

Der prinzipielle Verlauf des Linienspektrums einer PRBS-Folge ist im Bild 6.17 dargestellt.

Wird bei gleicher Folgenlänge L die Abtastzeit T verringert, streckt sich das Leistungsspektrum in Richtung der ω -Achse und erreicht im Grenzfall das Leistungsspektrum des weißen Rauschens: $S_{\text{un}}(\omega) = S_0 = \text{const.}$

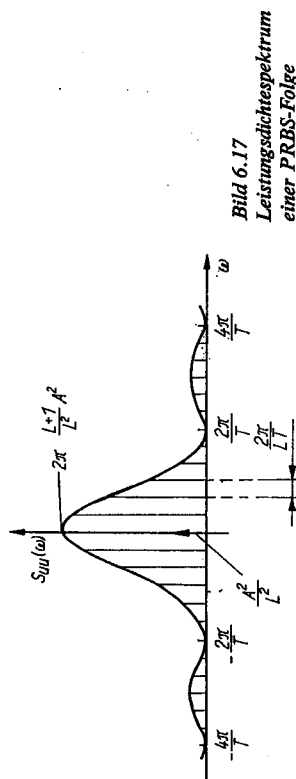


Bild 6.17
Leistungsdichtespektrum
einer PRBS-Folge

Bei der Identifikation dynamischer Systeme kann folglich durch Wahl entsprechender Folgenlängen L und der Abtastintervalle T die PRBS-Folge so gestaltet werden, daß ihr Frequenzspektrum bezüglich der dominierenden Spektralanteile des Systems als weißes Rauschen anzusehen ist und dadurch alle interessierenden Frequenzen annähernd gleichmäßig angeregt werden. Eine ausführlichere Darstellung des Zusammenhangs zwischen den Systemeigenschaften und der Wahl der Abtastzeit T ist im Abschnitt 6.4.4 gegeben.

Wird als Modell des linearen dynamischen Systems das Faltungintegral (bei Darstellung der Gewichtsfunktion durch Stützstellen) entsprechend Gl. (6.10) verwendet, ergibt sich für eine PRBS-Folge mit den Eigenschaften entsprechend Gl. (6.144) aus der Schätzvorschrift nach Gl. (6.25) die vereinfachte Schätzgleichung (bei $m+1 = L > n$ und $n \gg 50$)

$$\hat{s} = \frac{1}{A^2 n T} M^T x \quad (6.147)$$

sowie als Kennwerte für die Güte der Schätzung

$$\text{var} \{ \hat{g}(f) \} = \frac{2\sigma_z^2}{A^2 n T^2} \quad (6.148)$$

$$\text{cov} \{ \hat{g}(i) \hat{g}(j) \} = \frac{\sigma_z^2}{A^2 n T^2} \cdot \quad (6.149)$$

Ausgehend von Gl. (6.32) ergibt sich auch für das Korrelationsverfahren unter Berücksichtigung der Eigenschaften der Autokorrelationsfunktion für die PRBS-Folge entsprechend Gl. (6.144) eine Vereinfachung der Schätzvorschrift (unter der Voraussetzung $A^2 \gg A^2/L$):

$$\hat{s} = \frac{1}{A^2 T} R_{\text{ux}} \quad (6.150)$$

6.4.3. Pseudostochastische mehrwertige Testsignale

Ist zur Systembeschreibung ein nichtlineares Modell erforderlich, genügt es nicht mehr, das verwendete Testsignal auf zwei Stufen zu variieren. In Abhängigkeit von der Art der Nichtlinearität müssen mindestens $d = 3$ oder mehr Niveaus verwendet werden. Die bisher am häufigsten für diese Problematik eingesetzten Testsignale sind die mehrwertigen pseudozufälligen Folgen (m -Folgen), deren Werte wie bei den PRBS-Folgen auch nur zu bestimmten, äquidistanten Zeitpunkten wechseln können und sich nach L Abtastschritten wiederholen. Die Festlegung der Wertigkeit der Folgen wird in praktischen Fällen meist von der Art der einstellbaren Einflußgrößen bestimmt. Unter diesem Aspekt stellt die Stufenzahl $d = 5$ eine sinnvolle obere Schranke dar.

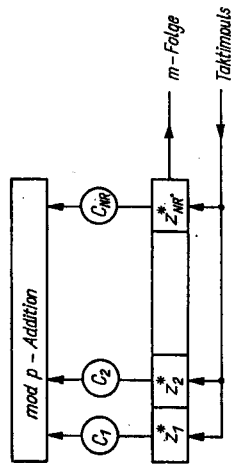


Bild 6.18
Grundstruktur eines Schieberegisters
zur Erzeugung mehrwertiger Folgen

Die mehrwertigen Folgen werden ebenfalls unter Verwendung eines rückgekoppelten Schieberegisters erzeugt, wobei die einzelnen Rückkopplungen über eine mod p -Operation in die erste Registerstufe eingespeichert werden (p Primzahlen 5, 7, 11, 13, ...). Außerdem können die Rückkopplungsfaktoren c_i im Unterschied zu PRBS-Folgen von 1 verschiedene Werte annehmen. Die Grundstruktur eines solchen Registers ist im Bild 6.18 dargestellt.

Für NR Registerstufen erhält man m -Folgen der Periodenlänge $L = d^{NR} - 1$.

Tafel 6.3. Bedingungen zur Erzeugung einiger mehrwertiger Folgen mit Schieberegister

Wertigkeit d	Stufenzahl NR	Rückkopplungsfaktoren c_i	$L = d^{NR} - 1$
3	2	-1 1	8
3	3	0 1 -1	26
3	4	0 0 -1 +1	80
3	5	0 0 0 +1 -1	242
5	2	3 1	24
5	3	2 0 1	124
5	3	2 1 2	124
5	4	2 0 2 1	624
5	4	2 0 2 4	624
5	4	2 1 0 1	624
5	5	2 0 0 0 3	3124
5	5	2 0 0 2 0	3124
5	5	2 0 0 4 2	3124

Tafel 6.3 zeigt für eine Auswahl von häufig verwendeten drei und fünfwertigen m -Folgen die verwendeten Registerstufen NR , die Rückkopplungsfaktoren c_i und die Folgenlänge L .

Die z. B. mit einem dreistufigen Register mit den Rückkopplungsfaktoren $c_i = 0, 1, -1$ erzeugte Dreiwertfolge ist im Bild 6.19 dargestellt.

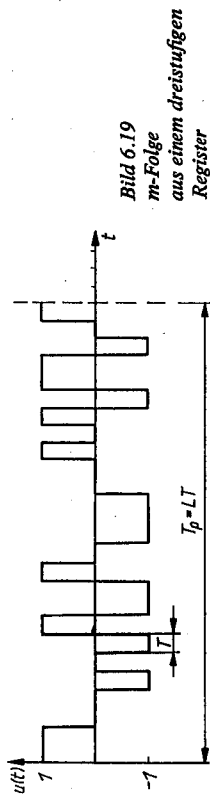


Bild 6.19
m-Folge
aus einem dreistufigen
Register

Der Verlauf der Autokorrelationsfunktion kann für drei- sowie für fünfwertige pseudostochastische Testsignale wie folgt beschrieben werden:

$$R_{uu}(m) = \begin{cases} \frac{2d^{NR}}{L} & \text{für } m = iL; \quad i = 0, 1, 2, \dots \\ \frac{2d^{NR}}{L} & \text{für } m = i\frac{L}{2}; \quad i = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (6.151)$$

Im Bild 6.20 ist der prinzipielle Verlauf der Autokorrelationsfunktion für drei- und fünfwertige pseudostochastische Testsignale dargestellt. Der quadratische Mittelwert entspricht dem Spitzenwert von $R_{uu}(0)$ und ist gleich

$$\bar{u}^2 = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L u^2(k) = \frac{2d^{NR}}{L}. \quad (6.152)$$

Der arithmetische Mittelwert ist $\bar{u} = 0$. Durch die drei- und fünfwertigen Folgen wird die Autokorrelationsfunktion des weißen Rauschens gut approximiert.

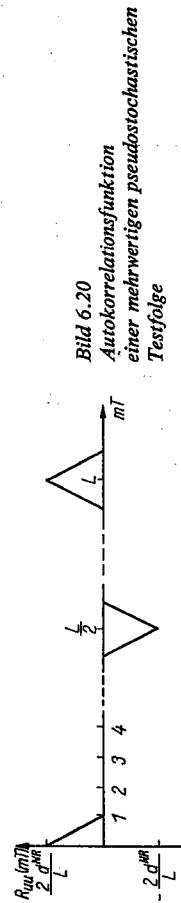


Bild 6.20
Autokorrelationsfunktion
einer mehrwertigen pseudostochastischen
Testfolge

Für das Leistungsspektrum dieser pseudostochastischen Folgen ergibt sich

$$S_{uu}(\omega) = \frac{4d^{NR}}{\pi L^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 - e^{jn\pi}) \sin^2 \left(\frac{\pi n}{L} \right) \delta(\omega - n\omega_0); \quad (6.153)$$

$\delta(\omega)$ Dirac-Impuls.

Gl. (6.153) beschreibt ein Linienspektrum, wobei die einzelnen Spektrallinien an den Stellen $\omega = n\omega_0 = n \cdot 4\pi/LT$ auftreten. Der prinzipielle Verlauf des Linienspektrums drei- und fünfwertiger Folgen ist im Bild 6.21 dargestellt. Die für das Leistungsspektrum der PRBS-Folgen erläuterten Zusammenhänge (s. Abschn. 6.4.2) gelten hier sinngemäß.

Die drei- und fünfwertigen Pseudozufallsfolgen können zur Parameterschätzung von nichtlinearen Modellen entsprechend den Gln. (6.33), (6.43) und (6.78) eingesetzt werden,

wobei allerdings keine die Güte der geschätzten Modelle betreffenden Kriterien optimiert werden. Bei Verwendung besonderer nichtlinearer Modelldarstellungen ist es für die Korrelationsmethode möglich, wesentliche Vereinfachungen bei der Messung und Auswertung zu erreichen [6.30].

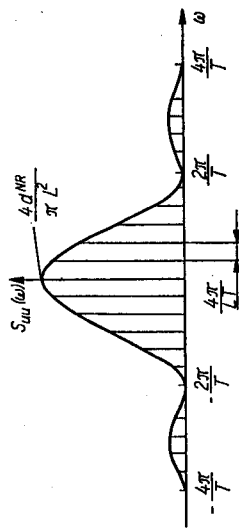


Bild 6.21
Leistungsdichtespektrum
drei- und fünfwertiger Pseudozufallsfolgen

6.4.4. Entwurf optimaler Testsignalfolgen

6.4.4.1. Optimale Testsignalfolgen für die Gewichtsfunktion

Der Entwurf optimaler Testsignalfolgen für die Ermittlung der Stützstellen der Gewichtsfunktion beruht auf der Übertragung optimaler Versuchspläne für statische Modelle in den dynamischen Bereich. Da die Beschreibung des Gewichtsfunktionsmodells

$$\hat{x} = Tm^T \xi \quad (6.154)$$

der allgemeinen Systembeschreibung für statische Systeme entspricht und als Parameterschätzverfahren die Methode der Regression verwendet werden kann, haben alle im Abschnitt 5.2 abgeleiteten Zusammenhänge zur optimalen Versuchsplanung auch bei diesem Modell ihre Gültigkeit. Damit kann der Zusammenhang zwischen der Modellgüte und den Werten der Eingangssignalfolge ebenfalls durch die Beziehungen

$$\text{COV} \{\xi\} = \frac{1}{T^2} [M^T M]^{-1} \sigma_\xi^2 \quad (6.155)$$

$$\text{var} \{\hat{x}\} = \frac{1}{T^2} m^T [M^T M]^{-1} \sigma_\xi^2 m \quad (6.156)$$

ausgedrückt werden. Folglich gelingt es auch im dynamischen Fall, durch Einführung der Informationsmatrix

$$I(V_n) = \frac{1}{n} [M^T M] \quad (6.157)$$

Kriterien der D -, A - und G -Optimalität abzuleiten und bei der Erstellung von Testsignalfolgen zu nutzen.

Der wesentliche Unterschied zur statischen Betrachtungsweise besteht hierbei darin, daß der Versuchsplan V_n für ein dynamisches System aus einer Versuchsfolge gebildet werden muß. Die Werte in den einzelnen Spalten des Versuchsplans können somit nicht mehr unabhängig voneinander festgelegt werden.

Wirkt auf ein dynamisches System mit einer Übergangszeit von $T_s \approx (m+1)T$ eine Eingangsfolge $\{u(k)\} = u(0), u(1), \dots$, wird das Ausgangssignal $x(t)$ zu jedem Zeitpunkt

Sind die Übergangszeiten der beiden Strecken nicht etwa gleich groß, wie im Beispiel angenommen, steht natürlich eine andere Aufteilung des Versuchsplans offen. Nur die Gesamtanzahl der aufzuteilenden Stützstellen ist durch den Plan festgelegt. In analoger Weise können aus den größeren Plänen mit $n = 24$ bis $n = 84$ Versuchen auch für Sy-

Die Regressionsansätze für das Volterra-Reihen-Modell entsprechend Gl. (6.13) bzw. Gl. (6.33) bei Hammerstein-Struktur und Gl. (6.43) bei Wiener-Struktur stellen Polynomansätze 2. Ordnung dar. Zur Versuchsplanung 2. Ordnung finden vor allem die im Abschnitt 5.5.3.2 beschriebenen zentral zusammengesetzten Mehrfaktorpläne Verwendung.

Tafel 6.10 dargestellt. Die aus diesem Versuchsplan gewonnene Testfolge wird im Bild 6.25 gezeigt.

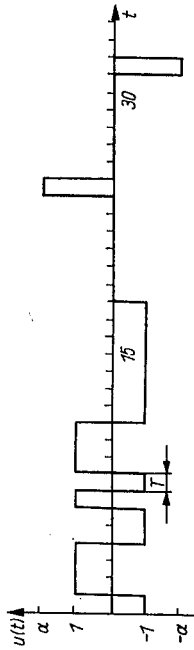


Bild 6.25
Testfolge, die aus dem
in Tafel 6.10
dargestellten Versuchsplan
abgeleitet wurde

Weitere Pläne mit einer größeren Zahl von Einflußfaktoren können auf analoge Weise aus den in Tafel 5.11 dargestellten Plackett-Burman-Plänen gewonnen werden. Außerdem können durch entsprechende Aufteilung größerer Plackett-Burman-Pläne Testsignalfolgen für Systeme mit mehreren Eingängen gewonnen werden (s. Abschn. 6.4.4.1), wobei alle Teilstrecken mit der gleichen Güte geschätzt werden [6.3].

Die aus Versuchsplänen gewonnenen Testfolgen weisen nicht die von den pseudozufälligen Testfolgen erfüllten umfassenden Frequenzeigenschaften auf. Sie zeigen bei bestimmten Frequenzen Einbrüche im Leistungsspektrum, so daß eine Annäherung an das weiße Rauschen nur mit Einschränkungen möglich ist. Ausführliche Untersuchungen haben jedoch gezeigt, daß es offensichtlich sogar besser ist, wenn das System mit wenigen, aber dominierenden Frequenzen in der Nähe seiner Eigenwerte angeregt wird als mit einer gleichmäßigen (aber damit amplitudenmäßig geringeren) Anregung über einen relativ großen Bereich [6.23, 6.25, 6.26]. Wenn die Einbrüche im Leistungsspektrum nicht in den dominierenden Frequenzbereichen liegen, dann haben die aus Plackett-Burman-Plänen gewonnenen Testfolgen auch bezüglich ihrer Frequenzeigenschaften keine Nachteile.

6.4.4.3. Testsignalfolgen für lineare Differenzgleichungsmodelle

Bisher wurden zur Identifikation von Differenzgleichungsmodellen fast ausschließlich die im Abschnitt 6.4.2 beschriebenen pseudozufälligen Testfolgen (PRBS-Folgen) verwendet. Ihr Vorteil besteht in der Erzeugung bestimmter, durch die Autokorrelationsfunktion und das Leistungsdichtespektrum beschreibbarer Signaleigenschaften, die eine gute Annäherung an das weiße Rauschen ermöglichen.

Die im folgenden dargestellte Methode zur Erstellung von Testsignalfolgen geht dagegen wieder von der Verwendung optimaler Versuchspläne aus. Folgende Hypothese war dabei Ausgangspunkt zur Entwicklung sog. „voreingestellter“ Testfolgen [6.3]:

Die Erzeugung einer Diagonalstruktur mit optimalen Eigenschaften der Teilmatrix $U^T U$ von

$$[M^T M] = \begin{bmatrix} U^T U & U^T X \\ X^T U & X^T X \end{bmatrix} \quad (6.166)$$

wirkt sich positiv auf die Beschaffenheit der gesamten Informationsmatrix aus. Eine optimale Gestaltung der Teilmatrix U im Sinne der optimalen Versuchsplanung bedeutet die Erfüllung solcher Kriterien, wie der D -, G -, E - oder A -Optimalität, bzw. solcher praktisch motivierter Kriterien, wie Drehbarkeit bzw. Orthogonalität. Bekannte Versuchspläne, die diese Kriterien erfüllen, sind die im Abschnitt 5.5.2 beschriebenen vollständigen faktoriellen Versuchspläne vom Typ 2^k (VFFV 2^k) bzw. die teilweisen faktoriellen

Versuchspläne vom Typ 2^{k-p} (TFV 2^{k-p}). Zur Umwandlung dieser Versuchspläne in Testsignalfolgen ist es, wie bereits im Abschnitt 6.4.1 beschrieben, notwendig, durch Umordnung der Zeilen des Plans eine Diagonalstruktur zu schaffen. Die statistischen Eigenschaften der Pläne bleiben dabei unverändert.

Tafel 6.11. Vollständiger faktorieller
Versuchsplan vom Typ 2^3

+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

Tafel 6.12. Entnahme einer Testfolge aus einem
diagonalisierten VFFV 2^3

+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

Als Ausgangspunkt soll ein VFFV 2^3 verwendet werden, wie er in Tafel 6.11 dargestellt ist. Tafel 6.12 zeigt den in eine Diagonalstruktur übergeführten VFFV 2^3 mit der Teilmatrix U . Durch Aneinanderreihung mehrerer diagonalisierter Pläne entsteht die im Bild 6.26 dargestellte periodische Testfolge. Die verschiedenen Diagonalisierungsmöglichkeiten der VFFV haben dabei keinen Einfluß auf die Güte der Schätzung.

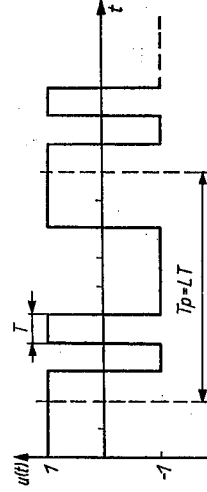


Bild 6.26
Periodische Testfolge aus einem VFFV 2^3

Zur Gewinnung von Testsignalfolgen mit größerer Periodenlänge können auch Versuchspläne mit einer größeren Zahl von Einflußfaktoren herangezogen werden.

Da in der Matrix M auch die zufallsbeeinflussten zurückliegenden Ausgangswerte enthalten sind, ist es nicht möglich, die Güte der Schätzung anhand von Funktionalen der Informationsmatrix zu beurteilen. Zum Vergleich der „voreingestellten“ Testfolgen mit den PRBS-Folgen wurde deshalb in [6.3] die MSE-Matrix (Mean-Square-Error-Matrix) herangezogen:

$$MSE(\xi) = E\{(\xi - s)(\xi - s)^T\} = E\{[M^T M]^{-1} M^T n n^T M [M^T M]^{-1}\}, \quad (6.167)$$

die bei unkorreliertem Fehler n^* die Kovarianzmatrix des geschätzten Parametervektors $\hat{\theta}$ darstellt. Bei korreliertem Fehler n^* enthält sie außerdem auch den durch die Verschiebung hervorgerufenen Anteil der Schätzung, die sog. Biasmatrix (s. Abschn. 6.3.1). Ausführliche Untersuchungen an simulierten Beispielen [6.26] haben gezeigt, daß bezüglich von Funktionalen, wie der Determinante und der Spur der MSE-Matrix, die Verwendung aus optimalen Versuchsplänen gewonnenen Testsignalfolgen zu ähnlichen Ergebnissen führt wie die Verwendung von PRBS-Folgen. Sie stellen somit eine echte Alternative zu den bisher am häufigsten verwendeten PRBS-Folgen dar.

Auf weitere Methoden zur Erstellung von Testsignalfolgen für das Differenzengleichungsmodell soll hier nicht näher eingegangen werden, da Vergleiche gezeigt haben, daß sie zu keiner besseren Schätzgüte führen als die PRBS- bzw. voreingestellten Testfolgen [6.12, 6.3].

6.4.4.4. Testsignalfolgen für nichtlineare Differenzengleichungsmodelle

Auch für einfache nichtlineare Systeme mit Hammerstein-Struktur (Nichtlinearität 2. Ordnung) wurden außer den bereits beschriebenen mehrstufigen pseudozufälligen Testfolgen eine Reihe anderer Möglichkeiten getestet [6.3, 6.25]. Zur Beurteilung der Schätzgüte wurden dabei die für lineare Differenzengleichungsmodelle verwendeten Gütekriterien herangezogen. Dabei hat sich gezeigt, daß nur die für das Hammerstein-Modell (bei Stützstellenbeschreibung der Volterra-Kerne) aus Plackett-Burman-Plänen abgeleiteten Testsignalfolgen (s. Abschn. 6.4.4.2) ähnlich gute Schätzergebnisse zeigen wie die PRBS-Folgen. Da jedoch für das Hammerstein-Modell eine wesentlich stärkere Parameterabhängigkeit der Schätzgüte festzustellen war als für lineare Modelle, können keine allgemeingültigen Aussagen getroffen werden. Der durchgeführte Vergleich verschiedener Arten von Testfolgen läßt jedoch die Aussage zu, daß die fünfwertigen pseudozufälligen Folgen bezüglich der erreichbaren Schätzgüte und des zu ihrer Erzeugung notwendigen Aufwands für diese Modellklasse ohne Alternative sind [6.3, 6.25].

6.5. Schätzung des Zustands/Zustandsfilter

6.5.1. Aufgabe und Voraussetzungen

Die im Abschnitt 4.4 vorgenommenen Betrachtungen wurden unter der Annahme eines ungestörten Systems durchgeführt. Es wurde gezeigt, daß die Beobachter für die Ermittlung des Zustands gestörter und zeitvarianter Systeme ungeeignet sind. In den folgenden Abschnitten soll auf die Ermittlung des Zustandsvektors eines linearen Systems eingegangen werden, das durch Störungen auf die Zustands- und Ausgangsgrößen gekennzeichnet ist. Wenn die Beobachtung der Zustände mit statistischen Methoden erfolgt, wird von einer Filterung gesprochen. Damit stellt die Filterung die Verallgemeinerung der im Abschnitt 4.4 behandelten Beobachteraufgabe dar.

In Fortsetzung der Arbeiten von Wiener [6.31] zum Entwurf optimaler Filter hat Kalman [6.32, 6.33] zur Schätzung der Zustände linearer Systeme einen rekursiven Filteralgorithmus in Form eines Differenzengleichungssystems entworfen. Wegen seiner Allgemeingültigkeit und großen Praxisrelevanz wird in den weiteren Ausführungen nur auf die zeitdiskrete Betrachtungsweise näher eingegangen [3.24, 4.14]. Der Entwurf von Filtern für die kontinuierliche Betrachtungsweise wurde von Kalman und Bucy in [6.33] vorgestellt und in der Spezialliteratur [4.14] ausführlich betrachtet.

Bei der Ableitung der Filtergleichungen für den Zustandsvektor q wird von der Beschreibung für die zeitdiskreten Größen im Abschnitt 4.4 ausgegangen (Bild 6.27):

$$q(k+1) = A^*q(k) + B^*u(k) + v(k) \quad (6.168)$$

$$x(k) = C^*q(k) + z(k).$$

Ferner wird für die Störungen $v_i(k)$ auf die Zustandsgrößen und $z_i(k)$ auf die Ausgangsgrößen angenommen, daß sie folgende Eigenschaften haben:

$$a) \quad E\{v(k)\} = 0, \quad E\{v(k)v(k)^T\} = V(k) \quad (6.169)$$

mit

$$V(k) = E \begin{bmatrix} v_1(k) & v_1(k) & \dots & v_1(k) & v_n(k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_n(k) & v_1(k) & \dots & v_n(k) & v_n(k) \end{bmatrix};$$

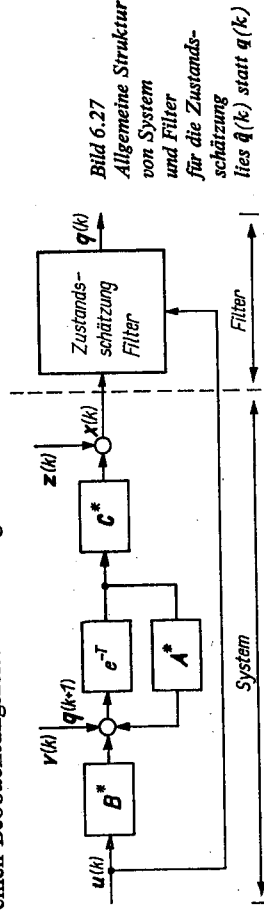
$$b) \quad E\{z(k)\} = 0, \quad E\{z(k) \cdot z(k)^T\} = Z(k)$$

mit

$$Z(k) = E \begin{bmatrix} z_1(k) & z_1(k) & \dots & z_1(k) & z_m(k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z_m(k) & z_1(k) & \dots & z_m(k) & z_m(k) \end{bmatrix};$$

$$c) \quad E\{v_i(k)v_i(k-l)\} = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n \\ E\{z_i(k)z_i(k-l)\} = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, m.$$

Außerdem wird vorausgesetzt, daß die Systemmatrizen A^* , B^* , C^* bekannt sind und mindestens n Meßwerte der Eingangsgrößen $u_i(k)$ und der Ausgangsgrößen $x_i(k)$ über einen Beobachtungszeitraum vorliegen.



Auf der Grundlage der in den Gln. (6.168) und (6.169) gemachten Annahmen und der vorliegenden Beobachtungen der Eingangs- und Ausgangsgrößen wird eine Schätzvorschrift (ein Filter) gesucht, die den Zustandsfehler

$$\tilde{q}(k) = q(k) - \hat{q}(k) \quad (6.170)$$

über ein Gütekriterium minimiert (s. Bild 6.27). Von der Vielzahl der möglichen Wege zur Herleitung der Filtergleichungen wird in Anlehnung an [4.14] die Anwendung der Methode der verallgemeinerten Regression gewählt, weil sie die vorhandene A-priori-Information über die Störungen berücksichtigt sowie eine Ableitung in wenigen Schritten gestattet und weil die Theorie dieser Methode bereits im Abschnitt 5.2.4 vorgestellt wurde. Weitere Möglichkeiten zur Ableitung der Filtergleichungen sind in [4.14] enthalten.

Das Ziel der folgenden Abschnitte besteht darin, ausgehend von dem Gütekriterium der verallgemeinerten Regression

$$Q = e^T W^{-1} e \quad (6.171)$$

und der Schätzvorschrift

$$\hat{s} = [M^T W^{-1} M]^{-1} M^T W^{-1} x, \quad (6.172)$$

die Beziehungen für die Schätzung der Zustandsgrößen herzuleiten. Dazu ist es notwendig, die Zustandsbeschreibungen umzuformen in eine Gleichung der Form

$$x^* = M^* s + n^*. \quad (6.173)$$

6.5.2. Zustandsschätzung aus den gemessenen Ausgangsgrößen des Systems

Wird davon ausgegangen, daß auf das System keine Eingangsgrößen $u_i(k)$ wirken, gilt folgende Systembeschreibung:

$$\begin{aligned} q(k+1) &= A^* q(k) + v(k) \\ x(k) &= C^* q(k) + z(k). \end{aligned} \quad (6.174)$$

Zur Schätzung der Zustandsgrößen stehen damit die abgetasteten Werte der Ausgangsgrößen $x_i(k)$ und als A-priori-Information die Kovarianzmatrizen V der Störungen auf die Zustandsgrößen und Z der Störungen auf die Ausgangsgrößen zur Verfügung.

