllte Zylinder mitgenommen, und die Federn werden gespannt. Durch diese Federspannung wird das Öl im unteren Zylindervolumen unter Druck gesetzt und strömt über die Umgehungsleitung in die obere Zylinderkammer. Auslenkung des Zylinders, Federspannung und Ölstrom nehmen dabei ab. Im Ruhezustand befindet sich der Zylinder wieder in seiner Ausgangslage. Ausgangssignal des Rückführglieds ist die

Auslenkung des Zylinders. Das Rückführglied hat somit die im Bild 12.14b dargestellte Übergangsfunktion und ist demzufolge ein Nachgebeglied. Das Ausgangssignal des Rückführglieds verschiebt den Drehpunkt für den Balken, im geschilderten Fall nach unten, und macht dabei die Wirkung des Reglereingangssignals p_x auf den Steuerschieber teilweise rückgängig. Somit liegt eine nachgebende Gegenkopplung zu einem I-Glied vor. Nach den Ausführungen im Abschn. 12.5.4. ergibt das einen PI-Regler.

Abschließend sei ein auf dem Prinzip des Rechenverstärkers aufgebauter *elektronischer PI-Regler* gezeigt (Bild 12.25). Für $R_3 \ll R_2$ und V_0^* nach Gl. (12.17) erhält man das Blockdiagramm Bild 12.26.

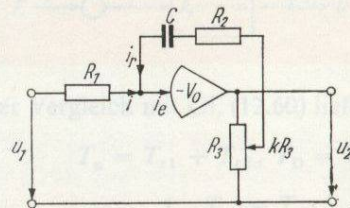


Bild 12.25. Elektronischer PI-Regler

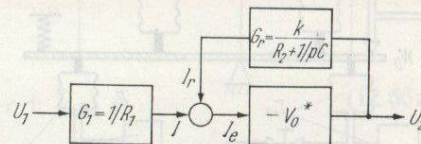


Bild 12.26. Signalflußbild des elektronischen PI-Reglers (Bild 12.25)

Mit $V_0^* \rightarrow \infty$ findet man für die Übertragungsfunktion dieses Reglers:

$$G_R = \frac{U_2}{U_1} = - \frac{G_1}{G_r} = - \frac{1 + pCR_2}{pkCR_1} \\ = - \frac{R_2}{kR_1} \left(1 + \frac{1}{pCR_2} \right). \quad (12.66)$$

Der Vergleich mit der Übertragungsfunktion eines PI-Reglers Gl. (12.24) liefert:

$$K_R = \frac{1}{k} \frac{R_2}{R_1}, \quad T_n = CR_2. \quad (12.67)$$

Die unabhängige Einstellung von K_R und T_n ist nur über k und C möglich. Benutzt man entsprechend Gl. (12.26) als Reglerparameter

$$T_1 = kCR_1, \quad T_D = CR_2, \quad (12.68)$$

so kann die unabhängige Einstellung über R_2 und R_1 oder k erfolgen.

12.6. Übertragungsfunktionen und Zeitverhalten des Regelkreises

12.6.1. Signalflußbild des Regelkreises

Einen speziellen Fall einer Gegenparallelschaltung stellt der Regelkreis dar (s. Abschnitt 4.2.2.). Im Bild 12.27 bedeuten G_s die *Übertragungsfunktion der Regelstrecke* und G_R die *der Regeleinrichtung*. Die Messung der Regelgröße X erfolge fehler- und verzögerungsfrei. Dann erhalten wir die im Bild 12.27 gezeigte *Einheitsrückführung* mit der Übertragungsfunktion $G_r = 1$. Die im Regelkreis erforderliche Vorzeichenumkehr wird hier bei der Aufschaltung der Stellgröße U auf die Regelstrecke vorgesehen. Bei positiver Regelabweichung $E = X - W$ wird dann das Eingangssignal der Strecke erniedrigt. Natürlich kann diese Vorzeichenumkehr auch an anderer Stelle (z. B. bei der Rückführung der Regelgröße oder im Regler selbst) erfolgen.

Die Störungen sollen entweder am *Eingang der Strecke* (Z_e) oder an deren *Ausgang* (Z_a) eintreten. Später bei der Synthese von Regelkreisen wird gezeigt werden, daß eine in die Strecke eintretende Störung auf deren Ausgang transformiert werden kann.

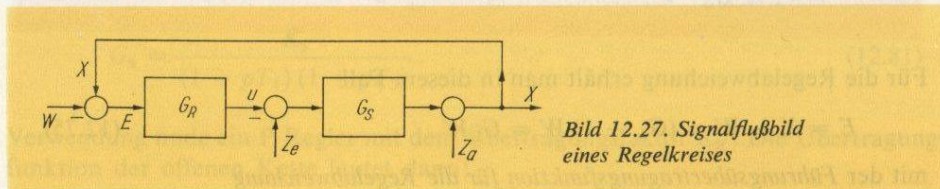


Bild 12.27. Signalflußbild eines Regelkreises

12.6.2. Übertragungsfunktion der offenen Schleife

Betrachten wir zunächst den Fall, daß die auf den Regelkreis einwirkenden Führungs- und Störgrößen W , Z_e , Z_a Null sind und der Regelkreis an einer Stelle, beispielsweise an der Mischstelle am Eingang des Reglers, aufgetrennt ist.

$$X = -G_S U = -G_S G_R E. \quad (12.69)$$

Das in den nachfolgenden Übertragungsfunktionen des Regelkreises stets auftretende Produkt der Übertragungsfunktionen von Strecke und Regler, das deren Kettenschaltung entspricht, definieren wir als

Übertragungsfunktion des offenen Kreises (der offenen Schleife) G_0

$$G_0 \triangleq G_R G_S. \quad (12.70)$$

12.6.3. Übertragungsfunktionen des geschlossenen Kreises

Für die Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises erhalten wir aus Bild 12.27:

$$\begin{aligned} X &= Z_a + G_S Z_e - G_S G_R E \\ &= Z_a + G_S Z_e - G_0 X + G_0 W \end{aligned} \quad (12.71)$$

und daraus

$$X = \frac{1}{1 + G_0} Z_a + \frac{G_S}{1 + G_0} Z_e + \frac{G_0}{1 + G_0} W. \quad (12.72)$$

Drei Sonderfälle, durch deren Überlagerung sich vorstehende Gleichung ergibt, sind von Interesse:

a) *Führungsverhalten* ($Z_a = Z_e = 0$)

$$X = \frac{G_0}{1 + G_0} W = G_w W \quad (12.73)$$

mit der Führungsübertragungsfunktion für die Regelgröße

$$G_w \triangleq \frac{G_0}{1 + G_0}. \quad (12.74)$$

Für die Regelabweichung erhält man in diesem Fall

$$E = X - W = (G_w - 1) W = G_E W \quad (12.75)$$

mit der Führungsübertragungsfunktion für die Regelabweichung

$$G_E \triangleq -\frac{1}{1 + G_0}. \quad (12.76)$$

b) Störverhalten für Störung am Streckeneingang ($W = Z_a = 0$)

$$X = E = \frac{G_s}{1 + G_0} Z_e = G_{ze} Z_e \quad (12.77)$$

mit der Störübertragungsfunktion für Eingangsstörung

$$G_{ze} \triangleq \frac{G_s}{1 + G_0}. \quad (12.78)$$

c) Störverhalten für Störung am Streckenausgang ($W = Z_e = 0$)

$$X = E = \frac{1}{1 + G_0} Z_a = G_{za} Z_a \quad (12.79)$$

mit der Störübertragungsfunktion für Ausgangsstörung

$$G_{za} = G_z \triangleq \frac{1}{1 + G_0} = -G_E. \quad (12.80)$$

Alle gefundenen Übertragungsfunktionen bestätigen die obige Aussage von Satz 12.3, wonach im Zähler von Gegenparallelschaltungen die Übertragungsfunktion der zwischen Ein- und Ausgangssignal im Vorwärtszweig liegenden Glieder steht, während der Nenner stets die Form $1 + G_0$ hat.

Bei bekannten Übertragungsfunktionen der einzelnen Glieder können somit die Gleichungen des Regelkreises sehr bequem gefunden werden. Durch Rücktransformation in den Zeitbereich erhält man den interessierenden Zeitverlauf bei Störeintritt oder Führungsgrößenänderung. Das soll an einem Beispiel veranschaulicht werden.

12.6.4. Übergangsfunktion eines Regelkreises (Beispiel)

Das typische Zeitverhalten von Regelkreisen sei am Beispiel der Führungsübergangsfunktion eines Regelkreises mit einer Strecke 2. Ordnung demonstriert, wie sie beispielsweise bei dem drehzahlregelmotor [s. Gl. (10.69)] vorliegt:

$$G_s = \frac{K_s}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)}. \quad (12.81)$$

Verwendung finde ein P-Regler mit dem Übertragungsfaktor K_R . Die Übertragungsfunktion der offenen Kette lautet dann:

$$G_o = \frac{V_o}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)}; \quad V_o = K_s K_R. \quad (12.82)$$

Für eine sprunghafte Herabsetzung des Drehzahlsollwerts um den Betrag w_0

$$W = -w_0/p \quad (12.83)$$

erhält man nach Gl. (12.75)

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{1 + G_o} \frac{w_0}{p} = \frac{w_0}{p} \left[1 - \frac{G_o}{1 + G_o} \right] \\ &= \frac{w_0}{p} \left[1 - \frac{V_o}{(1 + pT_1)(1 + pT_2) + V_o} \right] \\ &= w_0 \left[\frac{1}{p} - \frac{V_o/(V_o + 1)}{p \left(1 + p \frac{T_1 + T_2}{V_o + 1} + p^2 \frac{T_1 T_2}{V_o + 1} \right)} \right] \\ &= w_0 \left[\frac{1}{p} - \frac{V_o/(V_o + 1)}{p(1 + 2DpT_0 + p^2 T_0^2)} \right] \end{aligned} \quad (12.84)$$

mit

$$T_0 = \sqrt{\frac{T_1 T_2}{V_o + 1}}, \quad D = \frac{T_1 + T_2}{2\sqrt{T_1 T_2(V_o + 1)}}. \quad (12.85)$$

Je nach Größe des Dämpfungsgrads D können die folgenden Fälle unterschieden werden:

a) $D \geq 1$, aperiodisch abklingende Übergangsfunktion

Wenn V_o genügend klein ist, wird $D \geq 1$. Dann hat der Nenner von Gl. (12.84) außer der Wurzel im Ursprung zwei reelle Wurzeln $-1/T_a$ und $-1/T_b$, und wir können schreiben:

$$E = w_0 \left[\frac{1}{p} - \frac{V_o}{V_o + 1} \frac{1}{p(1 + pT_a)(1 + pT_b)} \right]. \quad (12.86)$$

Die Rücktransformation mit Tafel 10.1 liefert für den bezogenen Fehler (Übergangsfunktion) in $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} h = \frac{e}{w_0} &= 1 - \frac{V_0}{V_0 + 1} \left(1 - \frac{T_a}{T_a - T_b} e^{-t/T_a} + \frac{T_b}{T_a - T_b} e^{-t/T_b} \right) \\ &= \frac{1}{V_0 + 1} + \frac{V_0}{V_0 + 1} \frac{T_a}{T_a - T_b} e^{-t/T_b} - \frac{V_0}{V_0 + 1} \frac{T_b}{T_a - T_b} e^{-t/T_a} \\ &= h_{\text{stat}} + h_{f11} + h_{f12}. \end{aligned} \quad (12.87)$$

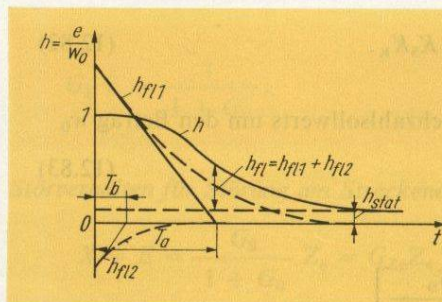


Bild 12.28. Übergangsfunktion der Regelabweichung für $D \geq 1$

Bild 12.28 zeigt, wie die Regelabweichung auf Grund des flüchtigen Anteils h_{f1} aus dem Anfangswert $h(0)$ aperiodisch in den neuen stationären Wert

$$h_{\text{stat}} = 1/(1 + V_0) \quad (12.88)$$

übergeht.