Bei der Herleitung der Gleichungen für die Anwendung der Markov-Schätzung wird davon ausgegangen, daß zum k -ten Zeitpunkt der geschätzte Zustandsvektor $\hat{q}(k)$ und die Kovarianzmatrix des Zustandsfehlers

$$\tilde{P}(k) = E \{ \tilde{q}(k) \tilde{q}(k)^T \} \quad (6.175)$$

bekannt sind. Aus Gl. (6.174) erhält man den extrapolierten Zustandsvektor $q^*(k+1)$ mit diesen Informationen zu

$$q^*(k+1) = A^* \hat{q}(k). \quad (6.176)$$

Der extrapolierte Zustand enthält die gesamte alte Information über den zu erwartenden Zustand $q(k+1)$. Wird in Gl. (6.176) entsprechend Gl. (6.170) die Beziehung für den geschätzten Zustand $\hat{q}(k)$ eingesetzt, gilt

$$q^*(k+1) = A^* q(k) - A^* \tilde{q}(k). \quad (6.177)$$

Bei Verwendung der Beziehungen von Gl. (6.174) ergibt sich

$$q^*(k+1) = q(k+1) - (A^* \tilde{q}(k) + v(k)). \quad (6.178)$$

In Gl. (6.178) ist der *Extrapolationsfehler*

$$\tilde{q}^*(k+1) = A^* \tilde{q}(k) + v(k)$$

enthalten, dessen Kovarianzmatrix $Q(k+1)$ unter den angenommenen Voraussetzungen für die Störungen folgende Gestalt hat:

$$Q(k+1) = E \{ \tilde{q}^*(k+1) \tilde{q}^{*T}(k+1) \} = A^* \tilde{P}(k) A^{*T} + V(k). \quad (6.179)$$

Zum $(k+1)$ -ten Zeitpunkt kommt in Form der Ausgangsgleichung

$$x(k+1) = C^* q(k+1) + z(k+1) \quad (6.180)$$

ein weiterer Gleichungssatz zur Schätzung der Zustandsgrößen hinzu. Damit gilt mit Gl. (6.178) folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} q^*(k+1) \\ x(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ C^* \end{bmatrix} q(k+1) + \begin{bmatrix} -A^* q(k) - v(k) \\ z(k+1) \end{bmatrix}. \quad (6.181)$$

$$\begin{matrix} x^* & M^* & s & n^* \end{matrix}$$

Die Systembeschreibung ist somit entsprechend der Zielstellung durch

$$x^* = M^* s + n^* \quad (6.182)$$

gegeben. Wird als Modellgleichung zum $(k+1)$ -ten Schritt

$$\hat{x}^* = M^* \hat{s} \quad (6.183)$$

verwendet, ergeben sich mit der Fehlergleichung

$$e = x^* - \hat{x}^*$$

für die Komponenten des Fehlervektors

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

mit

$$e_1 = [q^*(k+1) - \hat{q}(k+1)], \quad e_2 = [x(k+1) - \hat{x}(k+1)].$$

Die Kovarianzmatrix des Störungsvektors n^* erhält man aus Gl. (6.181) zu

$$W = E \{ n^* n^{*T} \} = \begin{bmatrix} Q(k+1) & 0 \\ 0 & Z(k+1) \end{bmatrix}. \quad (6.184)$$

Damit ergibt sich für das Gütekriterium der verallgemeinerten Regression entsprechend Gl. (6.171) für diesen Modelltyp

$$Q = e_1^T Q^{-1} (k+1) e_1 + e_2^T Z^{-1} (k+1) e_2. \quad (6.185)$$

Werden die Beziehungen für die einzelnen Komponenten der Fehlervektoren in Gl. (6.185) eingesetzt, gilt

$$\begin{aligned} Q &= [q^*(k+1) - \hat{q}(k+1)]^T Q^{-1} (k+1) [q^*(k+1) - \hat{q}(k+1)] \\ &\quad + [x(k+1) - \hat{x}(k+1)]^T Z^{-1} (k+1) [x(k+1) - \hat{x}(k+1)]. \end{aligned} \quad (6.186)$$

Durch Ausmultiplizieren und Bildung der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{q}(k+1)} = 0 \quad (6.187)$$

erhält man nach einigen Umformungen [4.14] die Vorschrift für den *Kalmanschen Filteralgorithmus* zu

$$\hat{q}(k+1) = A^* \hat{q}(k) + K(k+1) [x(k+1) - C^* A^* \hat{q}(k)] \quad (6.188)$$

mit

$$K(k+1) = \bar{Q}(k+1)C^{*\text{T}}[Z(k+1) + C^* \bar{Q}(k+1)C^{*\text{T}}]^{-1}$$

$$\tilde{Q}(k+1) = A^* \tilde{P}(k) A^{*\top} + V(k).$$

Die Kovarianzmatrix $\tilde{\mathbf{P}}(k)$ des Zustandsfehlers $\tilde{\mathbf{q}}(k)$ kann mit den Beziehungen für die Parametervarianzen der verallgemeinerten Regression entsprechend Abschnitt 5.2.4

$$\tilde{\mathbf{P}}(k) = E \{ \tilde{\mathbf{q}}(k) \tilde{\mathbf{q}}^T(k) \} = [\mathbf{M}^* \mathbf{W}^{-1} \mathbf{M}^*]^{-1} \quad (6.189)$$

und unter Beachtung der Bedeutungen der Matrizen M^* – s. Gl. (6.182) – und W^{-1} – s. Gl. (6.184) – rekursiv nach folgender Vorschrift ermittelt werden:

$$\tilde{\mathbf{P}}(k) = \begin{bmatrix} [\mathbf{I} \mid \mathbf{C}^T] & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}^{-1}(k) & \mathbf{0} & \mathbf{I}^{-1}(k) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}^* \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\bar{\mathbf{P}}(k) = [\mathbf{Q}^{-1}(k) + \mathbf{C}^* \mathbf{Z}^{-1}(k) \mathbf{C}^*]^{-1}. \quad (6.190)$$

Unter Anwendung des Inversionslemmas für Matrizen (s. Abschn. 5.4.3) kann Gl. (6.190) wiederum in die rekursive

$$\tilde{P}(k) = Q(k) - K(k) C^* Q(k) \quad (6.191)$$

übergeführt werden. Damit sind alle Gleichungen für die Lösung der Schätzaufgabe erfüllt. Die Struktur des Filters ist im Bild 6.28 dargestellt.

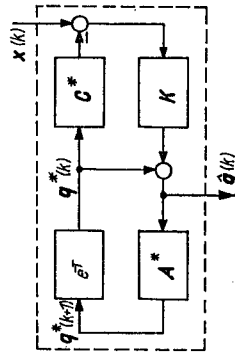


Bild 6.28
Filter für die Zustandsschätzung aus den Werten
der Ausgangsgrößen

6.5.3. Zustandsschätzung aus den gemessenen Eingangs- und Ausgangsgrößen des Systems

In Erweiterung der Betrachtungen im Abschnitt 6.5.2 wird jetzt davon ausgegangen, daß Meßwerte der Eingangsgrößen $u_i(k)$ zur Lösung der Schätzaufgabe zur Verfügung stehen. Damit kann die in Gl. (6.168) angegebene Systembeschreibung verwendet werden. Analog zu den Ableitungen im Abschnitt 6.5.2 erhält man als rekursive Schätzvorschrift die Beziehung

$$\hat{q}(k+1) = A^* \hat{q}(k) + B^* u(k) + K(k+1)[x(k+1) - C^*(A^* \hat{q}(k) + B^* u(k))] \quad (6.192)$$

mit den Berechnungsvorschriften der Matrizen $\mathbf{K}(k+1)$, $\mathbf{Q}(k+1)$ und $\tilde{\mathbf{P}}(k)$ entsprechend den Beziehungen Gl. (6.188). Die Struktur dieses Filters ist im Bild 6.29 dargestellt. Bei diesem Filter sind die Ausdrücke

$$A^* \hat{q}(k) + B^* u(k)$$

$$C^*[A^*\hat{q}(k) + B^*u(k)]$$

stände,

$\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{C}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{q}}(k) - \mathbf{C}^* \mathbf{B}^* \mathbf{u}(k)$ die Fehler zwischen gemessenen und vorhergesagten Werten der Ausgangsgrößen.

Wie bei allen rekursiven Schätzalgorithmen besteht ein Problem in der Festlegung der Startwerte $\hat{\mathbf{q}}(0)$ der Zustände und $\hat{\mathbf{P}}(0)$ der Kovarianzmatrix des Zustandsfehlers.

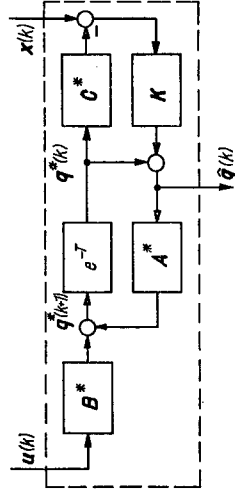


Bild 6.29
Filter für die Zustandsschätzung
aus den Werten
der Eingangs- und Ausgangsgrößen

Liegen bereits $l \geq n$ Beobachtungen der Ausgangsgrößen vor, können durch eine Anwendung der direkten Regression die Startwerte ermittelt werden. Wird von der Systembeschreibung

$$\mathbf{q}(k+1) = \mathbf{A}^* \mathbf{q}(k), \quad \mathbf{x}(k) = \mathbf{C}^* \mathbf{q}(k) + \mathbf{z}(k) \quad (6.193)$$

ausgegangen, so kann die Zustandsgleichung für / Beobachtungen umgeformt werden in

$$\begin{aligned} & \mathbf{q}(k) \quad \dots \quad \mathbf{q}(k+1) \\ & = A^{*-1} \mathbf{q}(k+1) \quad \dots \quad \mathbf{q}(k+1) \\ & \mathbf{q}(k+l-1) = A^{*-(l-1)} \mathbf{q}(k+1). \end{aligned} \quad (6.194)$$

Werden die gewonnenen I -Gleichungen in die Ausgangsbeziehung von Gl. (6.168) eingesetzt, erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} x(k) \\ \vdots \\ x(k+l-1) \end{matrix} = \begin{matrix} C^* A^{*l-1} q(k+1) \\ \vdots \\ C^* A^{*l-1} q(k+l-1) \end{matrix} + \begin{matrix} z(k) \\ \vdots \\ z(k+l-1) \end{matrix} \\ & \begin{matrix} x(k+l-1) \\ \vdots \\ x(k+l-1) \end{matrix} = \underbrace{C^* A^{*l-1} q(k+1)}_{\substack{M^* \\ a}} + \underbrace{z(k+l-1)}_z. \end{aligned} \quad (6.195)$$

Für den Parametervektor $\mathbf{a}$ des Gleichungssystems

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}^* \mathbf{q} + \mathbf{z}$$

ergibt sich die Schätzvorschrift zu

$$\hat{\mathbf{q}} = [\mathbf{M}^{*\mathrm{T}}\mathbf{M}^*]^{-1}\mathbf{M}^{*\mathrm{T}}\mathbf{x} \quad (6.196)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{P}} = [\mathbf{M}^{*\top} \mathbf{M}^*]^{-1},$$

Beispiel 6.6	Untersuchung des Verhaltens des Kalman-Filters (diskontinuierlich)
-----------------	---

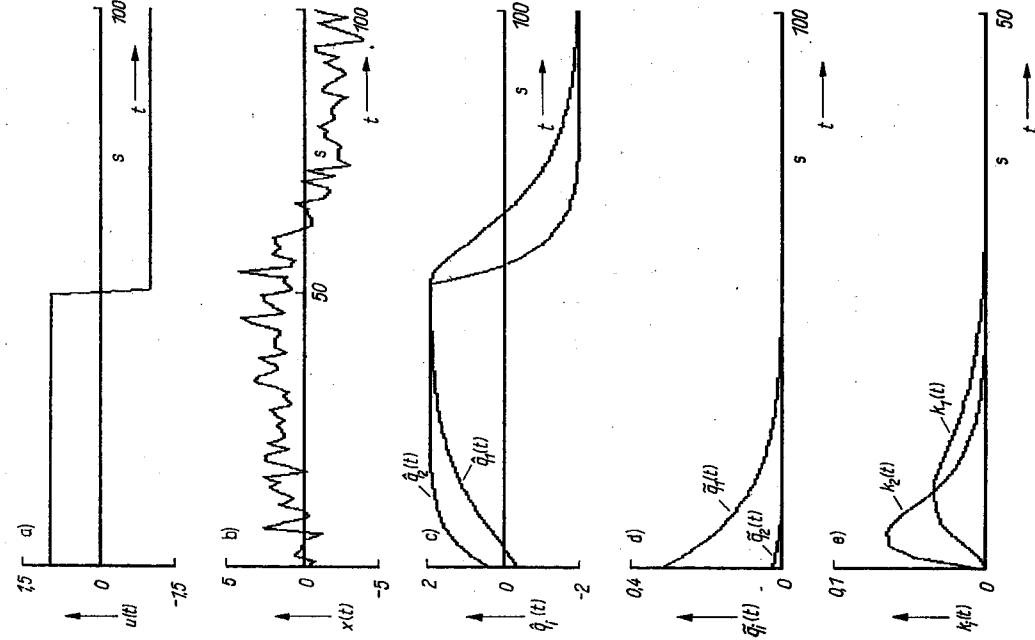
Gegeben:
Abgetastete Werte der Eingangs- und Ausgangssignale des Systems gemäß Beispiel 4.1, Zustandsgleichungen mit

$$q_1(t) \triangleq x(t), \quad q_2(t) \triangleq x'(t),$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,1 \text{ s}^{-1} & 0,1 \text{ s}^{-1} \\ 0 & -0,2 \text{ s}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,4 \text{ s}^{-1} \end{bmatrix} u(t),$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} + z(t).$$

Die Störung ist normalverteilt $NV(0, \dots)$ und unkorreliert.



Beispiel 6.6	Untersuchung des Verhaltens des Kalman-Filters (diskontinuierlich)
-----------------	---

Abtastzeit $T = 1 \text{ s}$,
Beobachtungszeit $T_0 = 100 \text{ s}$,
Startwerte $\hat{q}(0) = [-0,353; -0,033]$,
$$\hat{P}(0) = \begin{bmatrix} 0,0089 & -0,094 \\ -0,094 & 0,991 \end{bmatrix}.$$

Gesucht:
Verlauf der Zustandsschätzfehler $\hat{q}_i(k)$, $i = 1, 2$, und der Elemente der Verstärkungsmatrix $K(k+1)$.

- Ergebnis:
1. Verlauf der Eingangs- und Ausgangsgröße des Systems (Bild a und b),
 2. Verlauf der geschätzten Zustandsschätzfehler $\hat{q}_i(k)$ (Bild c),
 3. Verlauf der Zustandsschätzfehler $\hat{q}_i(k)$ (Bild d),
 4. Verlauf der Elemente der Verstärkungsmatrix $K(k+1)$ (Bild e).

Die dargestellten Verläufe der Zustandsschätzfehler $\hat{q}_i(k)$ zeigen, daß die Schätzung schnell konvergiert und beide Zustandsschätzfehler trotz der Ausgangsstörung gut ermittelt werden können. Im Gegensatz zu den konstanten Elementen der Verstärkungsmatrix beim Beobachter sind diese beim Kalman-Filter eine Funktion der Beobachtungen.

Die erhaltenen Schätzungen $\hat{q}$ und $\hat{P}$ werden als Startvektor $\hat{q}(0)$ bzw. Startmatrix $\hat{P}(0)$ in Gl. (6.192) und Gl. (6.188) eingesetzt.

Liegen keine Anfangsschätzungen für die Startwerte vor, so können analog zur Vorgehensweise bei der Methode der rekursiven Regression (s. Abschn. 5.4.3) folgende Startwerte verwendet werden:

$$\hat{q}(0) = 0; \quad \hat{P}(0) = cI \quad \text{mit} \quad 10^4 \leq c \leq 10^{15}.$$

Das Konvergenzverhalten ist bei dieser Wahl der Startwerte gut und weist grundsätzlich die Eigenschaften der im Abschnitt 5.2 diskutierten Verfahren auf.

Im Beispiel 6.6 ist der Verlauf der Zustandsschätzung für ein gestörtes T_2 -System dargestellt. Sehr gut ist das Konvergenzverhalten der Schätzung und die Entwicklung der Elemente der Verstärkungsmatrix $K(k+1)$ zu erkennen. Die entworfenen beiden Varianten der Filter von Gl. (6.188) und Gl. (6.192) liefern Zustandsschätzungen mit einer minimalen mittleren quadratischen Abweichung der Ausgangsgrößen und einer minimalen Streuung für die geschätzten Zustände. Die Kalman-Filter in der angegebenen Form passen sich Zustandsänderungen an, solange die Elemente der Verstärkungsmatrix $K(k+1)$ nicht konvergiert sind. Um dieses Konvergieren zu vermeiden, kann im Filteralgorithmus analog zu den Betrachtungen im Abschnitt 5.4.3 eine geeignete konstante Matrix in jedem Abtastzeitpunkt hinzuaddiert werden.

Liegen keine A-priori-Informationen über die Kovarianzmatrizen V und Z vor, kann die Schätzung des Zustands unter der Annahme, daß die Störungen auf die Zustandsschätzungen $v_i(k) = 0$ und die Störungen auf die Ausgangsgrößen $z_i(k)$ statistisch unabhängig sind, begonnen werden. Die Gleichungen für das Kalman-Filter (6.188) und (6.192) gehen dann in die der rekursiven Regression über.

Auf die Behandlung der Zustandsschätzung bei nichtlinearen Systemen, bei korrelierten Störungen und bei einer kontinuierlichen Betrachtungsweise wird an dieser Stelle verzichtet. Diese Probleme sind in der recht umfangreichen Literatur dargestellt [3.24, 4.14, 6.34].

6.6. Ausgewählte Probleme der Schätzung dynamischer Systeme

In diesem Abschnitt soll auf einige Probleme der Bildung von Modellen dynamischer Systeme hingewiesen werden, die bei der Lösung von praktischen Aufgaben von Bedeutung sind. Dies betrifft Fragen der Parameterschätzung in geschlossenen Ketten, der von Mehrgrößensystemen sowie die Strukturprüfung und die Wahl einer geeigneten Abtastzeit T .

6.6.1. Parameterschätzung in geschlossenen Ketten

Alle bisher vorgestellten Parameterschätzverfahren sind davon ausgegangen, daß keine Rückführung zwischen dem Ausgang und dem Eingang des Systems besteht. Viele reale Prozesse existieren jedoch als rückgekoppelte Systeme. Aus Gründen der Wirtschaftlichkeit, der Stabilität oder der Funktionsfähigkeit ist häufig ein Auftreten der Rückführungen nicht möglich. Eine Nichtbeachtung führt jedoch in der Regel zu falschen Modellen für das System. Die Ursache liegt darin, daß durch die Rückführung der gestörten Ausgangsgröße (z. B. durch einen Regler auf den Eingang des Systems) die Eingangssgröße $u(t)$ mit der Störung $z(t)$ korreliert ist (Bild 6.30). Damit wird eine wesentliche Bedingung für die Identifizierbarkeit des Systems verletzt.

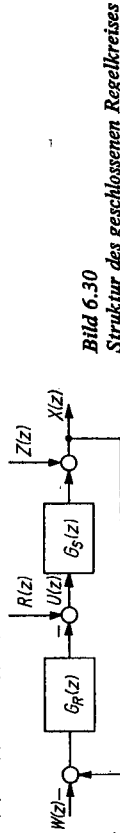


Bild 6.30
Struktur des geschlossenen Regelkreises

Nach den in den letzten Jahren durchgeführten umfangreichen Untersuchungen zu diesem Problem [1.40, 1.52, 6.10, 6.35 bis 6.49] ist das System u. a. identifizierbar, wenn

1. zwischen den Meßorten des Eingangs- und des Ausgangssignals keine Störung auftritt,
2. ein zusätzliches Testsignal $r(t)$, das mit der Störung $z(t)$ unkorreliert ist, auf den Kreis aufgebracht werden kann – es kann auch die Führungsgröße $w(t)$ verwendet werden,
3. das Übertragungsverhalten des Reglers G_R bekannt ist,
4. zwischen verschiedenen Reglern umgeschaltet werden kann,
5. bestimmte Bedingungen zwischen den Ordnungen der Regelstrecke und des Reglers eingehalten werden.

Als prinzipielle Vorgehensweisen wurden die sog. indirekten und direkten Methoden entwickelt.

Bei den *indirekten Methoden* wird das nichtparametrische oder das parametrische Modell ermittelt in den Stufen

- Schätzung des Gesamtübertragungsverhaltens G der geschlossenen Kette
- Berechnung des Systemübertragungsverhaltens G_S aus G und bekanntem G_R .

Außer diesen beiden Methoden wurde speziell für geschlossene Ketten die sog. „Verbundprozeßmethode“ entworfen [6.38]. Sie wird an dieser Stelle nicht weiter betrachtet. Unter den oben genannten Bedingungen ergibt sich im Fall einer zeitdiskreten Betrachtungsweise und der im Bild 6.30 dargestellten Struktur die Beziehung

$$X(z) = \frac{G_S(z)}{1 + G_R(z)G_S(z)} R(z) + \frac{1}{1 + G_R(z)G_S(z)} Z(z). \quad (6.197)$$

Diese Gleichung kann in die Struktur einer offenen Kette entsprechend Bild 6.31 umgeformt werden, so daß für das Verhalten des geschlossenen Kreises bezüglich der Eingangsgröße $R(z)$ gilt

$$G(z) = \frac{X(z)}{R(z)} = \frac{G_S(z)}{1 + G_R(z)G_S(z)}. \quad (6.198)$$

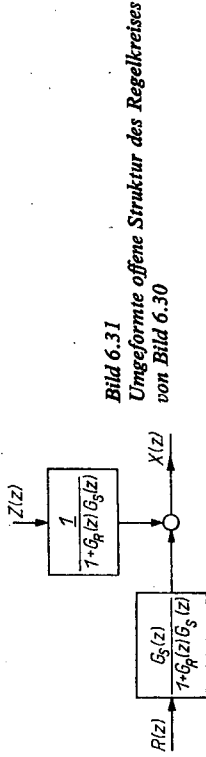


Bild 6.31
Umgeformte offene Struktur des Regelkreises von Bild 6.30

Aus der mit einem Schätzverfahren (z. B. mit der rekursiven Hilfsvariablen-schätzung) ermittelten Übertragungsfunktion $\hat{G}(z)$ kann dann unter Verwendung der bekannten Reglerübertragungsfunktion $G_R(z)$ durch Rückrechnung die gesuchte diskrete Übertragungsfunktion

$$\hat{G}_S(z) = \frac{\hat{G}(z)}{1 - G_R(z)\hat{G}(z)} \quad (6.199)$$

gewonnen werden.

Dem Vorteil der Anwendbarkeit aller Schätzverfahren, die für die offene Kette geeignet sind, stehen der numerische Aufwand und Konvergenzprobleme als Nachteile entgegen, [6.36, 6.37].

Die *direkten Methoden* bestimmen unmittelbar aus den Eingangssignalen $u(t)$ bzw. $r(t)$ oder $w(t)$ und dem Ausgangssignal parametrische oder nichtparametrische Modelle. Als Methoden haben sich u. a. das Korrelationsverfahren [1.40] und die Parameterschätzverfahren der Regression, der verallgemeinerten Regression sowie der Hilfsvariablen-schätzung bewährt [1.52, 6.37]. Beim Korrelationsverfahren werden die beiden Signale $u(t)$ und $x(t)$ mit dem zusätzlich auf den geschlossenen Kreis aufgetragenen Signal $r(t)$ bzw. $w(t)$ korreliert. Für den Fall $r(t) = 0$ und $w(t) \neq 0$ gilt

$$R_{wu}(\tau) = \int_0^\infty g_{wu}(\tau) R_{ww}(\tau - t) dt \quad (6.200)$$

$$R_{wx}(\tau) = \int_0^\infty g_{wx}(\tau) R_{ww}(\tau - t) dt.$$

Durch Anwendung der Fourier-Transformation ergeben sich die Leistungsspektren zu

$$S_{wu}(\omega) = G_{wu}(\omega) S_{ww}(\omega) \quad (6.201)$$

$$S_{wx}(\omega) = G_{wx}(\omega) S_{ww}(\omega).$$

Für die Frequenzgänge in Gl. (6.201) gilt mit der Struktur von Bild 6.30

$$G_{wu}(j\omega) = \frac{G_R(j\omega)}{1 + G_R(j\omega)G_S(j\omega)} \quad (6.202)$$

$$G_{wx}(j\omega) = \frac{G_R(j\omega)G_S(j\omega)}{1 + G_R(j\omega)G_S(j\omega)}.$$

Damit ergibt sich der gesuchte Frequenzgang $\hat{G}_S(j\omega)$ aus

$$\hat{G}_S(j\omega) = \frac{\hat{G}_{wx}(j\omega)}{\hat{G}_{wn}(j\omega)} = \frac{\hat{S}_{wx}(j\omega)}{\hat{S}_{wn}(j\omega)}. \quad (6.203)$$

Bei den Parameterschätzverfahren hat sich ähnlich wie bei der Identifikation in der offenen Kette die Hilfsvariablen-schätzung als sehr leistungsfähig erwiesen [6.40]. Auf ihre Anwendung soll deshalb kurz eingegangen werden. Angenommen wird, daß für die abgetasteten Signale im Bild 6.30 gilt

$$r(k) \neq 0, \quad w(k) = 0, \quad z(k) \neq 0.$$

Bei der Anwendung dieser Methode zur Schätzung rückgekoppelter Systeme muß ein Vektor der Hilfsvariablen $M(k)$ aufgebaut werden, bei dem außer den mit der Störung $z(k)$ korrelierten Ausgangssignalwerten $x(k)$ auch die über die Rückführung mit der Störung $z(k)$ korrelierten Eingangssignalwerte $u(k)$ ersetzt werden müssen. Nach einem Vorschlag in [6.37] werden abgetastete Werte des aufgeprägten Signals $r(k)$ als erster Teil des Vektors der Hilfsvariablen verwendet. Die für das Ausgangssignal $x(k)$ eingesetzten Werte $\hat{x}_H(k)$ werden in diesem speziellen Fall über das Hilfsmodell

$$\hat{X}(z) = \frac{\hat{B}_H(z^{-1})}{\hat{A}_H(z^{-1})} R(z)$$

ermittelt. Damit hat der Vektor der Hilfsvariablen folgendes Aussehen:

$$\hat{H}^T(k) = [-\hat{x}_H(k-1) \dots -\hat{x}_H(k-m) : r(k-1) \dots r(k-m)]. \quad (6.204)$$

Umfangreiche Untersuchungen in [6.36, 6.37, 6.38] haben gezeigt, daß die direkten den indirekten Methoden überlegen sind. Wenn die genannten Bedingungen an die Identifizierbarkeit gegeben sind, liefert die Parameterschätzung in offener und geschlossener Kette nahezu gleichwertige Ergebnisse [6.36, 6.42].

Weiterführende und vertiefende Betrachtungen zu diesem Problem sind in [6.10, 6.36 bis 6.40] zu finden.

6.6.2. Verfahren zur Strukturprüfung

Die Ermittlung der Ordnung des Modells ist, wenn keine A-priori-Informationen aus der theoretischen Prozeßanalyse vorliegen, eine weitere schwierig zu lösende Aufgabe. Wie bereits im Abschnitt 1.3 und in den jeweiligen Abschnitten zur Ermittlung von Signal- und Systemmodellen erwähnt, geht es darum, die wesentlichen Eigenschaften der Signale und der Systeme durch Modelle mit einer minimalen Ordnung abzubilden. Zur Ermittlung dieser auch als „Modelle optimaler Komplexität“ bezeichneten Signal- oder Systemmodelle dienen Strukturprüfungsverfahren. Aus der Vielfalt der entworfenen Verfahren werden im Rahmen dieses Buches nur diejenigen kurz vorgestellt, die auf einer Bewertung des Ausgangsfehlers oder auf einer Analyse der diskreten Übertragungsfunktion beruhen. Weiterführende Untersuchungen sind [1.50, 1.52, 6.43] zu entnehmen.

Verfahren zur Bewertung des Ausgangsfehlers

Auf der Basis des gemessenen und des geschätzten Ausgangssignals $x(k)$ und $\hat{x}(k)$ wurden sehr einfache und effektive Strukturprüfungsverfahren entworfen.

Signalfehler-test. Beim Signalfehler-test wird entsprechend der Beziehung

$$e(k, \hat{n}) = x(k) - \hat{x}(k, \hat{n}) \quad (6.205)$$

für die verschiedenen geschätzten Modellordnungen $\hat{n}$; $i = 1, 2, \dots, \hat{n}_{\max}$, durch einen optischen Vergleich der Signalverläufe (z. B. Übergangsfunktion, Gewichtsfunktion) die wahrscheinlichste Modellordnung bestimmt. Dieses Verfahren kann nur bei ungestörten Systemen angewendet werden.

Fehlerfunktionstest. Beim Fehlerfunktionstest wird die Reststreuung (s. Abschn. 5.2.2) als Kriterium zur Auswahl der Modellordnung benutzt. Damit gilt

$$s_R^2(\hat{n}) = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m [x(i) - \hat{x}(i, \hat{n})]^2. \quad (6.206)$$

Die wahrscheinlichste Modellordnung ist vorhanden, wenn die Reststreuung minimal ist. **F-Test.** Durch einen Vergleich der Reststreuung für verschiedene Modellordnungen $\hat{n}$, mit der geschätzten Streuung s_z^2 – s. Abschnitt 5.5.2, Gl. (5.146) bis (5.148) – kann über den F-Test

$$F = \frac{s_R^2(\hat{n})}{s_z^2} \quad (6.207)$$

für ein gewähltes Signifikanzniveau α die wahrscheinlichste Modellordnung für Signal- und Systemmodelle ermittelt werden (s. Abschnitte 3.3.2 und 5.5.2).

Auswahlkriterien bei Aufteilung der Beobachtungen. Diese sehr leistungsfähige und weitentwickelte Strategie [1.50, 6.44] beruht darauf, daß die Modellordnung über einen Vergleich von geschätzten Parametern oder Signalen einer Lernfolge und Prüf Folge ermittelt wird. Als Modellauswahlkriterien werden Genauigkeitskriterien und Übereinstimmungskriterien verwendet. Als Beispiel sei hier das Regularitätskriterium für eine Lernfolge des Umfangs k_1 und eine Prüf Folge vom Umfang k_2 angegeben. Es lautet nach [1.50]:

$$\Delta^2(k_2, \hat{n}) = \sum_{k=1}^{k_2} [x(k) - \hat{x}(k, k_1, \hat{n})]^2. \quad (6.208)$$

Es wird wiederum die Modellordnung gewählt, die einen minimalen Wert des Kriteriums liefert. Diese Gruppe von Verfahren hat sich besonders bei der Lösung von Vorhersageproblemen und bei geringen Datenmengen bewährt [1.50, 6.44].