b) $0 < D < 1$, gedämpfte Schwingung

Wird der Reglerverstärkungsfaktor K_R und damit V_0 genügend erhöht, so wird D gemäß Gl. (12.85) kleiner als eins. Der Nenner von Gl. (12.84) hat dann konjugiert komplexe Wurzeln, und die Rücktransformation mit Hilfe Tafel 10.1 liefert

$$\begin{aligned} h = \frac{e}{w_0} &= \frac{1}{V_0 + 1} + \frac{V_0}{V_0 + 1} \frac{1}{\sqrt{1 - D^2}} \\ &\quad e^{-Dt/T_0} \sin(\sqrt{1 - D^2} t/T_0 + \arccos D). \end{aligned} \quad (12.89)$$

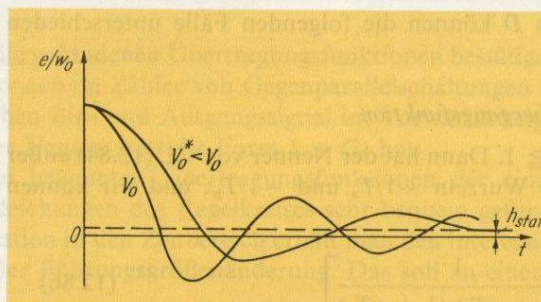


Bild 12.29. Übergangsfunktion der Regelabweichung für $0 < D < 1$

Aus Bild 12.29 ist ersichtlich, daß die Übergangsfunktion sich in einer gedämpften Schwingung dem stationären, durch Gl. (12.88) gegebenen Wert nähert. Mit wachsendem V_0 verringern sich Periodendauer und Dämpfungsgrad. Die Übergangsfunktion hat dann einen stärker überschwingenden, langsamer abklingenden Charakter. Für $V_0 \rightarrow \infty$ erreicht sie die Stabilitätsgrenze und pendelt mit konstanter Amplitude um den Wert h_{stat} .

Bemerkt sei abschließend, daß bei Strecken mit mehr als zwei Verzögerungsgliedern die Stabilitätsgrenze schon bei endlichen und häufig kleinen Verstärkungsfaktoren überschritten wird und sich aufklingende Schwingungen ergeben. Die im Stabilitätsbereich erhaltenen Übergangsfunktionen sind jedoch den hier gezeigten meist sehr ähnlich.

12.6.5. Bleibende Regelabweichung, Regelfaktor

Vorstehendes Beispiel zeigt, daß die Regelgröße den neuen Sollwert nicht exakt erreicht, sondern ein Beharrungswert $e(\infty)$ bzw. $h(\infty)$ verbleibt. Dieser heißt *bleibende Regelabweichung*:

Die *bleibende Regelabweichung* $e_B \triangleq e(\infty)$ ist die im stationären Zustand vorhandene Regelabweichung.

D 12.5

Die bleibende Regelabweichung kann mit dem Endwertsatz der Laplacetransformation (s. Abschn. 10.2.) gefunden werden. Mit Gln. (12.76), (12.83) gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pE(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + G_0(p)} \frac{w_0}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{w_0}{1 + G_0(p)} \quad (12.90)$$

Für die durch Gl. (12.82) gegebene offene P-Kette erhält man

$$e_B = e(\infty) = \frac{1}{1 + V_0} w_0 = R w_0 \quad (12.91)$$

Die Größe

$$R \triangleq \frac{1}{1 + V_0} \quad (12.92)$$

wird als *Regelfaktor* definiert. Für Regelkreise, die aus einer offenen P-Kette (P-Strecke und P-Regler) gebildet sind (*P-Regelkreise*), gilt allgemein:

Die auf die bleibende Abweichung bei abgeschaltetem Regler bezogene bleibende Regelabweichung ist bei konstanten Stör- bzw. Führungsgrößen in einem P-Regelkreis gleich dem Regelfaktor R .

S 12.9

Für den Fall der *Führung* wäre die Regelabweichung bei abgeschaltetem Regler mit der vorgegebenen Führungsgrößenänderung w_0 identisch. Mit Regler erhält man Gl. (12.91). Die auf w_0 normierte Abweichung ist also, wie behauptet, gleich dem Regel-
faktor.

Für *Störung am Streckeneingang* mit Amplitude z_0 erhält man mit Gl. (12.77)

$$\frac{e_B \text{ mit Regler}}{e_B \text{ ohne Regler}} = \frac{\lim_{p \rightarrow 0} p \frac{G_S(p)}{1 + G_0(p)} \frac{z_0}{p}}{\lim_{p \rightarrow 0} p G_S(p) z_0 / p}$$

$$= \frac{\frac{K_S}{1 + V_0}}{\frac{K_S}{1 + V_0}} = \frac{1}{1 + V_0} = R. \quad (12.93)$$

Das gleiche Resultat findet man auch für die Störung am Streckenausgang. Da jede konstante Störung bezüglich ihrer Wirkung auf die Regelgröße bei P-Strecken durch eine andere konstante Störung am Streckenein- oder -ausgang ersetzt werden kann, gilt Satz 12.9 allgemein.

Anhand von Bild 12.27 kann man sich leicht überlegen, daß eine (veränderte) Stellgröße u notwendig ist, um die Regelgröße x an eine (veränderte) Führungsgröße w anzugleichen. Ebenso wird eine (Änderung der) Stellgröße benötigt, um die Wirkung einer Störgröße z_e oder z_a zu kompensieren. Eine Stellgröße u als Ausgangssignal eines P-Reglers erfordert jedoch die Existenz eines Eingangssignals, d. h. einer Regelabweichung e . Nur bei einem Regler mit I-Anteil kann ein Stellsignal u aufrechterhalten werden, obwohl die Regelabweichung e wieder verschwindet. (Ein elektrischer Stellmotor behält seinen Ausgangswinkel nach verschwindender Eingangsspannung bei.)

Ersetzen wir zur Nachprüfung in obigem Beispiel den P-Regler durch einen I-Regler mit der Übertragungsfunktion

$$G_R = \frac{K_I}{p}, \quad (12.94)$$

so erhalten wir für die offene Kette statt Gl. (12.82)

$$G_0 = \frac{K_I K_S}{p(1 + pT_1)(1 + pT_2)}. \quad (12.95)$$

Damit finden wir für die bleibende Regelabweichung nach Gl. (12.90)

$$e_B = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p(1 + pT_1)(1 + pT_2)}{K_I K_S + p(1 + pT_1)(1 + pT_2)} w_0 = 0. \quad (12.96)$$

Allgemein gilt:

S 12.10

Regelkreise, bei denen die offene Kette (der Regler oder die Regelstrecke) ein I-Glied ist, haben keine bleibende Regelabweichung, wenn die am Ausgang der Strecke ohne Regler gemessene Störung beschränkt ist.

Wenn der Regler einen I-Anteil hat, ist er ein I-Glied (s. Abschn. 11.1.5.).

Diesen Satz beweist man leicht, indem man zeigt, daß auch für allgemeine $I_r-T_n-T_{Dm}$ -Ketten ($r \geq 1$) der nach Gl. (12.90) gebildete Grenzwert verschwindet.

Wegen dieses unterschiedlichen stationären Verhaltens von Regelkreisen, die aus P- bzw. I-Ketten gebildet sind, wird die durch Gl. (12.91) gegebene bleibende Abweichung auch *Proportionalabweichung* (*P-Abweichung*) genannt. In praktischen Regelkreisen tragen zur bleibenden Regelabweichung außer der genannten Proportionalabweichung noch Fehler bei, die bei der Messung der Regelgröße sowie bei der Meßwertübertragung und dem Vergleich mit der Führungsgröße auftreten.

Die nähere Untersuchung und insbesondere die zielstrebige Verbesserung des Übergangsverhaltens sowie des stationären Verhaltens bei allgemeineren Klassen von Eingangssignalen wird in den Kapiteln über die Analyse und Synthese von Regelkreisen ausführlich erfolgen. Dabei wird i. allg. die aufwendige Ermittlung und Darstellung des gesamten zeitlichen Verlaufs der Regelgröße bzw. der Regelabweichung vermieden werden. Vielmehr wird versucht werden, aus den genannten Übertragungsfunktionen der offenen Kette und des geschlossenen Kreises, insbesondere aus deren Koeffizienten sowie aus deren Darstellung im Frequenzkennlinienbild bzw. im PN-Bild, Beziehungen zu charakteristischen Größen des Zeitverhaltens (beispielsweise Überschwingweite und Beruhigungszeit der Übergangsfunktion des geschlossenen Kreises) aufzustellen. Auf Grund dieser Beziehungen werden dann zielstrebige Synthesestrategien entwickelt werden.

12.7. Übertragungsfunktion und Zeitverhalten von Regelkreisen mit Totzeit

12.7.1. Übertragungsfunktion von Regelkreisen mit Totzeitstrecken

Als Übertragungsfunktion eines reinen Totzeitglieds haben wir im Abschn. 11.2.5. auf Grund des Verschiebungssatzes der Laplacetransformation [s. Gl. (10.26)]

$$G_t = e^{-pT_t}; \quad T_t \text{ Totzeit} \quad (12.97)$$

gefunden. Hat die offene Kette (insbesondere die Regelstrecke) ein Totzeitglied, so tritt dessen Übertragungsfunktion als Faktor in der Übertragungsfunktion der offenen Kette auf und kann demzufolge abgespalten werden:

$$G_0 = G_1 e^{-pT_t}. \quad (12.98)$$

G_1 ist somit die *Übertragungsfunktion der offenen Kette ohne das Totzeitglied*. Für die Übertragungsfunktion der Regelabweichung bei Führung oder Ausgangsstörung erhält man dann nach Gln. (12.80)

$$G_z = \frac{1}{1 + G_1 e^{-pT_t}} = -G_E. \quad (12.99)$$

Man sieht, daß der Totzeitfaktor nicht mehr abspaltbar ist. Die Rücktransformation bereitet deshalb größere Schwierigkeiten. Einige Wege zu deren Überwindung sollen nachfolgend vorgestellt werden.

12.7.2. Approximation von $\exp \{-pT_t\}$ durch rationale Funktionen

Ein Weg zur Vermeidung von transzendenten Übertragungsfunktionen des Typs von Gl. (12.99) besteht darin, daß die Exponentialfunktion mittels Reihenentwicklung durch eine gebrochen rationale Funktion approximiert wird. Folgende Entwicklungen sind geeignet (mit $x = pT_t$):

a) Approximation durch Pol n -ter Ordnung

Diese Approximation beruht auf der Definitionsgleichung der e-Funktion

$$e^{-x} \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + x/n} \right)^n. \quad (12.100)$$

Sie besteht in der Approximation des Totzeitglieds durch n Verzögerungsglieder

$$e^{-pT_t} \approx \left(\frac{1}{1 + pT_t/n} \right)^n; \quad n \text{ endlich.} \quad (12.101)$$

Die Totzeit T_t wird dabei gleichmäßig auf die Zeitkonstanten der Verzögerungsglieder aufgeteilt.

b) Approximation durch Entwicklung in Taylorreihe

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2!} x^2 - \frac{1}{3!} x^3 + \dots \quad (12.102)$$

oder

$$e^{-x} = \frac{1}{1 + x + 1/2! x^2 + 1/3! x^3 + \dots}. \quad (12.103)$$

c) Approximation durch Padéentwicklung

Die gebrochen rationalen Padéfunktionen von Tafel 12.1 stimmen mit den Taylorreihen überein, wenn entweder der Grad des Nenners n oder der des Zählers m zu Null gewählt wird. Die günstigsten Approximationen ergeben sich jedoch für $n \neq 0$ und $m \neq 0$. Bei Ausführung der Division erhält man eine Reihe, deren erste $n + m$ Glieder mit denen der Taylorreihe übereinstimmen, während die folgenden eine zusätzliche Verbesserung der Approximation bewirken.

Die hier vorgestellten Approximationen ermöglichen auch die Simulation von Totzeitsystemen an üblichen Analogrechnern.

12.7.3. Berechnung der Übergangsfunktion von Totzeitregelkreisen für kleine Zeiten

Hat die offene Kette eine Totzeit, so können die Übergangsfunktion und andere Systemreaktionen im Bildbereich in eine Reihe entwickelt werden. Dabei ist in den einzelnen Gliedern dieser Reihe der auftretende Totzeitoperator absaltbar, so daß

Tafel 12.1. Padéentwicklung der Funktion e^{-x}

$\frac{m}{n}$	0	1	2	3
0	$\frac{1}{1}$	$\frac{1-x}{1}$	$\frac{1-x+\frac{x^2}{2!}}{1}$	$\frac{1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}}{1}$
1	$\frac{1}{1+x}$	$\frac{1-\frac{1}{2}x}{1+\frac{1}{2}x}$	$\frac{1-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\frac{x^2}{2!}}{1+\frac{1}{3}x}$	$\frac{1-\frac{3}{4}x+\frac{2}{4}\frac{x^2}{2!}-\frac{1}{4}\frac{x^3}{3!}}{1+\frac{1}{4}x}$
2	$\frac{1}{1+x+\frac{x^2}{2!}}$	$\frac{1-\frac{1}{3}x}{1+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\frac{x^2}{2!}}$	$\frac{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}\frac{x^2}{2!}}{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}\frac{x^2}{2!}}$	$\frac{1-\frac{3}{5}x+\frac{3}{10}\frac{x^2}{2!}-\frac{1}{10}\frac{x^3}{3!}}{1+\frac{2}{5}x+\frac{1}{10}\frac{x^2}{2!}}$
3	$\frac{1}{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}}$	$\frac{1-\frac{1}{4}x}{1+\frac{3}{4}x+\frac{2}{4}\frac{x^2}{2!}+\frac{1}{4}\frac{x^3}{3!}}$	$\frac{1-\frac{2}{5}x+\frac{1}{10}\frac{x^2}{2!}}{1+\frac{3}{5}x+\frac{3}{10}\frac{x^2}{2!}+\frac{1}{10}\frac{x^3}{3!}}$	$\frac{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{5}\frac{x^2}{2!}-\frac{1}{20}\frac{x^3}{3!}}{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{5}\frac{x^2}{2!}+\frac{1}{20}\frac{x^3}{3!}}$

g}

die Rücktransformation mit Hilfe des Verschiebungssatzes durchgeführt werden kann. Dies sei am Beispiel der Übergangsfunktion für die Regelabweichung erläutert. Mit Gl. (12.99) erhält man für diese

$$E = \frac{1}{1 + G_1 e^{-pT_t}} \cdot \frac{1}{p}. \quad (12.104)$$

Die vorstehende Übertragungsfunktion ist die Summe der geometrischen Reihe

$$E = \frac{1}{p} (1 - G_1 e^{-pT_t} + G_1^2 e^{-p2T_t} - G_1^3 e^{-p3T_t} + \dots). \quad (12.105)$$

G_1^i hat i -fache Pole an den gleichen Stellen der p -Ebene wie G_1 und demzufolge die gleiche Konvergenzabszisse. Schreibt man

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p} G_1^i(p) \right\} = e_i(t), \quad (12.106)$$

so lautet die Gleichung für die Übergangsfunktion in $t \geq 0$:

$$e(t) = 1 - e_1(t - T_t) + e_2(t - 2T_t) - e_3(t - 3T_t) \pm \dots. \quad (12.107)$$

Da

$$e_i(t - iT_t) \equiv 0 \quad \text{in} \quad t < iT_t, \quad (12.108)$$

werden zur exakten Berechnung der Übergangsfunktion für Zeiten $t < iT_t$ nur i Glieder benötigt. Das Verfahren ist deshalb zur Berechnung des Anfangsverlaufs der Übergangsfunktion – insbesondere bei größeren Totzeiten T_t – geeignet. Das ist – neben dem stationären Verhalten, das auf dem im Abschn. 12.6.5. angegebenen Weg berechnet werden kann – der besonders interessierende Teil der Übergangsfunktion. Für komplizierte Übertragungsfunktionen und größere Zeiten sind Methoden der direkten Integration geeigneter. Man wird allerdings in diesen Fällen meist die Untersuchung am Rechner (insbesondere Digitalrechner) vorziehen.

Beispiel: Regelkreis mit T_t -Strecke und P-Regler

Für eine T_t -Strecke mit der Totzeit $T_t = 1$ s und einen P-Regler mit dem Übertragungsfaktor $K_R = 0,5$ lautet die Übertragungsfunktion der offenen Kette:

$$G_o = 0,5 e^{-p \cdot 1 \text{ s}}. \quad (12.109)$$

Nach Gl. (12.98) ist somit $G_1 = 0,5$. Für die Übergangsfunktion erhält man mit Gl. (12.105)

$$e(t) = 1\sigma(t) - 0,5\sigma(t - 1 \text{ s}) + 0,25\sigma(t - 2 \text{ s}) - 0,125\sigma(t - 3 \text{ s}) \pm \dots. \quad (12.110)$$

Hierbei ist $\sigma(t)$ die im Abschn. 3.4.2. definierte Sprungfunktion. Die im Bild 12.30 aufgezeichnete Übergangsfunktion nähert sich in einer abklingenden Rechteckschwingung dem stationären Wert [s. Gl. (12.91)]

$$e_B = e(\infty) = \frac{1}{1 + 0,5} \approx 0,67. \quad (12.111)$$

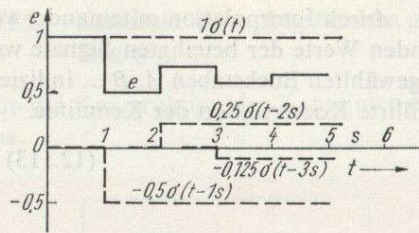


Bild 12.30. Übergangsfunktion eines Regelkreises mit Totzeitstrecke und Regler

Für $K_R = 1$ erhielte man $e_B = 0,5$. Dieser Wert würde jedoch nicht erreicht, da die Regelabweichung periodisch zwischen 0 und 1 wechselt. Der Regelkreis führt also ungedämpfte Rechteckschwingungen um den Wert $e_B = 0,5$ mit der Amplitude 0,5 aus. Ein P-Regler ist also offensichtlich zur Regelung von reinen Totzeitstrecken ungeeignet. Die richtige Wahl und Bemessung des Reglers an Totzeitstrecken werden wir später bei der Synthese von Regelkreisen betrachten.

12.8. Konstruktion der statischen Signalübertragung (der Kennlinien) von Grundsaltungen nichtlinearer Übertragungsglieder

Zur Ermittlung des Arbeitspunktes und des Übertragungsfaktors eines im Arbeitspunkt linearisierten Systems, das aus mehreren miteinander verkoppelten nichtlinearen Gliedern besteht, geht man vorteilhaft von den grafisch vorliegenden Kennlinien dieser Übertragungsglieder aus. Bei größeren Aussteuerungen um den Arbeitspunkt sowie bei Arbeitspunktverlagerungen – z. B. als Folge einer statischen Optimierung – ist dabei nicht nur der Arbeitspunkt bzw. die Kennlinie in dessen unmittelbarer Umgebung interessant, sondern die Konstruktion der Kennlinie der Gesamtschaltung in einem größeren Bereich notwendig oder wünschenswert. Sie soll im folgenden für die in den Abschnitten 12.1. bis 12.3. vorgestellten Grundverknüpfungen vorgenommen werden. Die Übertragungsglieder werden bei dieser Konstruktion statisch betrachtet. Der unterdrückte dynamische Teil habe P-Verhalten (mit Übertragungsfaktor 1). Bemerkt sei, daß die im vorliegenden Kapitel betrachteten Signale vom Nullpunkt – und nicht vom Arbeitspunkt – aus gezählt werden.

12.8.1. Kennlinie einer Parallelschaltung nichtlinearer Übertragungsglieder

Die Parallelschaltung zweier nichtlinearer statischer Übertragungsglieder mit den Kennlinien

$$x_i = f_i(u); \quad i = 1, 2 \quad (12.112)$$

zeigt Bild 12.31. Die Konstruktion der Kennlinie der Parallelschaltung erfolgt aus den Kennlinien der Einzelglieder dadurch, daß die Konstruktion für eine Folge von Werten des Eingangssignals durchgeführt wird. Danach werden die für die gesuchte

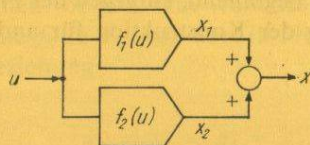


Bild 12.31. Parallelschaltung zweier nichtlinearer statischer Übertragungsglieder

Kennlinie erhaltenen Arbeitspunkte $A, B, C \dots$ durch Interpolation miteinander verbunden. Alle zu einem Arbeitspunkt gehörenden Werte der beteiligten Signale werden mit dem gleichen, für den Arbeitspunkt gewählten Buchstaben $A, B \dots$ indiziert. Bild 12.32 zeigt die auf diese Weise durchgeführte Konstruktion der Kennlinie.

$$x = x_1 + x_2 = f(u) \quad (12.113)$$

einer Parallelschaltung.

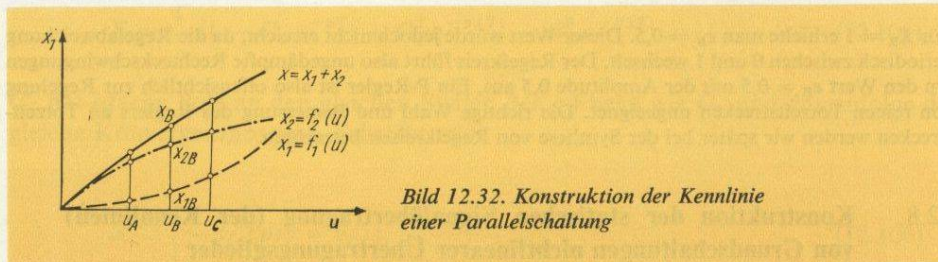


Bild 12.32. Konstruktion der Kennlinie einer Parallelschaltung

12.8.2. Kennlinie einer Kettenschaltung nichtlinearer Übertragungsglieder

Betrachtet wird die Kettenschaltung zweier nichtlinearer Übertragungsglieder mit den grafisch gegebenen Kennlinien (Bild 12.33)

$$u = f_1(w), \quad x = f_2(u). \quad (12.114)$$

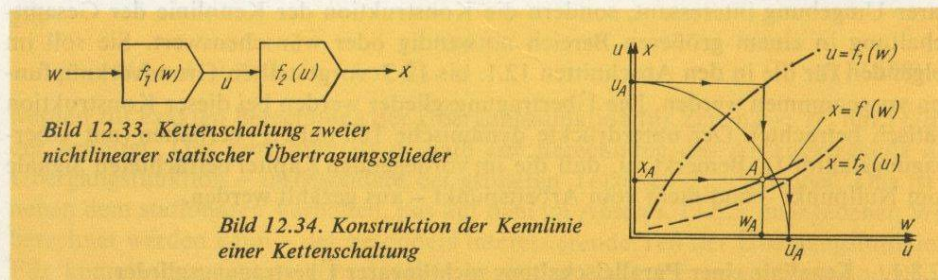


Bild 12.33. Kettenschaltung zweier nichtlinearer statischer Übertragungsglieder

Bild 12.34. Konstruktion der Kennlinie einer Kettenschaltung

Die Konstruktion der Kennlinie der Kettenschaltung ist im Bild 12.34 für einen Arbeitspunkt A durchgeführt. Das Ausgangssignal x wird hierbei auf der Ordinaten-, das Eingangssignal w auf der Abszissenachse und das innere Signal u auf beiden Achsen aufgetragen. Geht man von dem Wert des Ausgangssignals x_A aus, so gelangt man über die Kennlinie f_2 zum Punkt u_A und über den eingezeichneten Kreisbogen zum gleichen Wert auf der Ordinatenachse. Von dort gelangt man über die Kennlinie f_1 zum Punkt w_A . Das Wertepaar (x_A, w_A) bestimmt den Arbeitspunkt A der gesuchten Kennlinie $x = f(w)$.