Verfahren zur Beurteilung der geschätzten diskreten Übertragungsfunktion

Ausgangspunkt der Verfahren zur Strukturermittlung sind Schätzungen der Polynome $\hat{A}(z^{-1})$ und $\hat{B}(z^{-1})$ entsprechend den im Abschnitt 6.3 vorgestellten Verfahren mit verschiedenen Modellordnungen $\hat{n} = 1, 2, \dots, \hat{n}_{\max}$.

Polynomtest. Beim Polynomtest wird untersucht, ob die Polynome $\hat{A}(z^{-1})$ und $\hat{B}(z^{-1})$ gemeinsame Wurzeln besitzen. Für verschiedene Modellordnungen werden die Pole und die Nullstellen in der z -Ebene dargestellt. Ist die Ordnung des Modells $\hat{n}$ zu groß gegenüber der Systemordnung, werden einige Pole annähernd durch Nullstellen kompensiert. Die Modellordnung wird so weit reduziert, bis keine Pol-Nullstellen-Kompensation mehr erfolgt [6.43]. Das Verfahren ist sehr leistungsfähig, ist aber gleichzeitig durch subjektive Faktoren der Bewertung geprägt (Nutzung grafischer Mittel).

Kombinierter Polynom- und Dominanztest. Der kombinierte Test stellt den Versuch dar, die Festlegung der Modellordnung durch die zusätzliche Verwendung von Dominanzwerten der Pole zu objektivieren. Er wird in folgenden Schritten realisiert [1.52, 6.43]:

1. Schätzung eines Modells mit maximal möglicher Ordnung $\hat{n}_{\max}$ und Darstellung der Pole und Nullstellen in der z -Ebene.
2. Anwendung des Polynomtestes für Pole, die eindeutig durch Nullstellen kompensiert werden, d.h. Reduktion der Ordnung auf n_1 .
3. Die Prüfung der Dominanz der verbleibenden Pole des Modells

$$\hat{G}(z) = \sum_{\phi=1}^{\hat{n}_1} \frac{c_{\phi}}{z - z_{\phi}} = \sum_{\phi=1}^{\hat{n}_1} \frac{\alpha_{\phi} (1 - z_{\phi})}{z - z_{\phi}} \quad (6.209)$$

mit

$$\alpha_{\phi} = c_{\phi} / (1 - z_{\phi})$$

erfolgt auf der Grundlage des Dominanzmaßes D der Pole. Es wurde in [6.45] gezeigt, daß der Endwert der Übergangsfolge des Modells von Gl. (6.209)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(k) = \sum_{\phi=1}^{\hat{n}_1} \operatorname{Re} \{ \alpha_{\phi} \} \quad (6.210)$$

einen Verstärkungsfaktor beschreibt. Damit können die einzelnen Faktoren α_{ϕ} als Verstärkungsfaktoren der Pole interpretiert werden. Als Maß für den Einfluß jedes Poles erhält man durch Normierung aus Gl. (6.210) das Dominanzmaß D_{ϕ} zu

$$D_{\phi} = \frac{R\{\alpha_{\phi}\}}{\sum_{i=1}^{\hat{n}_1} R\{\alpha_i\}}; \quad i = 1, 2, \dots, \hat{n}_1. \quad (6.211)$$

Eine weitere Reduktion der Modellordnung kann nun bei vorgegebener Genauigkeit anhand der D_{ϕ} -Werte erfolgen.

Der kombinierte Polynom- und Dominanztest hat sich bei ungestörten und gestörten Systemen zur Strukturermittlung von Differenzgleichungsmodellen als sehr leistungsfähig erwiesen.

6.6.3. Parameterschätzung linearer Mehrgrößensysteme

Die Erstellung eines Modells für ein lineares Mehrgrößensystem mit l Eingangsgrößen $u_i(k)$ und m Ausgangsgrößen $x_j(k)$ ist in vielen realen Prozessen erforderlich. Dabei besteht die Aufgabe darin, für das Mehrgrößensystem einen Modellansatz zu finden, der alle Zusammenhänge zwischen den Eingangs- und Ausgangssignalen sowie die Kopplungen zwischen den Ausgangssignalen beschreibt. Neben der Beschreibung im Zustandsraum (s. Abschn. 6.5) und durch Gewichtsfunktionsmodelle (s. Abschn. 6.2) hat sich die Verwendung von Übertragungsfunktionen durchgesetzt. Betrachtet wird an dieser Stelle die Modellbeschreibung eines linearen zeitdiskreten Mehrgrößensystems.

Entsprechend Bild 6.32 gilt für das Gesamtmodell des Mehrgrößensystems

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(z) \\ \vdots \\ \hat{x}_m(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{G}_{11}(z) & \dots & \hat{G}_{1l}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{G}_{m1}(z) & \dots & \hat{G}_{ml}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(z) \\ \vdots \\ U_l(z) \end{bmatrix}. \quad (6.212)$$

Die diskrete Übertragungsfunktion für den Zusammenhang zwischen dem i -ten Eingang und dem j -ten Ausgang lautet dann:

$$\hat{G}_{ji}(z) = \frac{\hat{B}_{ji}(z^{-1})}{\hat{A}_{ji}(z^{-1})} = \frac{\hat{b}_{0,ji} + \hat{b}_{1,ji}z^{-1} + \dots + \hat{b}_{n_{ji},ji}z^{-n_{ji}}}{1 + \hat{a}_{1,ji}z^{-1} + \dots + \hat{a}_{n_{ji},ji}z^{-n_{ji}}}. \quad (6.213)$$

Das Gesamtmodell des Systems kann entsprechend der Anzahl der Ausgangssignale in m unabhängige Teilmodelle mit jeweils r ($r \leq l$) Eingangssignalen $u_i(k)$ für den j -ten Ausgang aufgespalten werden (Bild 6.33).

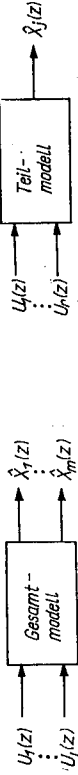


Bild 6.32. Gesamtmodell eines linearen Mehrgrößensystems



Bild 6.33. Teilmodell eines linearen Mehrgrößensystems

Damit ergibt sich für das j -te Teilsystem

$$X_j(z) = G_{j1}(z) U_{j1}(z) + \dots + G_{jr}(z) U_{jr}(z) + Z_j(z) \quad (6.214)$$

$$G_{ji}(z) = \frac{B_{ji}(z^{-1})}{A_{ji}(z^{-1})}; \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Um eine parameterlineare Fehlergleichung in analoger Form zur Vorgehensweise wie im Abschnitt 6.3 zu erhalten, werden die in Gl. (6.207) vorhandenen unterschiedlichen Nennerpolynome $A_{ji}(z^{-1})$ durch die Bildung eines gemeinsamen Hauptnenners beseitigt.

Damit folgt für den Hauptnenner

$$A_j^*(z^{-1}) = \prod_{i=1}^r A_{ji}(z^{-1}) = 1 + a_{1,j}^* z^{-1} + \dots + a_{n_j,j}^* z^{-n_j} \quad (6.215)$$

mit

$$n_j = \sum_{i=1}^r n_{ji}.$$

Durch Einsetzen von Gl. (6.215) in Gl. (6.214) erhält man die Beziehung

$$A_j^*(z^{-1}) X_j(z) = B_{j1}^*(z^{-1}) U_{j1}(z) + \dots + B_{jr}^*(z^{-1}) U_{jr}(z) + A_j^*(z^{-1}) Z_j(z). \quad (6.216)$$

Die erweiterten Zählerpolynome $B_{ji}^*(z^{-1})$ ergeben sich aus

$$B_{ji}^*(z^{-1}) = \frac{B_{ji}(z^{-1})}{A_{ji}(z^{-1})} A_j^*(z^{-1}) \quad (6.217)$$

$$B_{ji}^*(z^{-1}) = b_{0,ji}^* + b_{1,ji}^* z^{-1} + \dots + b_{n_{ji},ji}^* z^{-n_{ji}}.$$

Aus Gl. (6.216) erhält man im Zeitbereich die Beschreibung zum k -ten Zeitpunkt

$$x_j(k) = - \sum_{i=1}^{n_j} a_{i,j}^* x_j(k-i) + \sum_{i=0}^r \sum_{\mu=1}^r b_{\mu,i,j}^* u_{j\mu}(k-i) + n_j(k) \quad (6.218)$$

mit

$$n_j(k) = z_j(k) + \sum_{i=1}^{n_j} a_{i,j}^* z_j(k-i).$$

Für die Parameterschätzung ergibt sich damit als Meßwertvektor $m^T(k)$ für das j -te Teilsystem

$$m_j^T(k) = [x_j(k-1) \dots x_j(k-n_j); u_{j1}(k) \dots u_{j1}(k-n_j); \dots; u_{jr}(k) \dots u_{jr}(k-n_j)] \quad (6.219)$$

und als Parametervektor s_j^T

$$s_j^T = [-a_{j1}^* \dots -a_{jn_j}^*; b_{j0}^* \dots b_{jn_j}^* \dots; b_{j0}^* \dots b_{jn_j}^*] \quad (6.220)$$

Mit diesem Meßwert- und Parametervektor können die in den Abschnitten 6.3.2 und 6.3.3 vorgestellten Methoden der Regression und der Hilfsvariablenschätzung angewendet werden. Gegenüber der Schätzung von Eingrößensystemen treten besonders bei einer großen Anzahl von Einflußgrößen und einer hohen Modellordnung Probleme bezüglich der benötigten Rechenzeit und des Speicherplatzes auf. Eine Lösung zur Reduzierung dieses Problems wurde in [1.52] aufgezeigt. Wirken Ausgangssignale des Gesamtsystems auf das betrachtete j -te Ausgangssignal, so ist die Anzahl der in Gl. (6.212) betrachteten Eingangssignale des j -ten Teilmodells um maximal $m-1$ Signale auf $r=l+m-1$ zu erhöhen.

Die Erweiterung des Meßwert- und Parametervektors erfolgt dann in analoger Weise [6.46].

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß durch die Bildung dieser Teilmodelle die statische und die dynamische Wirkung der ausgewählten Eingangssignale auf das j -te Ausgangssignal entsprechend dem gewählten Gütekriterium gut abgebildet werden. Durch die Bildung des gemeinsamen Hauptnenners ist eine erwartungstreue Schätzung der Parameter der einzelnen diskreten Übertragungsfunktionen $G_{jr}(z)$ in der Regel nicht möglich [1.31, 6.46]. Auf die Wahl einer geeigneten Abtastzeit bei der Parameterschätzung von Mehrgrößensystemen wird im Abschnitt 6.6.4 eingegangen.

6.6.4. Möglichkeiten zur Wahl der Abtastzeit T

Die meisten der vorgestellten Verfahren zur Parameter- und Zustandsschätzung gehen davon aus, daß die Eingangs- und Ausgangssignale als abgetastete Signale mittels eines Digitalrechners weiterverarbeitet werden. Häufig haben technische und nichttechnische Prozesse kontinuierliche Eigenschaften, so daß eine Analog-Digital-Wandlung erfolgen muß. Die Abtastzeit T muß nun so gewählt werden, daß durch diese Wandlung kein Informationsverlust auftritt.

Theoretisch tritt kein Informationsverlust auf, wenn die Abtastzeit T entsprechend dem Abtasttheorem von Shannon

$$T \leq \frac{\pi}{\omega_{\max}}; \quad (6.221)$$

$\omega_{\max}$ maximale Frequenz des Signals,

gewählt wird. In der Regel ist $\omega_{\max}$ nicht bekannt.

Um den Informationsverlust klein zu halten, sollte die Abtastzeit T so klein wie möglich gewählt werden. Diese Strategie führt aber dazu, daß in der Meßwertmatrix M Spalten linear abhängig werden. Dadurch wird die Matrix $[M^T M]^{-1}$ singular, und eine

Parameterschätzung ist nicht mehr möglich. Wird auf der anderen Seite die Abtastzeit T sehr groß gewählt, so wird nur das statische Verhalten abgebildet. In der Praxis hat sich deshalb die Wahl der Abtastzeit für Eingrößensysteme nach folgender Strategie bewährt: Schritt 1. Ermittlung oder Abschätzung der Summenzeitkonstante T_s bzw. der Zeit $t_{0.63}$ einer aufgenommenen Sprungantwort (s. Abschn. 4.2)

Schritt 2. Wahl der Abtastzeit T durch

a) Gewichtsfunktionsmodell [6.24]

$$T \approx (3 \dots 5) T_s / r$$

bei r Stützstellen von $g(t)$; $10 \leq r \leq 20$,

b) Differenzgleichungsmodell [1.44]

$$T \approx (0,18 \dots 0,36) T_s.$$

Bei Mehrgrößensystemen kann die Tasterperiode nach der gleichen Strategie gewonnen werden, wenn die Teilsysteme ein annähernd gleiches dynamisches Verhalten aufweisen. Besitzen die Teilsysteme ein sehr unterschiedliches Zeitverhalten, ist ggf. die Identifikation mit unterschiedlichen Abtastzeiten wiederholt durchzuführen.

6.7. Übungsaufgaben zum Abschnitt 6

Aufgabe 6.1

Auf zwei unterschiedliche Systeme wird eine Testfolge $u(k)$, die aus einem Plackett-Burman-Plan für $m+1=7$ gewonnen wurde, mit einer Abtastzeit von $T=1,3$ s aufgeprägt. Die abgetasteten Werte der Eingangs- und Ausgangssignale sind in Tafel 6.13 dargestellt.

Tafel 6.13. Meßwerte für ein System mit einem Eingang und zwei Ausgängen

k	0	1	2	3	4	5
$u(k)$	+1	+1	+1	-1	+1	-1
$x_1(k)$	0,261	0,592	0,785	0,386	0,238	0,102
$x_2(k)$	-0,059	0,428	0,81	1,02	-0,011	0,318

k	6	7	8	9	10	11
$u(k)$	-1	+1	+1	+1	-1	+1
$x_1(k)$	-0,279	-0,238	0,152	0,674	0,146	0,164
$x_2(k)$	-0,069	-8,70	-0,169	0,814	0,793	-0,046

k	12	13	14	15	16	17
$u(k)$	-1	-1	-1	-1	-1	-1
$x_1(k)$	0,333	-0,273	-0,620	-0,894	-0,732	-1,09
$x_2(k)$	0,476	-0,059	-0,823	-1,017	-0,797	-1,130

k	18	19
$u(k)$	-1	-1
$x_1(k)$	-0,993	-1,0
$x_2(k)$	-0,991	-1,0

Die den Systemausgängen überlagerte Störung hat die Standardabweichung $\sigma_z = 0,1$ und den Erwartungswert $E\{z\} = 0$. Lösen Sie folgende Teilaufgaben:

- Stellen Sie die Testfolge und die gemessenen Ausgangswerte als Funktion der Abtastschritte k dar!
- Wandeln Sie die Testfolge in den zur Schätzung der Stützstellen notwendigen Versuchsplan um!
- Kennzeichnen Sie in Übereinstimmung mit dem Versuchsplan die Abtastzeitpunkte, von denen Werte der Ausgangsgrößen zur Auswertung benötigt werden, und ordnen Sie diese den entsprechenden Versuchsplanzeilen zu!
- Berechnen Sie mit Hilfe der Regression die Stützstellenvektoren $\hat{g}_1$ und $\hat{g}_2$!
- Berechnen Sie die Varianzen und Kovarianzen von $\hat{g}_1$ und $\hat{g}_2$!
- Stellen Sie die geschätzten Stützstellen der beiden Gewichtsfunktionen als Funktion der Zeit dar!
- Bestimmen Sie aus den geschätzten Stützstellen die Verstärkungen der beiden Systeme!

Aufgabe 6.2

Gegeben sind die in Tafel 6.14 angegebenen Meßwerte eines Systems mit einem Eingang und einem Ausgang. Als Testfolge wurde eine PRBS-Folge mit einer Abtastschrittweite von $T = 5$ s und der Länge $L = 7$ verwendet. Lösen Sie folgende Teilaufgaben:

- Stellen Sie die Testfolge und die gemessenen Ausgangswerte als Funktion der Zeit dar!
- Berechnen Sie für eine Ordnung von $m = 1$ die Parameter des Differenzgleichungsmodells (Ansatz ohne b_0)!
- Berechnen Sie mit den Modellparametern für die gegebene Eingangsfolge die Komponenten des geschätzten Ausgangsvektors $\hat{z}$!
- Bestimmen Sie Restsumme und Reststreuung!
- Überprüfen Sie die Signifikanz der geschätzten Parameter, und ermitteln Sie die Konfidenzintervalle für eine Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 5\%$!

Tafel 6.14. Meßwerte eines Systems mit einem Eingang und einem Ausgang

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$u(k)$	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	0
$x(k)$	0	1,89	3,23	-0,13	2,04	-0,86	-2,42	0,44

Lösungen der Übungsaufgaben

Aufgabe 2.1

- a) Für die Verteilungsfunktion und für die Verteilungsdichte ergibt sich

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -2 \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} & \text{für } -2 \leq x < 0 \\ \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -2 \\ \frac{1}{3} & \text{für } -2 \leq x < 0 \\ \frac{1}{3} & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{für } x > 2. \end{cases}$$

- b) Der Erwartungswert der stetigen Zufallsgröße ist

$$\begin{aligned} E\{X\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\ &= \frac{1}{6} \int_{-2}^0 x dx + \frac{1}{3} \int_0^2 x dx \\ &= \frac{x^2}{12} \Big|_{-2}^0 + \frac{x^2}{6} \Big|_0^2 = -\frac{4}{12} + \frac{4}{6} \\ E\{X\} &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

- c) Die Wahrscheinlichkeit, daß die Zufallsgröße sich im Bereich $0 \leq x \leq 3$ befindet, ist

$$\begin{aligned} P(0 \leq x \leq 3) &= F(3) - F(0) = 1 - \frac{1}{3} \\ P(0 \leq x \leq 3) &= 0,666. \end{aligned}$$

Aufgabe 2.2

- a) Für die Augenzahlen ergeben sich die in Tafel L.1 angegebenen Kombinationen (links: erster Würfel; rechts: zweiter Würfel). Aus Tafel L.1 ergeben sich die im Bild L.1 dargestellte Verteilung und die im Bild L.2 dargestellte Verteilungsfunktion.

Tafel L.1. Augenzahlen der beiden Würfel und ihre Wahrscheinlichkeit

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6	2 6	3 6	4 6	5 6	6 6
	2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6	3 5	4 5	5 5	6 5	
		3 1	3 2	3 3	3 4	3 5	4 4	5 4	6 4		
			4 1	4 2	4 3	4 4	5 3	6 3			
				5 1	5 2	5 3	6 2				
					6 1						
$P(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

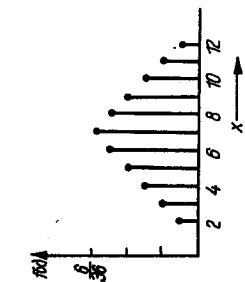


Bild L.1. Verteilung zu Aufgabe 2.2

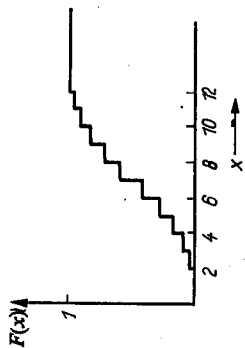


Bild L.2. Verteilungsfunktion zu Aufgabe 2.2

b) Der Erwartungswert ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
 E\{X\} &= \sum_{i=1}^n x_i p_i \\
 &= \frac{1}{36} (2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 4 \\
 &\quad + 10 \cdot 3 + 11 \cdot 2 + 12) \\
 E\{X\} &= 7.
 \end{aligned}$$

c) Die Wahrscheinlichkeit, mit der die summierten Augenzahlen beider Würfel im Bereich $6 \leq x \leq 12$ sind, erhält man aus der Beziehung

$$\begin{aligned}
 P(6 \leq x \leq 12) &= P(12) - P(6) = \frac{36 - 15}{36} \\
 P(6 \leq x \leq 12) &= 0,58.
 \end{aligned}$$

Aufgabe 2.3

Zur Lösung der Aufgabe werden folgende Beziehungen verwendet:

Anzahl der Intervalle

$$n_k = 1 + 3,2 \lg n,$$

n Umfang der Stichprobe;

Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^k x_m^* H_{am},$$

x_m^* Klassenmittelwert (Klasse m)

H_{am} absolute Häufigkeit (Klasse m);

Streuung

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{m=1}^k (x_m^* - \bar{x})^2 H_{am};$$

Schiefte

$$\gamma = \frac{1}{(n-1)s^3} \sum_{m=1}^k (x_m^* - \bar{x})^3 H_{am}.$$

Damit ergibt sich für die Klassenanzahl der Verteilungen bei $n = 40$ Beobachtungen

$$n_k = 1 + 3,2 \lg n = 6,13.$$

Gewählt wurde die Klassenanzahl $n_k = 6$. Für die erste Stichprobe ergeben sich

$$x_{\min} = -2,25, \quad x_{\max} = 3,36, \quad \Delta m = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n_k} = 0,935.$$

Tafel L.2. Zwischenwerte zur Lösung der Aufgabe 2.3 a

m	x_{m-1}	x_m	H_{am}	x_m^*	$(x_m^* - \bar{x})^2$	$(x_m^* - \bar{x})^3$
1	-2,250	-1,315	4	-1,7825	2,832	-4,767
2	-1,315	-0,380	11	-0,8475	0,560	-0,419
3	-0,380	0,555	18	0,0875	0,035	0,007
4	0,555	1,490	4	1,0225	1,259	1,421
5	1,490	2,425	2	1,9575	4,231	8,704
6	2,425	3,360	1	2,8925	8,925	26,785

Mit den in Tafel L.2 angegebenen Zwischenwerten erhält man folgende Maßzahlen:

$$\bar{x} = -0,0995, \quad s^2 = 1,0402, \quad \gamma = 0,6354.$$

Bei exakter Berechnung lauten die Maßzahlen:

$$\bar{x} = -0,0815, \quad s^2 = 1,178, \quad \gamma = 0,74.$$

Im Bild L.3 ist die ermittelte Verteilung der ersten Stichprobe dargestellt. Sie kann durch eine Normalverteilung angenähert werden.

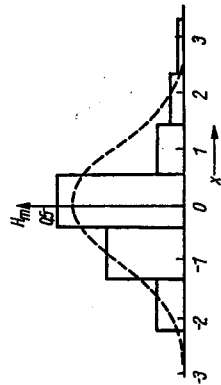


Bild L.3. Verteilung der ersten Stichprobe zu Aufgabe 2.3

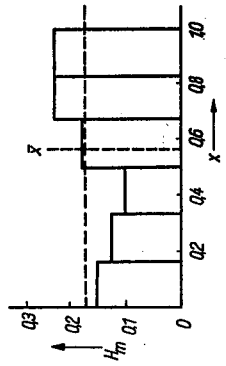


Bild L.4. Verteilung der zweiten Stichprobe zu Aufgabe 2.3

Für die zweite Stichprobe ergeben sich

$$x_{\min} = 0, \quad x_{\max} = 9,99, \quad \Delta m = 0,165.$$

Mit den in Tafel L.3 angegebenen Zwischenwerten erhält man die Maßzahlen

$$\bar{x} = 0,5568, \quad s^2 = 0,0830, \quad \gamma = -0,3785.$$

Im Bild L.4 ist die ermittelte Verteilung der zweiten Stichprobe dargestellt. Sie kann durch eine Gleichverteilung angenähert werden.

Tafel L.3. Zwischenwerte zur Lösung der Aufgabe 2.3b

m	x_{m-1}	x_m	H_{am}	x_m^*	$(x_m^* - \bar{x})^2$	$(x_m^* - \bar{x})^3$
1	0	0,165	6	0,0825	0,2251	-0,1068
2	0,165	0,330	5	0,2475	0,0957	-0,0296
3	0,330	0,495	4	0,4125	0,0206	-0,0030
4	0,495	0,660	7	0,5775	0	0
5	0,660	0,825	9	0,7425	0,0345	0,0064
6	0,825	0,990	9	0,9075	0,1230	0,0431

Tafel L.4. Zwischenwerte zur Lösung der Aufgabe 2.3c

m	x_{m-1}	x_m	H_{am}	x_m^*	$(x_m^* - \bar{x})^2$	$(x_m^* - \bar{x})^3$
1	3,000	64,167	21	33,58	3556,8	-212124,6
2	64,167	125,330	9	94,75	2,3	3,6
3	125,330	186,500	4	155,92	3931,4	246500,7
4	186,500	247,667	3	217,08	15341,5	1900207,9
5	247,667	308,834	2	278,25	34236,4	6334782,8
6	308,834	370,000	1	339,42	60614,8	14923457,0

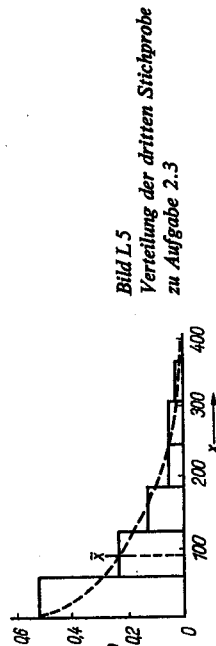
Für die dritte Stichprobe erhält man

$$x_{\min} = 3, \quad x_{\max} = 370, \quad \Delta m = 61,167.$$

Mit den in Tafel L.4 angegebenen Zwischenwerten erhält man die Maßzahlen

$$\bar{x} = 93,219, \quad s^2 = 6809,005, \quad \gamma = 1,361.$$

Die aus der Stichprobe ermittelte empirische Verteilung ist im Bild L.5 dargestellt. Die Verteilung dieser Stichprobe kann durch eine Exponentialverteilung angenähert werden.



Aufgabe 2.4

Ausgehend von der Hypothese

$$H_0: \mu = \mu_0 = 8 \mu\text{m}$$

wird mit dem Tafelwert $z_\alpha = 1,96$ aus Tafel A.1 der z-Test durchgeführt.

Es gilt

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} = \frac{8,3 \mu\text{m} - 8,0 \mu\text{m}}{0,632 \mu\text{m}} \sqrt{150}$$

$$z = 5,813$$

und somit für den Test $z > z_\alpha$, d. h., die Hypothese wird abgelehnt. Damit unterscheiden sich der Stichprobenmittelwert und der Erwartungswert signifikant voneinander. Die Anlage muß überprüft werden.

Aufgabe 2.5

Betrachtet wird die mittlere Differenz zwischen den Meßergebnissen der Geräte I und II

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{Ii} - x_{IIi}); \quad n = 15$$

$$= \frac{1}{15} (-60) = -4 \mu\text{m},$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{Ii} - x_{IIi} - \bar{x})^2 = \frac{1}{14} 960 = 68,57 (\mu\text{m})^2,$$

$$s = 8,28 \mu\text{m}.$$

Die Hypothese lautet: $H: \mu = \mu_0 = 0$.

Für die Testgröße ergibt sich

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \sqrt{n} = \frac{-4}{8,28} \sqrt{15} = -1,87.$$

Unter Verwendung des Tafelwerts für die Testgröße aus Tafel A.2 zu

$$t_{0,01;14} = 2,98$$

ergibt sich für den t-Test

$$|t| = 1,87 < t_{0,01;14} = 2,98.$$

Damit wird die Hypothese angenommen, und der Unterschied in den Meßwerten beider Geräte kann als zufällig angesehen werden.

Aufgabe 2.6

Die Überprüfung der Behauptung erfolgt mit dem χ^2 -Test. Für die Testgröße gilt

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}.$$

Aus den Beobachtungen erhält man für

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{10} 240 = 24^\circ\text{C},$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{9} 1,52 = 0,168 (^\circ\text{C})^2.$$

Mit der Hypothese $H: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0,25 (^\circ\text{C})^2$ ergibt sich für die Testgröße

$$\chi^2 = \frac{9 \cdot 0,168}{0,25} = 6,048.$$

Für einen Tafelwert $\chi^2_{0,01;9} = 21,67$ aus Tafel A 3 ergibt sich für den Test $\chi^2 < \chi^2_{0,01;9}$, d.h., die Hypothese wird angenommen. Damit ist die Behauptung des Herstellers, daß seine Steuereinrichtung die Sollwerttemperatur von 24 °C mit einer Streuung von $\sigma^2 = 0,25$ (°C)² garantiert, mit einer Sicherheit von 99% bestätigt.

Aufgabe 2.7

Die Hypothese $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ wird mit dem F -Test überprüft. Zur Durchführung des Testes werden berechnet

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

$$\bar{x}_{0,2} = 5,44 \text{ mg O}_2/\text{l}, \quad s_{0,2}^2 = 0,093 \text{ (mg O}_2/\text{l})^2,$$

$$\bar{x}_{0,2} = 5,05 \text{ mg O}_2/\text{l}, \quad s_{0,2}^2 = 0,266 \text{ (mg O}_2/\text{l})^2.$$

Für die Testgröße F erhält man mit den Werten für die Streuungen

$$F = \frac{s_{0,2}^2}{s_{0,2}^2} = \frac{0,266}{0,093} = 2,86.$$

Der Test ergibt mit einem Tafelwert von $F_{0,05;7,4} = 6,09$ aus Tafel A 4

$$F = 2,86 < F_{0,05;7,4} = 6,09.$$

Damit wird die Hypothese, daß sich die Streuungen beider Meßwertreihen nur zufällig unterscheiden, angenommen.