Die Konstruktion kann auch, vom Eingangssignal w_A beginnend, entgegen der Pfeilrichtung durchgeführt werden. Durch Wiederholung der Konstruktion für andere Ausgangswerte erhält man die gewünschte Kennlinie.

12.8.3. Kennlinie eines Regelkreises mit nichtlinearer Strecke und nichtlinearem Regler

Für die Konstruktion der Kennlinien eines Regelkreises gehen wir vom Bild 12.35 aus.

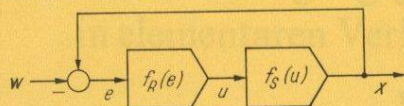


Bild 12.35. Signalflußbild für das statische Verhalten eines nichtlinearen Regelkreises

Die Kennlinien von Strecke und Regler seien

$$x = f_S(u), \quad u = f_R(e). \quad (12.115)$$

Für die Konstruktion benötigen wir außerdem die *inverse Reglerkennlinie*

$$e = f_R^*(u). \quad (12.116)$$

12.8.3.1. Konstruktion der Führungskennlinie

Es werde angenommen, daß der Regler selbst die im Regelkreis erforderliche Vorzeichenumkehr bewirke. Dann haben die Kennlinien von Strecke und Regler bei dem im Bild 12.36 gewählten Koordinatensystem den dort eingezeichneten typischen Verlauf.

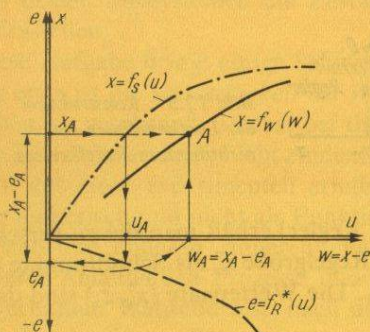


Bild 12.36. Konstruktion der Führungskennlinie eines nichtlinearen Regelkreises

Zur Konstruktion der *Führungskennlinie*

$$x = f_w(w) \quad (12.117)$$

gehen wir von dem Wert des Ausgangssignals x_A aus und gelangen über die Kennlinie f_S zu u_A , von dort in Pfeilrichtung weiter über die Kennlinie f_R zu e_A . Aus der Beziehung

$$w_A = x_A - e_A = x_A + |e_A| \quad (12.118)$$

ergibt sich w_A und damit das Wertepaar (x_A, w_A) für den Arbeitspunkt A auf der gesuchten Kennlinie. Durch Wiederholung dieser Konstruktion findet man die Kennlinie selbst. Sie zeigt, daß bei Aussteuerung in den stärker gekrümmten Bereich der Kennlinien von Strecke und Regler die bleibende Abweichung $e = e_B$ stärker als linear zunimmt und die Führungskennlinie ebenfalls eine merkbare Krümmung aufweist.

12.8.3.2. Konstruktion der Lastkennlinien

Von Interesse sind ebenfalls die *Lastkennlinien*

$$x = f_z(z). \quad (12.119)$$

Sie können für einen festen Sollwert w_0 aus der zugehörigen *Reglerkennlinie* f_R bzw. *inversen Reglerkennlinie* f_R^*

$$u = f_R(x, w_0), \quad x = f_R^*(u, w_0) \quad (12.120)$$

und den für verschiedene Störparameter z_v aufgenommenen *Streckenkenlinien*

$$x = f_S(u, z_v) \quad (12.121)$$

konstruiert werden, wie im Bild 12.37 gezeigt wird.

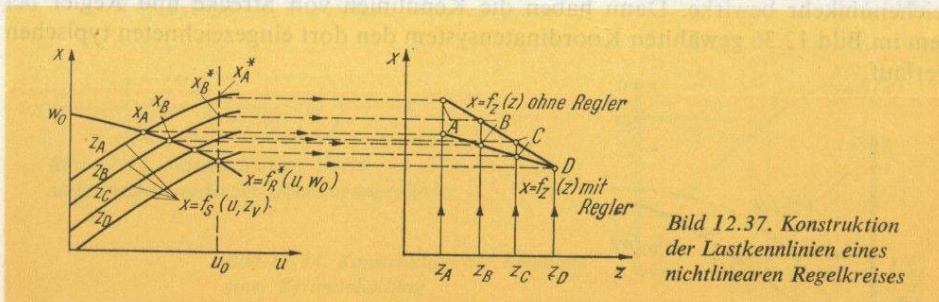


Bild 12.37. Konstruktion der Lastkennlinien eines nichtlinearen Regelkreises

Für feste Stellgröße u_0 (d. h. bei abgeschaltetem Regler) erhält man die zu verschiedenen Störparametern z_v gehörenden Werte der Regelgröße x_v^* als Schnittpunkte der Vertikalen $u = u_0$ mit den Streckenkennlinien f_S . Die Wertepaare (x_v^*, z_v) sind dann Punkte dieser Kennlinie f_z (ohne Regler).

Für Betrieb mit Regler findet man die bei verschiedenen Störgrößen sich einstellenden Regelgrößen x_v als Schnittpunkte der Reglerkennlinie f_R^* mit der entsprechenden Streckenkennlinie $f_S(u, z_v)$. Die Punkte der Lastkennlinie f_z (mit Regler) sind dann durch die Wertepaare (x_v, z_v) bestimmt. Beide Kennlinien lassen erkennen, wie durch den Regler der Einfluß von Störungen auf das statische Verhalten reduziert wird.

13. Aufstellung von Zustandsgleichungen aus den Übertragungsfunktionen und Vektordifferentialgleichungen von Übertragungsgliedern in elementaren Verknüpfungen

13.1. Problematik der Aufstellung von Zustandsgleichungen aus Übertragungsfunktionen

Die Aufstellung von Zustandsgleichungen bietet sich unmittelbar an, wenn im Rahmen der theoretischen Systemidentifikation die im System ablaufenden elementaren Subprozesse mit Hilfe physikalischer und anderer Gesetze beschrieben werden und daraus das Modell des gesamten Systems gebildet wird. Diese Zustandsdarstellung ist mitunter vorteilhaft bei der Simulation von Prozessen auf Analog- und Digitalrechnern. Sie ist notwendig für die exakte Untersuchung einer Reihe von Problemen der Stabilität, der Steuer- und Beobachtbarkeit sowie der strukturellen Steuerung von Systemen.

Häufig erfolgt die Systemidentifikation auf experimentellem Weg. Aus den aufgenommenen Übergangsfunktionen und Frequenzgängen (oder anderen ähnlichen Systemreaktionen) lassen sich dann unmittelbar die das Übertragungsverhalten beschreibenden Übertragungsfunktionen bzw. Übertragungsmatrizen bestimmen. Dadurch ergibt sich die Zielstellung, aus den Übertragungsfunktionen eines Systems bzw. von dessen Subsystemen die Zustands- und Ausgabegleichung des Gesamtsystems aufzustellen.

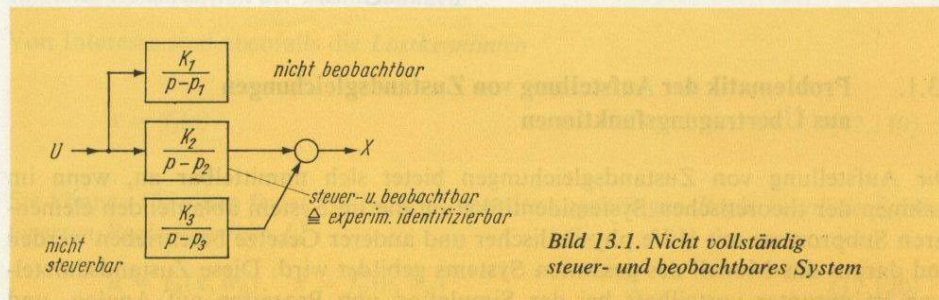
Diese Aufgabe bringt einige Schwierigkeiten mit sich:

Die erste ist die *Vieldeutigkeit der Wahl der Zustandsvariablen*. Schon im Abschn. 7.1. haben wir gesehen, daß selbst bei theoretischer Identifikation eines Systems die Wahl der Zustandsvariablen nicht eindeutig ist. Darüber hinaus ist es offensichtlich unmöglich, aus einer experimentell ermittelten Übertragungsfunktion – deren Parameter nur numerisch und nicht als Funktion der sie bestimmenden konstruktiven, physikalischen und anderen „inneren“ Parameter vorliegen – die tatsächlich im Systeminneren ablaufenden Prozesse und die diesen entsprechenden Zustandsgleichungen zu erhalten. Während also nach den im Abschn. 10.5.3. angegebenen Beziehungen aus den gegebenen Systemmatrizen A , B , C , D die Übertragungsfunktion $G(p)$ bzw. die Übertragungsmatrix $G(p)$ eindeutig berechnet werden kann, trifft das für die Bestimmung der Zustandsvariablen und der von deren Festlegung abhängigen Systemmatrizen aus der Übertragungsfunktion nicht zu.

Die zweite Schwierigkeit liegt in der *möglichen Unvollständigkeit der aus der Übertragungsmatrix gewonnenen Systemgleichungen*. Das im Bild 13.1 dargestellte System hat drei T_1 -Glieder. Es ist somit von 3. Ordnung und bedarf zur vollständigen Beschreibung dreier Zustandsvariablen. Da der Ausgang des ersten Gliedes keine Wirkung auf das Ausgangssignal des Systems X hat (durch X nicht beobachtet werden kann) und das dritte Glied nicht durch das Systemeingangssignal U gesteuert werden kann, ergibt sich als Übertragungsfunktion des Systems

$$G(p) = \frac{X(p)}{U(p)} = \frac{K_2}{p - p_2} \quad (13.1)$$

nur die des zweiten Gliedes. Bei rein experimenteller Ermittlung von $G(p)$ würde die Existenz des ersten und dritten T_1 -Gliedes überhaupt nicht festgestellt, sondern nur der steuer- und beobachtbare Systemteil erfaßt werden. Letzterer wird deshalb auch als experimentell *identifizierbar* bezeichnet.



Die durch die Übertragungsfunktionen bzw. -matrizen gegebene Systembeschreibung ist somit u. U. unvollständig. Diese Unvollständigkeit ist eng mit dem Problem der Steuer- und Beobachtbarkeit eines Systems verbunden, das später eingehend untersucht werden wird. Die Gefahr, daß das System unvollständig beschrieben wird, wird offensichtlich herabgesetzt, wenn bereits die bekannten Übertragungsfunktionen von Teilsystemen in die Zustandsdarstellung übergeführt und dann verknüpft und nicht erst die Übertragungsfunktionen des Gesamtsystems gebildet werden. Als besonderes Problem ergibt sich das der *minimalen Realisierung*. Wir haben bereits gesehen, daß die Systemgleichungen die Übertragungsmatrix eindeutig bestimmen, während umgekehrt die Aufstellung der Systemgleichungen aus der Übertragungsmatrix nicht eindeutig ist.

D 13.1

Als *Realisierung eines Systems* mit der Übertragungsmatrix $G(p)$ bezeichnet man die Bestimmung der Systemgleichungen aus der Übertragungsmatrix so, daß diese aus den Systemgleichungen wieder gewonnen werden kann. Eine *minimale Realisierung* ist eine Realisierung mit kleinstmöglicher Ordnung der Zustandsgleichung, d. h. mit minimaler Zahl an Zustandsvariablen.

In anderen Zusammenhängen wird unter Realisierung eines Systems der Aufbau eines den gegebenen Gleichungen gehorchenden physikalischen Objekts, z. B. durch Simulation an einem Rechner, verstanden. Da die Systemgleichungen eine unmittelbare Grundlage für eine derartige Simulation bilden, stehen beide Interpretationen in einem Zusammenhang.

Die minimale Realisierung wird erstrebt, weil dadurch der Bedarf an Integrationsverstärkern zur Modellierung an einem Analogrechner, der Programmierungsaufwand für die Simulation an einem Digitalrechner sowie der Aufwand bei der Berechnung des optimalen Steuerungsalgorithmus ein Minimum erreicht. Die Möglichkeit zur Einsparung an Zustandsvariablen sei an einem einfachen Beispiel erläutert

(Bild 13.2). Bemerkt sei, daß mehrere minimale Realisierungsvarianten existieren können.

Eine minimale Realisierung braucht auch keineswegs der physikalisch tatsächlich vorliegenden Struktur zu entsprechen. Die minimale Realisierung ist durch rechen-technische Vorteile ausgezeichnet.

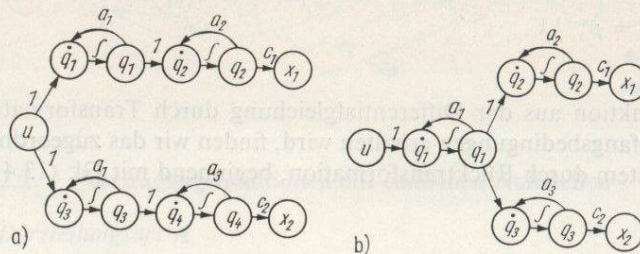


Bild 13.2
Minimalrealisierung
eines Systems

a) Realisierung
b) Minimalrealisierung

Im folgenden wollen wir uns auf Übertragungsfunktionen von Systemen mit einem Ein- und Ausgang beschränken. Wie diese die Elemente der Übertragungsmatrizen von Mehrgrößensystemen darstellen, so werden die Zustandsgleichungen dieser Blöcke entsprechend zur Zustandsgleichung des Gesamtsystems zusammengefaßt. Beachtung werden wir dabei der Frage schenken, wie sich die vorliegende Systemstruktur bzw. Struktur der Übertragungsfunktion in den Systemmatrizen widerspiegelt. Wir beginnen mit Übertragungsfunktionen, die in Polynomform vorliegen (s. Abschn. 13.2.). Dann betrachten wir die Zustandsgleichungen von Kettenschaltungen oder Produktdarstellungen der Übertragungsfunktion (s. Abschn. 13.3.), danach die von Parallelschaltungen bzw. bei Partialbruchzerlegung der Übertragungsfunktion (s. Abschn. 13.4.). Schließlich sollen die Einflüsse von Rückführungen auf die Systemmatrizen (s. Abschn. 13.5.) untersucht werden.

13.2. Direkte Aufstellung der Zustandsgleichung aus der in Polynomform gegebenen Übertragungsfunktion

13.2.1. Übertragungsfunktionen ohne endliche Nullstellen

Die Übertragungsfunktion eines aus konzentrierten Elementen bestehenden Systems n -ter Ordnung mit einem Ein- und Ausgang hat für den Fall der Abwesenheit endlicher Nullstellen die Form

$$G(p) = \frac{X(p)}{U(p)} = \frac{1}{a_0 + a_1 p + \dots + a_{n-1} p^{n-1} + p^n}. \quad (13.2)$$

Daraus folgt

$$p^n X + a_{n-1} p^{n-1} X + \dots + a_1 p X + a_0 X = 1 U. \quad (13.3)$$

Als (transformierte) Zustandsvariable werden die Ausgangsgröße und deren Ableitungen eingeführt:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } Q_1 &= X \\
 \text{b) } Q_2 &= pQ_1 = pX \\
 \text{c) } Q_3 &= pQ_2 = p^2X \\
 &\vdots \\
 \text{d) } Q_n &= pQ_{n-1} = p^{n-1}X.
 \end{aligned} \tag{13.4}$$

Da die Übertragungsfunktion aus der Differentialgleichung durch Transformation bei verschwindenden Anfangsbedingungen erhalten wird, finden wir das zugeordnete Differentialgleichungssystem durch Rücktransformation, beginnend mit Gl. (13.4b):

$$\begin{aligned}
 \dot{q}_1 &= q_2 \\
 \dot{q}_2 &= q_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{q}_{n-1} &= q_n \\
 \dot{q}_n &= -a_0q_1 - a_1q_2 \cdots - a_{n-1}q_n + u.
 \end{aligned} \tag{13.5}$$

Die letzte Gleichung wird dabei aus Gl. (13.3) erhalten. Die Zusammenfassung zu einer Vektordifferentialgleichung ergibt die Zustandsgleichung

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & 0 & 1 & & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \tag{13.6}$$

Für die Ausgangsgleichung folgt aus Gl. (13.4a):

$$x = [1 \ 0 \ \cdots \ 0] q. \tag{13.7}$$

Die Systemmatrix A ist hier die sog. *Frobenius-* oder *Begleitmatrix* F :

$$A = F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & 0 & 1 & & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{13.8}$$

Sie enthält in der letzten Zeile die Koeffizienten des Nennerpolynoms. Die Elemente unmittelbar oberhalb der Hauptdiagonalen sind Einsen. Den zugehörigen Signalflußgraphen zeigt Bild 13.3.

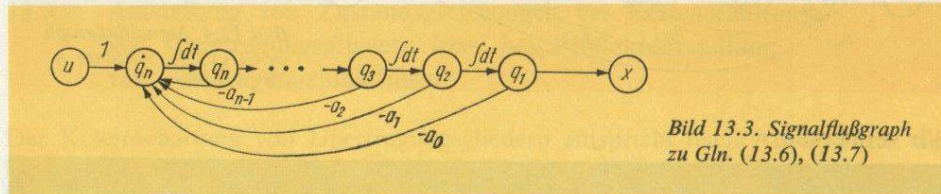


Bild 13.3. Signalflußgraph zu Gln. (13.6), (13.7)

13.2.2. Übertragungsfunktionen mit endlichen Nullstellen

a) Darstellungsart A

Bei Übertragungsfunktionen mit Nennerpolynom und Zählerpolynom (mit endlichen Nullstellen)

$$G(p) = \frac{X(p)}{U(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \dots + p^n} \quad (13.9)$$

wollen wir uns auf den im wesentlichen interessierenden Fall $m < n$ beschränken. Bei $m = n$ erhält man nach Ausführung der Division eine Konstante und eine echt gebrochene Übertragungsfunktion (mit $m < n$). Setzt man

$$X_1(p) = \frac{1}{a_0 + a_1 p + \dots + p^n} U(p), \quad (13.10)$$

so ist

$$X(p) = (b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m) X_1(p). \quad (13.11)$$

Ein Vergleich mit Gl. (13.2) zeigt, daß bei Ersatz von x durch x_1 die dort erhaltenen Ergebnisse zur Zustandsbeschreibung von Gl. (13.10) übernommen werden können. Insbesondere gilt

$$Q_i = p^{i-1} X_1; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (13.12)$$

Die Systemmatrix ist wiederum die Frobeniusmatrix, während für die Ausgangsgleichung mit den Gln. (13.11), (13.12) folgt

$$X = b_0 Q_1 + b_1 Q_2 + \dots + b_m Q_{m+1} \quad (13.13)$$

und nach Rücktransformation

$$x = [b_0 b_1 \dots b_m 0 \dots 0] q. \quad (13.14)$$

Den zugehörigen Signalflußgraphen zeigt Bild 13.4.

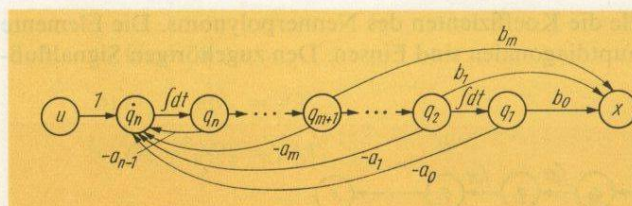


Bild 13.4. Signalflußgraph zu Gl. (13.9), Variante A

Wir vermerken:

S 13.1

Übertragungsfunktionen in Polynomform können mit Hilfe der Frobeniusmatrix direkt in die Zustandsdarstellung übergeführt werden.

b) Darstellungsart B

Eine zweite Realisierungsmöglichkeit von Gl. (13.9) ist durch den Signalflußgraphen von Bild 13.5 gegeben.

Zum Beweis kann man aus diesem Graphen die Übertragungsfunktion $X(p)/U(p)$ ermitteln, wobei man wieder Gl. (13.9) erhält. Diese Berechnung wird durch später angegebene Transformationsregeln für Signalflußgraphen erleichtert, weshalb wir diesen Beweis bis dorthin zurückstellen wollen.

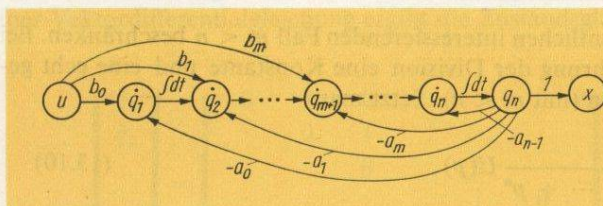


Bild 13.5. Signalflußgraph zu Gl. (13.9), Variante B

Aus Bild 13.5 liest man die folgenden Systemgleichungen ab:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdot & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (13.15)$$

und

$$x = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1] q. \quad (13.16)$$

Ein Vergleich mit Gl. (13.8) zeigt, daß bei dieser Realisierung die Systemmatrix A gleich der transponierten Frobeniusmatrix ist:

$$A = F^T. \quad (13.17)$$

Die Umkehrung der Reihenfolge (der Zählrichtung) der Zustandsvariablen zieht also die Transponierung der Systemmatrix nach sich.

13.3. Aufstellung von Zustandsgleichungen bei Kettenschaltung von Übertragungsgliedern bzw. bei Produktdarstellung von Übertragungsfunktionen

Der Kettenschaltung von Übertragungsgliedern entspricht nach Abschn. 12.1. das Produkt der zugeordneten Übertragungsfunktionen. Die Zustandsbeschreibung von Kettenschaltungen aus elementaren T_1 - und T_{D1} -Gliedern und die von Übertragungsfunktionen in Produktform (in Pol-Nullstellen-Darstellung) sind deshalb nur verschiedene Interpretationen der gleichen Aufgabe.

13.3.1. Zustandsgleichung in Kette geschalteter T_1 -Glieder

a) Variante A

Eine Kettenschaltung von T_1 -Gliedern zeigt Bild 13.6. Wegen der besseren Übersichtlichkeit der Darstellung ist dabei die oben verwendete Übertragungsfunktion eines T_1 -Gliedes wie folgt umgeformt worden:

$$\frac{V_1}{1 + pT_1} = \frac{V_1/T_1}{p + 1/T_1} = \frac{K_1}{p - p_1}, \quad \prod_1^n K_i = K. \quad (13.18)$$

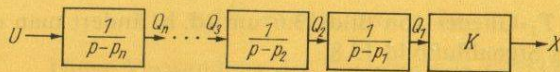


Bild 13.6. Blockdiagramm einer Kette von T_1 -Gliedern

Nimmt man die Ausgangssignale der Verzögerungsglieder als Zustandsvariable (Bild 13.6):

$$Q_i = \frac{Q_{i+1}}{p - p_i}; \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (13.19)$$

so erhält man das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \text{a) } pQ_i &= p_i Q_i + Q_{i+1}; \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \text{b) } pQ_n &= p_n Q_n + U. \end{aligned} \quad (13.20)$$

Durch Rücktransformation in den Zeitbereich wird daraus

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= p_1 q_1 + q_2 \\ &\vdots \\ \dot{q}_{n-1} &= p_{n-1} q_{n-1} + q_n \\ \dot{q}_n &= p_n q_n + u. \end{aligned} \quad (13.21)$$

Deren Zusammenfassung liefert die Vektordifferentialgleichung

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & 1 & & \cdot \\ \cdot & & & 0 & \\ \cdot & & & 1 & \\ 0 & & 0 & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (13.22)$$

und die Ausgangsgleichung

$$x = [K \ 0 \ \dots \ 0] q. \quad (13.23)$$

Die Systemmatrix enthält in der Hauptdiagonale die Pole, unmittelbar darüber befinden sich Einselemente. Alle anderen Elemente sind Nullelemente. Der dazugehörige Signalflußgraph hat die Form von Bild 13.7.