Aufgabe 2.8

Ausgehend von der Beziehung für das Konfidenzintervall

$$\bar{x} - \frac{t_{\alpha/2;f} s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{t_{\alpha/2;f} s}{\sqrt{n}}$$

folgt mit dem Tafelwert

$$t_{0,025;10} = 2,23 \quad (\text{Tafel A 2})$$

und

$$\frac{t_{0,025;10} s}{\sqrt{n}} = \frac{2,23 \cdot 3,507}{\sqrt{11}} = 2,358 \text{ min}^{-1}$$

das Konfidenzintervall für den Erwartungswert der Herzfrequenz mit einer Sicherheit von 95%
 $152,64 \text{ min}^{-1} < \mu < 157,35 \text{ min}^{-1}$.

Aufgabe 2.9

Aus der Beziehung

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2;f}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;f}}$$

folgt für

$$\chi^2_{0,05;19} = 30,1,$$

$$\chi^2_{0,95;19} = 10,1 \quad \text{aus Tafel A 3}$$

und den Werten für s^2 und $f = m - 1$

$$\frac{19 \cdot 1,8 (\%)^2}{30,1} < \sigma^2 < \frac{19 \cdot 1,8 (\%)^2}{10,1}.$$

Damit ergibt sich für das Konfidenzintervall der Streuung der Bereich

$$1,136 (\%)^2 < \sigma^2 < 3,386 (\%)^2.$$

Aufgabe 2.10

a) Mit der Anzahl der Beobachtungen ($n = 40$) ergibt sich die Anzahl der Klassen

$$n_k = 1 + 3,2 \lg 40 = 6,13.$$

Gewählt wurde $n_k = 6$.

Die Grenzen der Verteilungen und die Klassenbreite ergeben sich für X zu

$$x_{\min} = -1,67, \quad x_{\max} = 3,43,$$

$$\Delta m_x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n_k} = 0,85$$

Tafel L.5. Ergebnisse der Analyse der zweidimensionalen Zufallsgröße

	-1,67	-0,82	0,03	0,88	1,73	2,58	3,43
3,63							
2,83	0	0	0	0	2 2/40 1,57	2 2/40 4,90	3 3/40 12,35
2,03	0	0	0	0	4 4/40 1,86	3 3/40 4,35	0
1,23	0	1 1/40 -0,47	2 2/40 -0,32	3 3/40 0,43	0	0	0
0,43	0	0	5 5/40 0,99	2 2/40 0,35	0	0	0
-0,37	0	3 3/40 4,84	3 3/40 1,67	1 1/40 -0,50	0	0	0
-1,17	2 2/40 8,81	2 2/40 5,30	2 2/40 1,84	0	0	0	0
	2/40	6/40	12/40	12/40	5/40	3/40	3/40
							x →

und für Y zu

$$y_{\min} = -1,17, \quad y_{\max} = 3,63,$$

$$\Delta m_y = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{n_k} = 0,80.$$

Mit diesen Festlegungen ergeben sich die in der Tafel L.5 dargestellten Werte der absoluten Verbundhäufigkeit (erste Zahl im Feldinnern der Tafel L.5) und der Verbundwahrscheinlichkeit (zweite Zahl im Feldinnern der Tafel L.5)

$$P(x, y) = \frac{H_a(x, y)}{n}$$

b) Die Randhäufigkeiten werden durch Aufsummieren der Verbundhäufigkeiten für jeweils eine Spalte bzw. Zeile gefunden. Sie sind am Rand unten ($P(x)$) bzw. rechts am Rand ($P(y)$) in Tafel L.5 eingetragen. Als Verteilung sind sie im Bild L.6a und b dargestellt. Aus der Darstellung kann geschlossen werden, daß die Zufallsgröße X annähernd normalverteilt und die Zufallsgröße Y annähernd gleichverteilt ist.

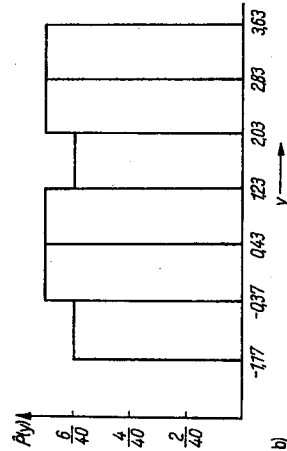
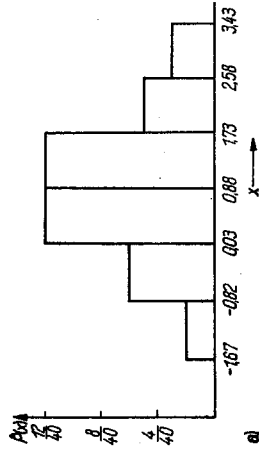


Bild L.6
Randverteilungen zu Aufgabe 2.10

- a) Randverteilung für die Zufallsgröße X
b) Randverteilung für die Zufallsgröße Y

c) Die Berechnung des einfachen Korrelationskoeffizienten auf der Grundlage der Klasseneinteilung erfolgt nach der Beziehung

$$\hat{\rho}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{s_X s_Y},$$

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k (x_{mi}^* - \bar{x})(y_{mj}^* - \bar{y}) H_a(x_i, y_j).$$

Damit ist die Ermittlung der Mittelwerte und Streuungen für die Zufallsgrößen notwendig. Für die Mittelwerte gilt unter Verwendung der Zwischenergebnisse in den Tafeln L.6 und L.7

$$1. \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^k x_m^* H_a(x_m) = \frac{1}{40} 36,23$$

$$\bar{x} = 0,91.$$

$$2. \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^k y_m^* H_a(y_m) = \frac{1}{40} 50,80$$

$$\bar{y} = 1,27.$$

Tafel L.6
Zwischenergebnisse zur Berechnung des Mittelwertes $\bar{x}$

m	x_{mo}	x_m^*	$H_a(x_m)$	$x_m^* H_a(x_m)$
1	-1,67	-0,82	2	-2,50
2	-0,82	0,03	6	-2,34
3	0,03	0,88	12	5,52
4	0,88	1,73	12	15,72
5	1,73	2,58	5	10,80
6	2,58	3,43	3	9,03

Tafel L.7
Zwischenergebnisse zur Berechnung des Mittelwertes $\bar{y}$

m	y_{mo}	y_m^*	$H_a(y_m)$	$y_m^* H_a(y_m)$
1	-1,17	-0,37	6	-4,62
2	-0,37	0,43	7	0,21
3	0,43	1,23	7	5,81
4	1,23	2,03	6	9,78
5	2,03	2,83	7	17,01
6	2,83	3,64	7	22,61

Tafel L.8
Zwischenergebnisse zur Berechnung der Streuungen s_x^2 und s_y^2

m	$x_m^* - \bar{x}$	$(x_m^* - \bar{x})^2$	$y_m^* - \bar{y}$	$(y_m^* - \bar{y})^2$
1	-2,16	4,67	-2,04	4,16
2	-1,30	1,69	-1,24	1,54
3	-0,45	0,20	-0,44	0,19
4	0,40	0,16	0,36	0,13
5	1,25	1,56	1,16	1,35
6	2,10	4,41	1,96	3,84

Die Streuungen ergeben sich mit Verwendung der Zwischenergebnisse der Tafel L.8 zu

$$1. s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{m=1}^k (x_m^* - \bar{x})^2 H_a(x_m) = \frac{1}{39} 44,83$$

$$s_x^2 = 1,15.$$

$$2. s_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{m=1}^k (y_m^* - \bar{y})^2 H_a(y_m) = \frac{1}{39} 74,18$$

$$s_y^2 = 1,90.$$

Damit kann der Korrelationskoeffizient unter Verwendung des als dritte Zahl in den Feldern von Tafel L.5 dargestellten Ausdrucks

$$(x_{mi}^* - \bar{x})(y_{mj} - \bar{y}) H_n(x_i, y_j)$$

nach der Beziehung

$$\hat{\rho}(X, Y) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k (x_{mi}^* - \bar{x})(y_{mj} - \bar{y}) H_n(x_i, y_j) s_x s_y$$

berechnet werden. Es gilt

$$\hat{\rho}(X, Y) = \frac{1}{39} \frac{47,97}{1,07 \cdot 1,38}$$

$$\hat{\rho}(X, Y) = 0,83.$$

Der positive Korrelationskoeffizient bestätigt die Lage der Verteilung in Tafel L.5.

Aufgabe 2.11

a) Mit den Mittelwerten $\bar{x} = 0$ und $\bar{y} = 2,5$ sowie den Werten in Tafel L.9 ergibt sich für die Kovarianz

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 0$$

und damit für den Korrelationskoeffizienten

$$\hat{\rho}(X, Y) = 0.$$

Der entsprechende Zusammenhang für diesen Wertebereich ist im Bild L.7 eingetragen.

Tafel L.9
Zwischenwerte
zur Berechnung
der Aufgabe 2.11a

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
-2	4	-2	1,5	-3
-1	1	-1	-1,5	1,5
1	1	1	-1,5	-1,5
2	4	2	1,5	3

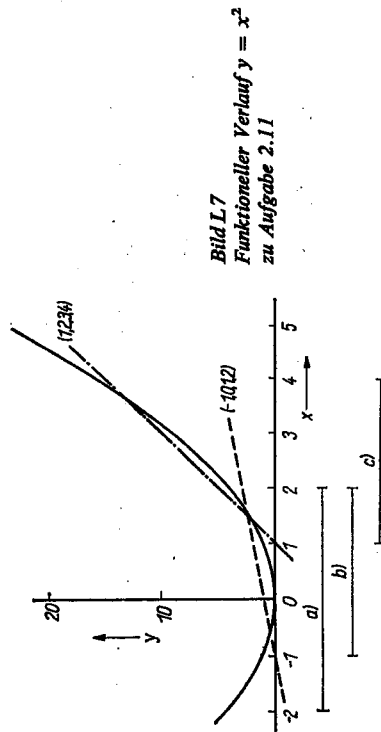


Bild L.7
Funktioneller Verlauf $y = x^2$
zu Aufgabe 2.11

b) Mit den Mittelwerten $\bar{x} = 0,5$ und $\bar{y} = 1,5$ und den Werten in Tafel L.10 ergibt sich für

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{3} 5 = 1,67,$$

$$s_x^2 = 1,67, \quad s_x = 1,29$$

$$s_y^2 = 3,0, \quad s_y = 1,73,$$

$$\hat{\rho}(X, Y) = \frac{1,67}{1,29 \cdot 1,73} = 0,75.$$

Der diesen Bereich charakterisierende Zusammenhang ist wiederum im Bild L.7 dargestellt.

Tafel L.10. Zwischenwerte zur Berechnung der Aufgabe 2.11b

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
-1	1	-1,5	2,25	-0,5	0,25	0,75
0	0	-0,5	0,25	-1,5	2,25	0,75
1	1	0,5	0,25	-0,5	0,25	-0,25
2	4	1,5	2,25	2,5	6,25	3,75
Σ			5		9	5

Tafel L.11. Zwischenwerte zur Berechnung der Aufgabe 2.11c

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	1	-1,5	2,25	-6,5	42,25	9,75
2	4	-0,5	0,25	-3,5	12,25	1,75
3	9	0,5	0,25	1,5	2,25	0,75
4	16	1,5	2,25	8,5	72,25	12,75
Σ			5		129	25

c) In diesem Wertebereich liegen die Mittelwerte $\bar{x} = 2,5$ und $\bar{y} = 7,5$ vor. Mit den in Tafel L.11 dargestellten Werten folgt für die Größen

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{3} 25 = 8,33,$$

$$s_x^2 = 1,67, \quad s_x = 1,29$$

$$s_y^2 = 43,0, \quad s_y = 6,56,$$

$$\hat{\rho}(X, Y) = \frac{8,33}{1,29 \cdot 6,56} = 0,984.$$

Auch für diesen Wertebereich ist der lineare Zusammenhang im Bild L.7 eingetragen. Insgesamt ist zu sehen, daß der Korrelationskoeffizient keine Aussagen über einen evtl. vorhandenen nichtlinearen Zusammenhang erlaubt. Er ist ein Maß für den Grad der Annäherung der Meßwerte an eine Gerade.

Aufgabe 2.12

Der empirisch ermittelte Korrelationskoeffizient ergibt sich aus

$$\hat{\rho}(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

Mit den Mittelwerten $\bar{x} = 3$ und $\bar{y} = 7$ und den in Tafel L.12 dargestellten Werten ergibt sich der Korrelationskoeffizient zu

$$\hat{\rho}(X, Y) = \frac{32}{\sqrt{28 \cdot 52}} = \frac{32}{53,721}$$

$$\hat{\rho}(X, Y) = 0,84.$$

Da der berechnete Korrelationskoeffizient größer als der kritische Korrelationskoeffizient ist, ist er mit 95 % statistisch gesichert.

Tafel L.12. Zwischenwerte zur Berechnung der Aufgabe 2.12

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
0	3	-3	-4	9	9	16
2	6	-1	1	1	1	1
1	4	-2	-3	4	4	9
4	11	1	4	1	1	16
3	7	0	0	0	0	0
5	10	2	3	4	4	9
6	8	3	1	9	9	1
Σ				32	28	52

Aufgabe 2.13

Die Korrelationskoeffizienten werden mit der Hypothese $H_0: \rho(X, Y) = 0$ und dem t -Test auf Signifikanz geprüft. Die Korrelationskoeffizienten sind signifikant, wenn

$$\left| \frac{\hat{\rho}(X, Y)}{\sqrt{1 - \hat{\rho}^2(X, Y)}} \sqrt{n - m} \right| > t_{\alpha, f}$$

ist. Die Werte des ersten Teils des Tests sind in Tafel L.13 für $n = 67$ und $m = 7$ eingetragen.

Tafel L.13. Berechnete Testwerte t für Aufgabe 2.13

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	x
u_1	2,97						
u_2	0,40	0,26					
u_3	0,39	1,76	1,03				
u_4	1,88	2,60	0,56	0,09			
u_5		1,13	0,61	0,12	0,12		
u_6		8,25	0,60	0,65	3,12	0,45	
x	3,87						

Mit den Tafelwerten für den t -Test (s. Anhang, Tafel A.2)

$$t_{0,1;60} = 1,67; \quad t_{0,01;60} = 2,66$$

ergibt sich die in Tafel L.14 dargestellte Matrix der signifikanten Korrelationskoeffizienten. Für die Sicherheit von 99 % sind nur noch die unterstrichenen Korrelationskoeffizienten statistisch gesichert.

Tafel L.14
Statistisch gesicherte
Zusammenhänge
für Aufgabe 2.13

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	x
u_1	<u>0,358</u>						
u_2							
u_3							
u_4							
u_5							
u_6							
x							

Aufgabe 3.1

Mit der Signalbeschreibung

$$x(t) = a \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

folgt für die Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} a \sin(\omega_0 t + \varphi) a \sin(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi) dt.$$

Unter Verwendung der Beziehung

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

ergibt sich mit

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \omega_0 t + \varphi$$

$$\alpha = 2(\omega_0 t + \varphi) - \beta.$$

Aus dem Zusammenhang

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = \omega_0 \tau + \varphi$$

erhält man durch Einsetzen der Beziehung für α die Vorschrift für β zu $\beta = -\omega_0 \tau$.
Damit ergibt sich für die Größe α

$$\alpha = 2(\omega_0 t + \varphi) + \omega_0 \tau.$$

Mit diesen beiden Beziehungen ergibt sich unter Beachtung, daß $\cos(-\omega_0\tau) = \cos \omega_0\tau$ ist, für die Korrelationsfunktion

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} -\frac{a^2}{2} [\cos\{2(\omega_0 t + \varphi) - \omega_0\tau\} - \cos \omega_0\tau] dt \\ &= \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \frac{a^2}{2} \cos \omega_0\tau \int_{-T_0}^{T_0} dt - \frac{a^2}{2} \int_{-T_0}^{T_0} \cos(2\omega_0 t + 2\varphi + \omega_0\tau) dt \\ &= \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{a^2}{2} \cos \omega_0\tau \frac{2T_0}{2T_0} - \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{a^2}{2} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} \cos(2\omega_0 t + 2\varphi + \omega_0\tau) dt \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\rightarrow 0 \text{ (Abschätzung)}} \\ R_{xx}(\tau) &= \frac{a^2}{2} \cos \omega_0\tau. \end{aligned}$$

Es ist zu sehen, daß die Frequenz und die Amplitude des Signals in der Korrelationsfunktion enthalten sind. Die Phaseninformation des Signals ist in der Autokorrelationsfunktion nicht enthalten. Der Effektivwert des Signals ergibt sich zu

$$\sqrt{R_{xx}(0)} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = 220 \text{ V.}$$

Aufgabe 3.2

Auf der Grundlage der Beziehung

$$\hat{R}_{xx}(mT) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x(iT) x(i + m)T$$

ergeben sich mit den Meßwerten von Tafel 3.7 für die Autokorrelationsfunktion folgende Werte:

$$\begin{aligned} \hat{R}_{xx}(0) &= \frac{1}{8}(0 + 1 + 4 + 1 + 0 + 1 + 4 + 1) = \frac{12}{8} = 1,5 \\ \hat{R}_{xx}(1) &= \frac{1}{8}(0 + 2 + 2 + 0 - 0 + 2 + 2 - 0) = \frac{8}{8} = 1,0 \\ \hat{R}_{xx}(2) &= \frac{1}{8}(0 + 1 + 0 - 1 - 0 + 1 - 0 - 1) = 0 \\ \hat{R}_{xx}(3) &= \frac{1}{8}(0 + 0 - 2 - 2 - 0 - 0 - 2 - 2) = -\frac{8}{8} = -1,0 \\ \hat{R}_{xx}(4) &= \frac{1}{8}(0 - 1 - 4 - 1 + 0 - 1 - 4 - 1) = -\frac{12}{8} = -1,5 \\ \hat{R}_{xx}(5) &= \frac{1}{8}(0 - 2 - 2 + 0 + 0 - 2 - 2 - 0) = -\frac{8}{8} = -1,0 \\ \hat{R}_{xx}(6) &= \frac{1}{8}(0 - 1 + 0 + 1 + 0 - 1 - 0 + 1) = 0 \\ \hat{R}_{xx}(7) &= \frac{1}{8}(0 + 0 + 2 + 2 + 0 - 0 + 2 + 2) = \frac{8}{8} = 1,0. \end{aligned}$$

Im Bild L.8 ist der Verlauf der Korrelationsfunktion dargestellt.

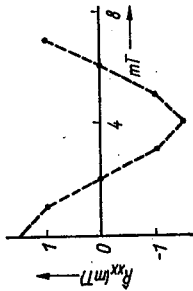


Bild L.8. Korrelationsfunktion zu Aufgabe 3.2

Aufgabe 3.3

Mit der Gleichung

$$\hat{R}_{xx}(mT) = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^{n-m} x(iT) x[(i+m)T]$$

ergeben sich für die Werte der Korrelationsfunktion des in Tafel 3.8 dargestellten Signals

$$\begin{aligned} \hat{R}_{xx}(0) &= \frac{1}{8}(0 + 1 + 4 + 1 + 0 + 1 + 4 + 1) = \frac{12}{8} = 1,5 \\ \hat{R}_{xx}(1) &= \frac{1}{8}(0 + 2 - 2 - 0 - 0 + 2 + 2) = \frac{4}{8} = 0,57 \\ \hat{R}_{xx}(2) &= \frac{1}{8}(0 - 1 + 0 + 1 - 0 + 1) = \frac{1}{8} = 0,167 \\ \hat{R}_{xx}(3) &= \frac{1}{8}(0 + 0 - 2 + 2 - 0) = 0 \\ \hat{R}_{xx}(4) &= \frac{1}{8}(0 - 1 - 4 + 1) = -\frac{4}{8} = -1,0 \\ \hat{R}_{xx}(5) &= \frac{1}{8}(0 - 2 - 2) = -\frac{4}{8} = -1,33 \\ \hat{R}_{xx}(6) &= \frac{1}{8}(0 - 1) = -\frac{1}{8} = -0,5. \end{aligned}$$

Die Autokorrelationsfunktion ist im Bild L.9 dargestellt.

Aufgabe 3.4

Unter Verwendung der Berechnungsvorschrift

$$\hat{R}_{xx}(mT) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x(iT) x[(i+m)T]$$

und den Signalwerten von Tafel 3.9 ergeben sich für die unnormierte und normierte Autokorrelationsfunktion

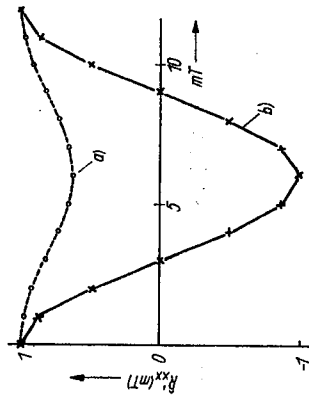
a) ohne Zentrierung

$$\begin{aligned} \hat{R}_{xx}(0) &= \frac{1}{12}(4 + 5,76 + 6,25 + 5,76 + 4 + 2,25 + 1 + 0,36 + 0,25 + 1 + 2,25) \\ &= \frac{33,24}{12} = 2,77 \\ \hat{R}'_{xx}(0) &= \frac{2,77}{2,77} = 1,00. \end{aligned}$$

Für die weiteren Verschiebungen ergeben sich die in Tafel L.15 angegebenen Werte, die im Bild L.10 dargestellt sind.

Tafel L.15. Werte der Korrelationsfunktion zu Aufgabe 3.4a

mT	0	1	2	3	4	5	6	7
$\hat{R}_{xx}(mT)$	1	0,97	0,91	0,81	0,72	0,65	0,62	0,65
mT	8	9	10	11	12	13	14	
$\hat{R}'_{xx}(mT)$	0,72	0,81	0,91	0,97	1	0,97	0,91	

Bild L.10
Korrelationsfunktion zu Aufgabe 3.4

b) mit Zentrierung

Für $\bar{x} = 1,5$ ergibt sich auf Grundlage der in Tafel L.16 angegebenen Meßwerte

$$\hat{R}_{xx}(0) = \frac{1}{12} (0,25 + 0,81 + 1 + 0,81 + 0,25 + 0 + 0,25 + 0,81 + 1 + 0,81 + 0,25 + 0) = \frac{6,24}{12} = 0,52 = \sigma_x^2$$

$$= \frac{6,24}{12} = 0,52 = \sigma_x^2$$

$$\hat{R}'_{xx}(0) = \frac{0,52}{0,52} = 1.$$

Die Werte der Korrelationsfunktion für die Verschiebungen $m > 0$ sind in Tafel L.17 angegeben und ebenfalls im Bild L.10 eingetragen. Im Bild L.10 wird der Einfluß des Mittelwerts auf die Autokorrelationsfunktion sehr deutlich.

Tafel L.16. Meßwerte zu Aufgabe 3.4b

iT	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$x(iT)$	0,5	0,9	1	0,9	0,5	0	-0,5	-0,9	-1	-0,9	-0,5	0

Tafel L.17. Werte der Korrelationsfunktion zu Aufgabe 3.4b

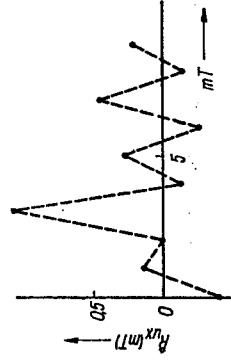
mT	0	1	2	3	4	5	6	
$\hat{R}'_{xx}(mT)$	1	0,87	0,5	0	-0,5	-0,87	-1	
mT	7	8	9	10	11	12	13	14
$\hat{R}'_{xx}(mT)$	-0,87	-0,5	0	0,5	0,87	1	0,87	0,5

Aufgabe 3.5

Die auf der Grundlage der in Tafel 3.10 dargestellten Meßwerte durchgeführten Rechnungen ergeben die in Tafel L.18 angegebenen Werte für die Kreuzkorrelationsfunktion $\hat{R}_{xx}(mT)$. Aus Bild L.11 ist zu erkennen, daß das Maximum bei einer Verschiebung von $m = 3$ auftritt. Damit wird eine Totzeit von $T_t = 3T$ aus der Korrelationsanalyse ermittelt.

Tafel L.18. Werte der Kreuzkorrelationsfunktion zu Aufgabe 3.5

mT	0	1	2	3	4	5
$\hat{R}_{xx}(mT)$	-0,42	0,13	-0,05	1,07	-0,13	0,27
mT	6	7	8	9		
$\hat{R}_{xx}(mT)$	-0,29	0,46	-0,16	0,22		

Bild L.11
Kreuzkorrelationsfunktion zu Aufgabe 3.5

Aufgabe 3.6

a) Aus der Beziehung

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

ergibt sich mit der vorgegebenen Korrelationsfunktion

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2}{2} \cos \omega_0 \tau e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Wird für den Ausdruck

$$e^{-j\omega\tau} = \cos \omega\tau - j \sin \omega\tau$$

verwendet und beachtet, daß die sin-Funktion ungerade ist, erhält man für das Spektrum den Ausdruck

$$S_{xx}(\omega) = \frac{a^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega_0 \tau \cos \omega\tau d\tau.$$

Dieser Ausdruck kann durch Anwendung des Zusammenhangs

$$\frac{1}{2} [\cos \alpha + \cos \beta] = \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

mit

$$\omega_0 \tau = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \omega \tau = \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\alpha = \omega \tau + \omega_0 \tau = 2\omega_0 \tau - \beta, \quad \omega \tau = \frac{2\omega_0 \tau - \beta - \beta}{2} = \omega_0 \tau - \beta.$$

umgeformt werden in

$$S_{xx}(\omega) = \frac{a^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \{\cos(\omega \tau + \omega_0 \tau) + \cos(\omega_0 \tau - \omega \tau)\} d\tau,$$

$$S_{xx}(\omega) = \frac{2\pi a^2}{2\pi \cdot 4} \int_{-\infty}^{\infty} \{\cos \tau (\omega_0 + \omega) + \cos \tau (\omega_0 - \omega)\} d\tau.$$

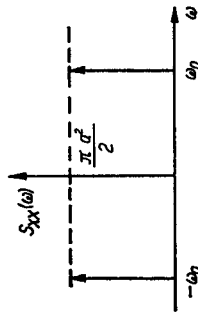
Mit den Ausdrücken

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega \tau d\tau = \delta(\omega) \quad \text{und} \quad \delta(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{für } \omega \neq 0 \\ 1 & \text{für } \omega = 0 \end{cases} \quad \text{verallgemeinertes Dirac-Delta}$$

ergibt sich für das Leistungsdichtespektrum

$$S_{xx}(\omega) = \frac{\pi a^2}{2} [\delta(\omega_0 + \omega) + \delta(\omega_0 - \omega)].$$

Das Spektrum stellt ein Linienspektrum dar und ist im Bild L12 dargestellt.



b) Die Leistung ergibt sich aus der Beziehung

$$P = U^2/R \quad \text{mit} \quad U^2 = \overline{x^2(t)}.$$

Unter Verwendung der Parsevalschen Beziehung erhält man für

$$\overline{x^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega$$

$$\overline{x^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi a^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\omega_0 + \omega) + \delta(\omega_0 - \omega)] d\omega$$

$$\overline{x^2(t)} = \frac{a^2}{2}.$$

Damit ergibt sich die Leistung zu

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{\overline{x^2(t)}}{R} = \frac{a^2}{2R} = 1 \text{ kW}.$$

Aufgabe 3.7

a) Es ergeben

$$\overline{x^2(t)} = R_{xx}(0) = 9 + 25 = 34$$

$$\tilde{x}^2(t) = R_{xx}(\infty) = 9$$

$$\tilde{x}(t) = 3.$$

b) Die Standardabweichung ergibt sich aus

$$s^2 = \overline{x^2(t)} - \tilde{x}^2(t) = 25$$

$$\sigma = 5.$$

c) Das Autoleistungsdichtespektrum wird in folgenden Schritten ermittelt:

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = 2 \int_0^{\infty} R_{xx}(\tau) \cos \omega \tau d\tau$$

$$S_{xx}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} (9 + 25 e^{-5|\tau|}) \cos \omega \tau d\tau$$

$$S_{xx}(\omega) = 18 \int_0^{\infty} \cos \omega \tau d\tau + 50 \int_0^{\infty} e^{-5\tau} \cos \omega \tau d\tau$$

$$S_{xx}(\omega) = 18 \delta(\omega) + 50 \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-5\tau} \cos \omega \tau d\tau}_{I_1}$$

$$I_1 = \frac{1}{\omega} e^{-5\tau} \sin \omega \tau - \underbrace{\int_0^{\infty} (-5) e^{-5\tau} \frac{1}{\omega} \sin \omega \tau d\tau}_{I_2}$$

$$I_2 = \frac{5}{\omega^2} e^{-5\tau} \cos \omega \tau - \int_0^{\infty} \left(-\frac{25}{\omega^2} e^{-5\tau} \cos \omega \tau \right) d\tau,$$

$$I_1 = \int_0^{\infty} e^{-5\tau} \cos \omega \tau d\tau$$

$$= \frac{1}{\omega} e^{-5\tau} \sin \omega \tau - \frac{5}{\omega^2} e^{-5\tau} \cos \omega \tau - \frac{25}{\omega^2} \int_0^{\infty} e^{-5\tau} \cos \omega \tau d\tau$$

$$I_1 \left(1 + \frac{25}{\omega^2} \right) = \frac{1}{\omega} e^{-5\tau} \sin \omega \tau - \frac{5}{\omega^2} e^{-5\tau} \cos \omega \tau$$

$$I_1 = \frac{\omega}{\omega^2 + 25} e^{-5\tau} \sin \omega \tau - \frac{5}{\omega^2 + 25} e^{-5\tau} \cos \omega \tau.$$

Damit ergibt sich das Autoleistungsspektrum zu

$$S_{xx}(\omega) = 18\delta(\omega) + 50I_1 \Big|_0^\infty,$$

$$S_{xx}(\omega) = 18\delta(\omega) + \frac{250}{\omega^2 + 25}.$$

Aufgabe 3.8

a) Unter der Annahme, daß die Werte normalverteilt sind und $\bar{x} = 0$, ergibt sich mit einer statistischen Sicherheit von 95%

$$-1,96\sigma_x < x(t) < 1,96\sigma_x.$$

Damit gilt

$$\hat{\sigma}_x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{3,92} = \frac{3,36 - (-2,25)}{3,92} = 1,43,$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = 2,04 \text{ (exakter Wert: 1,39)}.$$

b) Für $n = 40$ Beobachtungen ergibt sich entsprechend den Beziehungen im Abschnitt 3.2.3.4 für einen Abfall des Spektrums von 80 dB/Dekade ein Faktor $k = 2,0$. Um die Nulldurchgänge n_0 ermitteln zu können, müssen die Meßwerte zentriert werden: $x_z(t) = x(t) - \bar{x}$. Dieses kann man sich sparen und dafür die Durchgänge durch den Mittelwert $\bar{x}$ zählen. Mit $\bar{x} = -0,08$ (exakter Wert) ergibt sich die Anzahl der Nulldurchgänge zu $n_0 = 17$.

Damit erhält man für die unterschiedlichen Tastperioden die in Tafel L19 angegebenen Grenzfrequenzen.

Tastzeit T	0,1 s	1 s	10 s
Meßdauer (1. Wert bei $t = 0$)	3,9 s	39 s	390 s
$\bar{n} = n_0/T_0$	4,36	0,436	0,0436
ω_0/s^{-1}	8,72	0,872	0,0872

Tafel L19
Grenzfrequenzen
zu Aufgabe 3.8b

c) Aus der Beziehung

$$\overline{x^2} = R_{xx}(0) = \sigma_x^2 \quad \text{für } \bar{x} = 0 \quad (\text{zentrierte Werte})$$

kann mit Hilfe der Parsevalschen Gleichung

$$\overline{x^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_{xx}(\omega) d\omega$$

bei Näherung des Spektrums durch ein Rechteck aus

$$\overline{x^2} = \frac{1}{\pi} S_{xx}(0) \omega_s$$

Tastzeit	0,1 s	1 s	10 s
$S_{xx}(0)$	0,735 s	7,35 s	73,5 s

Tafel L20

Leistungspektrumswerte
zu Aufgabe 3.8c

der Gleichanteil $S_{xx}(0)$ aus der Beziehung

$$S_{xx}(0) = \frac{\sigma^2 \pi}{\omega_s}$$

ermittelt werden. In Tafel L20 sind die Ergebnisse für die gewählten Tastzeiten dargestellt. Der prinzipielle Verlauf der approximierten Spektren ist im Bild L13 dargestellt. Er zeigt, daß bei konstanter Leistung des Signals mit der Zunahme der Grenzfrequenz die Höhe des Spektrums abnimmt.

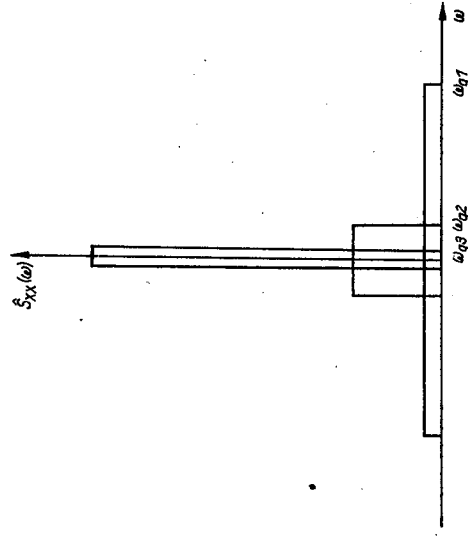


Bild L13
Prinzipieller Verlauf
der approximierten
Spektren zu Aufgabe 3.8

Aufgabe 3.9

a) Die Mittelwertbildung der ersten und vierten Serie ergibt $\bar{x}_1 = 3,11$, $\bar{x}_4 = 19,38$. Aus der Differenz beider Mittelwerte ist bereits auf einen Trend zu schließen.

Für den F -Test gilt

$$F = \frac{s_R^2}{s_x^2},$$

$$s_R^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2; \quad \bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i = 11,1$$

$$s_R^2 = (3,11 - 11,1)^2 + (19,38 - 11,1)^2 = 63,8 + 68,6 = 132,1,$$

$$s_x^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^2 = \frac{116,5 + 123}{2} = 119,8,$$

$$F = \frac{132,1}{119,8} = 1,10 < F_{0,05; 18; 1} = 4,41.$$

Damit liegt bezüglich der Streuung σ^2 Stationarität vor. Für den Test auf Gleichheit der Erwartungswerte der ersten und vierten Serie, d.h. der Überprüfung der Hypothese $H: \mu_0 = \mu_1 = \mu_4$, erhält man mit den Beziehungen im Abschnitt 3.4.2

$$\frac{3,11 - 19,38}{\sqrt{116,5 \cdot 9 + 123 \cdot 9}} \sqrt{\frac{100 \cdot 18}{20}} = -3,33,$$

$$|t| = 3,33 > t_{0,05; 18} = 2,10.$$

Damit wird die Hypothese abgelehnt und ein Trend in der Zufallsgröße mit einer Sicherheit von 95% bestätigt.

b) Der Parameter $\hat{a}$ der einfachen Trendfunktion

$$\hat{x}(kT) = \hat{a}kT$$

ergibt sich zu

$$\hat{a} = \frac{\bar{x}_4 - \bar{x}_1}{t_4 - t_1} = \frac{19,38 - 3,11}{30 \text{ s}} = 0,54 \text{ s}^{-1}$$

mit $t_1 = 5 \text{ s}$ und $t_4 = 35 \text{ s}$.

Der Trendverlauf ist im Bild L14 eingetragen.

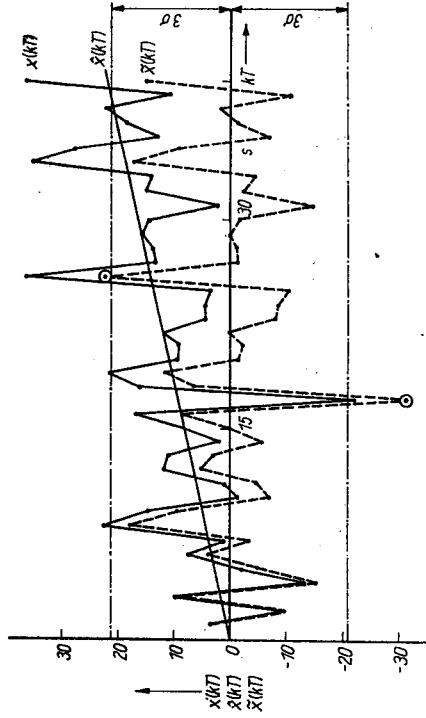


Bild L14. Verlauf der Signale $x(kT)$, $\hat{x}(kT)$ und $\tilde{x}(kT)$ zu Aufgabe 3.9

e) Die Korrektur des Trends erfolgt durch die Beziehung

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t).$$

Das Ergebnis der Korrektur ist im Bild L14 dargestellt.

d) Für eine statistische Sicherheit von 99,7% ergeben sich die Toleranzgrenzen zu

$$-3\sigma < x(t) - \tilde{x} < 3\sigma.$$

Mit $\sigma = 7$ und $\tilde{x} = -0,0975$ erhält man den Bereich $-20,9 < x(t) < 21,1$. Damit ergeben sich der 17. und 26. trendkorrigierte Meßwert der Zufallsgröße als Fehlmessung.

Aufgabe 3.10

a) Als Lösungsschema wird der Gauß-Algorithmus verwendet:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline T & x \\ \hline \end{array} \quad \hat{a} = [T^T T]^{-1} T^T x$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline T^T & T^T T \quad T^T x \\ \hline \end{array} \quad T^T T \hat{a} = T^T x$$

Gauß-Algorithmus $\rightarrow$ Rückwärtsrekursion $\hat{a}$
Damit gilt

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 4 & 16 \\ 1 & 1 & 5 & 25 \\ 1 & 1 & 6 & 36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6,1 \\ 11,6 \\ 20,4 \\ 20,9 \\ 41,8 \\ 56,2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 21 & 91 \\ 21 & 91 & 441 \\ 91 & 441 & 2275 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 166 \\ 756,3 \\ 3782,7 \end{bmatrix}$$

Die Auflösung der Gleichungen

1. $6\hat{a}_0 + 21\hat{a}_1 + 91\hat{a}_2 = 166,$
2. $21\hat{a}_0 + 91\hat{a}_1 + 441\hat{a}_2 = 756,3,$
3. $91\hat{a}_0 + 441\hat{a}_1 + 2275\hat{a}_2 = 3782,7$

ergibt die Parameter: $\hat{a}_0 = 1,93$, $\hat{a}_1 = 3,02 \text{ s}^{-1}$, $\hat{a}_2 = 1,0 \text{ s}^{-2}$. Die Signifikanz der Parameter wird mit dem t -Test für die Hypothese $H_0: a_i = 0$ nach der Vorschrift

$$|\hat{a}_i| > t_{\alpha, s_R} \sqrt{p_{ii}}$$

durchgeführt.

Für die Reststreuung $s_R^2\{z\}$ erhält man nach der Beziehung

$$s_R^2 = \frac{1}{l - n - 1} \sum_{k=1}^l [x(kT) - \hat{x}(kT)]^2$$

die in Tafel L21 dargestellten Zwischenwerte. Damit ergibt sich die Reststreuung zu

$$s_R^2 = 0,46.$$

Die Hauptdiagonalelemente p_{ii} der Matrix P

$$P = [T^T T]^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 21 & 91 \\ 21 & 91 & 441 \\ 91 & 441 & 2275 \end{bmatrix}^{-1}$$

Tafel L.21. Zwischenwerte zu Aufgabe 3.10b.

kT	a_0	$a_1 kT$	$a_2 (kT)^2$	$\hat{x}(kT)$	$[x(kT) - \hat{x}(kT)]^2$
1	1,93	3,02	1	5,95	0,02
2		6,04	4	11,97	0,14
3		9,06	9	19,99	0,17
4		12,08	16	30,01	0,01
5		15,10	25	42,03	0,05
6		18,12	36	56,05	0,02
					$\Sigma 0,41$

ergeben sich zu

$$P = \begin{bmatrix} 19,57 & \dots & \dots \\ \dots & 1,40 & \dots \\ \dots & \dots & 0,03 \end{bmatrix}$$

Damit erhält man folgende Aussagen aus dem Signifikanztest (Parameter ohne Dimension):

$$\hat{a}_0 = 1,93 < 4,303 \cdot 0,46 \sqrt{19,57} = 8,76 \quad \text{nicht signifikant,}$$

$$\hat{a}_1 = 3,02 > 4,303 \cdot 0,46 \sqrt{1,40} = 2,34 \quad \text{signifikant,}$$

$$\hat{a}_2 = 1,00 > 4,303 \cdot 0,46 \sqrt{0,03} = 0,34 \quad \text{signifikant.}$$

Die Matrix T lautet für die Abtastzeit $T = 0,5$ s für den gewählten Modellansatz:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,25 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1,5 & 2,25 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2,5 & 6,25 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3.11

Entsprechend dem Lösungsschema für den Gauß-Algorithmus (s. Aufgabe 3.10) erhält man mit den Werten von Tafel 3.13 und dem gewählten Modellansatz für die Matrix T^T

$$T^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0,5 & 0,86 & 1 & 0,86 & 0,5 & 0 & -0,5 & -0,86 & -1 & -0,86 & -0,5 \\ 1 & 0,86 & 0,5 & 0 & -0,5 & -0,86 & -1 & -0,86 & -0,5 & 0 & 0,5 & 0,86 \end{bmatrix}$$

und für die Gleichung

$$T^T T \hat{a} = T^T x$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 5,956 & 0 \\ 0 & 0 & 5,956 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,45 \\ 6,00 \\ 3,00 \end{bmatrix}$$

Damit ergeben sich die Schätzwerte der Parameter zu

$$\hat{a}_0 = -0,037, \quad \hat{a}_1 = 1,007, \quad \hat{a}_2 = 0,503.$$

Die wahren Parameter waren $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0,5$.

Aufgabe 3.12

Im Bild L.15a ist der Verlauf der gemessenen und mit einem nichtrekursiven Filter ermittelten Signalwerte dargestellt. Deutlich ist die gute Filterung der hochfrequenten Störung zu erkennen. Die durch das Filter hervorgerufene Phasenverschiebung ist null.

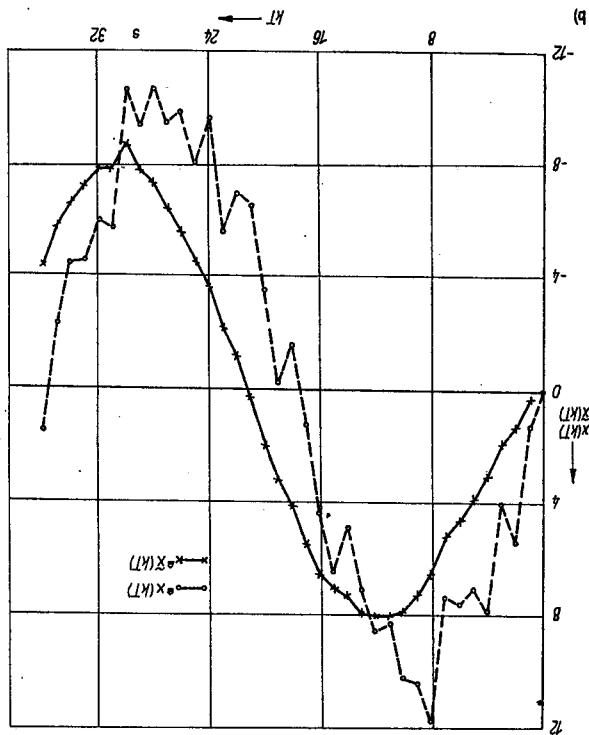
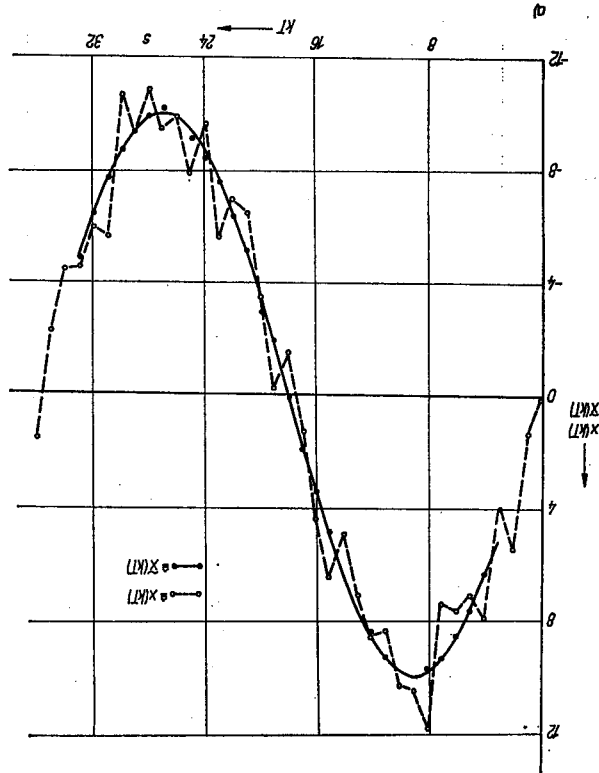


Bild L.15. Verlauf der gemessenen und gefilterten Signalwerte zu Aufgabe 3.12
a) nichtrekursives Filter; b) rekursives Filter



Der im Bild L.15b dargestellte Verlauf der gefilterten Werte zeigt, daß rekursive Filter ebenfalls die Störung beseitigen, aber eine Phasenverschiebung durch das Filter verursacht wird.

Aufgabe 4.1

Die Verstärkung wird aus der Darstellung im Bild L.16 bestimmt zu

$$K = \frac{x(\infty)}{u_0} = 5.$$

Nach dem Verfahren von *Strejce* werden aus Bild L.16 bestimmt

$$t_{0,7} = 18,1 \text{ s} = 1,2 \text{ s} (T_1 + T_2),$$

$$T_1 + T_2 = 15,1 \text{ s},$$

$$t_{0,7/4} = 4,53 \text{ s},$$

$$x(t_{0,7/4}) = 0,63, \text{ d.h. } h(t_{0,7/4}) = 0,13.$$

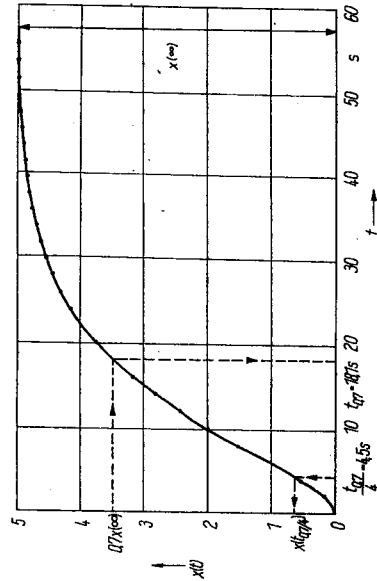


Bild L.16
Sprungantwort
nach Tafel 4.8

Aus Tafel 4.2 wird für den Wert $h(t_{0,7/4}) = 0,13$ das Zeitkonstantenverhältnis $T_2/T_1 = 0,5$ entnommen. Damit gilt für

$$T_1 = \frac{t_{0,7}}{1,2 \left(1 + \frac{T_2}{T_1} \right)} = \frac{18,1 \text{ s}}{1,2 (1 + 0,5)} = 10,1 \text{ s},$$

$$T_2 = 15,1 \text{ s} - T_1 = 5,0 \text{ s}$$

und die Übertragungsfunktion $G(p)$

$$G(p) = \frac{5}{(1 + p \cdot 10,1 \text{ s}) (1 + p \cdot 5,0 \text{ s})}.$$

Aufgabe 4.2

Aus der im Bild L.17 dargestellten Sprungantwort werden folgende Kenngrößen ermittelt:

$$K = \frac{x(\infty)}{u_0} = 5,$$

$$t_{0,63} = 23,6 \text{ s},$$

$$t_{0,63/2} = 11,8 \text{ s},$$

$$x(t_{0,63/2}) = 1,2, \text{ d.h. } h(t_{0,63/2}) = 1,2/5 = 0,24.$$

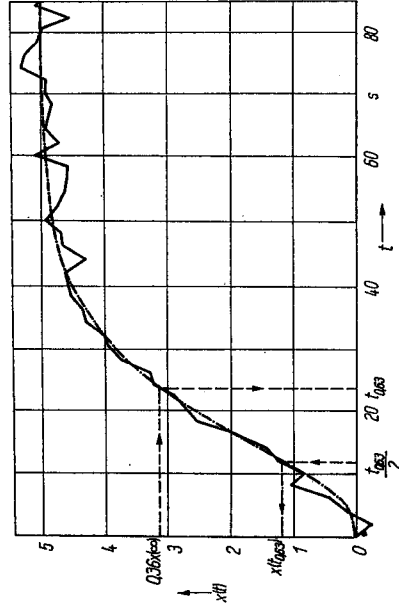


Bild L.17
Sprungantwort
nach Tafel 4.9

a) Anwendung findet das von *Sponer* entwickelte Verfahren. Aus Tafel 4.4 erhält man für $h(t_{0,63/2}) = 0,24$ die Ordnung $n = 3$ und den Faktor $D(n) = 0,319$. Damit erhält man für die Zeitkonstante T' :

$$T' = D(n) t_{0,63} = 0,319 \cdot 23,6 \text{ s} = 7,5 \text{ s}.$$

Für das Gesamtmodell gilt somit

$$G(p) = \frac{5}{(1 + p \cdot 7,5 \text{ s})^3}.$$

b) Für das Modell mit n gestaffelten Zeitkonstanten wird das Verfahren von *Radike* angewendet. Aus Tafel 4.4 erhält man für $h(t_{0,63/2}) = 0,24$ die Ordnung $n = 3$ und den Faktor $D(n) = 0,522$. Für die Zeitkonstante T' gilt

$$T' = D(n) t_{0,63} = 0,522 \cdot 23,6 \text{ s} = 12,3 \text{ s}.$$

Das Gesamtmodell lautet dann

$$G(p) = \frac{5}{(1 + p \cdot 12,3 \text{ s}) (1 + p \cdot 6,2 \text{ s}) (1 + p \cdot 4,1 \text{ s})}.$$

Die Überprüfung der ermittelten Modelle erfolgt anhand der Übergangsfunktionen.

Modell a)

$$h(t) = 1 - \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{t}{T'} \right)^i \right] e^{-t/T'},$$

$$\hat{x}(t_1) = 5h(t_1) = 2,5 \quad (x(t_1) = 2,71),$$

$$\hat{x}(t_2) = 5h(t_2) = 4,5 \quad (x(t_2) = 4,58);$$

Modell b)

$$h(t) = (1 - e^{-t/T'})^n,$$

$$\hat{x}(t_1) = 5h(t_1) = 2,6 \quad (x(t_1) = 2,71),$$

$$\hat{x}(t_2) = 5h(t_2) = 4,45 \quad (x(t_2) = 4,58).$$

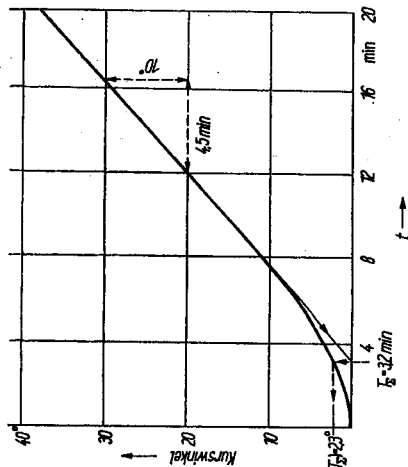
Aufgabe 4.3

Aus der Darstellung im Bild L 18 ergeben sich

$$1. K_1 = \tan \alpha = \frac{10^\circ}{4,5 \text{ min}} \cdot \frac{1}{10^\circ} = 0,22 \text{ min}^{-1},$$

Anstieg $1/u_0$

$$2. T_z = 3,2 \text{ min} \quad \text{und} \quad x(T_z) = 2,3^\circ.$$

Bild L 18
Sprungantwort nach Tafel 4.10

a) Für die Systembeschreibung

$$G(p) = \frac{K_1}{p(1 + pT')^n}$$

ergibt sich mit

$$\frac{x(T_z)}{T_z K_1 u_0} = \frac{2,25^\circ}{3,2 \text{ min} \cdot 10^\circ \cdot 0,22 \text{ min}^{-1}} = 0,32$$

aus Tafel 4.5 die Ordnung $n = 2$. Damit erhält man die Zeitkonstante T' zu

$$T' = \frac{T_z}{n} = \frac{3,2 \text{ min}}{2} = 1,6 \text{ min}$$

und die ermittelte Übertragungsfunktion zu

$$G(p) = \frac{0,22 \text{ min}^{-1}}{p(1 + p \cdot 1,6 \text{ min})^2}.$$

b) Für die Systembeschreibung

$$G(p) = \frac{K_1}{p \prod_{i=1}^n \left(1 + p \frac{T'}{i} \right)}$$

ergibt sich mit

$$\frac{x(T_z)}{T_z K_1 u_0} = 0,32$$

aus Tafel 4.5 die Ordnung $n = 2$. Damit erhält man für die Zeitkonstante

$$T' = T_z D'_1(n) = 3,2 \text{ min} \cdot 0,666 = 2,13 \text{ min}$$

und für die ermittelte Übertragungsfunktion

$$G(p) = \frac{0,22 \text{ min}^{-1}}{p(1 + p \cdot 2,13 \text{ min})(1 + p \cdot 1,07 \text{ min})}.$$

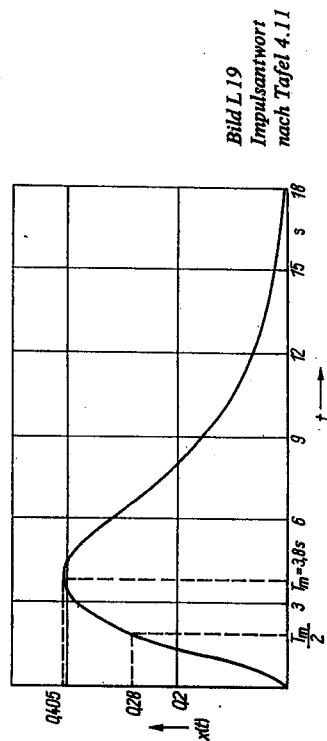
Aufgabe 4.4

Aus der im Bild L 19 aufgetragenen Impulsantwort werden die Kennwerte

$$x(T_m) = 0,405 \quad \text{und} \quad x(T_m/2) = 0,28$$

ermittelt. Damit ergibt sich aus dem Verhältnis beider Kennwerte

$$x(T_m)/x(T_m/2) = 1,446$$

aus Tafel 4.6 eine Ordnung von $n = 3$.Bild L 19
Impulsantwort
nach Tafel 4.11

Für die Ordnung $n = 3$ ergibt sich wieder aus Tafel 4.6 das Verhältnis $T_m/T' = 2$ und damit für die Zeitkonstante T' der Wert $T' = 3,8 \text{ s}/2 = 1,9 \text{ s}$.

Der Verstärkungsfaktor K ergibt sich aus dem Tafelwert $T' \cdot x(T_m)/K = 0,271$ (mit $u_0 = A = 1$) zu

$$K = \frac{1,9 \text{ s} \cdot 0,405}{0,271} = 2,84.$$

Damit lautet die Approximation der Systembeschreibung

$$G(p) = \frac{2,84}{(1 + p \cdot 1,9 \text{ s})^3}.$$

Die Überprüfung der Modellgüte erfolgt über die Berechnung der Gleichungen

$$x(t) = \frac{u_0 K}{T'^n} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t/T'},$$

$$x(t) = \frac{2,84}{(1,9 \text{ s})^3} t^2 e^{-t/1,9 \text{ s}}, \quad u_0 = A = 1.$$

Für die Zeitpunkte t_i erhält man folgende Resultate:

t/s	3	6	9	12
$x(t)/\text{Modell}$	0,39	0,30	0,15	0,06
$x(t)/\text{Original}$	0,385	0,315	0,15	0,06

Die Übereinstimmung zwischen gemessener und approximierter Impulsantwort kann als gut bezeichnet werden.

Aufgabe 4.5

Zur Ermittlung der Parameter der Übertragungsfunktion sind aus der im Bild L.20 dargestellten Impulsantwort entsprechend dem Verfahren von Radtke zu ermitteln

$$x_0 = 2,97 \text{ aus Impulsbreite } T = 5 \text{ s},$$

$$T_{00} = 19,9 \text{ s}, \quad x_m = 4,98,$$

$$x_0/x_m = 0,60, \quad \Delta T/T_{00} = 0,25.$$

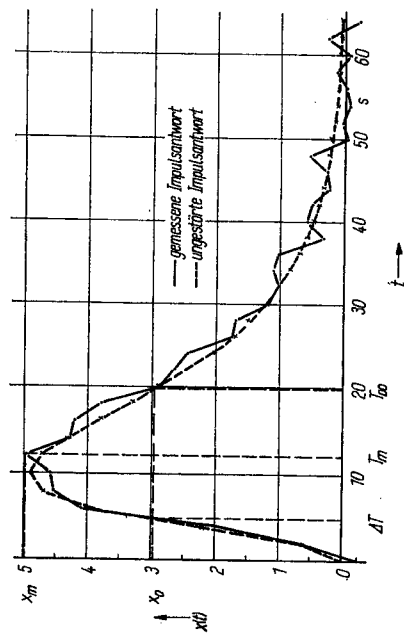


Bild L.20
Impulsantwort
nach Tafel 4.12

Aus Bild 4.13a wird entsprechend den Kennwerten x_0/x_m und T/T_{00} die Ordnung zu $n = 2$ ermittelt. Mit der gewählten Ordnung $n = 2$ und dem Kennwert x_0/x_m wird aus Bild 4.13b das Verhältnis $T'/\Delta T = 2,2$ ermittelt. Damit ergibt sich die Zeitkonstante zu $T' = 11 \text{ s}$.

Die Verstärkung des Systems ermittelt sich aus

$$K = \frac{1}{u_0} \frac{x_0}{x}, \quad x = (1 - e^{-T'/T})^n.$$

Mit den bereits ermittelten Werten erhält man für $x = 0,133$ und $K = 5,58$.

Damit lautet die ermittelte Übertragungsfunktion:

$$G(p) = \frac{5,58}{(1 + p \cdot 11 \text{ s})(1 + p \cdot 5,5 \text{ s})}.$$

Der Vergleich mit den wahren Parametern zeigt, daß bei stärker gestörten Systemen bei einer Auswertung mit den deterministischen Methoden größere Parameterfehler auftreten. Ist die Störung hochfrequent, bringt eine Glättung der aufgenommenen Impulsantwort eine Verbesserung der Parameterermittlung.

Aufgabe 4.6

Die Approximation des im Bild L.21 dargestellten Frequenzgangs wird mit der Ermittlung der Geraden bei kleinen Frequenzen begonnen. Entsprechend den in Tafel 4.7 dargestellten Elementarfrequenzgängen ergeben sich für die Aufgabe folgende Teilfrequenzgänge:

- a) mit $k^* = -1$ mit $G_1(j\omega) = 1/j\omega \cdot 0,1 \text{ s}$, d.h. I-Glied,
- b) mit $k^* = -1$ mit $G_2(j\omega) = 1/(1 + j\omega \cdot 1 \text{ s})$, d.h. T_1 -Glied,
- c) mit $k^* = +1$ mit $G_3(j\omega) = (1 + j\omega \cdot 0,3 \text{ s})$, d.h. T_D -Glied,
- d) mit $k^* = -1$ mit $G_4(j\omega) = 1/(1 + j\omega \cdot 0,1 \text{ s})$, d.h. T_1 -Glied.