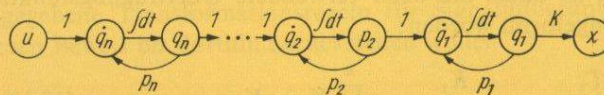


Bild 13.7. Signalflußgraph zu Blockdiagramm 13.6

b) Variante B

Kehrt man die Reihenfolge der T_1 -Glieder von Bild 13.6 um (d. h. ändert man die Zählrichtung), so findet man das Signalflußbild 13.8.

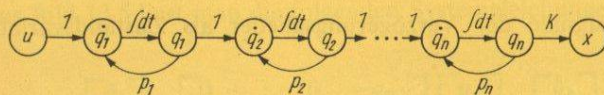


Bild 13.8. Äquivalenter Signalflußgraph zu dem von Bild 13.7

Daraus liest man unmittelbar die folgenden Systemgleichungen ab:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & p_2 & & \cdot \\ 0 & 1 & & \\ \cdot & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (13.24)$$

$$x = [0 \ \dots \ 0 \ K] q. \quad (13.25)$$

Die Systemmatrix ist hier die transponierte Systemmatrix von Gl. (13.22). Somit gilt:

Die Systemmatrix einer Kettenschaltung von T_1 -Gliedern enthält in der Hauptdiagonale die Pole der Übertragungsglieder. Die Elemente unmittelbar oberhalb (unterhalb) sind Einselemente, wenn die Zählrichtung der Übertragungsglieder gegensinnig zu (gleichsinnig mit) der Signalflußrichtung verläuft.

S 13.2

13.3.2. Zustandsgleichung der Kettenschaltung von Gliedern mit komplexen Polen (von Schwingungsgliedern)

Auch für Glieder mit komplexen Polen p_i sind die im Abschn. 13.3.1. entwickelten Systemmatrizen gültig. Die betroffenen Matrixelemente sind jedoch dann komplex. Als Ausgangspunkt für eine Realisierung am Analogrechner ist eine solche Darstellung ungeeignet, für eine Programmierung von Digitalrechnern ist sie ungünstig. Da komplexe Pole stets als konjugiert komplexe Polpaare auftreten, fassen wir ein solches Polpaar

$$p_1 = -\delta_1 + j\omega_1, \quad p_2 = -\delta_1 - j\omega_1 \quad (13.26)$$

zusammen und erhalten ein Schwingungsglied mit reellen Parametern:

$$\frac{1}{(p + \delta_1 - j\omega_1)(p + \delta_1 + j\omega_1)} = \frac{1}{p^2 + 2\delta_1 p + \delta_1^2 + \omega_1^2} \quad (13.27)$$

Ein Vergleich mit Gl. (13.2) (für $n = 2$) liefert

$$a_0 = (\delta_1^2 + \omega_1^2), \quad a_1 = 2\delta_1. \quad (13.28)$$

Unter Verwendung der Begleitmatrix Gl. (13.8) und von Gl. (13.28) ergibt sich für die Systemmatrix eines Schwingungsglieds

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\delta_1^2 + \omega_1^2) & -2\delta_1 \end{bmatrix}. \quad (13.29)$$

Aus dieser bzw. nach dem Vorbild des Signalflußgraphen Bild 13.3 findet man das Signalflußbild 13.9.

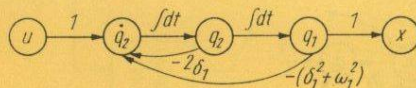


Bild 13.9
Signalflußgraph eines Schwingungsglieds

13.3.3. Zustandsgleichung von Kettenschaltungen mit $T_1 - T_{D1}$ -Gliedern bzw. von Übertragungsfunktionen in Pol-Nullstellen-Darstellung

Die allgemeine Übertragungsfunktion Gl. (13.9) lautet in Produktform (in Pol-Nullstellen-Darstellung) für $m < n$:

$$G(p) = K \frac{\prod_{i=1}^m (p - p_{Di})}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)} = K \prod_{i=1}^m \left(\frac{p - p_{Di}}{p - p_i} \right) \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{p - p_i} \right). \quad (13.30)$$

Ihre Realisierung erfordert zusätzlich zu den Ergebnissen des Abschnitts 13.3.1. die Zustandsdarstellung der Übertragungsfunktion von T_1 - T_{D1} -Gliedern:

$$\frac{X_i}{U_i} = \frac{p - p_{Di}}{p - p_i} = 1 + \frac{p_i - p_{Di}}{p - p_i}. \quad (13.31)$$

Setzt man

$$Q_i = \frac{p_i - p_{Di}}{p - p_i} U_i, \quad (13.32)$$

dann ist

$$pQ_i = p_i Q_i + (p_i - p_{Di}) U_i \quad (13.33)$$

und

$$X_i = Q_i + U_i. \quad (13.34)$$

Damit findet man den Signalflußgraphen Bild 13.10.

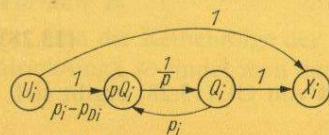


Bild 13.10. Signalflußgraph eines T_1 - T_{D1} -Gliedes Gl. (13.31)

Für die allgemeine Übertragungsfunktion in Produktform von Gl. (13.30) findet man unter Beachtung, daß bei der entsprechenden Kettenschaltung das Ausgangssignal eines Gliedes das Eingangssignal des folgenden ist, das Signalflußbild 13.11 (im Zeitbereich). Hierbei ist substituiert

$$p_i - p_{Di} = d_i. \quad (13.35)$$

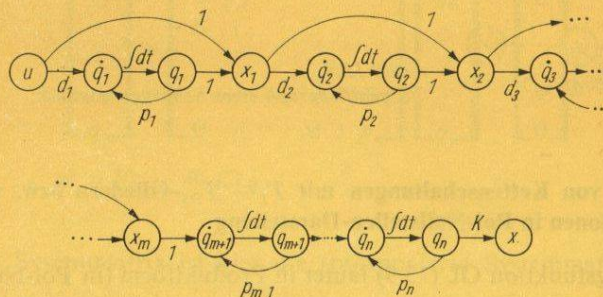


Bild 13.11. Signalflußgraph der Übertragungsfunktion Gl. (13.30)

Aus diesem liest man die einer Übertragungsfunktion mit gegebenen Polen und Nullstellen, d. h. einer Kettenschaltung von T_1 - T_{D1} - und T_1 -Gliedern, zugeordneten Systemgleichungen ab:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \vdots \\ \dot{q}_m \\ \dot{q}_{m+1} \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ d_2 & p_2 & & \cdot \\ d_3 & d_3 & p_3 & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdot \\ d_m & \dots & d_m & p_m \\ 1 & \dots & 1 & 1 & p_{m+1} \\ 0 & \dots & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_m \\ q_{m+1} \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_m \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (13.36)$$

$$x = [0 \quad 0 \quad K] q. \quad (13.37)$$

Ein Vergleich der Gln. (13.36), (13.30) zeigt, daß dort, wo man mit Übertragungsfunktionen auskommt, eine erhebliche Einsparung an Parametern erzielt werden kann.

13.4. Aufstellung von Zustandsgleichungen bei Parallelschaltung von Übertragungsgliedern bzw. bei Summendarstellung von Übertragungsfunktionen

13.4.1. Zustandsgleichung parallelgeschalteter T_1 -Glieder

Ist eine Parallelschaltung von T_1 -Gliedern gegeben (Bild 13.12), so liegt es nahe, deren Ausgangssignale als Zustandsvariable einzuführen.

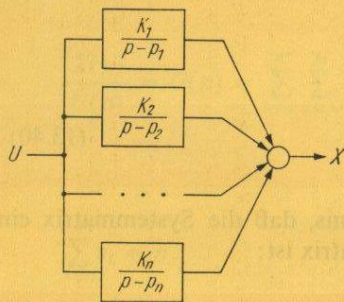


Bild 13.12. Parallelschaltung von T_1 -Gliedern

Zunächst beachten wir die Äquivalenz der beiden im Bild 13.13 gezeigten Darstellungsweisen eines T_1 -Gliedes:

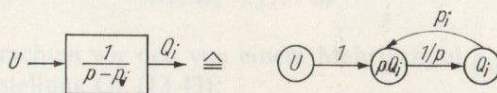


Bild 13.13. Signalflußbilder eines T_1 -Gliedes

Blockdiagramm (links)
Signalflußgraph (rechts)

Nach Satz 12.3 erhält man aus Bild 13.13b wie gefordert die Übertragungsfunktion von Bild 13.13a:

$$\frac{Q_i}{U} = \frac{\frac{1}{p}}{1 - \frac{1}{p} p_i} = \frac{1}{p - p_i}. \quad (13.38)$$

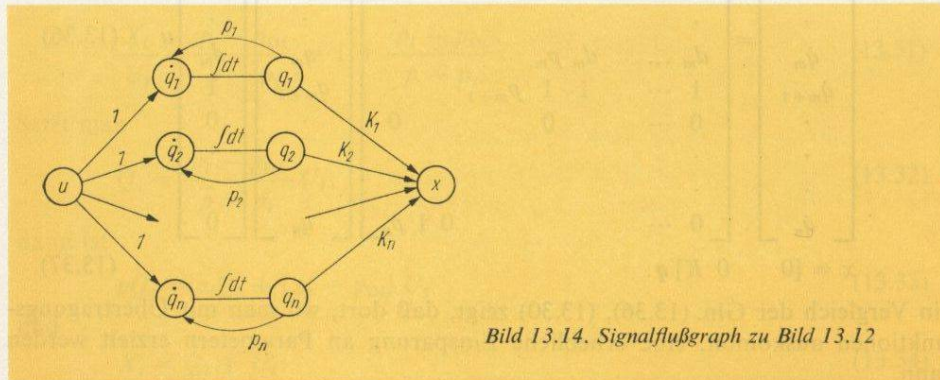


Bild 13.14. Signalflußgraph zu Bild 13.12

Damit kann das Blockdiagramm Bild 13.12 in den Signalflußgraphen im Zeitbereich von Bild 13.14 übergeführt werden. Aus diesem kann man unmittelbar die Zustandsgleichung

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (13.39)$$

und die Ausgangsgleichung

$$x = [K_1 \ K_2 \ \dots \ K_n] q \quad (13.40)$$

ablesen. Hieraus ergibt sich die wichtige Erkenntnis, daß die Systemmatrix einer Parallelschaltung von T_1 -Gliedern eine Diagonalmatrix ist:

$$A = \mathcal{A} = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_n). \quad (13.41)$$

13.4.2. Aufstellung von Zustandsgleichungen durch Partialbruchzerlegung der Übertragungsfunktion

13.4.2.1. Übertragungsfunktionen mit Einfachpolen

Übertragungsfunktionen mit voneinander verschiedenen Polen p_i lassen sich durch Partialbruchentwicklung in die folgende Summe zerlegen:

$$G(p) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j p^j}{1 + \sum_{i=1}^n a_i p^i} = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{p - p_i}; \quad (13.42)$$

$$m < n, \quad p_i \neq p_r \quad \text{für} \quad i \neq r.$$

Die Koeffizienten (Residuen) K_i lassen sich hierbei nach den im Abschn. 10.4.3. angegebenen Methoden bestimmen. Nach den Ergebnissen von Abschn. 12.2. entspricht der Summendarstellung von Übertragungsfunktionen die Parallelschaltung der zugeordneten Übertragungsglieder. Gl. (13.42) wird deshalb durch die Signalflußbilder 13.12 und 13.14 und damit durch die Systemgleichungen (13.39), (13.40) realisiert. Somit gilt folgender Satz:

Als Systemmatrix einer Parallelschaltung von T_1 -Gliedern bzw. der Summendarstellung einer Übertragungsfunktion mit Einfachpolen erhält man eine Diagonalmatrix.