Dabei ist zu beachten, daß durch den relativ geringen Abstand zwischen den Polen und den Nullstellen eine schrittweise Korrektur des approximierten Frequenzgangs mit den im Bild 4.20 dargestellten Werten erfolgen muß. Die Vorgehensweise wird im Bild L.21 gezeigt.

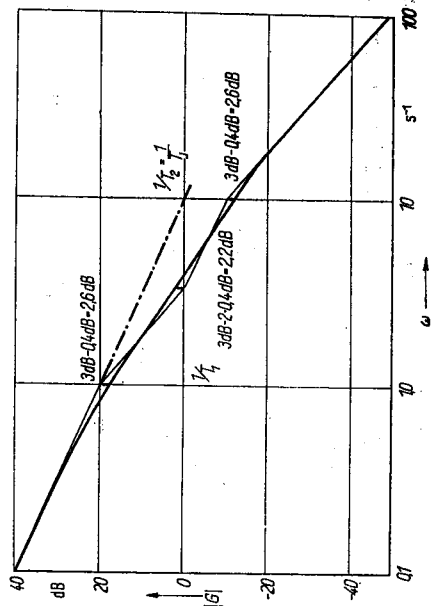


Bild L.21
Amplitudenfrequenzgang
nach Tafel 4.13

Aus den ermittelten Teilfrequenzgängen ergibt sich folgende Übertragungsfunktion des Systems:

$$G(p) = \frac{(1 + p \cdot 0,3 \text{ s})}{p \cdot 0,1 \text{ s} (1 + p \cdot 1 \text{ s}) (1 + p \cdot 0,1 \text{ s})}$$

Aufgabe 4.7

Für die Frequenzgangbeschreibung

$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^m \left[1 + \sum_{i=1}^n a_i (j\omega)^i \right]}$$

ergibt sich aus den vorgegebenen Meßwerten für die Parameter der Ordnung $m = 0$ und $n = 3$. Damit sind nach dem Verfahren von Sweda die Parameter folgenden Modells zu ermitteln:

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega a_1 - \omega^2 a_2 - j\omega^3 a_3}$$

Mit den Bestimmungsgleichungen der Parameter entsprechend Abschnitt 4.3.3 erhält man

$$K = 2,7, \quad a_1 = \frac{1}{\omega_1} \frac{(1 - \omega_1^2/\omega_2^2)}{(1 - \omega_1^2/\omega_3^2)} = 14,14 \text{ s},$$

$$a_2 = 1/\omega_2^2 = 43,8 \text{ s}^2, \quad a_3 = a_1/\omega_3^2 = 29,8 \text{ s}^3$$

und somit für die Beschreibung

$$G(j\omega) = \frac{2,7}{1 + j\omega \cdot 14,14 \text{ s} - \omega^2 \cdot 43,8 \text{ s}^2 - j\omega^3 \cdot 29,8 \text{ s}^3}$$

Aufgabe 5.1

a) Als Lösungsschema für die Regressionsgleichung

$$\hat{a} [M^T M] = M^T x$$

wird der Gauß-Algorithmus verwendet (s. Aufgabe 3.10). Für den Modellansatz

$$\hat{x} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 u$$

gilt somit unter Verwendung der Meßwerte in Tafel 5.21

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1,33 & -0,32 & -0,60 & 1,18 & -1,09 & -0,49 \\ 6,475 & -0,990 & -1,705 & 6,500 & -3,405 & -0,840 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,7 \\ 0,01 \\ 5,05 \\ 21,76 \end{bmatrix}$$

Aus den Bestimmungsgleichungen

$$6\hat{a}_0 + 0,01\hat{a}_1 = 6,025,$$

$$0,01\hat{a}_0 + 5,05\hat{a}_1 = 21,76$$

erhält man als Schätzung für die Parameter

$$\hat{a}_0 = 1,0, \quad \hat{a}_1 = 4,3.$$

Die Restquadratsumme S_R ergibt sich aus den in Tafel L.22 dargestellten Zwischenwerten zu

$$S_R = 0,779.$$

Tafel L.22
Zwischenwerte zu
Aufgabe 5.1a

Nr.	$\hat{a}_0 \hat{a}_0$	$\hat{a}_1 \hat{a}_1$	$\hat{x}$	$(x - \hat{x})^2$
1	1	5,72	6,72	0,060
2	1	-1,38	-0,38	0,372
3	1	-2,58	-1,58	0,013
4	1	5,07	6,07	0,185
5	1	-4,69	-3,69	0,076
6	1	-2,11	-1,11	0,073

Für den Signifikanztest und die Bestimmung der Konfidenzintervalle entsprechend den Beziehungen im Abschnitt 5.2.2 ist die Ermittlung der Elemente p_{ii} der Matrix $P = [M^T M]^{-1}$ erforderlich.

Für den Modellansatz und die vorhandenen Meßwerte gilt

$$P = \frac{1}{30,3} \begin{bmatrix} 5,05 & -0,01 \\ -0,01 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,168 \dots \\ \dots 0,198 \end{bmatrix}$$

Damit ergeben sich für die Parameter $\hat{a}_i$ nach der Vorschrift

$$|\hat{a}_i| \geq t_{\alpha/2, f} s_R \sqrt{p_{ii}}$$

mit

$$t_{\alpha/2, f} \triangleq t_{0,025,3} = 3,18 \quad (\text{Tafel A.2}),$$

$$s_R^2 = \frac{1}{n - l - 1} S_R = \frac{1}{3} 0,779 = 0,26$$

folgende Aussagen mit einer 95%igen Sicherheit:

1. $\hat{a}_0$ ist signifikant, da $1,0 > 3,18 \cdot 0,57 \sqrt{0,168} = 0,665$,

2. $\hat{a}_1$ ist signifikant, da $4,3 > 3,18 \cdot 0,51 \sqrt{0,198} = 0,737$.

Für die Toleranzbänder erhält man nach der Beziehung

$$|\hat{a}_i - a_i| = t_{\alpha/2, f} s_R \sqrt{p_{ii}}$$

für die Parameter

$$a_0: 0,335 < a_0 < 1,665,$$

$$a_1: 3,56 < a_1 < 5,04.$$

b) Die Parameterschätzung des Modellansatzes

$$\hat{x} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 u + \hat{a}_2 u^2$$

erfolgt in analoger Weise. Damit ergibt sich entsprechend der Lösung mit dem Gauß-Algorithmus

$$\begin{bmatrix} 1 & 1,33 & 1,769 \\ 1 & -0,32 & 0,102 \\ 1 & -0,6 & 0,36 \\ 1 & 1,18 & 1,392 \\ 1 & -1,09 & 1,188 \\ 1 & -0,49 & 0,24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6,475 \\ -0,990 \\ -1,705 \\ 6,500 \\ -3,415 \\ -0,84 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} M \\ x \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1,33 & -0,32 & -0,6 & 1,18 & -1,09 & -0,49 \\ 1,769 & 0,102 & 0,36 & 1,392 & 1,188 & 0,24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0,01 & 5,05 & 2,34 \\ 5,05 & 2,34 & 6,68 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6,025 \\ 21,76 \\ 15,53 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} M^T M \\ M^T x \end{matrix}$$

Aus den Bestimmungsgleichungen

$$6\hat{a}_0 + 0,01\hat{a}_1 + 5,05\hat{a}_2 = 6,025,$$

$$0,01\hat{a}_0 + 5,05\hat{a}_1 + 2,34\hat{a}_2 = 21,76,$$

$$5,05\hat{a}_0 + 2,34\hat{a}_1 + 6,68\hat{a}_2 = 15,53$$

werden folgende Parameterwerte ermittelt:

$$\hat{a}_0 = 0,74, \quad \hat{a}_1 = 4,17, \quad \hat{a}_2 = 0,31.$$

Mit diesen Parameterwerten ergibt sich die Restquadratsumme aus den Zwischenwerten in Tafel L23 zu

$$S_R = 0,651.$$

Tafel L23. Zwischenwerte zu Aufgabe 5.1b

Nr.	$\hat{a}_0 u_0$	$\hat{a}_1 u_1$	$\hat{a}_2 u_2$	$\hat{x}$	$(x - \hat{x})^2$
1	0,74	5,55	0,53	6,82	0,133
2	0,74	-1,33	0,03	-0,56	0,185
3	0,74	-2,5	0,11	-1,65	0,003
4	0,74	4,92	0,42	6,09	0,177
5	0,74	-4,55	0,36	-3,44	0,001
6	0,74	-2,04	0,07	-1,23	0,152

Zur Vorbereitung der Signifikanztests und zur Ermittlung der Konfidenzintervalle ist die Berechnung der Matrixelemente p_{ii} erforderlich. Aus der Matrix

$$M^T M = \begin{bmatrix} 6 & 0,01 & 5,05 \\ 0,01 & 5,05 & 2,34 \\ 5,05 & 2,34 & 6,68 \end{bmatrix}$$

erhält man für die Determinante den Wert $D = 40,95$ und für die Matrix

$$M^T M^{-1} = \begin{bmatrix} 0,689 & \dots & \dots \\ \dots & 0,356 & \dots \\ \dots & \dots & 0,739 \end{bmatrix}$$

Damit ergeben sich folgende Aussagen für die Signifikanz der Parameter mit einer Sicherheit von 95%:

$$1. \hat{a}_0 \text{ ist nicht signifikant, da } 0,74 < 4,3 \cdot 0,571 \cdot 0,83 = 2,04,$$

$$2. \hat{a}_1 \text{ ist signifikant, da } 4,17 > 4,3 \cdot 0,571 \cdot 0,597 = 1,47,$$

$$3. \hat{a}_2 \text{ ist nicht signifikant, da } 0,3 < 4,3 \cdot 0,571 \cdot 0,86 = 2,11.$$

Die Toleranzbänder ergeben sich zu

$$a_0: -1,30 < a_0 < 2,78,$$

$$a_1: 2,70 < a_1 < 5,64,$$

$$a_2: -1,78 < a_2 < 2,42.$$

Ein Vergleich der gewählten Modellansätze zeigt, daß sich die Restquadratsumme mit Erhöhung der Modellordnung nur gering verbessert. Der Signifikanztest zeigt, daß in beiden Modellansätzen der lineare Teil signifikant ist. Aus beiden Tatsachen kann geschlossen werden, daß für den vorliegenden Meßwertsatz ein Modellansatz der Form

$$\hat{x} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 u$$

gewählt werden sollte.

Aufgabe 5.2

Für den gewählten Modellansatz und die in Tafel 5.22 angegebenen Eingangs- und Ausgangssignalwerte ergibt sich für das Lösungsschema der Regressionsgleichung (s. Aufgabe 3.10)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16,2 \\ 10,5 \\ 8,0 \\ 15,5 \\ 9,9 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} M \\ x \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 33 & 18 & 28 & 168,8 \\ 18 & 15 & 27 & 131,6 \\ 28 & 27 & 51 & 234,8 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} M^T M \\ M^T x \end{matrix}$$

Aus den Bestimmungsgleichungen

$$33\hat{a}_1 + 18\hat{a}_2 + 28\hat{a}_3 = 168,6,$$

$$18\hat{a}_1 + 15\hat{a}_2 + 27\hat{a}_3 = 131,6,$$

$$28\hat{a}_1 + 27\hat{a}_2 + 51\hat{a}_3 = 234,8$$

ergeben sich die Schätzwerte der Parameter zu

$$\hat{a}_1 = 2,03, \quad \hat{a}_2 = 1,25, \quad \hat{a}_3 = 2,83.$$

Zur Ermittlung der Varianzen der Parameter nach der Beziehung (s. Abschn. 5.2.2)

$$\text{var} \{\hat{a}_i\} = s_k^2 \sqrt{p_{ii}}$$

sind die Reststreuung s_k^2 und die Hauptdiagonalelemente der Matrix P zu bestimmen.

Tafel L 24
Zwischenwerte zu Aufgabe 5.2

Nr.	x	$\bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
1	16,2	15,83	0,137
2	10,5	10,17	0,109
3	8,0	8,14	0,020
4	15,5	15,83	0,109
5	9,9	10,17	0,084
6	19,9	19,89	0,000

Die Reststreuung ergibt sich aus den Zwischenrechnungen in Tafel L 24 für die Restquadratsumme zu

$$s_k^2 = \frac{0,459}{6-3-1} = 0,23.$$

Aus der Matrix

$$M^T M = \begin{bmatrix} 33 & 18 & 28 \\ 18 & 15 & 27 \\ 28 & 27 & 51 \end{bmatrix}$$

erhält man die Diagonalelemente der Matrix analog zu Aufgabe 5.1

$$P = [M^T M]^{-1} = \begin{bmatrix} 0,288 & \dots & \dots \\ \dots & 7,192 & \dots \\ \dots & \dots & 1,368 \end{bmatrix}.$$

Damit ergeben sich folgende Varianzen für die Parameter:

$$\text{var} \{\hat{a}_1\} = 0,07, \quad \text{var} \{\hat{a}_2\} = 1,65, \quad \text{var} \{\hat{a}_3\} = 0,31.$$

Aufgabe 5.3

a) Durch Anwendung des Lösungsschemas für die Regression erhält man mit den in Tafel 5.23 angegebenen Werten und dem gewählten Modellansatz analog zu Aufgabe 3.10

$$\begin{bmatrix} -1,5 & -0,5 & 0,5 & 1,5 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 27,3 \\ 6 & 8 & 35 \end{bmatrix} \begin{matrix} M^T \\ M^T M \\ M^T x \end{matrix}$$

die Bestimmungsgleichungen für die Parameter

$$5\hat{a}_1 + 6\hat{a}_2 = 27,3,$$

$$6\hat{a}_1 + 8\hat{a}_2 = 35.$$

Für die Kovarianzmatrix der Parameter erhält man nach der Beziehung

$$\text{Cov} \{\hat{a}\} = P \sigma_z^2 \quad \text{mit} \quad \sigma_z^2 = 1, \quad P = \begin{bmatrix} 2 & -1,5 \\ -1,5 & 1,25 \end{bmatrix}$$

$$\text{Cov} \{\hat{a}\} = \begin{bmatrix} 2 & -1,5 \\ -1,5 & 1,25 \end{bmatrix}.$$

b) Die Parameterschätzung bei der Auswertung des vollständigen Versuchsplans erfolgt nach der Beziehung

$$\hat{a} = \frac{1}{n} M^T x.$$

Damit folgt für die Parameter unter Beachtung von Tafel 5.24

$$\hat{a}_1 = \frac{1}{4} (4 - 2 + 6) = 2, \quad \hat{a}_2 = \frac{1}{4} (4 + 2 + 6) = 3.$$

Die Kovarianzmatrix für die Parameter hat folgendes Aussehen:

$$\text{Cov} \{\hat{a}\} = \begin{bmatrix} 0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 \end{bmatrix}.$$

Bei der Betrachtung der Kovarianzmatrizen der Varianten a) und b) ist deutlich der Vorteil einer Versuchsplanung zu erkennen, die sich in einer Unabhängigkeit der Schätzung und minimalen Parametervarianzen ausdrückt.

Aufgabe 5.4

a) Entsprechend der Regressionsvorschrift für die Versuchsplanung und den Meßergebnissen in Tafel 5.25 ergibt sich der Parametervektor $\hat{a}$ zu

$$\hat{a} = \frac{1}{8} I \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13,6 \\ 5,1 \\ -3,5 \\ -17,5 \\ 9,9 \\ 12,3 \\ -9,3 \\ -6,9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 2,2 \\ 9,9 \end{bmatrix}.$$

Zur Ermittlung der Varianz der Parameter kann aus den Nullpunktversuchen n_0 die Streuung der Störung σ_z^2 abgeschätzt werden.

Aus den in Tafel L 23 dargestellten Zwischenwerten ergibt sich

$$s_z^2 = \frac{1}{(n_0 - 1)} \sum_{j=1}^{n_0} (x_j - \bar{x})^2 = 265,7/11 = 24,15.$$

Damit gilt für die Varianzen der Parameter $\hat{a}_i$

$$\text{var} \{\hat{a}_i\} = \frac{1}{n} s_z^2 = \frac{1}{8} 24,15 = 3,06.$$

b) Verwendet wird der F -Test in der Form

$$F = s_R^2 / s_z^2$$

zur Prüfung der Hypothese $H_0: \sigma_R^2 = \sigma_z^2$. Benötigt wird die Reststreuung, die aus den in Tafel L24 dargestellten Zwischenwerten nach der Vorschrift

$$s_R^2 = \frac{1}{n-l-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x}_i)^2 = \frac{109,6}{4} = 27,4$$

ermittelt wird.

Der Test mit diesen berechneten Streuungen und dem Tafelwert $F_{4,11;0,05} = 3,36$ ergibt

$$F = \frac{s_R^2}{s_z^2} = \frac{27,4}{24,15} = 1,15 < 3,36.$$

Das bedeutet, daß die Hypothese angenommen wird und der Modellansatz adäquat ist, da sich beide Streuungen mit einer Sicherheit von 95% nur zufällig voneinander unterscheiden.

Aufgabe 5.5

Für den Modellansatz

$$\hat{x} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 u_1 + \hat{a}_2 u_2 + \hat{a}_3 u_3$$

erhält man mit den Werten in Tafel 5.27 und der Schätzvorschrift

$$\hat{a} = \frac{1}{n} M^T x$$

$$\hat{a} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 175,44 \\ -15,12 \\ 7,50 \\ 11,66 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21,93 \\ -1,89 \\ 0,94 \\ 1,46 \end{bmatrix}$$

Analog ergeben sich die geschätzten Parameter für den Modellansatz

$$\hat{x} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 u_1 + \hat{a}_2 u_2 + \hat{a}_3 u_3 + \hat{a}_{12} u_1 u_2 + \hat{a}_{13} u_1 u_3$$

$$\hat{a} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 175,44 \\ -15,12 \\ 7,50 \\ 11,66 \\ -2,86 \\ -2,54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21,93 \\ -1,89 \\ 0,94 \\ 1,46 \\ -0,36 \\ -0,32 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 6.1

- Die Testfolge und die gemessenen Ausgangswerte sind im Bild L22 dargestellt.
- Der aus der Testfolge zur Schätzung der Stützstellen erstellte Versuchsplan ist in Tafel L25 dargestellt.
- Die Abtastzeitpunkte der Ausgangsgrößen, die zur Auswertung benötigt werden, sind im Bild L22 durch Pfeile gekennzeichnet. Die Zuordnung dieser Werte zu den Versuchsplanzeilen wird in Tafel L25 gezeigt.

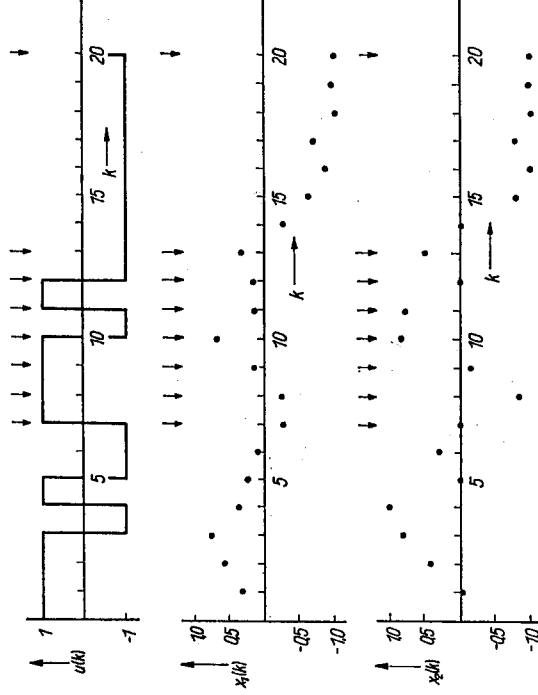


Bild L.22. Verlauf der Testfolge und der gemessenen Ausgangswerte zu Aufgabe 6.1

Tafel L.25. Versuchsplan zur Schätzung der Stützstellen der Gewichtsfunktionen zu Aufgabe 6.1

$u(k)$	$u(k-1)$	$u(k-2)$	$u(k-3)$	$u(k-4)$	$u(k-5)$	$u(k-6)$	$x_1(k)$	$x_2(k)$
-1	-1	+1	-1	+1	+1	+1	-0,279	-0,069
+1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	-0,238	-0,870
+1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	0,152	-0,169
+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	0,674	0,814
-1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	0,146	0,793
+1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	0,164	-0,046
-1	+1	-1	+1	+1	+1	-1	0,333	0,476
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1,000	-1,000

d) Nach der Schätzvorschrift

$$\hat{g}_1 = \frac{1}{nT} M^T x$$

(s. Abschn. 6.4.4) erhält man für die Stützstellen der Gewichtsfunktion des ersten Systems

$$\hat{g}_1 = \frac{1}{8 \cdot 1,3 \text{ s}} \begin{bmatrix} -0,279 \\ -0,238 \\ 0,152 \\ 0,674 \\ 0,146 \\ 0,164 \\ 0,333 \\ -1,000 \end{bmatrix}$$

$$\hat{g}_1 = \begin{bmatrix} 0,1492 \\ 0,2556 \\ 0,1402 \\ 0,0825 \\ 0,0758 \\ 0,0988 \\ -0,0375 \end{bmatrix} s^{-1}.$$

Analog ergeben sich die Stützstellen der Gewichtsfunktion des zweiten Systems zu

$$\hat{g}_2 = \frac{1}{8 \cdot 3 s} \begin{bmatrix} -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,069 \\ -0,870 \\ -0,169 \\ 0,814 \\ 0,793 \\ -0,046 \\ 0,476 \\ -1,000 \end{bmatrix}$$

$$\hat{g}_2 = \begin{bmatrix} -0,0198 \\ 0,1625 \\ 0,1273 \\ 0,0323 \\ 0,0189 \\ 0,0323 \\ -0,0232 \end{bmatrix} s^{-1}.$$

e) Die Varianzen der geschätzten Stützstellen ergeben sich aus der Beziehung

$$\text{var}\{\hat{g}(i)\} = \frac{1}{T^2} p_{ii} \sigma_z^2 \quad \text{mit} \quad p_{ii} = 1/8$$

für das erste System zu

$$\text{var}\{\hat{g}(i)\} = \frac{1}{8 \cdot 1,32 s^2} 0,1^2 = 7,4 \cdot 10^{-4} s^{-2}; \quad i = 0, \dots, 6$$

und für das zweite System zu

$$\text{var}\{\hat{g}(i)\} = \frac{1}{8 \cdot 3^2 s^2} 0,1^2 = 1,4 \cdot 10^{-4} s^{-2}; \quad i = 0, \dots, 6.$$

Für die Kovarianzen ergibt sich

$$\text{cov}\{\hat{g}(i), \hat{g}(j)\} = 0; \quad i, j = 0, \dots, 6, \quad i \neq j,$$

da der verwendete Versuchsplan orthogonal ist.

- f) Die geschätzten Stützstellen der Gewichtsfunktionen sind im Bild L.23 dargestellt.
g) Die Verstärkung entspricht der Fläche, die durch die Gewichtsfunktion eingeschlossen wird.

Daraus folgt als allgemeine Vorschrift

$$\hat{K} = T \sum_{i=0}^m \hat{g}(i).$$

Für das erste System ergibt sich somit

$$\hat{K} = 1,3 s \cdot 0,765 s^{-1} = 0,994$$

und für das zweite System

$$\hat{K} = 3 s \cdot 0,33 s^{-1} = 0,991.$$

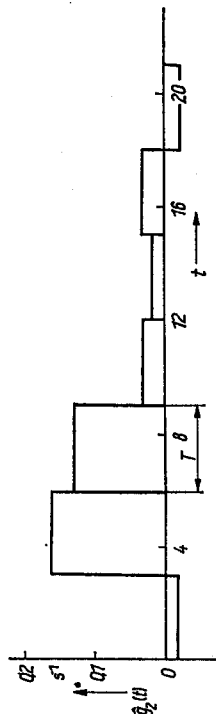
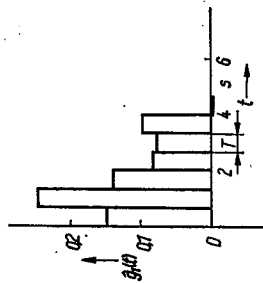


Bild L.23. Geschätzte Gewichtsfunktionen der Teilstrecken zu Aufgabe 6.2

Aufgabe 6.2

- a) Die Testfolge und die gemessenen Ausgangswerte sind im Bild L.24 dargestellt.
b) Der Regressionsansatz lautet:

$$\hat{x}(k) = \hat{b}_1 u(k-1) - \hat{a}_1 x(k-1).$$

Die Parameter des Differenzgleichungsmodells ergeben sich aus der Schätzvorschrift

$$\hat{s} = [M^T M]^{-1} M^T x$$

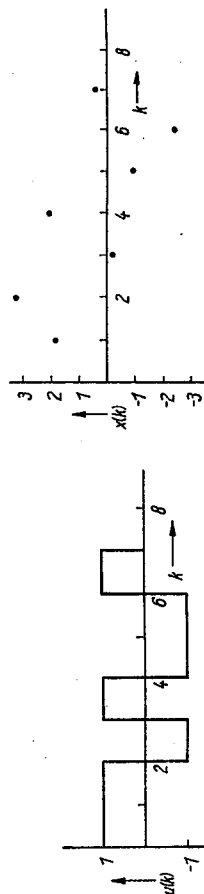


Bild L.24. Verlauf der Testfolge und der gemessenen Ausgangswerte zu Aufgabe 6.2

mit

$$M = \begin{bmatrix} +1 & 0 \\ +1 & 1,89 \\ -1 & 3,23 \\ +1 & -0,13 \\ -1 & 2,04 \\ -1 & 2,04 \\ -1 & -0,86 \\ +1 & -2,42 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1,89 \\ 3,23 \\ -0,13 \\ 2,04 \\ -0,86 \\ -2,42 \\ 0,44 \end{bmatrix}.$$

Daraus ergeben sich die Matrizen

$$M^T M = \begin{bmatrix} 7 & -5,07 \\ -5,07 & 24,78 \end{bmatrix}, \quad [M^T M]^{-1} = \begin{bmatrix} 0,168 & 0,034 \\ 0,034 & 0,047 \end{bmatrix}$$

sowie der Vektor

$$M^T x = \begin{bmatrix} 10,974 \\ 4,68 \end{bmatrix}.$$

Der Parametervektor $\hat{s}$ ergibt sich dann zu

$$\hat{s} = [M^T M]^{-1} M^T x = \begin{bmatrix} 0,168 & 0,034 \\ 0,034 & 0,047 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10,974 \\ 4,68 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,003 \\ 0,593 \end{bmatrix}.$$

Die geschätzten Parameter sind

$$\hat{b}_1 = 2,003, \quad \hat{a}_1 = -0,593.$$

c) Der geschätzte Ausgang berechnet sich zu

$$\hat{x}(k) = \hat{b}_1 u(k-1) - \hat{a}_1 x(k-1)$$

bzw.

$$\hat{x}(k) = 2,003u(k-1) + 0,593x(k-1).$$

Die aus dieser Gleichung berechneten Werte sind in Tafel L26 enthalten.

d) Die Restsumme S_R ergibt sich aus

$$S_R = \sum_{k=1}^7 (x(k) - \hat{x}(k))^2 = 68,28 \cdot 10^{-3}.$$

Daraus resultiert eine Reststreuung von

$$s_R^2 = \frac{S_R}{n-l-1} = \frac{68,28 \cdot 10^{-3}}{7-2-1} = 17,07 \cdot 10^{-3}.$$

Tafel L26. Schätzung der Ausgangsgröße und ihrer Varianz der Aufgabe 6.2

$u(k-1)$	$x(k-1)$	$x(k)$	$x(k) - \hat{x}(k)$	$[x(k) - \hat{x}(k)]^2$
+1	0	2,003	-0,113	$12,77 \cdot 10^{-3}$
+1	1,89	3,124	0,106	$11,24 \cdot 10^{-3}$
-1	3,23	0,088	-0,042	$1,76 \cdot 10^{-3}$
+1	-0,13	1,926	0,114	$12,99 \cdot 10^{-3}$
-1	2,04	-0,793	-0,067	$4,49 \cdot 10^{-3}$
-1	-0,86	-2,513	0,093	$8,65 \cdot 10^{-3}$
+1	-2,42	0,568	-0,128	$16,38 \cdot 10^{-3}$

e) Die für den Signifikanztest benötigten Varianzen der geschätzten Parameter sind

$$\text{var}\{\hat{b}_1\} = p_{11}s_R^2 = 0,168 \cdot 17,07 \cdot 10^{-3} = 2,87 \cdot 10^{-3},$$

$$\text{var}\{\hat{a}_1\} = p_{22}s_R^2 = 0,047 \cdot 17,07 \cdot 10^{-3} = 0,802 \cdot 10^{-3}.$$

Mit Hilfe des t -Tests wird geprüft, ob sich die geschätzten Parameter signifikant von null unterscheiden:

$$\text{I. } |\hat{b}_1| \geq t_{\alpha/2, f} \sqrt{\text{var}\{\hat{b}_1\}}; \quad \alpha = 5\%, \quad f = m - l - 1 = 4; \quad t_{2,5\%,4} = 2,776,$$

$$2,003 \geq 2,776 \cdot 5,36 \cdot 10^{-2} = 0,1488.$$

Die geforderte Bedingung ist erfüllt; der Parameter $\hat{b}_1$ ist signifikant.

$$\text{II. } |\hat{a}_1| = t_{2,5\%,4} \sqrt{\text{var}\{\hat{a}_1\}},$$

$$0,607 \geq 2,776 \cdot 2,83 \cdot 10^{-2} = 0,0786.$$

Die geforderte Bedingung ist erfüllt; der Parameter $\hat{a}_1$ ist ebenfalls signifikant.

Die Toleranzbänder für die geschätzten Parameter ergeben sich aus den Beziehungen

$$|b_1 - \hat{b}_1| < t_{2,5\%,4} \sqrt{\text{var}\{\hat{b}_1\}} = 2,776 \cdot 5,36 \cdot 10^{-2} = 0,1488;$$

$$1,854 < b_1 < 2,152,$$

$$|a_1 - \hat{a}_1| < t_{2,5\%,4} \sqrt{\text{var}\{\hat{a}_1\}} = 2,776 \cdot 2,83 \cdot 10^{-2} = 0,0786;$$

$$-0,672 < a_1 < -0,514.$$

Tafel A 2

t-Verteilung [$t_{\alpha, f}$ und $t_{1-\alpha, f}$]

Anzahl der Freiheitsgrade f	Irrtumswahrscheinlichkeit α für zweiseitige Fragestellung			
	0,10	0,05	0,02	0,01
1	6,31	12,7	31,82	63,7
2	2,92	4,30	6,97	9,92
3	2,35	3,18	4,54	5,84
4	2,13	2,78	3,75	4,60
5	2,01	2,57	3,37	4,03
6	1,94	2,45	3,14	3,71
7	1,89	2,36	3,00	3,50
8	1,86	2,31	2,90	3,36
9	1,83	2,26	2,82	3,25
10	1,81	2,23	2,76	3,17
11	1,80	2,20	2,72	3,11
12	1,78	2,18	2,68	3,05
13	1,77	2,16	2,65	3,01
14	1,76	2,14	2,62	2,98
15	1,75	2,13	2,60	2,95
16	1,75	2,12	2,58	2,92
17	1,74	2,11	2,57	2,90
18	1,73	2,10	2,55	2,88
19	1,73	2,09	2,54	2,86
20	1,73	2,09	2,53	2,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83
22	1,72	2,07	2,51	2,82
23	1,71	2,07	2,50	2,81
24	1,71	2,06	2,49	2,80
25	1,71	2,06	2,49	2,79
30	1,70	2,04	2,46	2,75
60	1,67	2,00	2,39	2,66
120	1,66	1,98	2,36	2,62
∞	1,64	1,96	2,33	2,58
Irrtumswahrscheinlichkeit α für einseitige Fragestellung				0,005
				0,05

Tafel A 1. Ordinatenwerte der normierten Normalverteilung

 $x^* = (X - \mu)/\sigma$; NV (0, 1)

x^*	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	.39894	.39892	.39886	.39876	.39862	.39844	.39822	.39797	.39767	.39733
0,1	.39695	.39654	.39608	.39559	.39505	.39448	.39387	.39322	.39253	.39181
0,2	.39104	.39024	.38940	.38853	.38762	.38667	.38568	.38466	.38361	.38251
0,3	.38139	.38023	.37903	.37780	.37654	.37524	.37391	.37255	.37115	.36973
0,4	.36827	.36678	.36526	.36371	.36213	.36053	.35889	.35723	.35553	.35381
0,5	.35207	.35029	.34849	.34667	.34482	.34294	.34105	.33912	.33718	.33521
0,6	.33322	.33121	.32918	.32713	.32506	.32297	.32086	.31874	.31659	.31443
0,7	.31225	.31006	.30785	.30563	.30339	.30114	.29887	.29659	.29431	.29200
0,8	.28969	.28737	.28504	.28269	.28034	.27798	.27562	.27324	.27086	.26848
0,9	.26609	.26369	.26129	.25888	.25647	.25406	.25164	.24923	.24681	.24439
1,0	.24197	.23955	.23713	.23471	.23230	.22988	.22747	.22506	.22265	.22025
1,1	.21785	.21546	.21307	.21069	.20831	.20594	.20357	.20121	.19886	.19652
1,2	.19419	.19186	.18954	.18724	.18494	.18265	.18037	.17810	.17585	.17360
1,3	.17137	.16915	.16694	.16474	.16256	.16038	.15822	.15608	.15395	.15183
1,4	.14937	.14764	.14556	.14350	.14146	.13943	.13742	.13542	.13344	.13147
1,5	.12952	.12758	.12566	.12376	.12188	.12001	.11816	.11632	.11450	.11270
1,6	.11092	.10915	.10741	.10567	.10396	.10226	.10059	.09893	.09728	.09566
1,7	.09405	.09246	.09089	.08933	.08780	.08628	.08478	.08329	.08183	.08038
1,8	.07895	.07754	.07614	.07477	.07341	.07206	.07074	.06943	.06814	.06687
1,9	.06562	.06438	.06316	.06195	.06077	.05959	.05844	.05730	.05618	.05508
2,0	.05399	.05292	.05186	.05082	.04980	.04879	.04780	.04682	.04586	.04491
2,1	.04398	.04307	.04217	.04128	.04041	.03955	.03871	.03788	.03706	.03626
2,2	.03547	.03470	.03394	.03319	.03246	.03174	.03103	.03034	.02965	.02898
2,3	.02833	.02768	.02705	.02643	.02582	.02522	.02463	.02406	.02349	.02294
2,4	.02239	.02186	.02134	.02083	.02033	.01984	.01936	.01889	.01842	.01797
2,5	.01753	.01709	.01667	.01625	.01585	.01545	.01506	.01468	.01431	.01394
2,6	.01358	.01323	.01289	.01256	.01223	.01191	.01160	.01130	.01100	.01071
2,7	.01042	.01014	.00987	.00961	.00935	.00909	.00885	.00861	.00837	.00814
2,8	.00792	.00770	.00748	.00727	.00707	.00687	.00668	.00649	.00631	.00613
2,9	.00595	.00578	.00562	.00545	.00530	.00514	.00499	.00485	.00471	.00457
3,0	.00443	.00327	.00238	.00172	.00123	.00087	.00061	.00042	.00029	.00020

Tafel A 3. χ^2 -Verteilung [$\chi^2_{\alpha, f}$]

Anzahl der Freiheitsgrade f	Irrtumswahrscheinlichkeit α							
	0,99	0,975	0,95	0,05	0,025	0,01		
1	0,00016	0,00098	0,0039	3,8	5,0	6,6		
2	0,020	0,051	0,103	6,0	7,4	9,2		
3	0,115	0,216	0,352	7,8	9,4	11,3		
4	0,297	0,484	0,711	9,5	11,1	13,3		
5	0,554	0,831	1,15	11,1	12,8	15,1		
6	0,872	1,24	1,64	12,6	14,4	16,8		
7	1,24	1,69	2,17	14,1	16,0	18,5		
8	1,65	2,18	2,73	15,5	17,5	20,1		
9	2,09	2,70	3,33	16,9	19,0	21,7		
10	2,56	3,25	3,94	18,3	20,5	23,2		
11	3,05	3,82	4,57	19,7	21,9	24,7		
12	3,57	4,40	5,23	21,0	23,3	26,2		
13	4,11	5,01	5,89	22,4	24,7	27,7		
14	4,66	5,63	6,57	23,7	26,1	29,1		
15	5,23	6,26	7,26	25,0	27,5	30,6		
16	5,81	6,91	7,96	26,3	28,8	32,0		
17	6,41	7,56	8,67	27,6	30,2	33,4		
18	7,01	8,23	9,39	28,9	31,5	34,8		
19	7,63	8,91	10,1	30,1	32,9	36,2		
20	8,26	9,59	10,9	31,4	34,2	37,6		
21	8,90	10,3	11,6	32,7	35,5	38,9		
22	9,54	11,0	12,3	33,9	36,8	40,3		
23	10,2	11,7	13,1	35,2	38,1	41,6		
24	10,9	12,4	13,8	36,4	39,4	43,0		
25	11,5	13,1	14,6	37,7	40,6	44,3		
30	15,0	16,8	18,5	43,8	47,0	50,9		
40	22,2	24,4	26,5	55,8	59,3	63,7		
50	29,7	32,4	34,8	67,5	71,4	76,2		
60	37,5	40,5	43,2	79,1	83,3	88,4		
70	45,4	48,8	51,7	90,5	95,0	100,4		
80	53,5	57,2	60,4	101,9	106,6	112,3		
90	61,8	65,6	69,1	113,1	118,1	124,1		
100	70,1	74,2	77,9	124,3	129,6	135,8		

Tafel A 4. F-Verteilung F_{α, f_1, f_2} für $\alpha = 0,05$

f_2	f_1	2	3	4	5	6	12	24	30	40	∞
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	243,9	249,0	250	251	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,41	19,45	19,46	19,47	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,74	8,64	8,62	8,60	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	5,91	5,77	5,74	5,71	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,68	4,53	4,50	4,46	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,00	3,84	3,81	3,77	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,57	3,41	3,38	3,34	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,28	3,12	3,08	3,05	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,07	2,90	2,86	2,82	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	2,91	2,74	2,70	2,67	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,79	2,61	2,57	2,53	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,69	2,50	2,46	2,42	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,60	2,42	2,38	2,34	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,53	2,35	2,31	2,27	2,13
15	4,51	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,48	2,29	2,25	2,21	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,42	2,24	2,20	2,16	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,38	2,19	2,15	2,11	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,34	2,15	2,11	2,07	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,31	2,11	2,07	2,02	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,28	2,08	2,04	1,99	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,25	2,05	2,00	1,96	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,23	2,03	1,98	1,93	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,20	2,00	1,96	1,91	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,18	1,98	1,94	1,89	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,16	1,96	1,92	1,87	1,71
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,09	1,89	1,84	1,79	1,62
40	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	1,92	1,70	1,63	1,59	1,39
60	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	1,83	1,61	1,55	1,46	1,25
120	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,75	1,52	1,46	1,35	1,00

Tafel A 5. F-Verteilung F_{α, f_1, f_2} für $\alpha = 0,01$

f_2	f_1	1	2	3	4	5	6	12	24	30	40	∞
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	6106	6234	6261	6287	6366	
2	98,49	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,42	99,46	99,47	99,47	99,50	
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,05	26,60	26,50	26,41	26,12	
4	21,20	18,69	16,69	15,32	14,37	13,93	13,84	13,74	13,84	13,74	13,46	
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	9,89	9,47	9,38	9,29	9,02	
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	7,72	7,31	7,23	7,14	6,88	
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,47	6,07	5,99	5,91	5,65	
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	5,67	5,28	5,20	5,12	4,86	
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,11	4,73	4,65	4,57	4,31	
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	4,71	4,33	4,25	4,17	3,91	
11	9,65	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,40	4,02	3,94	3,86	3,60	
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,16	3,78	3,70	3,62	3,36	
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	3,96	3,59	3,51	3,43	3,16	
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	3,80	3,43	3,35	3,27	3,00	
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	3,67	3,29	3,21	3,13	2,87	
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	3,55	3,18	3,10	3,02	2,75	
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,45	3,08	3,00	2,92	2,65	
18	8,28	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,37	3,00	2,92	2,84	2,57	
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,30	2,92	2,84	2,76	2,49	
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,23	2,86	2,78	2,69	2,42	
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,17	2,80	2,72	2,63	2,36	
22	7,94	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,12	2,75	2,67	2,58	2,31	
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,07	2,70	2,62	2,54	2,26	
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,03	2,66	2,58	2,49	2,21	
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	2,99	2,62	2,54	2,45	2,17	
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	2,84	2,47	2,38	2,30	2,01	
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,50	2,12	2,03	1,94	1,60	
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,34	1,95	1,86	1,76	1,38	
∞	6,64	4,60	3,78	3,32	3,02	2,80	2,18	1,79	1,70	1,59	1,00	

Tafel A 6. Kritische Korrelationskoeffizienten

Freiheitsgrad	10%	5%	1%	0,1%
1	0,988	0,997	1,000	1,000
2	0,900	0,950	0,990	0,999
3	0,805	0,878	0,959	0,991
4	0,729	0,811	0,917	0,974
5	0,669	0,754	0,875	0,951
6	0,621	0,707	0,834	0,925
7	0,581	0,666	0,798	0,898
8	0,549	0,632	0,765	0,872
9	0,521	0,602	0,735	0,847
10	0,497	0,576	0,708	0,823
11	0,476	0,553	0,684	0,801
12	0,457	0,532	0,661	0,780
13	0,441	0,514	0,641	0,760
14	0,426	0,497	0,623	0,742
15	0,412	0,482	0,606	0,725
16	0,400	0,468	0,590	0,709
17	0,389	0,456	0,575	0,693
18	0,379	0,444	0,561	0,679
19	0,369	0,433	0,549	0,665
20	0,360	0,423	0,537	0,652
21	0,352	0,413	0,526	0,640
22	0,344	0,404	0,515	0,629
23	0,337	0,396	0,505	0,618
24	0,330	0,388	0,496	0,607
25	0,323	0,381	0,487	0,597
30	0,296	0,349	0,449	0,554
35	0,275	0,325	0,418	0,519
40	0,257	0,304	0,393	0,489
45	0,243	0,288	0,372	0,465
50	0,231	0,273	0,354	0,443
60	0,211	0,250	0,325	0,408
70	0,195	0,232	0,302	0,380
80	0,183	0,217	0,283	0,357
90	0,172	0,205	0,267	0,338
100	0,164	0,195	0,254	0,321
150	0,134	0,159	0,208	0,264
200	0,116	0,138	0,181	0,230
250	0,104	0,124	0,162	0,206
300	0,095	0,113	0,148	0,188
350	0,088	0,105	0,137	0,175
400	0,082	0,098	0,128	0,164
450	0,077	0,092	0,121	0,154
500	0,073	0,088	0,115	0,146
600	0,067	0,080	0,105	0,134
700	0,062	0,074	0,097	0,124
800	0,058	0,069	0,091	0,116
900	0,055	0,065	0,086	0,109
1000	0,052	0,062	0,081	0,104

Literaturverzeichnis

- Abschnitt 1**
- [1.1] Wiener, N.: Kybernetik, Düsseldorf, Wien: ECON-Verlag 1963
- [1.2] Reinisch, K.: Kybernetische Grundlagen und Beschreibung kontinuierlicher Systeme. Berlin: VEB Verlag Technik 1974
- [1.3] Wernstedt, J.: Methoden und Erfahrungen zur Prozesssteuerung und Entscheidungsfindung durch den Menschen auf der Grundlage von Beratungs-/Expertensystemen. messen, steuern, regeln 28 (1985) 7, S. 295-298
- [1.4] Proc. der IFAC-Symposien „Identification and System Parameter Estimation“. Prag 1967/1970, Den Haag 1973, Tbilisi 1976, Darmstadt 1979, Washington 1982, York 1985, Peking 1988
- [1.5] Åström, K.J.; Eykhoff, P.: Systemidentification - a survey. Automatic 7 (1971) S. 123/162
- [1.6] Bergmann, S., u.a.: PROFIS - ein Prozessführungssystem zur Herstellung integrierter Schaltkreise. 30. Internat. Wiss. Koll. der TH Ilmenau 1985
- [1.7] Scharf, A.; Trippler, D.: Entwicklung und Aufbau eines Prozessführungssystems zur Herstellung integrierter Schaltkreise (PROFIS) für die Mengensteuerung einer Zelle im VEB MME. Diss. A., TH Ilmenau 1986
- [1.8] Schmidt, M.; Puta, H.; Reinisch, K.: Contribution to the optimization of the plant growth factors in the greenhouse and in the open land. 9. IFAC-Weltkongress, Budapest 1984
- [1.9] Otto, P.; Sokollik, K.; Wernstedt, J.; Dietzmann, M.: Innentemperatur-Vorhersagemodell zur Mikrorechnersteuerung von Gewächshäusern. messen, steuern, regeln 25 (1982) 11, S. 602-608
- [1.10] Otto, P.; Sokollik, K.; Wernstedt, J.; Dietzmann, M.: Development and testing of a inside temperature model for a microcomputer controlled greenhouse. Preprints 9. IFAC-Weltkongress, Budapest 1984
- [1.11] Dietzmann, M.: Untersuchung eines Mehrkanal-Mikroprozessors in der LPG Frühgemüsezentrum Dresden als Grundlage für den Einsatz von Mikrorechnern zur Klimasteuerung in Gewächshäusern. Diss. B. Ing.-Schule Berlin-Wartenberg 1985
- [1.12] Straskaba, M.; Gnauck, A.: Aquatische Ökosysteme. Jena: VEB Gustav Fischer Verlag 1983
- [1.13] Uhlmann, D.: Hydrobiologie. 2. Aufl., Jena: VEB Gustav Fischer Verlag 1982
- [1.14] Gnauck, A.; Wernstedt, J.; Winkler, W.: Zur Bildung mathematischer Modelle limnischer Ökosysteme mittels rekursiver Schätzverfahren. Int. Revue ges. Hydrobiologie 61 (1976) 6, S. 609-626
- [1.15] Gnauck, A.; Wernstedt, J.; Winkler, W.: Zur Erstellung von Wassergütermodellen für Talsperren mittels rekursiver Schätzverfahren. Acta hydrochim. hydrobiol. 3 (1975) 4, S. 381-384
- [1.16] Wernstedt, J.; Winkler, W.: Modellierung des Sauerstoffgehaltes der Spree in der Hauptstadt der DDR - Berlin. Bericht, TH Ilmenau 1979
- [1.17] Hoffmeyer-Zlotnick, H.J.; Wernstedt, J.: Global catchment area model for an operational water quantity forecast-pilot project: river basin of the Werra/GDR. Proc. 7. IFAC-Symposium „Identification and Systemparameter Estimation“ York 1985
- [1.18] Hoffmeyer-Zlotnick, H.J.; Seifert, A.; Wernstedt, J.: Drawing quantity forecast of river basins. Proc. VIII. IFAC-Kongress Kyoto 1981
- [1.19] Hoffmeyer-Zlotnick, H.J.; Seifert, A.; Wernstedt, J.: Operative Wassermengenvorhersage für das Flußgebiet der Werra. Bericht, TH Ilmenau 1975-1982
- [1.20] Böhnhardt, G.; Politz, W.: Signalanalyse und Modellbildung des statischen Verhaltens eines kontinuierlichen Fermentationsverfahrens. Diplomarbeit, TH Ilmenau 1973
- [1.21] Zimmermann, W.: Zu Problemen der Anwendung der Korrelations- und der Regressionsanalyse zur statischen Identifikation kontinuierlicher technologischer Prozesse. Diss. A., TH Ilmenau 1977
- [1.22] Kiesewetter, M.: Entwurf und Erprobung des Beratungssystems „GLUCON“ zur peripheren Blutglukoseführung insulinpflichtiger Diabetiker. Diss. TH Ilmenau 1985
- [1.23] Kiesewetter, M.; Wernstedt, J.; Lenke, K.; Möricke, R.: Entwurf und Erprobung einer rechnergestützten Steuerung des Glukoselevels des Menschen mit dem Beratungssystem „GLUCON“. 30. Internat. Wiss. Koll. der TH Ilmenau 1985
- [1.24] Möricke, R.; Kiesewetter, M.; Wernstedt, J.: Klinische Anforderungen und Erfahrungen mit dem Steuer- und Beratungssystem GLUCON. Wiss. Tagung der AdW: Bioelekt. Sensoren. Berlin 1985
- [1.25] Wernstedt, J.; Beyer, J.; Otto, P.: Identifikation und Modellierung des dynamischen Verhaltens des Herz-Kreislaufsystems des Menschen unter Verwendung aufgeprägter Belastungsfolgen. Bericht, TH Ilmenau 1977
- [1.26] Traber, A.; Beyer, J.; Tiedt, N.; Wernstedt, J.: Ergometrische Untersuchungen mit nichtlinearen Testverfahren. Ergebn. exp. Med. 41 (1982) S. 81-86
- [1.27] Beyer, J.; Wernstedt, J.; Zwiener, U.: Versuche zur Modellierung des Blutdruckregelkreises des Menschen aus optimalen binären Belastungsfolgen. In: Zwiener, U., Signaltheor. Methoden und Modelle in der Medizin. Jena: VEB Gustav Fischer Verlag 1977
- [1.28] Traber, A.: Ein Beitrag zur Erstellung nichtlinearer Modelle des Herz-Kreislaufverhaltens des Menschen bei Belastung auf dem Fahrradergometer. Diss. TH Ilmenau 1984
- [1.29] Michels, R.; Wernstedt, J.; Tiedt, N.: Experimentelle Systemanalyse der orthostatischen Herzfrequenzregulation mit Differenzgleichungen unter Verwendung von Ilmenauer optimalen Testfolgen (ILMOS). 30. Internat. Wiss. Koll. der TH Ilmenau 1985
- [1.30] Michels, R.: Entwicklung und Erprobung von Strategien zur Ermittlung von Differenzgleichungsmodellen für die Beschreibung von kardiovaskulären Funktionsparametern. Diss. A., TH Ilmenau 1987
- [1.31] Wernstedt, J.: Ein Beitrag zur Entwicklung und Erprobung von Verfahren zur prozeßgekoppelten statistischen Modellbildung zeitvarianter multivariabler Systeme. Diss. B., TH Ilmenau 1978
- [1.32] Böhme, D.; Winkler, W.; Wernstedt, J.: Ein Programmsystem zur rechnergestützten Prozeßanalyse - EXPRAN. TH Ilmenau 1982
- [1.33] Trippler, D.; Otto, P.; Seifert, A.; Wernstedt, J.: Ein dialogorientiertes Programmsystem zur rechnergestützten Prozeßanalyse - DIOPRAN. TH Ilmenau 1986
- [1.34] Lee, R.: Optimal estimation, identification and control. MIT Press, Research Monograph 28 (1964)
- [1.35] Deutsch, R.: Estimation theory. Englewood Cliffs (New Jersey): Prentice Hall 1965
- [1.36] Albert, A.; Gardner, L.A.: Stochastic approximation and nonlinear regression. Cambridge (Mass.) 1967
- [1.37] Strobel, H.: Systemanalyse mit determinierten Testsignalen. Berlin: VEB Verlag Technik 1968
- [1.38] Åström, K.: Introduction to stochastic control theory. New York: Academic Press 1970
- [1.39] Nalimov, V.V.: Teorija eksperimenta. Moskau: Nauka 1971
- [1.40] Isermann, R.: Experimentelle Analyse der Dynamik von Regelsystemen. Mannheim: Bibliografisches Institut 1971
- [1.41] Zypkin, I.S.: Grundlagen der Theorie lernender Systeme. Berlin: VEB Verlag Technik 1972
- [1.42] Bandemer, H.; Bellmann, A.; Jung, W.; Richter, K.: Optimale Versuchsplanung I. Berlin: Akademie-Verlag 1973
- [1.43] Hartmann, K.; Letzki, E.; Schäfer, W.: Statistische Versuchsplanung in der Stoffwirtschaft. Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1974
- [1.44] Isermann, R.: Prozessidentifikation. Berlin: Springer-Verlag 1974
- [1.45] Unbehauen, H.; Göhring, E.; Bauer, B.: Parameterschätzverfahren zur Systemidentifikation. München: R. Oldenbourg Verlag 1974
- [1.46] Strobel, H.: Experimentelle Systemanalyse. Berlin: Akademie-Verlag 1975
- [1.47] Eykhoff, P.: Systemparameter and state estimation. London: J. Wiley & Sons 1976
- [1.48] Bandemer, H.; Näher, W.: Theorie und Anwendung der optimalen Versuchsplanung II. Berlin: Akademie-Verlag 1980
- [1.49] Söndersröm, T.; Stoica, P.: Instrumental variable methods of system identification. Berlin: Springer-Verlag 1983
- [1.50] Ivachnenko, A.G.; Müller, J.A.: Selbstorganisation von Vorhersagemodellen. Berlin: VEB Verlag Technik 1984
- [1.51] Young, P.C.: Recursive estimation and timeseries analysis: an introduction. Berlin: Springer-Verlag 1984
- [1.52] Unbehauen, H.: Regelungstechnik Band I, II, III. Braunschweig, Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn 1985
- [1.53] Wede, J.; Werner, D.: Echtzeitprozeßmodelle auf der Basis von Parameterschätzverfahren. Berlin: VEB Verlag Technik 1985
- [1.54] Isermann, R.: Identifikation dynamischer Systeme. Berlin: Springer-Verlag 1988

Abschnitt 2

- [2.1] Cramer, H.: Mathematical methods of statistics. Princeton N. J.: Princeton University Press 1963
- [2.2] Smirnow, N. W.: *Dunin-Barkowski, J. W.*: Mathematische Statistik in der Technik. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1963
- [2.3] Storm, R.: Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik und statistische Qualitätskontrolle. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1965
- [2.4] Fiz, M.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1965
- [2.5] Weber, E.: Grundriß der biologischen Statistik. Jena: Gustav-Fischer-Verlag 1967
- [2.6] Lindner, A.: Statistische Methoden für Naturwissenschaftler, Mediziner und Ingenieure. 4. Aufl. Basel 1964
- [2.7] Rasch, D.: Elementare Einführung in die mathematische Statistik. 2. Aufl. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1970
- [2.8] Gnedenko, B. W.: Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. 6. Aufl. Berlin: Akademie-Verlag 1971
- [2.9] Müller, H.: *Neumann, P.*; *Storm, R.*: Tafeln der mathematischen Statistik. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1979
- [2.10] Müller, P.: Lexikon der Stochastik. 3. Aufl. Berlin: Akademie-Verlag 1980

Abschnitt 3

- [3.1] Reinisch, K.: Analyse und Synthese kontinuierlicher Steuerungssysteme. Berlin: VEB Verlag Technik 1979
- [3.2] Günther, M.: Zeitdiskrete Steuerungssysteme. Berlin: VEB Verlag Technik 1986
- [3.3] Lange, F. H.: Korrelationselektronik. Berlin: VEB Verlag Technik 1962
- [3.4] Lange, F. H.: Signale und Systeme (Bd. 1 und 3). Berlin: VEB Verlag Technik 1966/1971
- [3.5] Schlitt, H.: Stochastische Vorgänge in linearen und nichtlinearen Systemen. Berlin: VEB Verlag Technik 1968
- [3.6] Solodownikow, W. W.: Einführung in die statistische Dynamik linearer Regulationssysteme. Berlin: VEB Verlag Technik 1963
- [3.7] Lorenz, G.: Störgrößenanalyse. Berlin: VEB Verlag Technik 1985
- [3.8] Leonhard, W.: Statistische Analyse linearer Regulationssysteme. Stuttgart: B. G. Teubner 1973
- [3.9] Box, G. E. P.; Jenkins, G. M.: Time series analysis forecasting and control. San Francisco 1970
- [3.10] Anderson, T. W.: The statistical analysis of time series. New York: J. Wiley 1971
- [3.11] Andel, J.: Statistische Analyse von Zeitreihen. Berlin: Akademie-Verlag 1984
- [3.12] Achilles, D.: Die Fourier-Transformation in der Signalverarbeitung. Berlin: Springer-Verlag 1985
- [3.13] Koopmans, T.: Linear regression analysis of economic time series. De Erven, F. Bohn, n. v. Harlem 1937
- [3.14] Toubenbourg, H.; Rödel, E.: Mathematisch-statistische Methoden in der Ökonomie. Berlin: Akademie-Verlag 1978
- [3.15] Birkenfeld, W.: Methoden zur Analyse von kurzen Zeitreihen. Basel: Birkhäuser Verlag 1977
- [3.16] Knopp, K.: Theorie und Anwendung unendlicher Reihen. Berlin: Springer-Verlag 1964
- [3.17] Jenkins, G. M.; Priestley, M. B.: The spectral analysis of time series. Journal of the royal statistical society 19 (1975) 1, S. 1-12
- [3.18] v. Meyzyski, W.: Ein Beitrag zur Ermittlung von Kennfunktionen und Modellen für stochastisch gestörte Signale. Diss. A, TH Ilmenau 1981
- [3.19] Chatfield, C.: Analyse von Zeitreihen. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsges. 1982
- [3.20] Ljung, G. M.; Box, G. E. P.: The likelihood function of stationary autoregressive-moving-average models. Biometrika 66 (1979) S. 265-270
- [3.21] Ogier, R. G.; Wong, E.: Recursive linear smoothing of two-dimensional random fields. IEEE Trans. Inf. Theory 27 (1981) 3, S. 77-83
- [3.22] Hannan, E. J.: Recursive estimation based on ARMA-models. The annals of statistics 8 (1980) 4, S. 762-777
- [3.23] Stearns, S. D.: Digitale Verarbeitung analoger Signale. München: R. Oldenbourg 1979
- [3.24] Schwarz, H.: Optimale Regelung und Filterung/Zeitdiskrete Regulationssysteme. Berlin: Akademie-Verlag 1981

Abschnitt 4

- [4.1] Sirefc, V.: Approximation aperiodischer Übergangscharakteristiken. messen, steuern, regeln 3 (1960) 3, S. 115-124
- [4.2] Radtke, M.: Zur Ermittlung der statischen und dynamischen Kennwerte von linearen und nicht-

linearen Übertragungsgliedern aus aufzeichneten Übergangsfunktionen. Diss. A, TH Ilmenau 1967