S 13.3

13.4.2.2. Übertragungsfunktionen mit Mehrfachpolen

Für den allgemeinen, Mehrfachpole p_i der Vielfachheit s_i einschließenden Fall liefert die Partialbruchzerlegung von Gl. (13.9) für $m < n$ (s. Abschn. 10.4.3.):

$$\frac{X(p)}{U(p)} = G(p) = \sum_{i=1}^{n^*} \sum_{j=1}^{s_i} \frac{K_{ij}}{(p - p_i)^j} = \sum_{i=1}^{n^*} G_i(p) \quad (13.43)$$

mit

$$\sum_{i=1}^{n^*} s_i = n. \quad (13.44)$$

Die Koeffizienten K_{ij} sind dabei bestimmt durch

$$K_{ij} = \lim_{p \rightarrow p_i} \frac{1}{(s_i - j)!} \frac{d^{s_i - j}}{dp^{s_i - j}} [(p - p_i)^{s_i} G(p)]. \quad (13.45)$$

Betrachten wir den von einem Mehrfachpol p_i herrührenden Beitrag zur Summendarstellung Gl. (13.43):

$$\frac{X_i(p)}{U(p)} = G_i(p) = \frac{K_{i1}}{p - p_i} + \frac{K_{i2}}{(p - p_i)^2} + \dots + \frac{K_{is_i}}{(p - p_i)^{s_i}}. \quad (13.46)$$

Würde man G_i durch Parallelschaltung der den einzelnen Summanden entsprechenden Signalflußgraphen realisieren, so benötigte man

$$n_i^* = \sum_{i=1}^{s_i} i \quad (13.47)$$

Integratoren. Eine Minimalrealisierung für einen Pol s_i -ter Ordnung mit nur s_i unabhängigen Energiespeichern erhält man, wenn man nach der im Abschn. 13.3.1. erläuterten Verfahrensweise s_i T_1 -Glieder mit dem gleichen Pol p_i in Kette schaltet. Wählt man entsprechend Variante A [s. Gl. (13.19)]

$$Q_{i,j} = \frac{1}{p - p_i} Q_{i,j+1}; \quad j = 1, 2, \dots, s_i \quad (13.48)$$

mit

$$Q_{i,s_i+1} = U, \quad (13.49)$$

so ist

$$Q_{i,s_i+1-j} = \frac{1}{(p - p_i)^j} U. \quad (13.50)$$

Mit den Gln. (13.46), (13.50) ergibt sich als Ausgabegleichung (im Unterbereich):

$$X_i = \sum_{j=1}^{s_i} K_{ij} Q_{i,s_i+1-j}. \quad (13.51)$$

Aus Gl. (13.48) – nach dem Vorbild von Bild 13.7 – und Gl. (13.51) läßt sich der Signalflußgraph für G_i von Gl. (13.46) konstruieren (Bild 13.15).

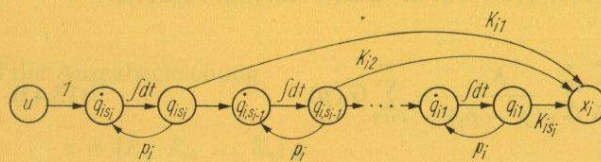


Bild 13.15. Signalflußgraph zu Gl. (13.46)

Aus diesem Bild gewinnt man die Systemgleichungen:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_{i1} \\ \dot{q}_{i2} \\ \vdots \\ \dot{q}_{is_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_i & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & p_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{i1} \\ q_{i2} \\ \vdots \\ q_{is_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (13.52)$$

$$x_i = [K_{is_i} \dots K_{i2} K_{i1}] q_i. \quad (13.53)$$

Mit der aus den Gln. (13.43), (13.46) folgenden Beziehung

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n^*} G_i(p) U(p) = \sum_{i=1}^{n^*} X_i(p) \quad (13.54)$$

findet man schließlich für die Realisierung von Gl. (13.43) den Signalflußgraphen 13.16, dessen einzelne Zweige die Form des Graphen von Bild 13.15 haben. Die Zerlegung Gl. (13.43) entspricht also der Parallelschaltung von Gliedern der Ordnung $s_i \geq 1$.

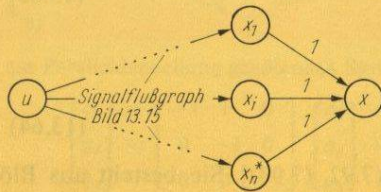


Bild 13.16. Signalflußgraph zu Gl. (13.43)

Zur Aufstellung der Systemgleichungen für das gesamte System schreiben wir die den i -ten Zweig bestimmenden Gln. (13.52), (13.53) in kompakter Form:

$$\dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{q}_i + \mathbf{b}_i u \quad (13.55)$$

$$x_i = \mathbf{c}_i^T \mathbf{q}_i \quad (13.56)$$

mit dem $(s_i, 1)$ -Zustandsvektor des i -ten Zweiges (Teilsystems)

$$\mathbf{q}_i = [q_{i1} \ q_{i2} \ \dots \ q_{is_i}]^T \quad (13.57)$$

der (s_i, s_i) -Systemmatrix $\mathbf{A}_i$ des i -ten Zweiges

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} p_i & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ 0 & & p_i \end{bmatrix} \quad (13.58)$$

dem $(s_i, 1)$ -Vektor

$$\mathbf{b}_i = [0 \ 0 \ \dots \ 1]^T \quad (13.59)$$

und dem $(1, s_i)$ -Beobachtungsvektor

$$\mathbf{c}_i^T = [K_{is_i} \ K_{i,s_i-1} \ \dots \ K_{i2} \ K_{i1}]. \quad (13.60)$$

Fassen wir die Zustandsgrößen aller n^* Zweige (aller Teilsysteme) zum Zustandsvektor $\mathbf{q}$ des Gesamtsystems zusammen

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1^T \ \mathbf{q}_2^T \ \dots \ \mathbf{q}_{n^*}^T]^T, \quad (13.61)$$

so können wir unter Verwendung von Übermatrizen die Systemgleichungen für das Gesamtsystem aufschreiben:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ 0 & & A_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n^* \end{bmatrix} u \quad (13.62)$$

$$x = [c_1^T \mid c_2^T \mid \dots \mid c_n^{*T}] q. \quad (13.63)$$

Die Systemmatrix

$$A = \text{diag } A_i \quad (13.64)$$

hat hier die Form einer Jordanmatrix [s. Gln. (7.92), (7.93)]. Sie besteht aus Blöcken von der Form der Systemmatrix in Gl. (13.58), sog. Jordanblöcken. Für den Fall durchweg verschiedener Eigenwerte (von einfachen Polen) ist die Jordanmatrix eine reine Diagonalmatrix.

Nach dem Gesagten können Systemgleichungen in kanonischer Normalform, deren Systemmatrix stets eine Jordanmatrix ist, durch Signalflußgraphen vom Typ der Bilder 13.15, 13.16 dargestellt werden. Für den Fall durchweg verschiedener Eigenwerte hat der Signalflußgraph die einfache Form von Bild 13.14. Für diesen Fall stellt die Partialbruchzerlegung eine einfache Möglichkeit zur Transformation auf kanonische Normalform dar. Sie führt jedoch auch bei teilweise gleichen Eigenwerten, für die das im Abschn. 7.5. vorgestellte Transformationsverfahren nicht ausreicht, zu einfachen kanonischen Strukturen mit Systemmatrizen vom Typ der Jordanmatrix.

Die Gln. (13.62), (13.63) zeigen den Weg, wie unter Verwendung von Übermatrizen in kompakter Weise die Systemgleichungen eines Gesamtsystems aus denen der Einzelsysteme gebildet werden können. Im allgemeineren Fall haben die Teilsysteme mehrere, teilweise gemeinsame Eingangsgrößen, die auch von den Ausgängen anderer Teilsysteme stammen können. Dadurch werden die Systemgleichungen komplizierter. Der Zustandsvektor des Gesamtsystems wird auch in diesem Fall durch Zusammenfassung der Zustandsvektoren der Teilsysteme gebildet.

Als *Beispiel* zerlegen wir

$$\frac{2}{(p+1)^2(p+2)} = \frac{K_{11}}{p+1} + \frac{K_{12}}{(p+1)^2} + \frac{K_2}{p+2}. \quad (13.65)$$

Mit Gl. (13.45) findet man

$$K_{11} = \lim_{p \rightarrow -1} \frac{d}{dp} \left(\frac{2}{p+2} \right) = -2$$

$$K_{12} = \lim_{p \rightarrow -1} \frac{2}{p+2} = 2$$

$$K_2 = \lim_{p \rightarrow -2} \frac{2}{(p+1)^2} = 2. \quad (13.66)$$

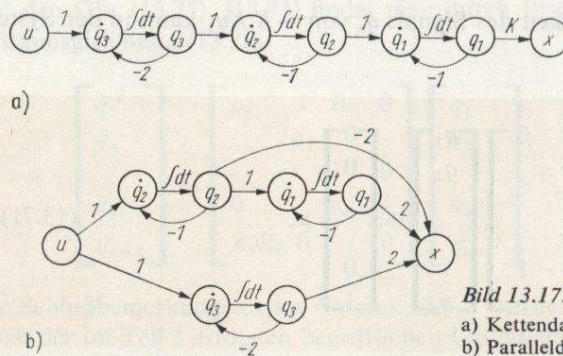


Bild 13.17. Signalflußgraphen zu Gl. (13.65)

a) Kettendarstellung
b) Paralleldarstellung

Die zur Paralleldarstellung gehörenden Systemgleichungen sind

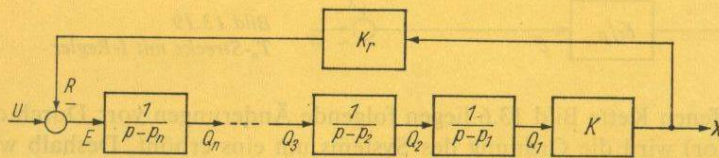
$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (13.67)$$

$$x = [2 \quad -2 \quad 2] q. \quad (13.68)$$

13.5. Zustandsgleichungen bei Gegenparallelschaltung von Übertragungsgliedern

13.5.1. Zustandsgleichung eines Übertragungsglieds mit starrer Rückführung

Betrachten wir als Beispiel die im Bild 13.18 dargestellte T_n -Kette mit starrer Rückführung.

Bild 13.18. Blockdiagramm einer T_n -Kette mit starrer Rückführung

Ein Vergleich mit Bild 13.6 zeigt, daß an die Stelle des dortigen Eingangssignals der Kettenschaltung U das Differenzsignal E tritt:

$$E = U - R = U - K_r K Q_1. \quad (13.69)$$

Die Zustandsgleichung (13.22) ist deshalb wie folgt zu modifizieren:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 1 & 0 \\ & p_2 & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} (u - K_r K q_1). \quad (13.70)$$

Die daraus ablesbare Abhängigkeit des Signals $\dot{q}_n$ von $-K_r K q_1$ kann in der Systemmatrix berücksichtigt werden:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 1 & 0 \\ 0 & p_2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ -K_r K & 0 & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (13.71)$$

Man erkennt, daß Vorwärtskopplungen zwischen den verschiedenen Zustandsvariablen in den Elementen oberhalb der Hauptdiagonalen der Systemmatrix zum Ausdruck kommen, während Rückwärtskopplungen an den Elementen unterhalb der Hauptdiagonalen erkenntlich sind. Das Element A_{n1} beschreibt hierbei eine Rückkopplung über das gesamte Vorwärtsglied. Die Ausgangsgleichung ist gegenüber Gl. (13.23) unverändert.

13.5.2. Regelkreis mit I-Regler

Als Beispiel der Zustandsgleichung eines Regelkreises wählen wir eine T_n -Strecke mit einem I-Regler (Bild 13.19).