- [4.3] Sporer, J.: Kontinuierliche Steuerungen (Arbeitsbuch). Berlin: VEB Verlag Technik 1977
- [4.4] Schwarze, G.: Übersicht über die Zeitprozentkennwertmethode zur Ermittlung der Übertragungsfunktion aus der Gewichtsfunktion, Übergangsfunktion oder Anstiegsantwort. messen, steuern, regeln 8 (1965) 10, S. 336-359
- [4.5] Sinajin, M. P.: Opređenje koeficijentov predatočnych funkcij linearizovanuych zvenev i sistem avtoregulirovanija. Avtomatika i Telemekhanika XVII (1957) 6, S. 514-528
- [4.6] Schwarze, G.: Regelungstechnik für Praktiker. Berlin: VEB Verlag Technik 1977
- [4.7] Unbehauen, H.: Ein graphisch-analytisches Verfahren zur Bestimmung des Frequenzganges aus der Übergangsfunktion. Regelungstechnik 11 (1963) 12, S. 551-555
- [4.8] Werner, G. W.: Entwicklung einfacher Verfahren zur Kennwertmittlung an linearen industriellen Regelstrecken mit Testsignalen. Diss. A, TH Ilmenau 1965
- [4.9] Wilfer, H. H.: Signal- und Frequenzganganalyse an stark gestörten Systemen. Berlin: VEB Verlag Technik 1969
- [4.10] Van den Bas, A.: Construction of binary multifrequency test signals 1. IFAC Symposium „Identification and Parameter Estimation“, Prag 1967
- [4.11] Bode, H. W.: Network analysis and feedback amplifier design. New York. D. van Nostrand Company, Inc. 1945
- [4.12] Truxal, J. G.: Entwurf automatischer Regelsysteme. München: R. Oldenbourg Verlag 1960
- [4.13] Szveda, T.: Metoda pomiaru współczynników przepusowosci członkow dynamicznych. Arch. Automatiki i Telemekhaniki 3 (1958) 1/2, S. 3-15
- [4.14] Brammer, K.; Siffin, G.: Kalman-Bucy-Filter; Deterministische Beobachtung und stochastische Filterung. München: R. Oldenbourg Verlag 1975
- [4.15] Föllinger, O.: Regelungstechnik. Berlin: AEG-Telefunken 1980
- [4.16] Luenberger, D. G.: Observers for multivariable systems. IEEE Trans. on Autom. Control AC-11 (1966) S. 190-197
- [4.17] Ackermann, J.: Einführung in die Theorie der Beobachter. Regelungstechnik 24 (1976) S. 217-226
- [4.18] Wonham, W. H.: On pole assignment in multiinput controllable linear systems. IEEE Trans. on Autom. Control 12 (1967) S. 600-665

Abschnitt 5

- [5.1] Zurnühl, R.: Praktische Mathematik. Berlin: Springer-Verlag 1964
- [5.2] Kuo, S. S.: Numerical methods and computers. Massachussets: Addison Wesley 1965
- [5.3] Faddeev, D. K.; Faddeeva, N. N.: Numerische Methoden der linearen Algebra. München: R. Oldenbourg Verlag 1964
- [5.4] Gantmacher, F. R.: Matrizenrechnung, Bd. 1 und 2. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1965
- [5.5] Schwarz, H.; Rutishauser, H.; Stiefel, E.: Matrizennumerik. Stuttgart: Teubner Verlag 1968
- [5.6] Hofer, E.; Lundersädt, R.: Numerische Methoden der Optimierung. München: R. Oldenbourg Verlag 1975
- [5.7] Householder: Principles of numerical analysis. New York: McGraw Hill 1953
- [5.8] Powell, N. J.: A method for minimizing a sum of squares of nonlinear functions without calculating derivatives. Computer 1. 7 (1964), S. 303-307
- [5.9] Fox, L.: Optimization methods for engineering design. London: Addison Wesley 1971
- [5.10] Fletcher, R.: Optimization. New York: Academic Press 1968
- [5.11] Pierre, D. A.: Optimization theory with applications. New York: John Wiley 1969
- [5.12] Wilde, D. J.: Optimum seeking methods. New York: Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1964
- [5.13] Marquardt, D. W.: An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters. SIAM Journ. of Control 11 (1963) S. 431-441
- [5.14] Bard, Y.: Comparison of gradient methods for the solution of nonlinear parameter estimation problems. SIAM Journ. on Num. Analysis 7 (1970) S. 157-186
- [5.15] Wismer, D. A.; Chattergy, R.: Introduction to nonlinear Optimization. North-Holland Series in System Science and Engineering 1978
- [5.16] Brooks, S. H.: A Discussion of random methods for seeking maxima. Operation Research 6 (1958) S. 244-251
- [5.17] Rastrigin, K. A.: Algoritmy i programmy slutschainogo poiska. Riga: Smanje 1969
- [5.18] White, R. C.: A survey of random methods for parameter estimation. Eindhoven University of Technologie, Eindhoven 1971, Report Nr. 70-E-16

- [5.19] Schwefel, H. P.: Numerische Optimierung von Computer-Modellen mittels der Evolutionsstrategie. Basel: Birkhäuser Verlag 1977
- [5.20] Clarke, D. W.: Generalized least-squares estimation of the parameters of a dynamic model. 1. IFAC-Symposium Identification and Parameter Estimation, Prag 1967
- [5.21] Gastinel, N.: Lineare numerische Analysis. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1972
- [5.22] Wernstedt, J.: Zur Parameterschätzung statischer Systeme mittels rekursiver Verfahren. messen, steuern, regeln 16 (1973) 1, S. 25-27
- [5.23] Robbins, H.; Monro, S.: A stochastic approximation method. Ann. Math. Stat. 22 (1951) S. 400-407
- [5.24] Kiefer, J.; Wolfowitz, J.: Stochastic estimation of the maximum of a regression function. Ann. Math. Stat. 23 (1952) S. 462-466
- [5.25] Dvoretzky, A.: On stochastic approximation. Proceed. Berkeley Symposium of Math. Stat. and Prob. (1956) S. 39-56
- [5.26] Osborn, P. V.: Investigation of a method of adaptive control. Doctor of science thesis, MIT 1961, Report No. T 266
- [5.27] Rake, H.: Selbststellende Systeme nach dem Gradientenverfahren. Diss. A, TH Hannover 1965
- [5.28] Hörli, A. E.: Application of ridge analysis to regression problems. Chem. Eng. Progr. 3 (1962) S. 54-59
- [5.29] Hörli, A. E.; Kennard, R. W.: Ridge regression: Biased estimation for nonorthogonal problems. Technometrics 12 (1970) 1, S. 55-67
- [5.30] Lehmann, G.: Zur statistischen Modellbildung multivariabler technischer Systeme bei korrelierten Einflußgrößen. Diss. A, TH Ilmenau 1975
- [5.31] Voigt, D.: Ein Beitrag zur Parameterschätzung von Systemen mit konzentrierten Parametern unter Verwendung von a-priori Informationen. Diss. A, TH Ilmenau 1974
- [5.32] Krabs, W.: Einführung in die lineare und nichtlineare Optimierung für Ingenieure. Leipzig: Teubner Verlagsgesellschaft 1983
- [5.33] Marquardt, D. W.: An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters. SIAM J. on Num. Analysis 7 (1970) S. 157-186
- [5.34] Gyuerki, J.: Über adaptive Algorithmen zur Ermittlung von linearen Modellen. XV. IWK der TH Ilmenau 1970
- [5.35] Lindner, A.: Plänen und Auswerten von Versuchen. 3. Aufl. Basel: Verlag Birkhäuser 1968
- [5.36] Krug, G. K.: Planirovaniye eksperimenta. Moskva: Nauka 1966
- [5.37] Lee, W.: Experimental design and analysis. San Francisco: Freeman and Co. 1975
- [5.38] Naltimov, V. V.: Theorie des Experimentes - Eine mathematisch-statistische Methodologie des Versuchs. Berlin: VEB Deutscher Landwirtschaftsverlag 1975
- [5.39] Scheffler, E.: Einführung in die Praxis der statistischen Versuchsplanung. 2. Aufl. Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1986
- [5.40] Häiler, G.: Versuchsplanung und statistische Datenanalyse. Berlin: Akademie-Verlag 1976
- [5.41] Box, G. E. P.; Hunter, W. G.; Hunter, J. S.: Statistics for experimenters. New York: Wiley and Sons 1978
- [5.42] Rasch, D.; Herrendörfer, G.: Statistische Versuchsplanung. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1982
- [5.43] Karlin, S.; Studden, W. J.: Optimal experimental design. Ann. Math. Stat. 37 (1966) S. 783-815
- [5.44] Box, G. E.; Hunter, J. S.: Multifactor experimental design for exploring response surfaces. Ann. Math. Stat. 28 (1957) S. 195-141
- [5.45] Box, G. E.; Hunter, J. S.: The 2^{k-p} fractional factorial designs. Teil I, Technometrics 3 (1961) S. 311-351; Teil II, Technometrics 3 (1961) S. 449-458
- [5.46] Plackett, R. L.; Burman, J. P.: The design of optimum multifactorial experiments. Biometrika 33 (1946) S. 305-325
- [5.47] Box, G. E. P.; Lucas, H. L.: Design of experiments in nonlinear situations. Biometrika 46 (1959) S. 77-90
- [5.48] Hartley, H. O.: Smallest composite design for quadratic response surfaces. Biometrics 15 (1959) S. 611-624
- [5.49] Westlake, W. J.: Composite designs based on irregular fractions of factorials. Biometrics 21 (1965) S. 324-336

Abschnitt 6

- [6.1] Volterra, V.: Theory of functionals and of integrals and Integro-differential Equations. Dover, New York: 1959
- [6.2] Krug, G. K.; Sosulin, J. A.; Fatujew, W. A.: Planirowaniye eksperimenta w sadatschach identifikazii ekstrakopoljizik. Moskva: Nauka 1977
- [6.3] Otto, P.: Entwurf und Anwendung eines Systems von optimalen Testsignalfolgen zur Identifikation linearer und nichtlinearer dynamischer Systeme. Diss. B, TH Ilmenau 1987
- [6.4] Wernstedt, J.; Otto, P.; Krug, G. K.; Fatujew, W. A.: Methoden zum Entwurf optimaler Testsignalfolgen für die Identifikation linearer und nichtlinearer dynamischer Systeme. WZ der TH Ilmenau 31 (1985) 5, S. 111-137
- [6.5] Savadko, G. N.: Stochastic approximation methods for identification and control - a survey. IEEE Trans. Aut. Control AC-19 (1974) 6
- [6.6] Sen, A.; Sinha, N. K.: On-line system identification using a combined stochastic approximation and pseudoinverse algorithms. IFAC-Symposium „Stochastic Control“, Budapest 1974, S. 225-231
- [6.7] Kaminskas, V.: Ozenka parametrov diskretnykh sistem klassa Gammastejna. Avtomatika; Telemekhanika (1975) 7
- [6.8] Stoica, P.: On the convergence of an iterative algorithm used for Hammerstein system identification. IEEE Trans. on Autom. Control AC-26 (1981) 4, S. 967-969
- [6.9] Haber, R.; Keviczky, L.: Identification of nonlinear dynamic system. 4. IFAC-Symposium Identification and System Parameter Estimation, Tbilissi 1976, paper S-4, pp. 62-112
- [6.10] Rosenthal, B.: Beitrag zur Identifikation für einfache nichtlineare dynamische Systeme in offener und geschlossener Kette. Diss. A, TH Ilmenau 1985
- [6.11] Schulz, H.: Beitrag zur Echtzeitparameterschätzung von nichtlinearen dynamischen Systemen. Diss. A, TH Magdeburg 1985
- [6.12] Keviczky, L.; Banyasz, C.: On input signal synthesis for linear discrete time systems. 3. IFAC-Symposium Identification and System Parameter Estimation, Den Haag 1973
- [6.13] Eykhoff, P.; van den Boom, A.; van Rede, A.: System identification methods - unification and information - development using template functions. VIII. IFAC-Congress, Kyoto, 1981, vol. VI, p. 83
- [6.14] Wong, K.; Polak, E.: Identification of linear discrete time systems using the IV-method. IEEE Trans. Autom. Control 12 (1969) S. 707-718
- [6.15] Young, P.: An instrumental variable method for realtime identification of a noisy process. Automatica 6 (1970) S. 271-287
- [6.16] Clarke, D.: Generalized LS estimation of the parameters of a dynamic model. 1. IFAC-Symposium Identification in automatic control systems, Prag 1967
- [6.17] Hastings-James, R.; Sage, M.: Recursive GLS procedure for on-line identification of process parameters. Proceed. IEE 116 (1969) S. 2057-2062
- [6.18] Söderström, Th.: Convergence properties of the generalized least-squares identification method. 3. IFAC-Symposium Identification and System Parameter Estimation, Den Haag 1973
- [6.19] Bohlin, T.: The ML-method of identification. IBM Schweden, paper 18. 191, 1968
- [6.20] Gustafsson, J.: Comparison of different methods for identification of industrial processes. Automatica 8 (1972) S. 127-142
- [6.21] Peterka, V.; Halouskova, A.: Tally estimation of Aström modell for stochastic systems. 2. IFAC-Symposium Identification and System Parameter Estimation, Prag 1970
- [6.22] Peterka, V.; Smuk, K.: On-line estimation of dynamic model parameters from input-output data. 4. IFAC-Kongress, Warschau 1969
- [6.23] Mehra, R. K.: Nonlinear system identification selected survey and recent trends. 5. IFAC-Symposium Identification and System Parameter Estimation, Darmstadt 1979
- [6.24] Hoffmeyer-Zlotnik, H. J.: Ein Beitrag zur Schätzung nichtparametrischer Modelle dynamischer Systeme mittels aktiver Experimente. Diss. A, TH Ilmenau, 1976
- [6.25] Zarrap, H. P.: Optimal experiment design for dynamic system identification. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1979
- [6.26] Sokollik, K.: Ein Beitrag zur optimalen Gestaltung von Testfolgen zur Schätzung linearer und einfacher nichtlinearer Differenzgleichungsmodelle. Diss. A, TH Ilmenau 1983
- [6.27] Briggs, P. A.; Godfrey, K. R.: Pseudorandom signals for the dynamic analysis of multivariable systems. Proc. IEE 113 (1966) S. 1259-1267
- [6.28] Godfrey, K. R.: Three level m -sequences. Electronics Letters 2 (1966) S. 241
- [6.29] Levadi, V. S.: Design of input signals for parameter estimation. IEEE Trans. Autom. Control AE-11 (1966) S. 205-211
- [6.30] Tuis, L.: Anwendung von mehrwertigen pseudozufälligen Signalen zur Identifikation von nichtlinearen Regelungssystemen. Schriftenreihe des Lehrstuhls für Meß- und Regelungstechnik, Abt. Maschinenbau, Ruhr-Universität Bochum, Heft 6, 1975
- [6.31] Wiener, N.: Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. New York: Wiley 1949
- [6.32] Kalman, R. E.: A new approach to linear filtering and prediction problems. Trans. ASME, series D, J. Basic Engg. 82 (1960) S. 35-45

- [6.33] Kalman, R.E.; Bucy, R.S.: New results in linear filtering and prediction theory. Trans. ASME, series D, J. Basic Engg. 83 (1961) S. 95-108
- [6.34] Jazwinski, A.H.: Stochastic processes and filtering theory. New York: Academic Press 1970
- [6.35] Söderström, Th.; Gustavsson, L.; Ljung, K.: Identifiability conditions for linear systems operating in closed loop. Intern. J. Control 21 (1975) 2, S. 243-255
- [6.36] Beyer, J.: Parameterschätzverfahren zur Identifikation rückgekoppelter dynamischer Systeme. Diss. A, TH Ilmenau 1975
- [6.37] Bauer, B.: Parameterschätzverfahren zur on-line Identifikation dynamischer Systeme im offenen und geschlossenen Regelkreis. Diss. A, Ruhr-Universität Bochum 1977
- [6.38] Bretthauer, G.: Identifikation rückgekoppelter Mehrgrößensysteme im Frequenzbereich - Einheitliche Darstellung und Vergleich von Verfahren. Diss. B, TU Dresden 1983
- [6.39] Schulze, H.: Anwendung von Schätzverfahren für die Kenngrößen von Regelstrecken aufgrund von Messungen am geschlossenen Regelkreis. Diss. A, TU Braunschweig 1972
- [6.40] Thörn, H.; Krebs, V.: Identifikation im geschlossenen Regelkreis - Korrelationsanalyse oder Parameterschätzung? Regelungstechnik 23 (1975) 1, S. 17-19
- [6.41] Bretthauer, G.: Identifiability of linear systems. ZKI-Informationen, Berlin (1985) 1, S. 1/69
- [6.42] Bretthauer, G.: Über die Anwendung der statistischen Entscheidungstheorie zur Modellsélection in offenen und geschlossenen Regelkreisen. Diss. A, TU Dresden 1977
- [6.43] Göhring, B.: Erprobung statistischer Parameterschätzmethoden und Strukturprüfverfahren zur experimentellen Identifikation von Regelsystemen. Diss. A, Universität Stuttgart 1973
- [6.44] Müller, J.-A.: Auswahl von Methoden optimaler Komplexität. messen, steuern, regeln 30 (1987) 7, S. 302-306
- [6.45] Litz, L.: Reduktion der Ordnung linearer Zustandsraummodelle mittels modular Verfahren. Stuttgart: Hochschulverlag 1979
- [6.46] Diekmann, K.: Die Identifikation von Mehrgrößensystemen mit Hilfe rekursiver Parameterschätzverfahren. Diss. A, Ruhr-Universität Bochum 1981
- ## Sachwörterverzeichnis
- Abtastperiode/Abtastzeit 76
 -, Wahl 77, 238ff.
 Amplitudenfrequenzgang 172f.
 Amplitudenspektrum 77
 A-Optimalität 235
 A-priori-Information 190f.
 Autokorrelationsfunktion 81
 Autoleistungsdichtespektrum 88
 autoregressiver Prozeß (AR-Modell) 114ff.
 - der gleitenden Mittel (ARMA-Modell) 119ff.
 - der gleitenden Mittel mit einer Hilfsgröße (ARMAX-Modell) 113
 - integrierender Prozeß der gleitenden Mittel (ARIMA-Modell) 113
 Bayes-Schätzung 190f.
 Beobachter 177ff.
 -, Beobachteraufgabe 177
 -, Beobachtung durch ein Parallelmodell 178f.
 -, Luenberger-Beobachter 180f.
 Beobachternormalform 182
 Beratungssystem 19
 Bestimmtheitsmaß 49f.
 -, multiple 51
 -, partiell 50
 Bewertungsfunktion 54
 Binärsignal 170, 298f.
 Bodediagramm 172f.
 Chi-Quadrat-Verteilung 53
 Cholesky-Verfahren 199, 210
 Diagnose 19
 Differenzgleichung 271ff.
 Dirac-Impuls 76
 Dominanzmaß der Pole 326
 D-Optimalität 235
 Drehbarkeit von Versuchsplänen 236
 Dreieckswelle 170f.
 Echzeitidentifikation 215ff.
 Ein-/Ausgangsbeschreibung 152f.
 Ein-/Ausgangsmodell
 -, nichtparametrisches 152
 -, parametrisches 152
 Entfaltung 166f., 260f.
 -, mit Ausgleich 166
 -, ohne Ausgleich 166
 Ergodizität 80
 Erwartungswert 45
 Expertensystem 19
 Exzeß 46
 Faltungintegral 166, 257
 Faltungssumme 167
 Fehler 196ff.
 -, Ausgangsfehler 196
 -, Eingangsfehler 197
 -, verallgemeinerter Fehler 197
 Fehlergleichung 196
 Fensterfunktionen 97ff.
 -, Bartlett 97
 -, Parzen 97
 -, Tukey 97
 Filter 130ff.
 -, analoge 131
 -, digitale 132ff.
 -, Hochpaßfilter 144f.
 -, nichtrekursive 132
 -, rekursive 132
 -, Tiefpaßfilter 132f.
 Fishersche Informationsmatrix 234
 Fisher-Verteilung (F-Verteilung) 53
 Fourier-Koeffizienten 74
 Fourier-Reihenentwicklung 74
 Fourier-Transformation 77
 -, diskrete 79
 Frequenzgang 167ff.
 -, Amplitudenfrequenzgang 169f.
 -, Approximation durch Polynommodelle 174
 -, Approximation durch Zeitkonstantenmodelle 169
 -, Phasenfrequenzgang 169f.
 Frequenzgangmessung 168ff.
 -, Bestimmung aus Rechteck- und Dreieckswellen 170f.
 -, Komponentenverfahren 169
 -, Synchronaufzeichnungsverfahren 169
 Gewichtsfunktion 164ff.
 -, Entfaltung mit Ausgleich 260f.
 -, Entfaltung ohne Ausgleich 166ff.
 Gleichungsfehler (s. verallgemeinerter Fehler) 197
 G-Optimalität 236
 Gradientenverfahren 199f., 216ff.
 Hadamard-Matrix 305
 Hammerstein-Modell 259f., 292f.
 Häufigkeit 41
 -, absolute 41
 -, relative 41

- Hilfsvariablen 283ff.
- Hilfsvariablen-Schätzung 283ff.
- direkte Methode 283
- rekursive Methode 287
- Hypothesen 62
- Alternativhypothese 62
- Nullhypothese 62
- Identifikation 32f.
- Parameteridentifikation 33f.
- Zustandsidentifikation 34f.
- Impulsantwort 165ff.
- Impulsfunktion 164ff.
- Informationsmatrix 234
- Irrtumswahrscheinlichkeit 52
- iterative Schätzverfahren 199f.
- gradientenfreie Verfahren 199
- Gradientenverfahren 199
- Zufallssuchverfahren 199
- Kalman-Filter 317f.
- Kammlinie 206
- Kammlinienregression 206ff.
- Konfidenzintervall 67
- Korrelationsfunktion 81f.
- Autokorrelationsfunktion 81
- experimentelle Bestimmung 84
- Kreuzkorrelationsfunktion 83
- Korrelationskoeffizient 49
- einfacher 49
- empirischer 60
- kritischer 67
- multipler 50
- partieller 50
- Korrelationsmatrix 51
- Korrelationsverfahren 96f.
- Korrelatoren 84
- Kostenfunktion 190
- Kovarianz 48
- Kovarianzmatrix 49
- der Störungen 230f., 315f.
- der Störung auf den Zustand 315f.
- des extrapolierten Zustandes 315f.
- des Fehlers 211
- des Zustandsfehlers 316f.
- Kreuzkorrelationsfunktion 83
- Kreuzleistungsdichtespektrum 90
- Laplace-Integral 78
- Laplace-Transformation 78
- diskrete 79
- Leistungsdichtespektren 88f.
- Autoleistungsdichtespektrum 88
- experimentelle Bestimmung 91f.
- Kreuzleistungsdichtespektrum 89
- Lernfolge 325
- Levenberg-Marquard-Verfahren 214
- Likelihood-Funktion 192
- Luenberger-Beobachter 180f.

- F -Test 65
- t -Test 64
- z -Test 63
- χ^2 -Test 64
- Prüfverteilung 52
- pseudostochastische binäre Testsignale (PRBS-Folge) 298f.
- Rampenfunktion 76
- Randverteilung 47
- Rauschen 82
- farbiges 82
- weißes 82
- Rechteckimpuls 76
- Rechteckwelle 74, 170f.
- Regression 202ff.
- rekursive Regression 222ff.
- gewichtete 225
- ungewichtete 222
- Relaxation 218f.
- Restquadratsumme 204
- Reststreuung 204
- Schätzangabe 189
- direkte Lösung 190ff., 198, 201f.
- iterative Lösung 199f.
- rekursive Lösung 200f.
- Schätzmethoden 189ff.
- Aufgabe 189
- Bayes-Schätzung 190f.
- Markov-Schätzung 192f.
- Maximum-Likelihood-Schätzung 191f.
- Regression 193f.
- verallgemeinerte Regression 193
- Schätzung 194ff.
- asymptotische 194
- beste lineare 204
- effektive 196
- erwartungstreue 195
- konsistente 195
- unverschobene 194
- verschobene 194
- Schiefte 46
- Signal 72f.
- aperiodisch 75
- exponentiell 73
- harmonisch 73
- periodisch 74
- Signalanalyse 34
- experimentelle 35
- theoretische 35
- Signalaufbereitung 125ff.
- Bereichstest 127
- Bilanztest 127
- Differenztest 127
- Filterverfahren 130ff.
- Korrekturverfahren 129f.
- Signalfolgen 297ff., 301ff.
- binär 298f.
- mehrwertige 301ff.
- optimale 303ff.
- pseudostochastisch 298ff.
- Signalmodell 72ff., 103ff.
- deterministisches 72f., 105ff.
- kombiniertes 121ff.
- stochastisches 112ff.
- Signifikanztest 205
- Spektralanalyse 88f.
- Spektrum 77
- Amplitudenspektrum 77
- Phasenspektrum 77
- Sprungantwort 154f.
- Sprungfunktion 75
- Standardabweichung 45
- Stationarität 80
- Prüfung 128ff.
- Sternpunktversuch 248f.
- Steuerung 19
- adaptive 20
- operative 20
- optimale 20
- Stichprobe 51
- Stichprobenfunktion 51
- Stichprobenmittel 51
- Stichprobenvarianz 51
- Stichprobenverteilung 51
- stochastische Approximation 221f.
- stochastischer Prozeß 80
- Störung 32f., 315f.
- Ausgangsstörung 315
- Zustandsstörung 315
- Streuung 53
- Strukturprüfung 324ff.
- Dominanztest 326
- Fehlerfunktionstest 325
- F -Test 325
- Polynomtest 325
- Signalfehlertest 325
- Student-Verteilung (t -Verteilung) 52
- Suchfilterverfahren 92
- Suchfrequenzverfahren 93
- Suchverfahren 199ff.
- gradientenfreie 199f.
- Gradientensuchverfahren 199f.
- Zufallssuchverfahren 199f.
- Systemanalyse 34
- experimentelle 35
- theoretische 35
- Systembeschreibung 152ff.
- nichtparametrisch 152
- parametrisch 152
- Systemmatrix 34, 177f., 314f.
- Systemmodell 33f.
- Ein-/Ausgangsmodell 34
- Hammerstein-Modell 259f., 275
- Gewichtsfunktionsmodell 164ff., 256ff.
- Volterra-Reihen-Modell 256ff.
- Wiener-Modell 259f., 276f.
- Zustandmodell 34
- Systemzustand 34, 177f., 314f.

- Taylor-Reihe 256f.
- Teilfrequenzgänge 172f.
- Teilmodell 327f.
- Testgrößen 51
- Testsignale 153 ff.
- , aperiodische 153
- , Dreieckswellen 153
- , optimale 303f.
- , periodische 153
- , pseudostochastische 153, 297ff.
- , Rechteckswellen 153
- , stochastische 153
- Testverteilungen 52f.
- , F -Verteilung 53
- , t_2 -Verteilung 52
- , χ^2 -Verteilung 53
- , χ^2 -Verteilung 53
- Totzeitermittlung 156ff.
- Trend 105f., 128f.
- t -Test 64
- t -Verteilung (Student-Verteilung) 52
- Übergangsfunktion 155ff.
- , Auswertung anhand charakter. Funktionswerte 155ff.
- , Ermittlung des Frequenzganges aus der Übergangsfunktion 163f.
- Übertragungsfaktor 154f.
- , integraler 155
- , proportionaler 154
- Überwachung 19
- Varianz 46
- Variationsbreite 53
- Variationskoeffizient 53
- verallgemeinerte Regression 193, 209f.
- , direkte 193, 209f.
- , rekursive 229f.
- Vergessen 142, 225f.
- Vergessensfaktor 143
- Verstärkungsfaktor 154f.
- Versuchsbereich 234f.
- , für lineare Systeme 234
- , für nichtlineare Systeme 247f.
- Versuchsplan 234f.
- , drehbarer 236f.
- , drehbar zentraler 250f.
- , gesättigter 242f.
- , konkreter 234
- , orthogonaler 236f.
- , orthogonal zentraler 248f.
- , unvollständiger 240f.
- , vereinfachter zentraler 251f.
- , vollständiger 237ff.
- , zusammengesetzter 247ff.
- Versuchsplanung 232ff.
- Verteilung 43
- , Binomialverteilung 44
- , Exponentialverteilung 44
- , Gleichverteilung 44
- , Normalverteilung 44
- , Poissonverteilung 44
- Verteilungsdichtefunktion 43
- , diskrete 43
- , empirische 54
- , stetige 43
- Verteilungsfunktion 43
- , diskrete 43
- , empirische 54
- , stetige 43
- Volterra-Reihe 256ff.
- , Kerne der Volterra-Reihe 256
- Vorhersage 21
- Wahrscheinlichkeit 42
- , bedingte 42
- , Verbundwahrscheinlichkeit 47
- Wendetaugentenkonstruktion 158f.
- Wichtung 225ff.
- , blockweise 228
- , exponentielle 227
- , gezielte 228
- Wichtungsfenster 96
- , Bartlett 96
- , Parzen 96
- , Tukey 96
- Wichtungsmatrix 210f.
- Wiener-Chintschinsche Beziehung 100
- Wiener-Modell 267f., 276f.
- Yule-Walker-Gleichungen 115
- Zeitreihe 103ff.
- z -Test 63
- z -Transformation 79
- Zufallsgröße 42
- , diskrete 43
- , eindimensionale 43
- , mehrdimensionale 46
- , stetige 43
- Zustand 314ff.
- , extrapolierter 316f.
- , geschätzter 315f.
- Zustandsbeschreibung 177f., 315f.
- Zustandsfehler 315
- Zustandsschätzung 314ff.
- , aus den gemessenen Ausgängen 316ff.
- , aus den gemessenen Ein- und Ausgängen (Kalman-Bucy-Filter) 318ff.
- Zustandsvektor 315