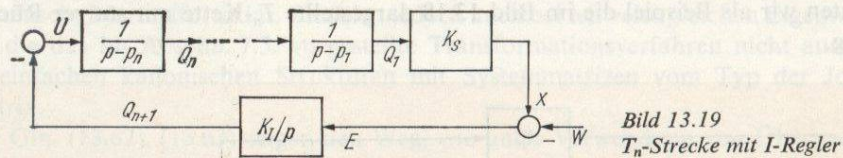


Bild 13.19
 T_n -Strecke mit I-Regler

Gegenüber der offenen Kette Bild 13.6 liegen folgende Änderungen vor: Durch den I-Regler (Integrator) wird die Ordnung des Systems um eins erhöht. Deshalb wird als weitere Zustandsvariable Q_{n+1} das Ausgangssignal des I-Reglers eingeführt. Für dieses gilt:

$$Q_{n+1} = \frac{K_I}{p} (X - W) = \frac{K_I K_s}{p} Q_1 - \frac{K_I}{p} W. \quad (13.72)$$

Durch Multiplikation mit p und Rücktransformation in den Zeitbereich findet man

$$\dot{q}_{n+1} = K_I K_s q_1 - K_I w. \quad (13.73)$$

Außerdem entnimmt man Bild 13.19

$$u = -q_{n+1}. \quad (13.74)$$

Damit erhält man anstelle der letzten Gleichung (13.21)

$$\dot{q}_n = p_n q_n + u = p_n q_n - q_{n+1}. \quad (13.75)$$

Mit den Gln. (13.75), (13.73) findet man durch Erweiterung und Modifikation der Zustandsgleichung (13.22)

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \\ \dot{q}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 1 & 0 & 0 \\ & p_2 & & \\ & & 1 & 0 \\ 0 & & & p_n & -1 \\ K_I K_S & 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \\ q_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -K_I \end{bmatrix} w. \quad (13.76)$$

Die Schlußbemerkungen zum Abschn. 13.5.1. werden auch hier bestätigt.

Nach der im Teil I erfolgten begrifflichen Grundlegung und qualitativen Darlegung der Arbeitsprinzipien automatischer Steuerungssysteme sind mit Teil II nunmehr die wesentlichen Unterlagen für eine quantitative Behandlung bereitgestellt worden. Auf dieser Basis wird es möglich sein, in einem folgenden Band die Probleme der Stabilitätsanalyse von Steuerungssystemen und der Identifikation von Steuerungsobjekten sowie die Aufgaben des Entwurfs konventionell instrumentierter wie die der Optimierung rechnergesteuerter automatisierter Systeme effektiv zu lösen.

Sachwörterverzeichnis

- Addierschaltung, binäre 201
- Ähnlichkeitstransformation 236
- Algorithmus 110, 203
- Alphabet 167
- Amplitudengang 83
- Analogrechner 175
- Analyse 217
- Anpassung 110ff.
- Arbeitsphase 114
- Assembler 210
- Ausgleichszeit 322
- Automaten
 - asynchrone/synchrone 199
 - graph 198
 - kombinatorische 188
 - Mealy-/Moore- 197
 - sequentielle 195
 - tabellen 197f.
- Automatisierung 22
- Automatisierungskonzeption 112
- Bauglieder 25
- Baugliedplan 65
- Befehlswort 203
- Beruhigungszeit 125, 318
- Beschränkungen 126
- Beschreibung 219
- Betriebsarten, prozeßge- u. entkoppelt 211
- Binärkode 187
- Bionik 29
- bit 172
- Blockschaltbild 69
- Dämpfungsfaktor, -grad 98
- Dateneinheit (Datenwort) 202
- Datenverarbeitungsperipherie 212
- Dekomposition 153
- Diagramm
 - Block- 101
 - Bode- 87
 - Frequenzkennlinien- 86
- Differentialzeit 312
- Dirichletsche Bedingungen 262
- Disjunktion 191
- Disjunktive Normalform 192
- Distribution 253
- Dualkode (Dualsystem) 186
- Echtzeitbetrieb 211
- Eigenfrequenz 98
- Eigenvektor, -werte 234
- Eigenvorgänge (Modi) 235
- Einheitssignale 160f.
- Einheitssystem 160
- Einheitsumformer (Transmitter) 162
- Einrichtung 24
- Einschwingzeit 317
- Element 30
- Elementar-(Voll-)konjunktion 191
- Entkopplungsregler 123
- Entwurfphase 113
- Extremwertregler 133
- Faltungsintegral 253, 258, 260
- Flußdiagramm 207
- Fourier
 - integral, -umkehrintegral 266f.
 - theorem, -reihe 262
- Frequenzgang 83, 269
- ortskurve 84
- Frequenzkennlinien 86, 89, 90
- Führungsgröße 23
- Führungsgrößenrechner 164
- Funktion
 - Gewichts- 79, 257, 286
 - Impuls-(Stoß-, δ -) 79
 - Rechnen mit δ - 255
 - Schalt- 188
 - Ziel- 109, 127, 156
- Funktional 52, 142
- Gehalt
 - Entscheidungs -172
 - Informations- 173
- Gleichgewichtszustand 56
- Gleichungen
 - Bewegungs-
 - Bildbereich 297
 - diskontinuierlicher Systeme 49
 - kontinuierlicher Systeme 36, 41, 230, 239
 - System-(Zustands-, Ausgabe-)
 - Aufstellung 365, 369, 373, 379

- Gleichungen
 System-(Zustands-, Ausgabe-)
 Bildbereich 297
 diskontinuierlich linearer Systeme 48f.
 diskreter Systeme 196
 kanonische Normalform 238
 kontinuierlich linearer Systeme 35, 38f.
 nichtlinearer Systeme 54, 242
 zeitvarianter Systeme 55, 244
 Übertragungs-
 dynamischer System 51
 statischer Systeme 56f., 70, 127, 156
- Glied
 Ausgleich ohne/mit 322
 Differential-(D-Glied) 310
 Hysterese- 325
 Integral-(I-Glied) 310
 Mehrpunkt- 325
 Nand-, Nor- 194
 Nicht-, Oder-, Und- 193
 Proportional (P-Glied) 309
 rationales 306
 rückwirkungsfreies 68
 Sättigungs- 324
 Schwingungs- 317
 Speicher- 199
 Totzeit- 319
 Totzone- 324
 Trägheits- (Verzögerungs-) 313
 Vorhalt- 319
- Größe
 Führungs-, Regel-, Steuer-, Stör- 26, 116, 119, 162
 Hilfsregel-, Hilfsstell- 120f.
- Handverfahren 217
 Hierarchische Steuerungsstruktur 149
- Identifikation 100, 217
 Inbetriebsetzungsphase 113
 Information 165, 166
 analoge/diskrete 166
 Informationsfluß 174
 Informationsverarbeitung 174, 184ff.
 Inkrementalwertausgabe 164
 Integralzeit 312
 Integrierverstärker 177
- Kanalkapazität 174
 Kennlinie 324
 Amplituden-, Frequenz-, Phasen- 86ff.
 statische 70, 324, 359
 Klassifikator 129
 Kode, Kodierung (Dekodierung) 170
 Compiler 210
 Koordinierung 154, 158
 Kybernetik 19f., 28f.
 Bio-, ökonomische, technische 29
- Laplaceintegral 273f., 276
- Laplacetransformation
 Korrespondenzen 283
 Regeln 277
 Verfahren zur Rücktransformation 291
- Laufbereich 338
 Leitgerät 162
 Leitung(-wissenschaft) 29, 147
 Leitwerk 204
 Lernen 138ff.
 Linearisierung 73, 242
- Matrix
 Beobachtungs-/Durchgangs- 39, 49
 Berechnung der Übergangs- 240, 299f.
 Frobenius- (Begleit-) 228, 366
 Kopplungs-/Struktur- 32
 System-/Steuer- 38, 49
 Übergangs- 41, 49, 229, 231, 299
 Übertragungs- 302
- Modell
 anpassung 135
 bildung 217
 homomorphes/isomorphes 184
 mathematisches
- Nachführung 109
 Nachrichten 166
 Nachstellzeit 334
 Negation, Negator 189, 193
 Notregler 163
- Objekt 24
 Operation 24
 Operator 52f.
 Optimierung 109, 143, 218
 dynamische, statische 109
 Poly- 148
 Rückwärts- 134, 145
 Vorwärts- 130, 144
 Optimisator 131
 Organisationsebene 154
- Padéentwicklung 357
 Phasenraum, -trajektorie 43
 Phasengang 83
 Pol-Nullstellen-Bild 96f.
 Programm 203
 Projektierung 112
 Proportionalabweichungen 353, 355
 Proportionalbereich 337
 Prozeß 30
 Prozeßanalyse 100
 Prozeßrechner, -peripherie 162, 212
- Realisierung, minimale 364
 Rechenwerk 205
 Rechenschaltung, analoge 181
 Regelabweichung 119, 353
 Regelfaktor 353

- Regelfläche 142
- Regelkreis, Regelstrecke 118f.
- Regelung 118
 - direkte digitale (DDC) 162
 - Festwert-, Führungs-, Zeitplan- 119
 - Kaskaden- 120
 - Mehrgrößen- 122
- Register 200
- Regler (P-, I-, PI-, PID-) 119, 162, 333ff., 340ff.
- Reserverechner 163
- Rückführung (Rüpführschaltung) 330
 - nachgebende 339, verzögerte 340
- Schätzung, Parameter-, Zustands- 217
- Schaltbelegungstabelle 189
- Schaltssysteme → Automaten
- Schema
 - Anlagen-, MSR-, technologisches 63
 - Wirkungs- 69
- Signal 25, 116
 - analoges/diskretes 166
 - binäres, digitales 167, 187
 - determiniertes/stochastisches 169
 - kontinuierliches/diskontinuierliches 168
 - Mehrpunkt- 167
 - Stell-, Steuer-, Stör- 26, 162
- Signalflußplan (-graph) 73, 100ff.
- Simulation, analoge/digitale 184
- Sollwert 23
- Speicherwerk 203
- Spektrum, Amplituden-/Phasen- 264, 267
- Sprache
 - Maschinen-, maschinenorientierte, problemorientierte 210
- Stabilisierung 109, 124
- Stabilitätsdefinition 60
- Stellbereich, Stellzeit 337f.
- Stellglied 24
- Steuereinrichtung, -strecke 24, 116
- Steuerung 22
 - Ablauf-, Führungs-, Programm-, Zeitplan- 116, 120
 - automatische, automatisierte 22f.
 - optimale 109
 - Vorwärts- (offene) 116
- Störgrößenaufschaltung 118
- Struktur (System-) 33, 106
- Suchverfahren 134
- Summiervverstärker 176
- Superpositionsgesetz 54
- Sylvesterformel 240
- Symbole für
 - Baugliedpläne 66
 - Symbole für
 - MSR-Schemata 63
 - technische Anlagen 64
- Synthese 218
- System 31, 33, 106
 - analoges, diskretes, hybrides 45
 - determiniertes, stochastisches 170
 - dynamisches, statisches 56
 - großes 146
 - kontinuierliches, diskontinuierliches 46, 49
 - lernendes 138, 140
 - lineares, nichtlineares 53
 - Mehrschicht-/Mehrebenen- 151, 154
 - Mehrgrößen- 37
 - selbstanpassendes, vorangepaßtes 114, 141
 - selbsteinstellendes, selbstorganisierendes 141
 - Such- 131
 - trägheitsfreies 94
 - zeitinvariantes, zeitvariantes 35
- Überföhrungsfunktion 196
- Übergangsfunktion 77
- Überschwingweite 318
- Übertragungsfaktor (proportionaler, differenti-
aler, integraler) 309ff.
- Übertragungsfunktion 95, 284ff., 302
 - Föhrungs-, Stör- 350
 - offene Schleife 349
 - Pol-Nullstellenform, Polynomform 307
 - Zeitkonstantenform 307
- Übertragungsglied 71 → Glied
- Übertragungsverhalten 51
- Umsetzer, A/D und D/A 162, 212f.
- ursamat 160f.
- Verhalten
 - dynamisches, statisches 56, 141
 - stationäres/instationäres 57
 - Übergangs- 58
- Verzugszeit 322
- Vorbereitungsphase 114
- Vorhaltzeit 335
- Wechselwirkungsbalance-Methode 158
- Wort 167
- Zuordner 129
- Zustands
 - gleichung → Systemgleichung
 - graph (Automatengraph) 198
 - raum, -vektor 42
 - verhalten des (un)gestörten Systems 51